

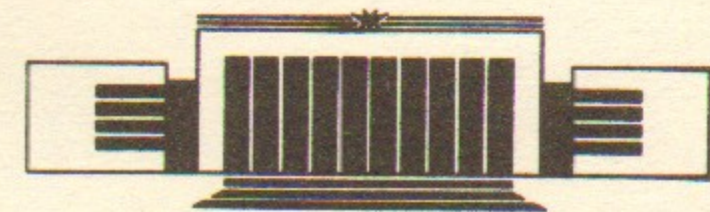


У
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Д. Букин, Н.А. Грозина

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ
ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ
ТЯЖЕЛЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

ПРЕПРИНТ 87-9



НОВОСИБИРСК

Моделирование флуктуаций ионизационных потерь
тяжелых заряженных частиц

А.Д. Букин, Н.А. Грозина

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Предложен способ моделирования процесса ионизационных потерь тяжелых заряженных частиц, дающий максимальную погрешность 1% в интегральной функции распределения вероятности.

The Simulation of the Fluctuations
of Ionization Loss of Heavy Charged Particles

A.D. Bukin, N.A. Grozina

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, USSR

АБСТРАКТ

The method of simulation of ionization loss of heavy charged particles is suggested. Its accuracy is not worse than 1% in the integral probability distribution.

1. ВВЕДЕНИЕ

В физике высоких энергий обработка экспериментальных данных, как правило, включает в себя детальное моделирование на ЭВМ изучаемого процесса. В большинстве случаев необходимо моделировать не только столкновения ускоренных частиц, но и взаимодействия продуктов реакции с веществом детектора. Требуемая точность моделирования этих процессов составляет около 1%. Одним из таких процессов является ионизация атомов.

Обычно, при моделировании, потери энергии частицы на ионизацию разбивают на две части по отношению к некоторому установленному пороговому значению η . Если энергия ϵ возбуждения атомного электрона больше η , то пренебрегают связью электрона с атомом, включая вылетевший электрон в каскад частиц на общих основаниях. Процессы с $\epsilon < \eta$ не моделируют как точечные взаимодействия, а учитывают в виде непрерывных ионизационных потерь.

Данная работа содержит в себе практический способ точного моделирования ионизационных потерь.

2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ

Существует много способов моделировать ионизационные потери. Простейший из них — генерировать только среднее значение, пренебрегая флуктуациями, тогда дисперсия равна 0. Такой способ можно применять в случае электромагнитных ливней большой энергии, где флуктуации энергии, выделенной в счетчике, опреде-

ляются в основном флуктуациями числа частиц в ливне. Таким образом моделируются потери в известных программах EGS (SLAC) и GEANT (CERN).

Несколько лучше, на наш взгляд, моделировать флуктуации с помощью какого-либо колоколообразного распределения, например, Гауссова, как в программе UNIMOD [1], причем среднее и дисперсию этого распределения выбрать равными истинным. Тогда среднее и дисперсия зарегистрированной в счетчике амплитуды всегда моделируются правильно, а форма распределения воспроизводится тем точнее, чем ниже пороговая энергия η . Но на практике такой способ тоже оказывается неудовлетворительным, так как с понижением порога резко возрастает количество моделируемых частиц в ливне, что приводит к сильному увеличению времени счета.

Вычислению функции распределения вероятностей по потерям энергии посвящена работа Вавилова [2]. Точно решая кинетическое уравнение Ландау [3], Вавилов получил формулу, которую можно записать так:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{\kappa}{2\pi i} e^{\kappa(1+C\beta^2)} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp(\lambda_1 z + \kappa f(z)) dz, \quad (1)$$

где a — правее всех особенностей подынтегрального выражения,

$$f(z) = (z + \beta^2) \varphi(z) - e^{-z},$$

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{1 - e^{-u}}{u} du - C,$$

$$\lambda_1 = \kappa(\lambda + \ln \kappa),$$

$C = 0.577$ — константа Эйлера. Функция зависит от трех безразмерных параметров β , κ , λ : $\beta^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ — характеристика скорости;

$\kappa = k \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \frac{Z}{A} \rho x$ — характеристика вещества, пропорциональная толщине слоя x , где A — атомный вес, Z — порядковый номер, ρ — плотность вещества в г/см³, $k = \frac{\pi r_0^2}{M}$, где r_0 — классический радиус электрона, M — атомная единица массы, $k \approx 0.1502$ см²/г;

$\lambda = \frac{\Delta - \alpha x}{\varepsilon_m \kappa} - 1 - \beta^2 + C - \ln \kappa$, $\alpha x = 2\kappa \varepsilon_m \left(\ln \frac{\varepsilon_m}{I(Z)} - \beta^2 \right)$ — средняя ве-

личина потерь, где I — средний ионизационный потенциал, $\varepsilon_m = \frac{2m_e c^2 \beta^2}{1 - \beta^2}$ — максимально кинематически возможная передача энергии за одно столкновение, Δ — величина потерь. Графики при некоторых κ и β^2 приведены на рис. 1. Среднее и дисперсия этого распределения вычисляются аналитически:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= C - 1 - \ln \kappa - \beta^2, \\ \sigma^2 &= \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

В пределе тонких слоев $\kappa \rightarrow 0$ функция Вавилова переходит в распределение Ландау $dP_L/d\lambda$ [3], среднее и дисперсия которого бес-

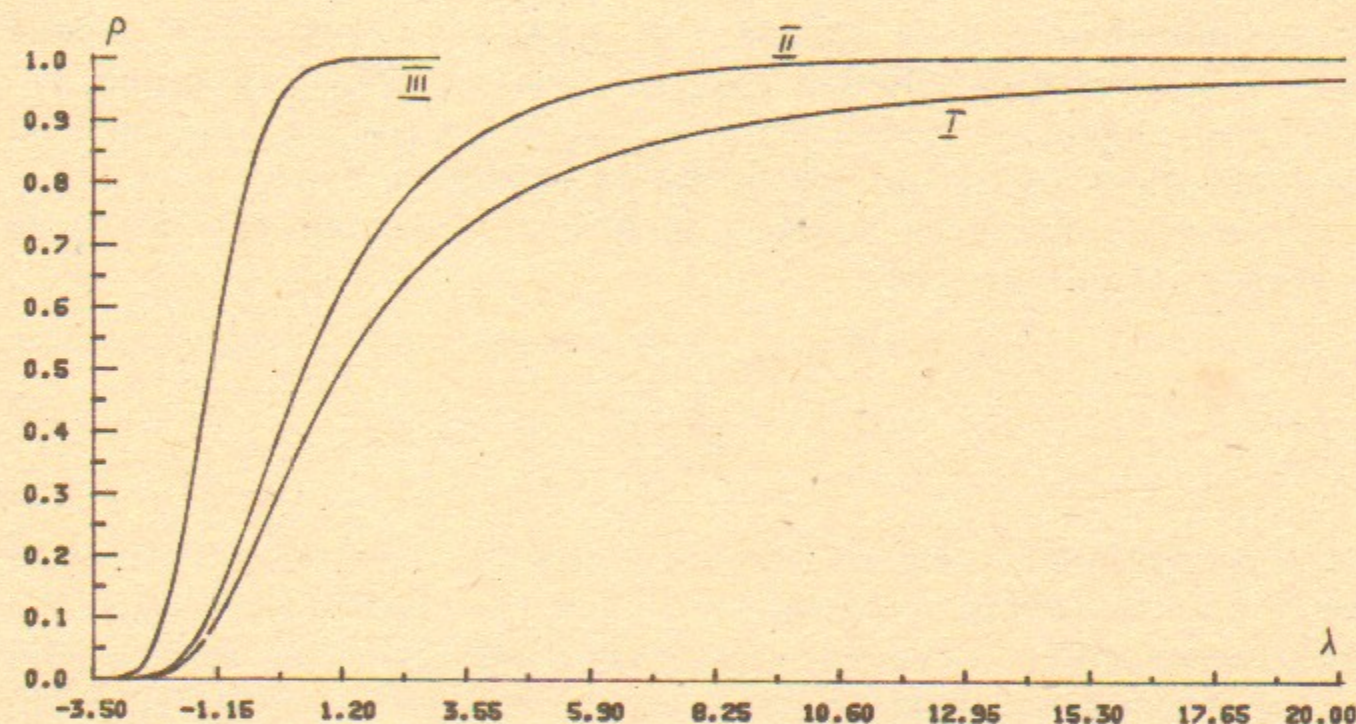


Рис. 1. Интегральное распределение Вавилова при $\beta^2 = 0.8$: кривая I — $\kappa = 0.01$; кривая II — $\kappa = 0.1$; кривая III — $\kappa = 1.0$.

конечны. Следует заметить, что распределение Ландау само по себе могло бы применяться для приближенного моделирования. Однако, из-за своих характеристик (λ_0 и σ^2) оно не дает требуемой точности в случае многократного суммирования случайных потерь в счетчике. В пределе $\kappa \gg 1$ распределение (1) становится гауссовым $dP_G/d\lambda$ с характеристиками (2). Применять для точного моделирования функцию (1) в том виде, в каком она получена Вавиловым, тоже нельзя, потому что в ней никак не учитывается величина пороговой энергии η .

Если аналогично работе [2] провести вывод формулы (1) с

учетом η , то оказывается, что введение ее не приводит к увеличению числа параметров, а сводится к переопределению уже имеющих. Новые параметры κ' , $\beta^{2'}$ выражаются через старые: $\kappa' = \frac{\kappa}{r}$,

$\beta^{2'} = r\beta^2$, где $r = \min\left\{\frac{\eta}{\varepsilon_m}, 1\right\}$, $\lambda_1' = \kappa'(\lambda + \ln \kappa')$. То есть для моделирования флуктуаций ионизационных потерь достаточно генерировать распределение Вавилова с заменой в нем величин κ , β^2 , λ_1 на штрихованные.

3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИИ

Требования к моделированию физических экспериментов можно сформулировать в двух словах так: каждый процесс как можно быстрее и точнее. Распределение, которое мы обсудили выше, гарантирует хорошую точность при любом разумном значении η . Следовательно, не нужно искусственно понижать порог.

Однако практически точное вычисление функции (1), а также ее интеграла по потерям

$$P(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{dP}{d\lambda} d\lambda \quad (3)$$

очень трудоемко и требует большого времени ЭВМ — на вычисление одного значения функции требуется около 10 секунд (здесь и далее все времена приводятся для ЕС-1061). К тому же для эффективного моделирования надо уметь вычислять не $P(\lambda)$, а обратную к ней функцию $\lambda(P)$, где P — вероятность. В CERN (г. Женева) была предпринята попытка ускорить вычисление функции (1) путем обрезания «хвостов» дифференциального распределения и разложения основной части в ряд Фурье, который затем почленно интегрируется для вычисления (3).

Программа состоит из двух частей. Первая насчитывает коэффициенты ряда Фурье, при каждом κ и β^2 новые, время исполнения 50 мс. Вторая часть вычисляет значение функции, суммируя ряд, время на вызов в одной точке 0.5 мс. Вычисление коэффициентов ряда Фурье для обратной функции 8000 мс. Видно, что время вычисления оставляет желать лучшего и для набора большой статистики не годится.

Любая интерполяция функции $\lambda(P)$ в пространстве трех пара-

метров κ' , $\beta^{2'}$, P (в дальнейшем штрихи опускаются) представляет существенную сложность, так как полное число узлов интерполяции равно произведению числа узлов по каждой из трех осей. Для получения точности интерполяции хотя бы 1% было бы не достаточно всей оперативной памяти современной ЭВМ для размещения коэффициентов интерполяции. Для того чтобы стало возможным интерполирование функции $\lambda(P)$ при не слишком большом числе узлов, необходимо ослабить зависимость λ от своих параметров.

Ослабить зависимость от толщины слоя κ можно заменой λ переменной $\tilde{\lambda}$:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda - \tilde{\lambda}_0}{\tilde{\sigma}}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_0 &= C - 1 - \beta^2 - \ln(\kappa + e^{C-1-\beta^2-\lambda_L}); \\ \tilde{\sigma} &= \sqrt{\frac{1-\beta^2/2}{\kappa + \frac{1-\beta^2/2}{\sigma_L^2}}}; \end{aligned} \quad (5)$$

λ_L определяется из уравнения $P_L(\lambda_L) = 1/2$: $\lambda_L \approx 1.3$;

$$\sigma_L = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{dP_L(\lambda_L)}{d\lambda}}: \quad \sigma_L \approx 3.0.$$

Этот выбор продиктован следующими соображениями: при $\kappa \gg 1$, когда распределение становится Гауссовым, параметры $\tilde{\lambda}_0$ и $\tilde{\sigma}$ (5) совпадают с λ_0 и σ (2), и функция распределения вообще перестает зависеть от κ . При $\kappa \rightarrow 0$, когда распределение имеет вид Ландау, параметры $\tilde{\lambda}_0$ и $\tilde{\sigma}$ (5) превращаются в λ_L и σ_L . Они определены так, что $P(\tilde{\lambda})$ и $\frac{dP(\tilde{\lambda})}{d\lambda}$ в точке $\tilde{\lambda} = 0$ имеют то же значение, что и в противоположном предельном случае $\kappa \gg 1$, именно $1/2$ и $1/\sqrt{2\pi}$. В переходной области $\kappa \sim 1$ форма интерполирующих функций (4) выбрана так, что P и $\frac{dP}{d\lambda}$ при $\tilde{\lambda} = 0$ приближенно сохраняют те же значения, что обеспечивает возможность хорошей аппроксимации в области $\tilde{\lambda} \approx 0$.

Для того чтобы можно было интерполировать функцию распределения $P(\lambda)$ при всех κ от 0 до ∞ , надо вместо κ ввести переменную $\tilde{\kappa}$, которая менялась бы в конечных пределах. Поскольку после замены (4) зависимость λ от κ при $\kappa \rightarrow \infty$ исчезает, функция

λ будет плавно вести себя, когда $\tilde{\kappa}$ стремится к соответствующему значению $\tilde{\kappa}_\infty$. Выберем интервал изменения $\tilde{\kappa}$ $[0, 1]$, $\tilde{\kappa}(x) = 0$ при $x=0$ и равно 1 при $x=\infty$. Кроме того, переменную $\tilde{\kappa}$ можно использовать еще для того, чтобы улучшить поведение функции при $\tilde{\kappa} \rightarrow 0$ и $\tilde{\kappa} \rightarrow 1$. Вычтем из нее предельные случаи $\tilde{\lambda}_G$ и $\tilde{\lambda}_L$, соответствующие распределениям Гаусса и Ландау, с весами $\tilde{\kappa}$ и $1 - \tilde{\kappa}$.

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\kappa} \tilde{\lambda}_G(P) + (1 - \tilde{\kappa}) \tilde{\lambda}_L(P) + \varphi(P). \quad (6)$$

Функция $\tilde{\lambda}_L(P)$ получена путем интерполирования функции Ландау одномерным сплайном, так что она в основной области совпадает с точной, а при $P \rightarrow 1$ продолжается по касательной и $\tilde{\lambda}_L(1) = 86$. Цель такой «порчи» функции Ландау будет объяснена ниже.

Остаток φ будет равен 0 в обоих предельных случаях $\tilde{\kappa} = 0$ и $\tilde{\kappa} = 1$. Кроме того, выбор переменной $\tilde{\lambda}$ произведен так, что при $P = 1/2$ $\varphi \approx 0$ и $\frac{d\varphi}{dP} \approx 0$ для всех x и β^2 . Переменная $\tilde{\kappa}$ была выбра-

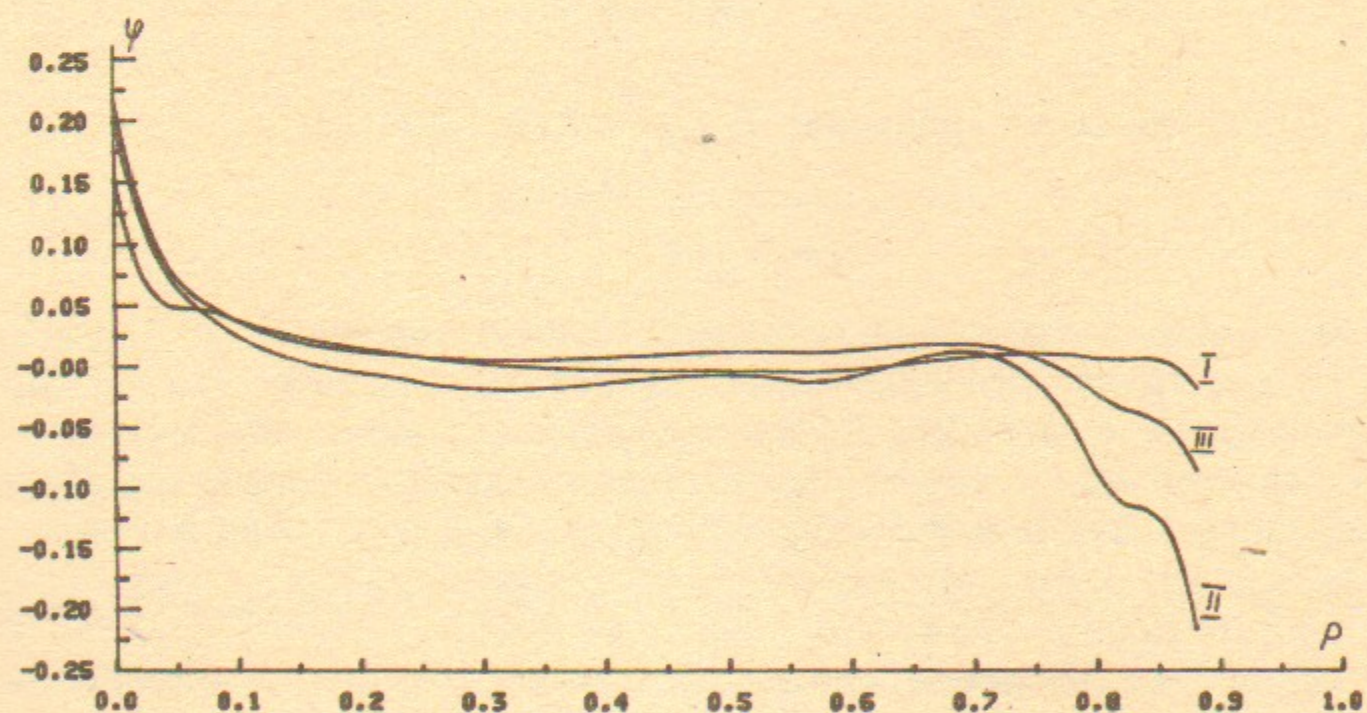


Рис. 2. Остаток φ при $\beta^2 = 0.5$: кривая I — $\kappa = 0.01$; кривая II — $\kappa = 0.1$; кривая III — $\kappa = 1.0$.

на таким образом, что $\varphi \approx 0$ в точках $P = 0.2$ и $P = 0.8$ при всех x и β^2 . Всем этим условиям хорошо удовлетворяет

$$\tilde{\kappa} = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa + 1/2}}. \quad (7)$$

Итак, остаток φ является очень плавной функцией, малой по модулю везде, кроме приграничных значений P . Графики φ при некоторых x и β^2 приводятся на рис. 2.

Функция $\varphi(P, \tilde{\kappa}, \beta^2)$ интерполируется кубическим сплайном дефекта 2 (в узлах непрерывны только функция и первая производная). Параметризация сплайна описана в Приложении 1.

Во всей области P, β^2 и x функцию $\lambda(P)$ удалось аппроксимировать с точностью 0.01 в P (т. е. неточность интерполяции λ , пересчитанная на сдвиг P , составляет 1%). При этом полное количество узлов $4 \times 7 \times 7 = 196$, в каждом узле 4 коэффициента, занимаемая область памяти $196 \times 4 \times 4 \approx 3$ килобайт. Координаты узлов и коэффициенты в них приведены в Приложении 2. В областях $(0, 0.01]$ и $[0.99, 1)$ функция экстраполирована из основной области. Графики точной функции $\lambda(P)$ и ее приближения в областях $(0, 0.01]$ и $[0.99, 1)$ приведены на рис. 3, а и б.

4. ПОДГОНКА ДИСПЕРСИИ

При $\kappa > 1$ относительное отклонение дисперсии, вычисленной путем интегрирования λ по интерполированной функции, от истинной (2) составляет меньше 1%. Столь малое отклонение объясняется тем, что в выражении (6) используется «испорченная» функция Ландау. Если бы применялась асимптотика точной функции $1/(1-P)$, то при любом $\tilde{\kappa} \neq 1$, дисперсия была бы бесконечна. Узлы и коэффициенты для этой функции приведены в Приложении 3.

Отклонение $\tilde{\lambda}$ от истинного (2) при $\kappa > 1$ также составляет малые доли процента. При $\kappa \rightarrow 0$ растет отклонение $\tilde{\lambda}$ и σ^2 от истинных, стремясь к 100%. Для того, чтобы правильно описывать дисперсию при малых κ , были приняты дополнительные меры.

Детальное исследование функции (1) показало, что при $\kappa \ll 1$ ее асимптотическое поведение имеет два режима:

$$\frac{dP}{d\lambda} \sim \begin{cases} \frac{1 - \kappa \beta^2 \lambda}{\lambda^2}, & 1 \ll \lambda \ll \frac{1}{\kappa} \\ \exp(-\lambda [\ln \lambda + o(\ln \lambda)]), & \lambda \gg \frac{1}{\kappa} \end{cases} \quad (8)$$

Область перехода между ними $\lambda \sim \frac{1}{\kappa}$, при $\kappa \rightarrow 0$ точка перехода устремляется в бесконечность и налицо обычная асимптотика рас-

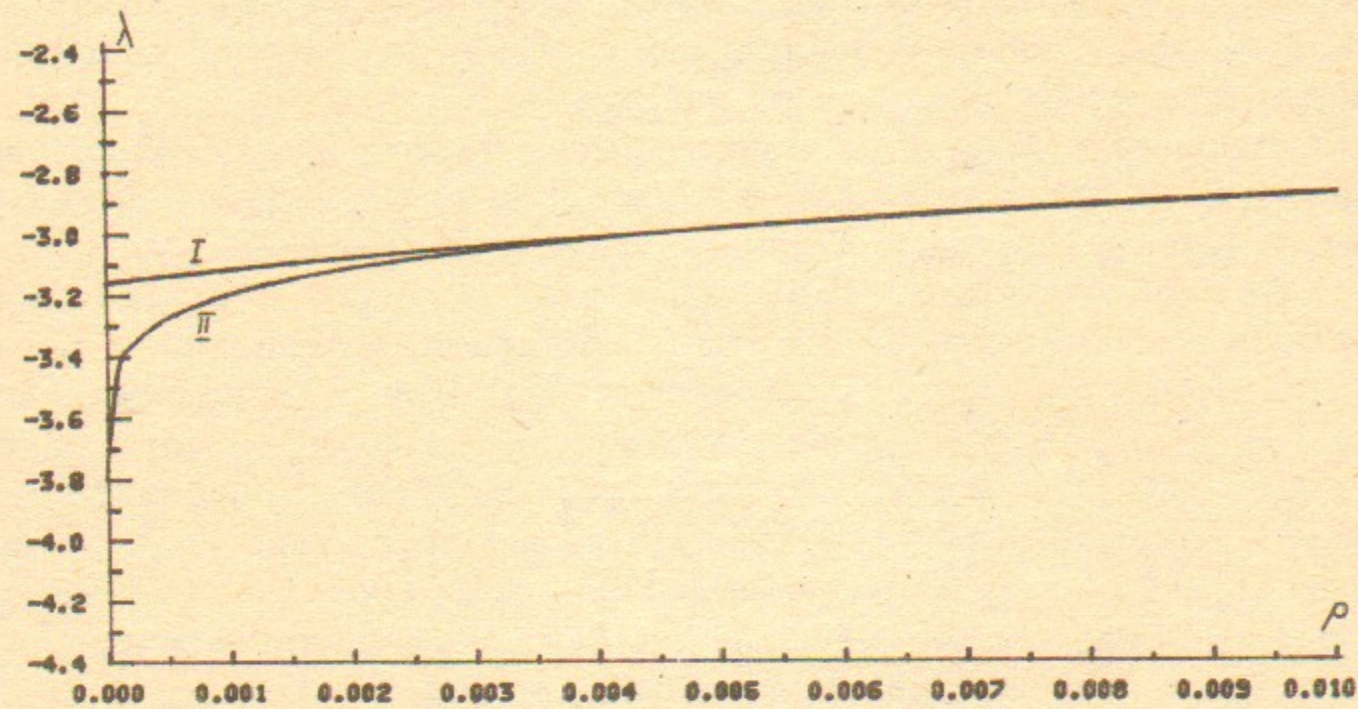


Рис. 3а. $\kappa=2$, $\beta^2=0.5$, $P \in (0, 0.01]$, кривая I — точная функция $\lambda(P)$, кривая II — моделируемая $\lambda(P)$.

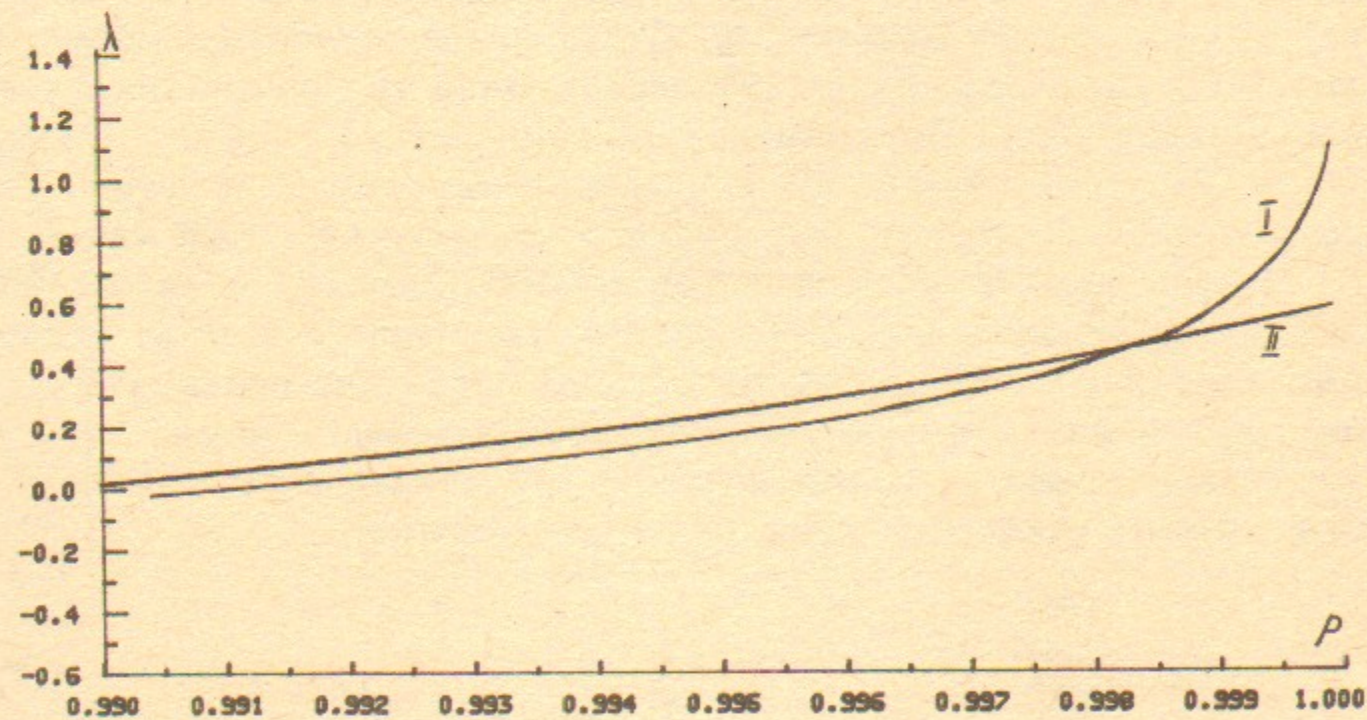


Рис. 3б. $\kappa=2$, $\beta^2=0.5$, $P \in [0.99, 1.0)$, кривая I — точная функция $\lambda(P)$, кривая II — моделируемая $\lambda(P)$.

предела Ландау. При $\kappa \sim 1$ первый режим практически исчезает. Для получения правильной дисперсии можно воспользоваться моделью:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1 - \kappa \beta^2 \lambda}{\lambda^2}, & 1 \ll \lambda < \frac{1}{\kappa} \\ 0, & \lambda > \frac{1}{\kappa} \end{cases} \quad (9)$$

Это приводит к уравнению:

$$z = \beta^2 \ln u + \frac{1}{u} - 1, \quad (10)$$

где $u = \kappa \lambda$, $z = \frac{1-P}{\kappa}$.

Приближенное решение уравнения (10) взято в виде

$$\lambda_{\text{mod}} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{A_1}{z+z_1} + \frac{A_2}{z+z_2} \right), \quad (11)$$

где z_1 и z_2 — свободные параметры, а A_1 и A_2 выбраны из условий правильного предельного поведения функции:

$$A_1 = \frac{z_1(1-z_2)}{z_1-z_2}, \quad A_2 = \frac{z_2(1-z_1)}{z_2-z_1}. \quad (12)$$

Переход от сплайна к приближению (11) осуществляется прямым переходом с ветви (6) на ветвь (11) в точке их пересечения $1-\delta$, $\delta \sim 0.01 \div 0.02$. При $\kappa \rightarrow 0$ точка $1-\delta$ стремится к точке пересечения функции (6), вычисляемой при $\bar{\kappa}=0$, и асимптотики распределения Ландау $1/(1-P)$. С учетом этого выбираются z_1 и z_2 из условий правильности среднего $\bar{\lambda}$ и среднеквадратичного $\bar{\lambda}^2$.

Первое условие:

$$\int_0^{1-\delta} \lambda_{\text{spl}} dP + \int_{1-\delta}^1 \lambda_{\text{mod}} dP = C - 1 - \beta^2 - \ln \kappa. \quad (13)$$

Отсюда уравнение для z_1 и z_2 :

$$\frac{z_1(1-z_2) \ln z_1 - z_2(1-z_1) \ln z_2}{z_1 - z_2} = \ln \delta - C + 1 + \beta^2 + \int_0^{1-\delta} \lambda_{\text{spl}} dP. \quad (14)$$

Второе условие:

$$\int_0^{1-\delta} \lambda_{\text{spl}}^2 dP + \int_{1-\delta}^1 \lambda_{\text{mod}}^2 dP = \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) + (C - 1 - \beta^2 - \ln \kappa)^2$$

или

$$\frac{1}{\kappa} \int_0^{\delta/\kappa} \left(\frac{A_1}{z+z_1} + \frac{A_2}{z+z_2} \right)^2 dz = \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) + (C - 1 - \beta^2 - \ln \kappa)^2 - \int_0^{1-\delta} \lambda_{\text{spl}}^2 dP. \quad (15)$$

Видно, что нельзя найти такие z_1 и z_2 , чтобы уравнение (15) выполнялось бы при всех κ . Но в рассматриваемом пределе $\kappa \rightarrow 0$, достаточно приравнять главные члены при $1/\kappa$, чтобы получить требуемую точность:

$$\frac{z_1(1-z_2)^2 - z_2(1-z_1)^2}{(z_1-z_2)^2} - \frac{2z_1(1-z_1)z_2(1-z_2)}{(z_1-z_2)^3} \ln \frac{z_1}{z_2} = 1 - \frac{\beta^2}{2}. \quad (16)$$

Совместное решение уравнений (14) и (16) позволяет найти z_1 и z_2 в зависимости от β^2 . Их поведение хорошо описывается формулами

$$z_1 = \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \cdot F_1(\beta^2), \quad z_2 = \exp\left(\frac{2F_2(\beta^2)}{\beta^2}\right), \quad (17)$$

где $F_1(\beta^2)$ — сплайн, колеблющийся около 1, а $F_2(\beta^2)$ — сплайн, колеблющийся около L , где $L = \ln \delta - C + 1 + \int_0^{1-\delta} \lambda_{\text{spl}} dP$. Узлы и коэффициенты сплайнов F_1 и F_2 приводятся в Приложении 4.

Как уже говорилось, переход от сплайновой функции (6) к функции (11) происходит в точке их пересечения, которая расположена на краю интервала по P . Такой переход обеспечивает непрерывность и монотонность окончательной функции $\lambda(P)$ (см. рис. 4), неизбежный излом же очень незначителен, так как в окрестности точки пересечения эти функции очень похожи. Область перехода с ветви (6) на ветвь (11) изображена на рис. 4а.

Отметим, что введя асимптотическое поведение (11) таким образом, мы не испортим ничего из достигнутого ранее, а два одномерных сплайна по 5 узлам не внесут больших затрат памяти.

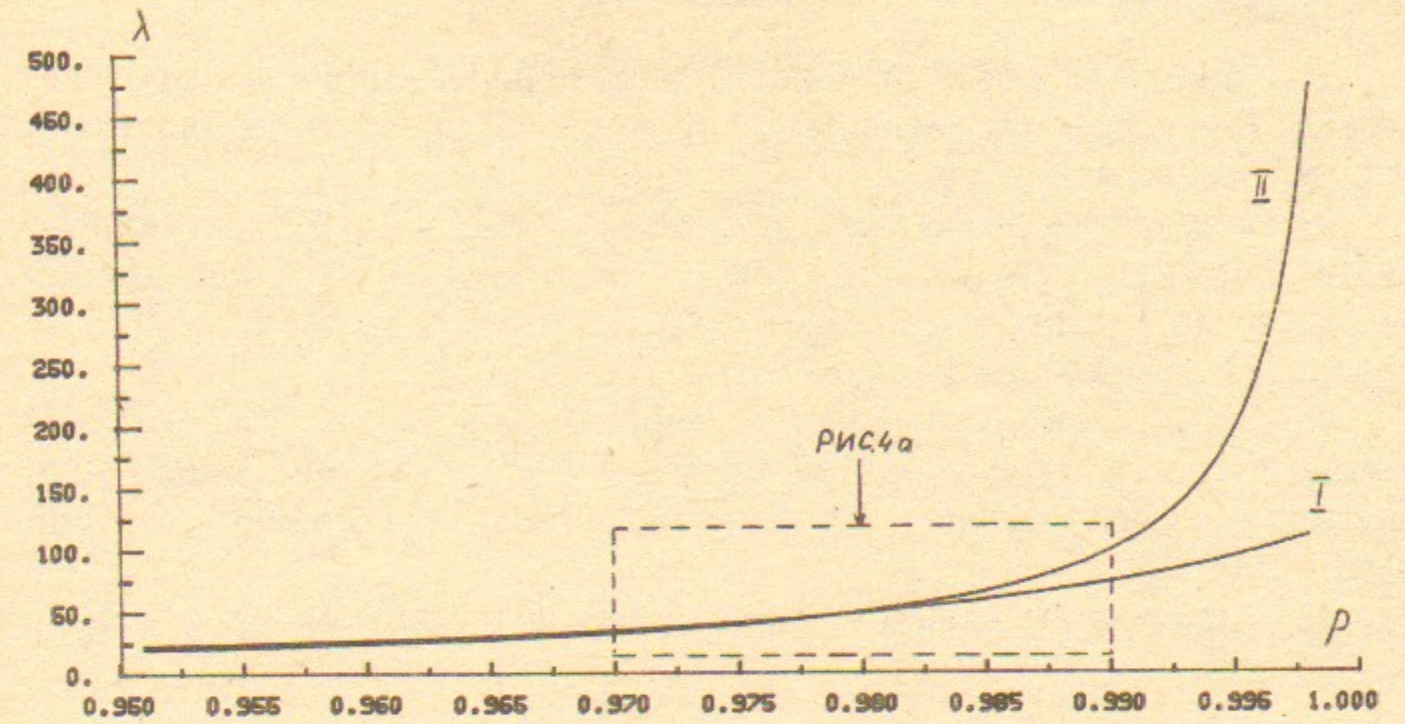


Рис. 4. $\kappa = 10^{-5}$, $\beta^2 = 0.5$, $P \in (0.95, 1)$, кривая I — сплайновая $\lambda(P)$, кривая II — асимптотическая $\lambda(P)$.

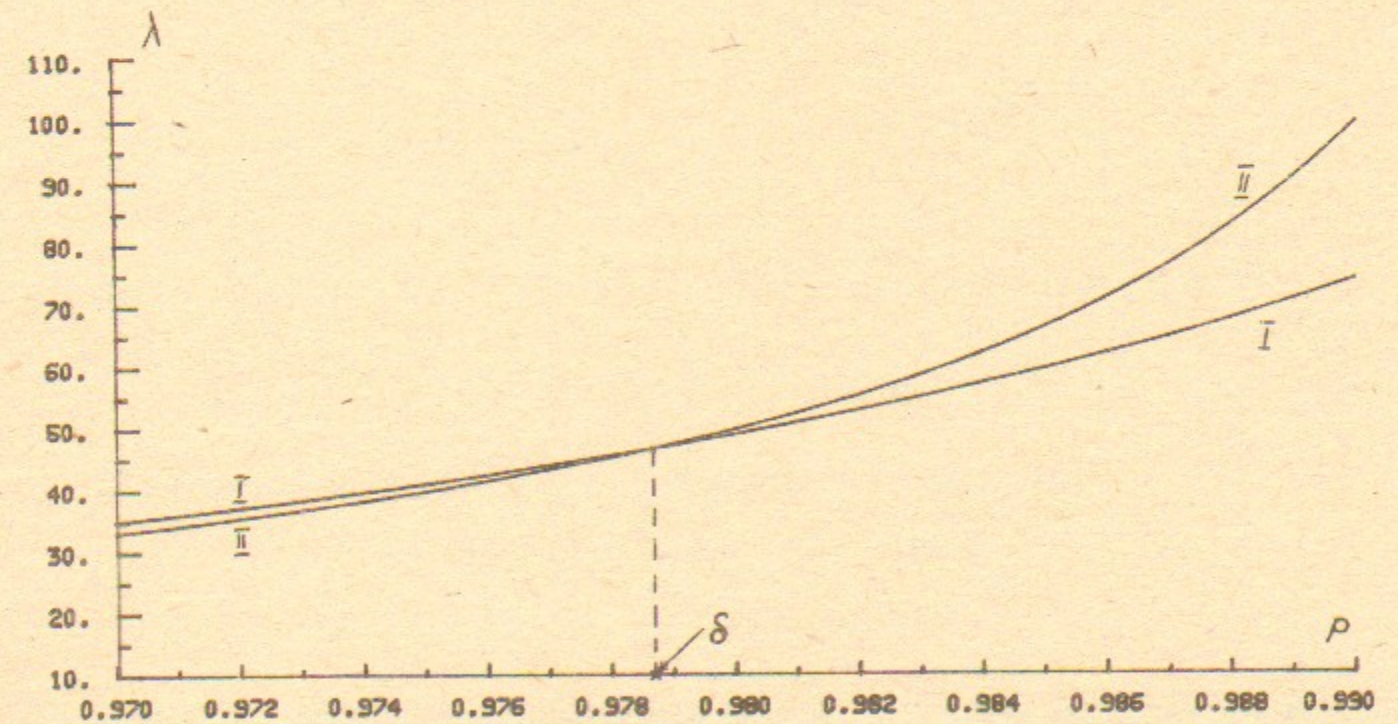


Рис. 4а. Увеличенная деталь рис. 4 — окрестность точки пересечения кривых δ . Слева от δ берется первая кривая, а справа — вторая.

1. Ошибка в форме распределения, пересчитанная на отклонение в P , составляет меньше 0.5% в основной области, достигая 1% в считанных точках.

2. Отклонение дисперсии от истинной при $\kappa < 10^{-4}$ составляет доли процента, стремясь к нулю с уменьшением κ ; в переходной области $10^{-4} < \kappa < 1$ оно около 1%, достигая максимально 5%; при $\kappa > 1$ отклонение меньше 1%.

3. Отклонение среднего от истинного: при $\kappa < 10^{-4}$ составляет меньше 1%; в переходной области $10^{-4} < \kappa < 0.1$ оно около 1%, достигая максимально 4%; при $\kappa > 0.1$ составляет меньше 0.01—0.001%.

4. Эффективное время на один вызов функции меньше 0.1 мс.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

Приводимый метод не зависит от числа измерений области определения аппроксимируемой функции, однако он не дает непрерывности второй производной, и поэтому, в одномерном случае способ описания сплайна отличается от общепринятого.

Мы хотим построить сплайн в некоторой области U n -мерного параметрического пространства. Эта область разбита на «кубики» узлами с координатами U_{kj_k} , первый индекс $k=1\dots n$ фиксирует координату, а второй $j_k=1\dots m_k$ — номер узла по ней (число узлов m_k может быть разным при $k=1\dots n$). В каждом узле задается $n+1$ коэффициент: один коэффициент $V_{j_1\dots j_n}$ — значение сплайна в этом узле и n коэффициентов $G_{j_1\dots j_n k}$ — производные по k -ым направлениям.

Значение сплайна в точке $x \in U$ получается так: для всех k определяются U_{kj_k} и $U_{k(j_k+1)}$ такие, что $x_k \in [U_{kj_k}, U_{k(j_k+1)}]$, и составляется выражение

$$S(x) = \sum_{i_1=0}^1 f(\xi_{i_1}) \dots \sum_{i_k=0}^1 f(\xi_{i_k}) \dots \sum_{i_n=0}^1 f(\xi_{i_n}) \left[V_{(j_1+i_1)\dots(j_n+i_n)} + \sum_{k=1}^n G_{(j_1+i_1)\dots(j_n+i_n)k} \Delta_{kj_k} (-1)^{i_k} \frac{g(\xi_k)}{f(\xi_k)} \right],$$

где $\Delta_{kj_k} = U_{k(j_k+1)} - U_{kj_k}$, $\xi_k = \frac{|x_k - U_{k(j_k+i_k)}|}{\Delta_{kj_k}}$ изменяется от 0 до 1,

$$f(\xi) = (1-\xi)^2(2\xi+1), \quad g(\xi) = (1-\xi)^2\xi.$$

Функции f и g (см. рис. 5) выбраны из условий:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 & f'(0) &= f(1) = f'(1) = 0 \\ g'(0) &= 1 & g(0) &= g(1) = g'(1) = 0 \end{aligned}$$

Это обеспечивает непрерывность сплайна и его первой производной.

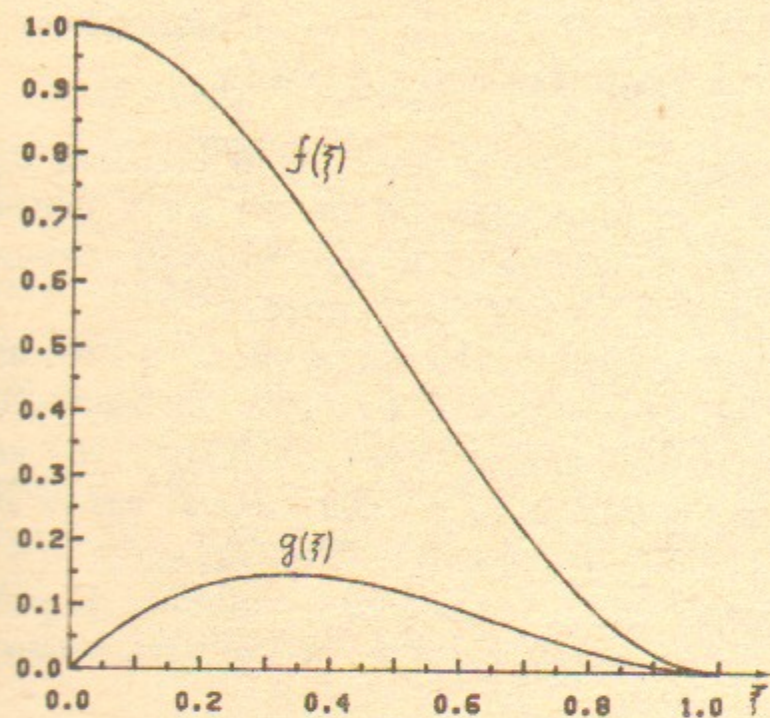


Рис. 5. F и G — опорные функции сплайна.

Сплайн такого вида можно применять двояко. Если производные приближаемой функции по всем переменным легко вычисляются, то можно приравнять все V и G значениям и производным функции в узлах. Тогда в промежутках между узлами сплайн будет как-то отклоняться от функции. Второй способ не ставит своей целью точное равенство сплайна и функции в отдельных точках. Коэффициенты можно вычислять, минимизируя квадрат отклонения сплайна от функции во всей области. Это приводит к системе линейных уравнений, которую можно решать тем или иным способом. Если коэффициентов слишком много, как в нашем случае, точный метод требует слишком много памяти и лучше решать итерационным способом. Именно так находились коэффициенты в этой работе, система решалась методом покоординатного спуска.

Приложение 2

ТАБЛИЦА УЗЛОВ И КОЭФФИЦИЕНТОВ $\varphi(P, \tilde{x}, \beta^2)$.

V — значение функции в узле;
 G_1 — производная по P ;
 G_2 — производная по \tilde{x} ;
 G_3 — производная по β^2 ;

$\beta^2 = 0.00$

\tilde{x}	P	V	G_1	G_2	G_3
0.000	0.000	0.03546	0.12165	4.18064	-2.18296
	0.250	0.25984	0.14094	-5.64238	0.03140
	0.400	0.27789	0.19901	-5.15384	-0.09143
	0.550	0.30655	-0.10209	-6.83802	-0.04814
	0.650	0.28313	-0.08579	-5.76353	-0.04275
	0.800	0.28054	-0.16503	-6.06920	-0.03802
	1.000	0.13882	-1.41452	-3.37106	-0.02636
0.080	0.000	0.00101	0.42763	0.39766	0.06375
	0.250	0.08092	0.06795	-0.76220	-0.03160
	0.400	0.08535	-0.03820	-0.90668	-0.04854
	0.550	0.08273	-0.01539	-0.89856	-0.06041
	0.650	0.08292	0.02832	-0.77042	-0.06887
	0.800	0.09171	0.07659	-0.60483	-0.07798
	1.000	0.05408	-0.62933	-0.43642	-0.04725
0.250	0.000	0.01251	0.04337	0.27212	0.01003
	0.250	0.02382	0.00104	-0.20312	-0.03442
	0.400	0.02583	0.02582	-0.17255	-0.06711
	0.550	0.03573	0.11179	-0.05789	-0.09510
	0.650	0.04775	0.17032	0.01520	-0.11823
	0.800	0.06117	0.00451	-0.02319	-0.10728
	1.000	0.02783	-0.43787	-0.10365	-0.04849
0.550	0.000	0.02607	0.05028	0.74188	0.04919
	0.250	0.04201	0.15468	0.10376	-0.09121
	0.400	0.07843	0.26345	0.19730	-0.15970
	0.550	0.11298	0.21901	0.25867	-0.21171
	0.650	0.11586	-0.07048	0.13500	-0.18930
	0.800	0.08961	-0.24772	0.03578	-0.13291
	1.000	0.02006	-0.52954	0.00442	-0.04985
0.800	0.000	0.26673	0.08612	4.92130	0.04597
	0.250	0.18793	0.80824	0.29207	-0.30321
	0.400	0.20422	0.26765	-0.54243	-0.45741
	0.550	0.16004	-0.65361	-1.24453	-0.32081
	0.650	0.11201	-0.55320	-1.34936	-0.23022
	0.800	0.07790	-0.37740	-0.72305	-0.15132
	1.000	0.02836	-0.63547	0.04265	-0.04795
0.950	0.000	2.45618	-6.05324	67.29889	-0.08371
	0.250	0.09966	-4.33590	-11.09592	-1.42341
	0.400	-0.70027	-3.56113	-28.32880	-0.62795
	0.550	-0.86939	-0.16059	-25.02710	-0.32864
	0.650	-0.74084	0.83674	-19.79803	-0.27353
	0.800	-0.40549	1.44724	-10.65384	-0.16206
	1.000	0.04786	1.04031	-0.36946	-0.04321
1.000	0.000	34.44195	-113.67632	1818.93682	-20.29927
	0.250	-7.62438	-32.66748	-520.44946	-1.12228
	0.400	-9.02143	1.30006	-451.06381	-0.64309
	0.550	-7.37150	7.43189	-344.82988	-0.56236
	0.650	-5.98389	9.30664	-282.30454	-0.26611
	0.800	-3.20514	10.82902	-138.50832	-0.14687
	1.000	0.01130	10.20119	-11.47659	-0.05284

$\beta^2 = 0.300$

\bar{x}	P	V	G_1	G_2	G_3
0.000	0.000	0.14083	0.23272	0.97239	-0.49975
	0.250	0.22454	0.55567	-4.69803	-0.03949
	0.400	0.26202	0.11037	-5.59255	-0.05501
	0.550	0.26423	0.01286	-5.46232	-0.04412
	0.650	0.27811	-0.03116	-6.29503	-0.03469
	0.800	0.26870	-0.07370	-6.21198	-0.03721
	1.000	0.14003	-1.17847	-3.59480	-0.02466
0.080	0.000	0.00531	0.35525	0.26137	0.02027
	0.250	0.07262	0.01452	-0.76363	-0.02727
	0.400	0.07261	-0.05352	-0.93551	-0.04405
	0.550	0.06646	-0.02870	-0.91391	-0.04601
	0.650	0.06616	0.01356	-0.83613	-0.04788
	0.800	0.07348	0.07371	-0.67947	-0.05264
	1.000	0.04753	-0.49406	-0.44804	-0.03515
0.250	0.000	0.01421	-0.00183	0.16353	0.00860
	0.250	0.01352	-0.05368	-0.22775	-0.02685
	0.400	0.00836	-0.02145	-0.21912	-0.04664
	0.550	0.01138	0.06201	-0.13127	-0.06151
	0.650	0.01993	0.12833	-0.06245	-0.07753
	0.800	0.03453	0.05707	-0.06188	-0.07717
	1.000	0.02085	-0.25277	-0.10502	-0.03627
0.550	0.000	0.02828	-0.06152	0.52299	0.02752
	0.250	0.01428	0.06151	-0.01325	-0.07305
	0.400	0.03270	0.15427	0.03349	-0.11373
	0.550	0.05748	0.18202	0.10076	-0.15283
	0.650	0.06507	0.02484	0.06924	-0.14943
	0.800	0.05380	-0.14184	0.01147	-0.10298
	1.000	0.01290	-0.31502	0.00490	-0.03690
0.800	0.000	0.21158	-0.25328	3.62422	0.03024
	0.250	0.08118	0.30527	-0.38368	-0.22586
	0.400	0.08122	0.21755	-1.06316	-0.37159
	0.550	0.06790	-0.32239	-1.39813	-0.30329
	0.650	0.04595	-0.36528	-1.39151	-0.20005
	0.800	0.03556	-0.22008	-0.75362	-0.12446
	1.000	0.02172	-0.39341	0.05140	-0.03534
0.950	0.000	2.04613	-7.48993	46.53027	-0.19726
	0.250	-0.32792	-3.02479	-15.43766	-1.41159
	0.400	-0.89254	-2.15528	-27.52251	-0.72881
	0.550	-0.98716	0.07253	-25.73596	-0.27564
	0.650	-0.81879	1.07478	-19.81394	-0.25567
	0.800	-0.45268	1.62082	-10.72490	-0.13642
	1.000	0.04195	1.26101	-0.32109	-0.03482
1.000	0.000	25.79868	-96.64187	1367.90009	-16.68196
	0.250	-7.53601	-29.06394	-449.07898	-1.33282
	0.400	-9.27456	0.85873	-459.14563	-0.32638
	0.550	-7.60665	8.83862	-358.01756	-0.89552
	0.650	-6.04763	9.84110	-280.08577	-0.19303
	0.800	-3.27116	11.33055	-140.34189	-0.18364
	1.000	0.02840	10.87639	-10.17147	-0.00956

 $\beta^2 = 0.700$

\bar{x}	P	V	G_1	G_2	G_3
0.000	0.000	0.04333	0.05110	1.16120	-0.10841
	0.250	0.19446	0.14751	-3.76355	-0.10378
	0.400	0.23683	0.05001	-5.43387	-0.15597
	0.550	0.23600	-0.01445	-5.39961	-0.13964
	0.650	0.25114	-0.01084	-6.18677	-0.08622
	0.800	0.24209	-0.10119	-5.76252	-0.07191
	1.000	0.12756	-1.25804	-3.63533	-0.03406
0.080	0.000	0.02535	0.18385	0.05788	0.01861
	0.250	0.05891	-0.01597	-0.71565	-0.03722
	0.400	0.05339	-0.06451	-0.86695	-0.05150
	0.550	0.04734	-0.01609	-0.85345	-0.04901
	0.650	0.04844	0.02674	-0.82051	-0.04399
	0.800	0.05641	0.07599	-0.69767	-0.03654
	1.000	0.04120	-0.35780	-0.45633	-0.02456
0.250	0.000	0.01602	-0.04678	0.11023	0.00009
	0.250	0.00282	-0.09438	-0.24824	-0.02069
	0.400	-0.00697	-0.04259	-0.23642	-0.02686
	0.550	-0.00719	0.03744	-0.16512	-0.02644
	0.650	-0.00113	0.08613	-0.11991	-0.02993
	0.800	0.01231	0.08340	-0.09707	-0.03762
	1.000	0.01424	-0.09881	-0.10469	-0.02232
0.550	0.000	0.03007	-0.15864	0.44386	0.01619
	0.250	-0.01097	-0.00909	-0.15533	-0.03686
	0.400	-0.00489	0.08333	-0.13340	-0.04431
	0.550	0.01095	0.11309	-0.05518	-0.06117
	0.650	0.01906	0.06451	-0.03530	-0.07575
	0.800	0.02065	-0.04444	-0.01964	-0.05845
	1.000	0.00614	-0.12661	0.00311	-0.02073
0.800	0.000	0.19062	-0.62558	3.03877	-0.10827
	0.250	-0.03124	-0.00871	-1.26566	-0.13246
	0.400	-0.04727	0.11051	-1.78995	-0.21611
	0.550	-0.03517	-0.03357	-1.67933	-0.21917
	0.650	-0.02894	-0.10659	-1.49983	-0.15061
	0.800	-0.00836	-0.05068	-0.79220	-0.08842
	1.000	0.01492	-0.16705	0.04717	-0.02174
0.950	0.000	1.63526	-8.74347	33.11379	0.36321
	0.250	-0.86765	-2.68958	-22.58501	-1.11638
	0.400	-1.20105	-0.85058	-29.07928	-0.72015
	0.550	-1.12004	0.59422	-25.51368	-0.32049
	0.650	-0.92078	1.31627	-20.19295	-0.26413
	0.800	-0.50492	1.87726	-10.71002	-0.12035
	1.000	0.03470	1.56563	-0.38691	-0.02887
1.000	0.000	18.69599	-89.26312	997.33693	-17.88124
	0.250	-8.33388	-17.70603	-426.33529	-2.45772
	0.400	-9.75331	3.65862	-477.17304	-0.86106
	0.550	-7.74584	9.68683	-352.66911	-0.77355
	0.650	-6.20086	11.24347	-283.05174	-0.07263
	0.800	-3.30922	11.46453	-137.14846	-0.22884
	1.000	-0.01440	10.61402	-12.47560	-0.00557

x	P	V	G_1	G_2	G_3
0.000	0.000	0.14441	2.24842	-7.16717	2.96844
	0.250	0.19959	0.16221	-5.21258	-0.18239
	0.400	0.17957	0.02925	-4.36630	-0.22485
	0.550	0.18442	0.04662	-4.66874	-0.25108
	0.650	0.19831	0.01367	-5.23208	-0.16561
	0.800	0.20017	-0.00915	-4.94960	-0.19072
	1.000	0.11434	-1.11423	-3.36599	-0.06642
0.080	0.000	0.03075	0.06613	-0.03023	0.06388
	0.250	0.04352	-0.09811	-0.67291	-0.06854
	0.400	0.03017	-0.08201	-0.73075	-0.09838
	0.550	0.02465	0.00403	-0.69353	-0.09455
	0.650	0.02843	0.06276	-0.66224	-0.08508
	0.800	0.04159	0.10142	-0.59590	-0.05372
	1.000	0.03674	-0.26388	-0.42578	-0.02396
0.250	0.000	0.01754	-0.07750	-0.01668	-0.00198
	0.250	-0.00509	-0.11043	-0.23331	-0.02797
	0.400	-0.01601	-0.03400	-0.19256	-0.02924
	0.550	-0.01474	0.04907	-0.12503	-0.01606
	0.650	-0.00815	0.08266	-0.09240	-0.00753
	0.800	0.00498	0.07940	-0.08865	-0.00783
	1.000	0.01162	-0.04438	-0.09701	-0.00711
0.550	0.000	0.02303	-0.18856	0.19061	-0.00467
	0.250	-0.01830	0.00134	-0.21775	0.00050
	0.400	-0.01230	0.08597	-0.19195	0.02302
	0.550	0.00090	0.07759	-0.12629	0.02099
	0.650	0.00756	0.03715	-0.09299	0.00971
	0.800	0.01024	-0.02217	-0.04848	-0.00154
	1.000	0.00402	-0.06383	0.00306	-0.00304
0.800	0.000	0.14593	-0.77634	1.71211	-0.15736
	0.250	-0.08308	-0.09250	-1.80684	-0.03958
	0.400	-0.10092	0.03018	-2.25120	-0.07339
	0.550	-0.08385	0.01616	-2.01944	-0.06714
	0.650	-0.06672	0.00688	-1.64460	-0.06462
	0.800	-0.03082	0.04065	-0.87393	-0.04360
	1.000	0.01211	-0.05169	0.03871	-0.00997
0.950	0.000	1.18071	-9.36655	17.02924	0.32664
	0.250	-1.19510	-2.44146	-27.81753	-0.72726
	0.400	-1.42616	-0.13653	-31.62341	-0.37744
	0.550	-1.24678	0.99623	-26.39689	-0.37135
	0.650	-0.99658	1.58108	-20.50715	-0.27026
	0.800	-0.55020	2.05336	-11.04352	-0.13190
	1.000	0.02955	1.75278	-0.41053	-0.03393
1.000	0.000	11.20122	-74.25539	490.92020	-15.04101
	0.250	-9.60561	-11.73062	-462.71242	-3.23455
	0.400	-10.10016	5.03862	-474.45198	-2.75027
	0.550	-8.06969	11.31428	-369.51814	-0.77173
	0.650	-6.28034	12.00703	-277.14264	-0.35235
	0.800	-3.42189	11.97809	-141.91670	-0.36429
	1.000	-0.00906	11.23115	-11.67310	-0.04382

УЗЛЫ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ МОДЕЛИ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ ЛАНДАУ

 P — вероятность, V — значение в узле, G — производная по P .

P	V	G
0.00	-3.5213	625.5426
0.01	-2.1711	93.5301
0.02	-1.9086	26.6758
0.04	-1.6131	13.3464
0.06	-1.4115	9.4815
0.08	-1.2458	7.8466
0.10	-1.1002	6.9806
0.12	-0.9669	6.4307
0.14	-0.8419	6.1010
0.16	-0.7227	5.8473
0.18	-0.6074	5.6860
0.20	-0.4948	5.5817
0.22	-0.3839	5.5043
0.24	-0.2740	5.4882
0.26	-0.1645	5.4789
0.28	-0.0545	5.5089
0.30	0.0561	5.5732
0.32	0.1681	5.6410
0.34	0.2819	5.7466
0.36	0.3979	5.8660
0.38	0.5167	6.0070
0.41	0.7010	6.2798
0.44	0.8942	6.6153
0.47	1.0985	7.0253
0.50	1.3162	7.5170
0.53	1.5500	8.1059
0.55	1.7166	8.5580
0.58	1.9854	9.3780
0.61	2.2816	10.3903
0.64	2.6118	11.6589
0.67	2.9847	13.2664
0.69	3.2626	14.5728
0.71	3.5692	16.1345
0.73	3.9105	18.0596
0.75	4.2940	20.3875
0.77	4.7299	23.3180
0.79	5.2317	27.1188
0.80	5.5126	29.3298
0.81	5.8180	31.6007
0.82	6.1514	34.8764
0.83	6.5163	38.4657
0.85	7.3667	47.3035
0.87	8.4316	60.1577
0.89	9.8139	79.7713
0.91	11.6969	111.8574
0.93	14.4406	170.0195
0.95	18.8653	291.7202
0.97	27.3210	614.1335
0.98	35.3641	1058.5096
0.99	50.2574	2147.3537
1.00	85.9728	5841.8961

Приложение 4

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ z_1 и z_2

а) $z_1 = F_1(\beta^2) \cdot (1 - \beta^2/2)$

Узлы и коэффициенты F_1 , где V — значение функции, а G — производная по β^2 .

β^2	V	G
0.00	0.9999	0.0034
0.40	0.9909	-0.0807
0.65	0.9490	-0.2945
0.85	0.8758	-0.3780
1.00	0.8100	-0.5658

б) $z_2 = \exp(2 \cdot F_2(\beta^2) / \beta^2)$

Узлы и коэффициенты F_2 , где V — значение функции, а G — производная по β^2 .

β^2	V	G
0.00	0.7579	1.4873
0.30	0.9962	0.7979
0.55	1.2212	0.7704
0.85	1.3596	0.8527
1.00	1.4658	0.7535

ЛИТЕРАТУРА

1. Букин А.Д. и др. UNIMOD — универсальная программа моделирования экспериментов на встречных e^+e^- -пучках. — Препринт ИЯФ 84-33. Новосибирск, 1984.
2. Вавилов П.В. ЖЭТФ, 1957, т.32, №4, с.920.
3. Ландау Л.Д. J. of Phys USSR, 1944, N 8, p.204.

А.Д. Букин, Н.А. Грозина

Моделирование флуктуаций ионизационных потерь тяжелых заряженных частиц

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 14 января 1987 г.
Подписано в печать 2.02.1987 г. МН 08616
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,0 печ.л., 1,6 уч.-изд.л.
Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ № 9

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.