

42

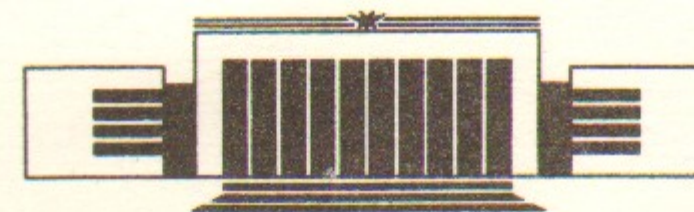


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Ф.М. Израйлев

**ХАОТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В СИСТЕМАХ
С МАКСИМАЛЬНЫМ КВАНТОВЫМ ХАОСОМ**

ПРЕПРИНТ 86-180



НОВОСИБИРСК

Хаотическая структура собственных функций
в системах с максимальным квантовым хаосом

Ф.М. Израйлев

Институт ядерной физики СО АН СССР
630090, Новосибирск 90

АННОТАЦИЯ

Исследуются статистические свойства собственных функций квантовой модели с конечным числом уровней. Численное моделирование показывает, что максимальному квантовому хаосу соответствует микроканоническое распределение компонент собственных функций в базисе невозмущенных состояний.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

1. В последнее время большое внимание уделяется изучению свойств так называемого квантового хаоса в динамических (без случайных параметров) системах. Было показано (см., например, [1—2]), что для квантовых систем, движение которых в классическом пределе является хаотическим, имеет место подавление классического хаоса, усиливающееся с течением времени. Это связано с тем, что такие основные свойства классического хаоса, как локальная неустойчивость и перемешивание в квантовых системах отсутствуют. Тем не менее, при определенных условиях квантовая система может достаточно хорошо имитировать классический хаос. Поэтому возникает вопрос о том, какие максимальные хаотические свойства проявляет в этом случае квантовая система.

Одним из таких свойств (см., например, [3]) является определенный вид корреляций для уровней энергии автономных систем. Такие корреляции описываются теорией случайных матриц [4] и проявляются, в частности, в том, что распределение $P(s)$ расстояний между соседними уровнями энергии имеет вид:

$$P(s) = As^\beta \exp(-Bs^2); \quad \beta=1; 2; 4. \quad (1)$$

где A и B —нормировочные константы, а β —параметр, определяющий степень расталкивания близких уровней, зависящий от симметрии системы. Такое же распределение, но для уровней квазиэнергии, возникает в системах с периодическим (во времени) возмущением, если соответствующая классическая система ведет себя хаотическим образом [5].

По сравнению со спектральными свойствами, статистические

свойства собственных функций (СФ) хаотических квантовых систем изучены относительно слабо. Доказано лишь, что эргодичности классических консервативных систем соответствует эргодичность СФ квантовой системы в квазиклассической области [6]. Имеются также соображения о гауссовом характере таких СФ (см., обзор [7]). В настоящей работе численно исследуется характер флуктуаций компонент СФ при условии их эргодичности в ограниченном фазовом пространстве системы.

2. Рассмотрим квантовый ротатор с периодическими толчками [1–2]:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \varepsilon \cos \theta \delta_T(t); \quad \delta_T(t) \equiv \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(t-sT). \quad (2)$$

Динамика такой модели определяется отображением через период T :

$$\Psi(\theta, t+T) = \exp\left(i \frac{T\hbar}{2I} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \exp\left(-i \frac{\varepsilon}{\hbar} \cos \theta\right) \Psi(\theta, t) \quad (3)$$

и характеризуется двумя параметрами: $\tau = \hbar T/I$ и $k = \varepsilon/\hbar$. Известно, что при $K \equiv k\tau \gg 1$ соответствующая классическая система («стандартное отображение») является хаотической [8]. Согласно численным данным (см., например, [1, 2]) при дополнительном условии $k \gg 1$ (большое число невозмущенных уровней, связанных одним «толчком» возмущения) квантовая модель (2, 3) в течение времени $t \lesssim t^* \sim k^2$ имитирует такие грубые хаотические свойства классической системы, как диффузию и релаксацию функции распределения в фазовом пространстве. Переходя к Фурье-амплитудам волновой функции, получим уравнение для нахождения квазиэнергетических СФ $\Psi_n(\omega)$ и квазиэнергий ω :

$$\exp(-i\omega) \Psi_n(\omega) = \exp\left(-i \frac{\tau n^2}{2}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{n-m} J_{n-m}(k) \Psi_m(\omega), \quad (4)$$

где $J_{n-m}(k)$ — функция Бесселя. Для численного моделирования перейдем от (4) к модели с конечным числом N уровней [5]:

$$\exp(-i\omega) \Psi_n = U_{nm} \Psi_m; \quad U_{nm} = \frac{1}{N} \exp\left(i \frac{\tau n^2}{2}\right) \sum_{p=-N_1}^{N_1} \exp\left(-ik \cos \frac{2\pi}{N} p\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{N} p (n-m)\right), \quad (5)$$

где $N_1 = (N-1)/2$ и $n, m = -N_1, \dots, N_1$. Такая система может рассматриваться не только как квазиклассический аналог стандартного отображения на торе (для $\tau/4\pi = r/N$; r, N — целые), но и как модель некоторой консервативной системы с конечным числом уровней энергии на замкнутой энергетической поверхности. Физический пример системы с конечным числом хаотических стационарных состояний (атом цезия) рассмотрен в [9]. Аналогичные состояния могут возникать также в молекулах, в спиновых системах в сильном переменном поле и т. д.

3. Подавление классического хаоса в квантовой системе (2, 3), как следует из численных экспериментов (см. [2, 10]) связано с локализацией СФ квазиэнергии в импульсном пространстве. Было показано, что средняя длина локализации l для СФ пропорциональна коэффициенту диффузии частицы в импульсном пространстве классической системы: $l \approx D_{cl} \approx k^2/4$. В соответствии с этим можно ожидать, что при $l \gg N_1$ для системы (5) в условиях классического хаоса ($K \gg 1$) СФ будут не только эргодическими в базисе невозмущенного ($\varepsilon=0$) гамильтониана, но и случайными. Будем исследовать, для простоты, только антисимметрические СФ ($\Psi_n = -\Psi_{-n}$), для которых максимальная размерность в N -мерном гильбертовом пространстве равна $N_1 = (N-1)/2$. Для удобства вычислений перейдем к действительной матрице $W_{nm} = \text{Re } U_{nm}$. Вследствие симметричности и унитарности исходной матрицы U_{nm} имеем $\text{Re } \Psi_n = \pm \text{Im } \Psi_n$ и $\varphi_n^2 = |\Psi_n|^2$, (φ_n — СФ матрицы W_{nm}), откуда следует, что статистические свойства Ψ_n и φ_n одинаковы.

4. На рис. 1 представлена гистограмма суммарного распределения $\omega(\varphi_n)$ для NG матриц W_{nm} размером N с различными значениями k (с шагом Δk). Полное число компонент φ_n равно $M = NG \cdot N_1 \cdot N_1 = 12500$. Из рис. 1 можно заключить, что численные данные неплохо согласуются с распределением Гаусса. Однако это впечатление обманчиво, поскольку количественное сравнение по критерию согласия χ^2 указывает на чрезвычайно плохое соответствие. Действительно, $\chi_{38}^2 \approx 98$ (для 38 степеней свободы), что дает вероятность $P_w < 10^{-6}$. В то же время данные вполне согласуются с микроканоническим распределением φ_n — векторов с учетом конечности гильбертового пространства СФ [4]:

$$\omega_N(\varphi_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{N_1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{N_1-1}{2}\right)} (1-\varphi_n^2)^{(N_1-3)/2}. \quad (6)$$

И хотя кривая II на рис. 1 «на глаз» слабо отличается от кривой I, обработка по χ^2 с зависимостью (6) дает значение $\chi_{38}^2 \approx 56$ (соответственно, $P_w \approx 5\%$). С увеличением N отличие распределения $w(\varphi_n)$ от гауссовского уменьшается (см. рис. 2) в соответствии с выражением (6).

5. Следует особо отметить, что матрица U_{nm} , описывающая поведение нашей модели, ни в коей мере не является случайной. Тем не менее при выполнении условий $l \gg N_1$ и $K \gg 1$ СФ становятся полностью хаотическими с распределением (6), которое получено в предположении о случайности элементов матрицы U_{nm} . Поэтому можно также ожидать, что распределение расстояний между соседними значениями ω будет описываться выражением (1) с $\beta=1$. Это прекрасно подтверждается численными данными, приведенными на рис. 3 (см. также [5, 10]).

Автор благодарен Б.В. Чирикову за многочисленные обсуждения и полезные замечания.

Литература

1. Casati G., Chirikov B.V., Ford J., Izrailev F.M. Lect. Not. in Physics, 1979, 93, 334.
2. Chirikov B.V., Izrailev F.M., Shepelyansky D.L. Sov. Sci. Rev. 1981, v.2C, p.209.
3. Bohigas O., Giannoni M.-J. Lect. Not. in Physics, 1984, 209, 1.
4. Brody T.A. et al. Rev. Mod. Phys., 1981, 53, 385.
5. Izrailev F.M. Phys. Rev. Lett., 1986, 56, 541.
6. Шнирельман А.И. УМН, 1974, 29, 181.
7. Stechel E.B., Heller E.J. Ann. Rev. Phys. Chem., 1984, 35, 563.
8. Chirikov B.V. Phys. Reports, 1979, 52, 263.
9. Chirikov B.V. Phys. Lett., 1985, A108, 68.
10. Израйлев Ф.М., Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л. Препринт ИЯФ СО АН СССР 86-166. Новосибирск, 1986.

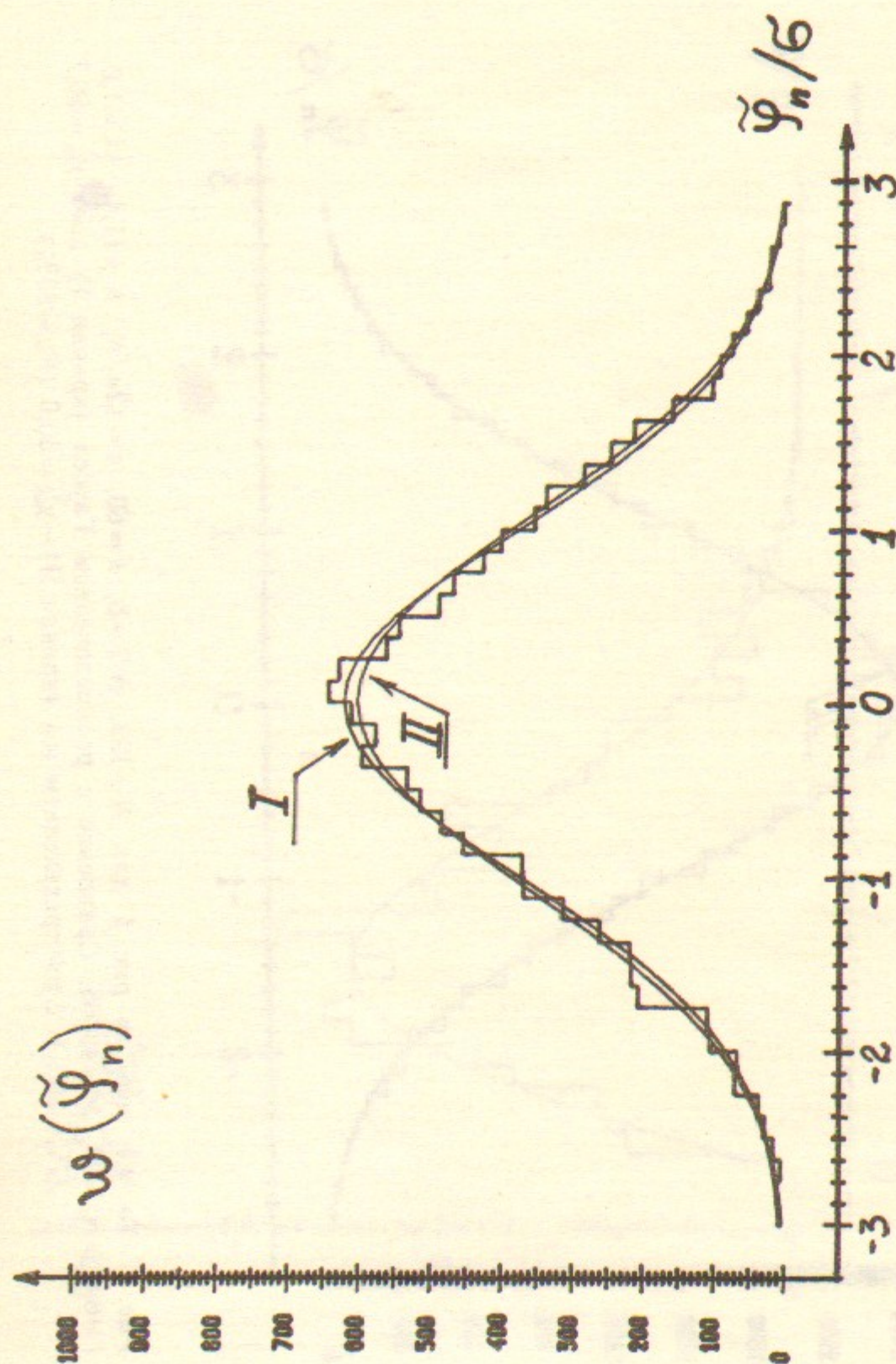


Рис. 1. Распределение компонент СФ для $N=51$, $NG=20$, $k \approx 20$, $\tau = 16\pi/N$, $K \approx 5$, $\Delta k = 0,1$, $l \approx 130 \gg N_1 = 25$; кривая I — распределение Гаусса с параметрами $\langle \tilde{\varphi}_n \rangle = 0$, $\sigma^2 = \langle \tilde{\varphi}_n^2 \rangle = 1$, кривая II — распределение (6) ($\tilde{\varphi}_n^2 = N_1 \varphi_n^2$).

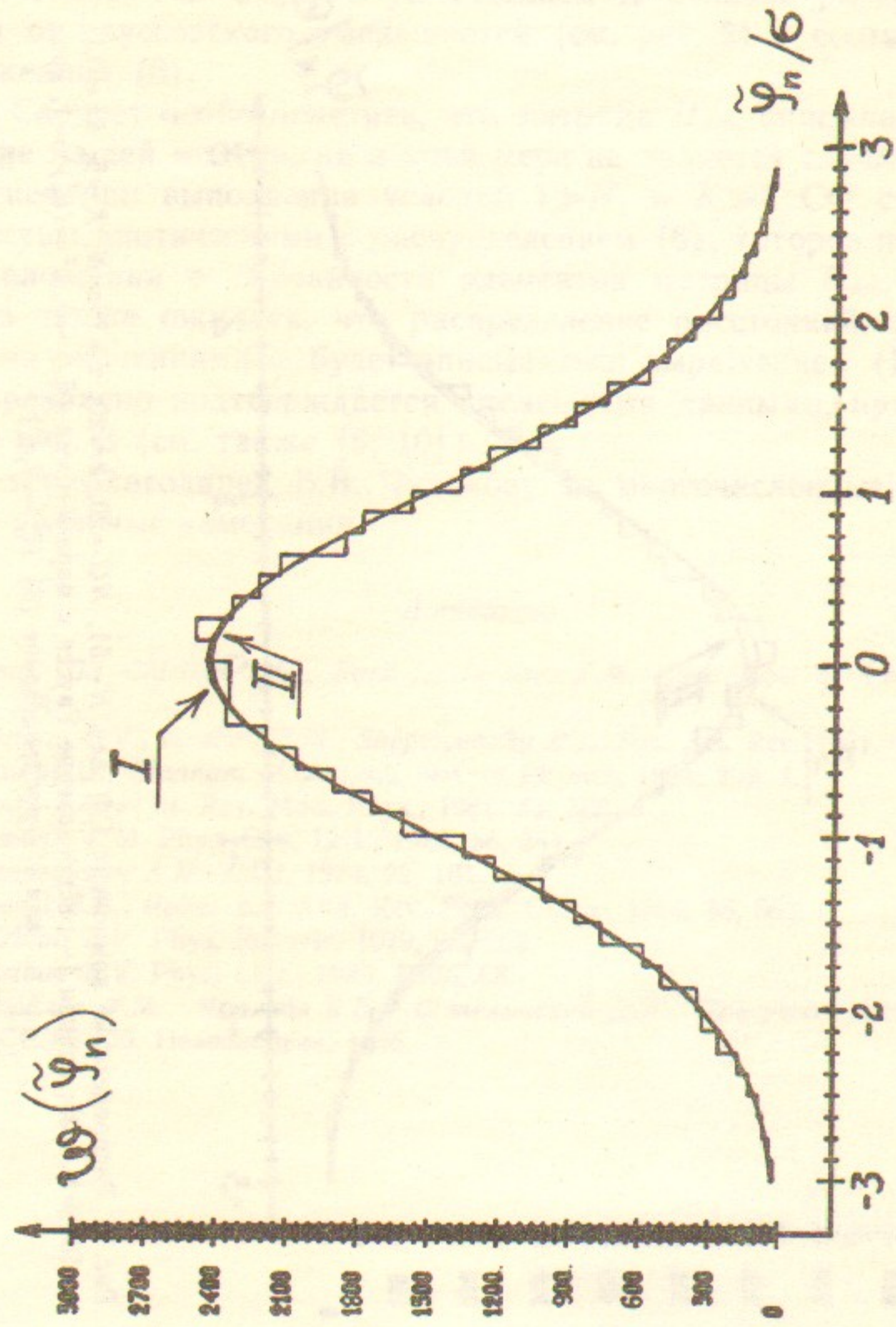


Рис. 2. То же, что на рис. 1 для $N=199$, $NG=5$, $k \approx 60$, $\tau = 12\pi/N$, $K \approx 11.4$, $\Delta k = 1.0$, $l = 650 \gg N_1 = 99$, $M = 49005$. Сравнение с распределением Гаусса (кривая 1) дает $\chi_{48}^2 \approx 56.7$ ($P_w \approx 36\%$), с распределением (6) (кривая II) — $\chi_{48}^2 \approx 50.0$ ($P_w \approx 20\%$).

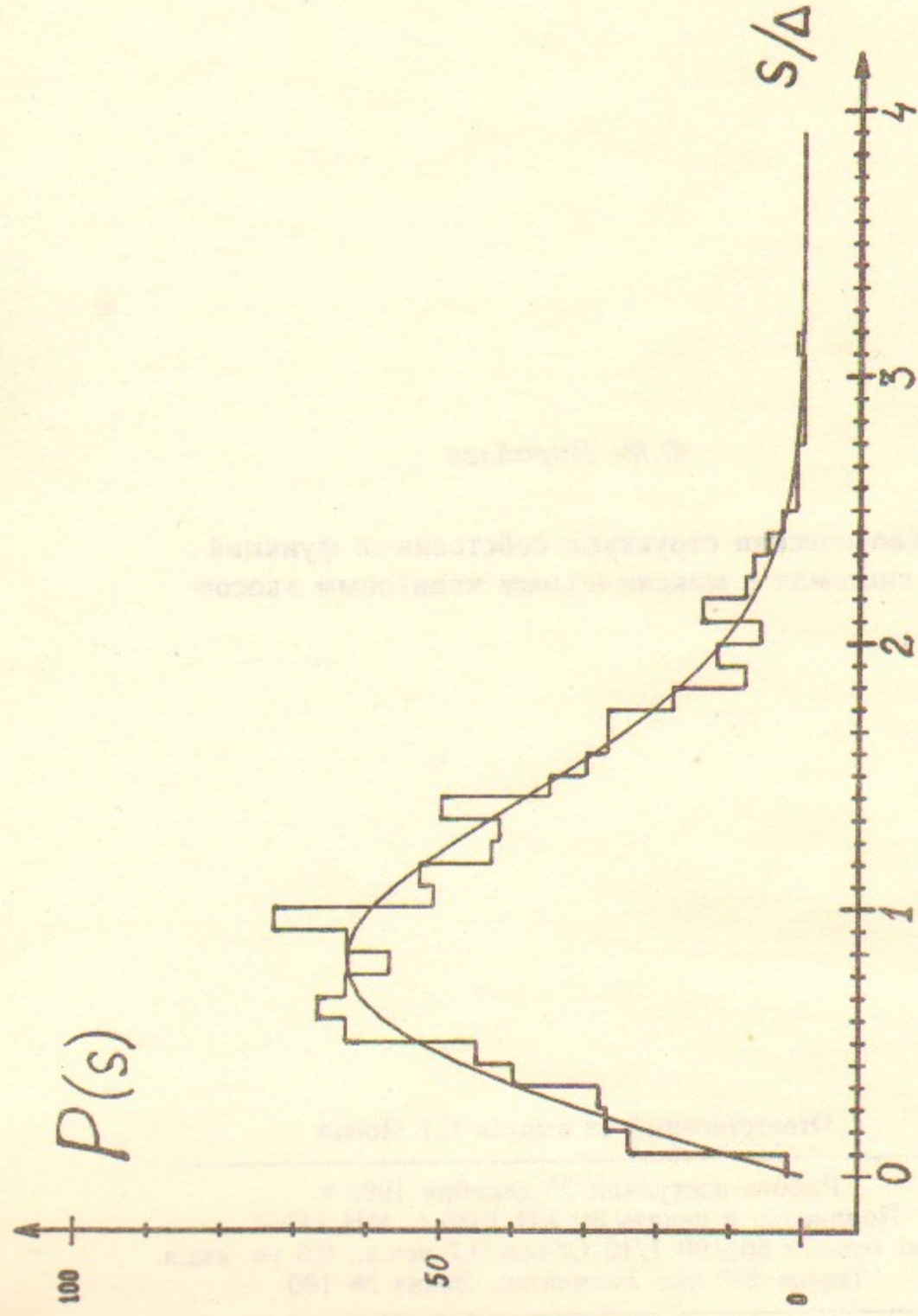


Рис. 3. Распределение расстояний между соседними значениями ω для параметров рис. 2 с учетом симметрии СФ; полное число собственных значений ω равно $N \cdot NG = 995$; $\Delta = 2\pi/N_1$. Обработка на χ^2 с зависимостью (1) для $\beta=1$ дает $\chi_{24}^2 \approx 20.1$ ($P_w \approx 30\%$).

Ф.М. Израйлев

**Хаотическая структура собственных функций
в системах с максимальным квантовым хаосом**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 15 декабря 1986 г.
Подписано в печать 30 XII 1986 г. МН 11918
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0,7 печ.л., 0,6 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 180

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*