



4-65

38

12.1.87

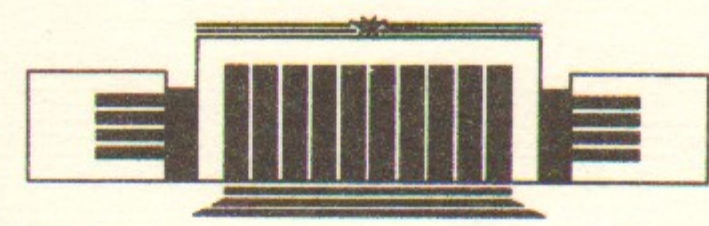
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Б.В. Чириков, Д.Л. Шепелянский

**ГРАНИЦА ХАОСА
И СТАТИСТИЧЕСКИЕ АНОМАЛИИ**

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
Физики СО АН СССР
ИЯФ, 19

ПРЕПРИНТ 86-174



НОВОСИБИРСК
1986

ГРАНИЦА ХАОСА И СТАТИСТИЧЕСКИЕ АНОМАЛИИ*

Б.В. Чириков, Д.Л. Шепелянский

Институт ядерной физики, 630090 Новосибирск, СССР

А Н Н О Т А Ц И Я

В докладе дается обзор работ авторов по исследованию критической структуры движения на границе хаоса в фазовом пространстве и ее влиянию на статистические свойства хаотической компоненты. Подробно обсуждается явление ренормхаоса. Представлена простая резонансная теория критических явлений для двумерных канонических отображений.

* Доклад на Международном совещании "Ренормгруппа-86", Дубна, 1986 г.

I. Введение

В докладе дается обзор работ авторов по критической структуре границы динамического хаоса в фазовом пространстве гамильтоновой системы и влиянию этой структуры на статистические свойства хаотической компоненты движения.

Под динамическим хаосом мы понимаем случайное по Алексею движению чисто динамической системы без каких-либо случайных параметров или шума в уравнениях движения. По теореме Алексея-Брудно (см. /1/) необходимым и достаточным условием такого хаоса является положительная (не равная нулю) динамическая энтропия Колмогорова-Синяя (КС-энтропия) h , т.е. экспоненциальная локальная неустойчивость движения. Вследствие сильной неустойчивости понятие траектории хаотического движения теряет физический смысл (подобно тому, как становится формальным понятие состояния неустойчивого равновесия) и необходимо переходить к статистическому описанию движения, которое предполагается устойчивым. При этом на первый план выступает задача определения статистических свойств хаотического движения.

Особенностью данной задачи является то, что статистические свойства хаоса полностью определяются динамикой системы без каких-либо дополнительных статистических гипотез. Однако при этом могут получаться и весьма необычные, "аномальные", статистические свойства. Мы берем это слово в кавычки, поскольку аномальным здесь является не поведение самой динамической системы, а наше упрощенное представление о нем. Упрощенное как раз традиционными дополнительными статистическими гипотезами, которые были действительно необходимы до открытия динамического хаоса.

Так, обычно считалось, что корреляции случайного процесса статистической механики затухают экспоненциально со временем. Это представление, казалось, получило дополнительное подтверждение и в теории динамического хаоса с его экспоненциальной локальной неустойчивостью. Действительно, есть такие специальные случаи - системы Аносова, когда корреляции убывают экспоненциально. Однако в общем случае они могут убывать и значительно медленнее, например, по степенному закону. По-видимому, впервые подобное явление "длинных хвостов" (корреляций) было обнаружено в численных экспериментах с моделью газа в виде твердых шариков /2/ (подробнее см. /3/: гл.16, и /4/).

Здесь мы рассмотрим другой, типичный для колебательных систем случай разделенного фазового пространства, в котором сосуществуют как хаотические, так и регулярные компоненты движения. Особая поверхность, разделяющая эти компоненты — граница хаоса, и есть основной объект нашего исследования.

Давно было замечено, что окрестность границы хаоса устроена, вообще говоря, очень сложно и представляет собой иерархически чередующиеся области хаотического и регулярного движения самых разных масштабов (см., например, /5/); пример простой границы хаоса приведен в /4/.

Подробные исследования, основные результаты которых будут представлены ниже, показали, что именно эта сложная структура "края" хаотической компоненты движения и приводит к статистическим "аномалиям". Фактически, сейчас исследован простейший класс таких динамических систем минимальной размерности, для которой еще возможен динамический хаос. Это консервативные гамильтоновы системы с двумя степенями свободы и соответствующие им двумерные канонические отображения. В последнем случае граница хаоса является одномерной кривой.

Одним из интересных результатов исследования границы хаоса явилось открытие нового типа динамического хаоса, который мы назвали ренормхаос, т.е. хаотические флуктуации всей структуры фазовой плоскости при переходе от одного пространственно-временного масштаба к другому вблизи границы.

2. Модель

В качестве модели мы выбрали так называемое сепаратрисное отображение /5,6/;

$$\bar{z} = z + \sin x; \quad \bar{x} = x - \lambda \ln |\bar{z}| \quad (2.1)$$

где z, x имеют смысл переменных действие-фаза; λ — параметр. Отображение (2.1) описывает, в частности, хаотический слой в окрестности расщепленной возмущением сепаратрисы нелинейного резонанса /5/.

Локально по z модель (2.1) сводится к так называемому стандартному отображению /5,6/:

$$\bar{y} = y + K \sin x; \quad \bar{x} = x + \bar{y} \quad (2.2)$$

где новое действие $y = \lambda(z_1 - z)/z_1 - \lambda \ln |z_1|$ и новый параметр $K = -\lambda/z_1$.

Поскольку отображение (2.2) периодически по y , существует критическое значение $|K| = K_g \approx 1$, разделяющее финитное ($|K| \leq K_g$) и инфинитное ($|K| > K_g$) движение по y (подробнее см. ниже, § 4). Это определяет приближенно границы основной хаотической компоненты отображения (2.1):

$$|z| \approx \lambda \quad (2.3)$$

которая заполняет слой $|z| \leq \lambda$. Вне этой области существуют также другие изолированные хаотические слои, вообще говоря, значительно меньшей ширины вокруг сепаратрис различных резонансов, например, для $\lambda \ln |z_n| = 2\pi n$, где целое $n \geq \lambda \ln \lambda / 2\pi$.

Внутри основной хаотической компоненты расположены изолированные устойчивые области, соответствующие центрам некоторых резонансов. Вследствие этого хаотическая компонента имеет не только внешние границы (2.3), но и множество внутренних границ, окружающих устойчивые области.

Структура фазовой плоскости становится особенно сложной вблизи внешних границ слоя (2.3), где доля устойчивых компонент движения достигает 50%. Давно было замечено, что траектория может надолго "застревать" в этой области (см., например, /5/). Это, в свою очередь, может существенно изменить статистические свойства хаотической компоненты движения. Их исследованию и посвящены обсуждаемые работы, которые были начаты в 1981 г. /7/.

Отметим, что хаотическая компонента модели (2.2) имеет положительную KS-энтропию $h \approx \ln(K/2)$, $K > 4$ (см. /5/), а значит, и в хаотическом слое модели (2.1) $h > 0$.

3. Статистика возвратов Пуанкаре

Одним из наиболее важных статистических свойств движения являются временные корреляции. Однако наш опыт показал, что наиболее просто и надежно измерять другую статистическую характеристику — временное распределение возвратов Пуанкаре. С этой целью численно определялось время τ (число итераций отображения (2.1)) между последовательными пересечениями ли-

нии $Z = 0$, т.е. время перехода из одной половины хаотического слоя в другую. Обе половины слоя симметричны с точностью до сдвига по фазе: $X \rightarrow X + \pi$. Основным результатом измерения служила интегральная вероятность возврата $P(\tau)$, которая определялась как отношение числа возвратов за время $> \tau$ к полному числу возвратов за время счета. Повидимому, впервые такой метод неявно использовался в /8/.

Основные результаты работы /7/ представлены на рис.1, взятом из /7/. Ясно видны две качественно различные области зависимости $P(\tau)$. При малых τ численные данные хорошо описываются функцией $P(\tau) = \tau^{-1/2}$. Это полностью согласуется с результатом работы /8/, где фактически также исследовался хаотический слой нелинейного резонанса. Такая зависимость имеет простое физическое объяснение и соответствует однородной диффузии в пределах ширины слоя. Действительно, время такой диффузии $\tau_0 \sim \lambda^2$, что согласуется с численными данными: $\tau_0 \approx 0,3 \lambda^2$.

Значительно более интересной и содержательной является вторая область ($\tau > \tau_0$). Зависимость $P(\tau)$ в этой области имеет две характерные особенности. Во-первых, в среднем по τ , она является степенной

$$P(\tau) \approx \frac{A(\lambda)}{\tau^p} \quad (3.1)$$

причем показатель степени p слабо зависит от λ , а его среднее значение по всем данным на рис.1 равно

$$\langle p \rangle = 1.45 \quad (3.2)$$

Второй характерной особенностью зависимости $P(\tau)$ являются, по-видимому, нерегулярные колебания локального показателя $\tilde{p} = -d \log P / d \log \tau$. Эти колебания не связаны с флуктуациями хаотического движения, поскольку они не зависят от начальных условий. Иными словами, статистика $P(\tau)$ оказывается одной и той же для совершенно различных (в силу локальной неустойчивости) траекторий. Отсюда следует, что эти колебания, так же как и средняя степенная зависимость $P(\tau)$, характеризуют структуру края хаотического слоя, т.е. границу хаоса, как мы будем говорить.

Статистика возвратов тесно связана с убыванием временных корреляций хаотического движения в слое. Действительно, среднее относительное время пребывания ("застревания") траектории в некоторой окрестности границы хаоса $\sim \tau P(\tau) / \langle \tau \rangle$, где

$\langle \tau \rangle \approx 3 \lambda$ среднее время возврата /7/. Из эргодичности движения это относительное время равно относительной мере области застревания $\mu(\tau)$, которая и есть не что иное как остаточные корреляции. Подробный пересчет статистики возвратов в корреляции приведен в /9/ (см. также рис.2 ниже). Окончательно получаем

$$C(\tau) \sim \mu(\tau) \sim \frac{\tau P(\tau)}{\langle \tau \rangle} \sim \frac{1}{\tau^{p_c}}; \quad p_c = p - 1 \quad (3.3)$$

На рис.2 наши данные сравниваются с результатами работы /9/, полученными для уникально длинного счета (1600 траекторий по 2×10^9 итераций каждая). Несмотря на то, что в /9/ использовалось другое двумерное каноническое отображение, общее поведение возвратов и корреляций, включая значение среднего показателя p , близко. Это указывает на некоторую грубую (среднюю) универсальность критических явлений на границе хаоса. Хотя значения p в разных случаях имеют заметный разброс, можно определенно утверждать, что $p < 2$, а $p_c < 1$ (рис.1,2). Это оказывается очень существенным для статистических свойств хаотического движения (см. § 8).

4. Резонансная теория критических явлений

Первое качественное объяснение необычной статистики возвратов (3.1) было дано в /7/ на основе представления о том, что скорость диффузии по Z (см.(2.1)) стремится к нулю при приближении к границе хаоса. При этом существенно, что скорость диффузии убывает достаточно быстро и поэтому хаотическая траектория фактически никогда не достигает границы, хотя и подходит к ней сколь угодно близко. Граница хаоса представляет, следовательно, некоторую инвариантную кривую, называемую критической.

Исследование критических инвариантных кривых двумерных канонических отображений было начато Грином /10/ и продолжено затем многими другими (см., например, /11-13/). Исходной задачей было нахождение критического значения K_c для стандартного отображения (§ 2), которое определяется разрушением последней (наиболее прочной) инвариантной кривой. Грин высказал гипотезу, что такая кривая имеет число вращения $\nu = \nu_c = (1, 1, \dots, 1, \dots) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\dots$, где

$$\gamma = \frac{\langle \omega \rangle}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n - X_0}{n} \quad (4.1)$$

а цифры в скобках — элементы разложения γ в цепную дробь. Число γ_G называется "золотым сечением" и хуже всего приближается подходящими рациональными дробями, что и послужило основанием для гипотезы Грина. После этого с помощью специального численного метода, который оказался очень эффективным в подобных задачах, Грин нашел критическое значение $K = K_G = 0.97163540631\dots$ /II/. Согласно /I4/ $K_g < 63/64$, что отличается от K_G всего на 1%. Наши численные данные показывают, что число вращения последней инвариантной кривой (γ_g) лежит в интервале $0.380 < \gamma_g < 0.388$ вокруг симметричной "золотой кривой" с $\gamma = 1 - \gamma_g = (2, 1, 1, \dots)$. Остающаяся неопределенность очень мала и мы примем ниже, что $\gamma_g = \gamma_G$ (или $1 - \gamma_G$) и $K_g = K_G$ (см., однако, § 6). При $K = K_G$ вся фазовая плоскость стандартного отображения разбивается на два периодически повторяющихся (по y) хаотических слоя, изолированных критическими кривыми.

Критические явления характеризуются прежде всего движением по критической инвариантной кривой, которое можно представить в виде /I2/

$$X(t) = \varphi + \sum_{q=1}^{\infty} a_q \sin(q\varphi); \quad \varphi = 2\pi r t \quad (4.2)$$

где t — номер итерации, а $\varphi(t)$ — среднее движение. С самого начала (10) было замечено, что для $\gamma = \gamma_G$ наибольшие амплитуды a_q соответствуют некоторым специальным значениям $q = q_n$, которые являются знаменателями подходящих дробей $\gamma_n = p_n/q_n \rightarrow \gamma$. Это объясняется тем, что γ_n дают наилучшее приближение γ , в частности, частоты критического движения (4.2)

$$v_q = q\gamma \pmod{1} = q\gamma - p \quad (4.3)$$

являются минимальными для $q = q_n$; $p = p_n$. Такие гармоники и определяют основные масштабы критического движения, и в первом приближении можно пренебречь остальными слагаемыми в (4.2).

Основные масштабы удобно характеризовать безразмерными величинами

$$A_n = |a_n| q_n; \quad B_n = |b_n| q_n^2 = 2 A_n q_n \sin(\pi r q_n) \approx (4.4) \\ \approx 2\pi |v_n q_n| A_n$$

где B_n — фурье-амплитуды $y(\varphi)$; $|v_n q_n|$ — безразмерная частота, а связь B_n с A_n получается из второго уравнения (2.2) и (4.2). Последнее выражение для B_n справедливо при $q_n \gg 1$.

Критическое движение (4.2) отражает приближенно и структуру близкой окрестности фазовой плоскости. В частности, основные масштабы соответствуют наиболее сильным резонансам $\gamma_n = p_n/q_n$, расположенным на расстоянии (по частоте) $\Delta \gamma_n = \gamma - \gamma_n = \gamma - p_n/q_n = v_n/q_n$ от критической кривой. Каждый такой резонанс представляет собой цепочку из q_n устойчивых "островов". Отсюда его характерный масштаб по X есть $2\pi/q_n$, а безразмерная (не зависящая от масштаба n) переменная $\tilde{X}^{(n)} = X q_n$.

Так как размеры и форма "островов" в цепочке различны, описание с помощью $\tilde{X}^{(n)}$ неинвариантно вдоль цепочки. Поэтому удобнее пользоваться безразмерной величиной A_n , которая приближенно характеризует среднюю по X структуру основного резонанса и соответствующего ему масштаба. Аналогично B_n характеризует ширину резонанса по y .

Поскольку безразмерное расстояние от резонанса до критической кривой $\rho_n = \Delta \gamma_n q_n^2 = q_n v_n$, то при критическом возмущении

$$B_n \sim \rho_n \quad (4.5)$$

Это соотношение устанавливает замечательную связь между характеристикой резонансов критической структуры (B_n) и арифметическими свойствами числа вращения на критической кривой (ρ_n). Физический смысл оценки (4.5) очень простой и прямо связан с наглядным критерием перекрытия соседних резонансов, лежащих по обе стороны критической кривой.

Эта простая картина и положена нами в основу приближенной резонансной теории критических явлений. В отличие от формально точной теории, основанной на методе ренормгруппы /II/, резонансная теория дает возможность находить некоторые приближенные соотношения для характеристик критической структуры. Более точные результаты могут быть получены в некоторых случаях с помощью теории "двух резонансов" /I5/. Вместе с тем метод ренормгруппы позволяет строить весьма эффективные численные алгоритмы и получать таким образом чрезвычайно точные значения параметров критической структуры, например, K_G .

Вернемся теперь к нашему основному соотношению (4.5). В простейшем случае однородной цепной дроби $r^{(m)} = (m, m, \dots)$ величина $\rho_n \rightarrow \rho^{(m)} = (4 + m^2)^{-1/2}$. Значит, и $B_n \rightarrow B^{(m)}$; $A_n \rightarrow A^{(m)}$. В частности подробно изученном случае $m = 1$; $r = r_G$ по нашим численным данным

$$A^{(1)} = 0.16736\dots; B^{(1)} = 0.47027\dots$$

$$B^{(1)}/\rho^{(1)} = 1.0515 \dots \quad (4.6)$$

Значение $A^{(1)}$ отличается в два раза от результата /12/ из-за другой нормировки амплитуд q_n в /12/, которая применима только для периодических траекторий.

В работе /16/ развита приближенная аналитическая теория ренормализации для $r = r_G$, однако, полученное там значение $A^{(1)} \approx 0.29$ существенно отличается от (4.6).

Критическая структура характеризуется также различными масштабными факторами, например, $S_x^{(n)} = \tilde{x}^{(n+1)}/\tilde{x}^{(n)} = q_{n+1}/q_n \equiv S^{(n)}$, где $S^{(n)}$ - арифметический фактор. Для $r = r_G$ фактор $S^{(n)} \rightarrow S = 1/r_G$, т.е. в пределе $n \rightarrow \infty$ имеет место точная масштабная инвариантность. Аналогично, $S_y^{(n)} = (q_{n+1}/q_n)^2 = (S^{(n)})^2$ и $S_y = S^2$. Отсюда для площади, или меры $S_\mu \approx S_x S_y = S^3$ /17/. Последнее соотношение является приближенным, поскольку S_x, S_y характеризуют отношение масштабов в среднем по критической кривой. Согласно численным данным /11/ локально на доминантной линии симметрии ($x = \pi$) $S_x(\pi) = 1.414836062\dots$; $S_y(\pi) = 3.066888246\dots$, что заметно отличается от средних значений $S = 1.618 \dots$ и $S^2 = 2.618\dots$. Однако численное значение $S_\mu = 4.339144088\dots$, которое не меняется вдоль кривой из-за сохранения меры, очень близко к $S^3 = 4.236\dots$. Этот результат был недавно подтвержден в /18/ с помощью теории двух резонансов /15/.

Мы исследовали численно также сходимость $A_n \rightarrow A^{(1)}$ и обнаружили две характерные скорости:

$$\frac{|A_n - A^{(1)}|}{A^{(1)}} \approx \left| \frac{0.23}{q_n^2} - \frac{0.11}{q_n} \right| \quad (4.7)$$

Первая, более быстрая скорость связана с арифметикой: $|\sqrt{5}/q_n - 1| = 1/5q_n^2$. Медленное приближение интерпретировалось ранее /19/ как проявление некоторого эффективного локального возмущения. Однако согласно /16/ сходимость $\sim q_n^{-1}$ естественно возникает из уравнений ренормгруппы. Поэтому вопрос о локальном возмущении остается открытым (см. ниже, § 7).

При малых отклонениях параметра возмущения K от критического значения K_G поведение безразмерных амплитуд описывается следующей приближенной эмпирической формулой

$$A_n = A^{(1)} \exp[1.2 q_n (K - K_G)] \quad (4.8)$$

которая похожа на соотношение, предложенное Эскандом (см. /12/). Численные данные /12/ показывают, что показатель экспоненты линейно зависит от K вблизи критического значения. Соотношение (4.8) справедливо для достаточно больших q_n , когда можно пренебречь отклонениями (4.7) от асимптотического поведения.

В подкритическом режиме ($K < K_G$) амплитуды убывают по закону простой экспоненты, что характерно для теории КАМ в случае типичного аналитического возмущения /20/. При любом $K > K_G$ амплитуды экспоненциально возрастают, и непрерывная инвариантная кривая с $r = r_G$ разрушается и превращается в некоторое нигде не плотное инвариантное канторово множество - так называемый канторус /13/. При этом резонансы с $q_n \geq (K - K_G)^{-1}$ оказываются полностью разрушенными и образуют сплошной хаотический слой. Его ширина (по частоте) Δr_s определяется основным еще не разрушенным резонансом с минимальным $q_n^* \sim (K - K_G)^{-1}$

$$\Delta r_s \sim (q_n^*)^{-2} \sim (K - K_G)^2 \quad (4.9)$$

При $q_n \geq q_n^*$ экспоненциальный рост (4.8) насыщается таким образом, что $A_n \sim 1$.

Аналогично ведут себя и другие безразмерные величины, характеризующие окрестность критической кривой, например, вычет Грина /10/, значение которого определяет устойчивость периодических траекторий $r_n = p_n/q_n$. Если Ω_n есть частота малых колебаний вокруг такой траектории, то вычет Грина равен

$$R_n = \sin^2\left(\frac{q_n \Omega_n}{2}\right) \quad (4.10)$$

Область устойчивости траектории r_n соответствует интервалу $0 < R_n < 1$. При $K = K_G$ согласно /11/ $R_n \rightarrow R^{(1)} = 0.2500888\dots$, т.е. центры основных резонансов остаются неразрушенными.

При $K \neq K_G$ зависимость $R(K)$ несколько отличается от (4.8):

$$R_n = R^{(1)} \exp[1.20 q_n^{1+\epsilon} (K - K_G)] \quad (4.11)$$

где $\varepsilon = 0.013 / \Pi /$. Кроме того, вычеты неограниченно растут с n для $K > K_G$. Это имеет простой физический смысл: показатели Ляпунова $\lambda_n \approx \ln(4R_n)/q_n$ остаются приблизительно постоянными и равными энтропии $h \sim \Delta K$ в хаотическом слое.

5. Ренормхаос

Ренормгруппу, описывающую критическую структуру, можно рассматривать как некоторую абстрактную динамическую систему в пространстве двумерных канонических отображений, которые и определяют структуру движения в безразмерных переменных. Роль времени ("ренормвремя") играет при этом номер основного масштаба критической структуры, пропорциональный логарифму характерного пространственного размера или времени этого масштаба.

В случае однородной цепной дроби числа вращения критическая структура характеризуется точной масштабной инвариантностью, что соответствует простейшей ренормдинамике — неподвижной точке. Естественно возникает вопрос о более сложной ренормгруппе. Можно, например, рассматривать периодические цепные дроби. Этот случай, однако сводится снова к неподвижной точке соответствующей степени ренормотображения.

Значительно более интересной является хаотическая ренормдинамика, предсказанная в [21]. Такая возможность независимо обсуждалась также в [22] для одномерного отображения.

Ренормхаос возникает в том случае, когда последовательность элементов цепной дроби $\{m_i\}$ является случайной, а это имеет место почти для любого иррационального числа γ [23]. Действительно, m_i определяются отображением Гаусса

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{\gamma_n} \bmod 1; \quad m_{n+1} = \left[\frac{1}{\gamma_n} \right] \quad (5.1)$$

с начальным $\gamma_0 = \gamma$. Однородные дроби являются частным случаем со специальным начальным условием $\gamma_0 = \gamma^{(m)}$. Для почти всех начальных условий отображение (5.1) имеет положительную энтропию: $h = \pi^2/6 \ln 2$.

Случайность последовательности $\{\gamma_n\}$ и $\{m_n\}$ приводит к случайности и всех других параметров критической структуры. Например, основной масштабный фактор $S_n = q_{n+1}/q_n = 1/w_{n+1}$ описывается отображением

$$w_n = \frac{1}{w_{n+1}} \bmod 1 \quad (5.2)$$

назад по ренормвремени с "начальным" значением $w_\infty = \tilde{\gamma}$, где $\tilde{\gamma}$ — иррациональное число с обратной последовательностью элементов по сравнению с γ . Отношение частот на соседних масштабах $u_n = -V_n/V_{n-1} (> 0)$ также удовлетворяет отображению (5.1) с $u_0 = \gamma$.

Среднее значение масштабного фактора для типичного γ получается из равновесного распределения для отображения (5.2) и равно [23]:

$$\langle S \rangle = e^{h/\varepsilon} \approx 3.28 \quad (5.3)$$

Это приблизительно в два раза больше, чем для γ_G .

На рис. 3 приведен пример ренормхаоса для стандартного отображения с $\gamma_G = (2111212111211121\dots) = 0.37966453\dots$. Выбор такого γ_G будет пояснен ниже (§ 6). Критическое значение для этого числа $K_c(\gamma_G) = 0.9618704\dots$. Критическая структура характеризуется на рис. 3 двумя безразмерными величинами $A_n = a_n q_n$ и R_n . Значения A получены по периодической траектории $q_n = 10612$ ($|K_n - \gamma_G| \sim 10^{-8}$). Сильные нерегулярные колебания величин A_n, R_n и демонстрируют хаотические флуктуации структуры движения на разных масштабах. Для сравнения приведены те же данные для $\gamma = \gamma_G$, когда имеет место масштабная инвариантность.

Замечательная особенность критической структуры состоит в том, что асимптотически при $n \rightarrow \infty$ она полностью определяется своим числом вращения. Это можно продемонстрировать следующим образом. Рассмотрим два числа вращения γ_n, γ_{n+1} , связанных отображением (5.1). Они соответствуют критическим кривым, расположенным в разных местах фазовой плоскости стандартного отображения и имеющим разные критические K_c . Однако их критические структуры будут просто сдвинуты относительно друг друга на один шаг ренормотображения:

$$A_n(\gamma_{n+1}) = A_{n+1}(\gamma_n); \quad R_n(\gamma_{n+1}) = R_{n+1}(\gamma_n) \quad (5.4)$$

На рис. 4 показан пример такого сдвига на два шага для $\gamma_0 = \gamma_G = (21112\dots) = 0.3796\dots; \gamma_2 = (112\dots) = 0.5775\dots; K_c(\gamma_0) = 0.961\dots; K_c(\gamma_2) = 0.948\dots$. В нижней части рисунка приведены некоторые участки полного спектра (включая все промежуточные масштабы) критического движения для $\gamma = \gamma_G$. Ренормхаос в этом случае становится еще более очевидным. Выше показаны разности

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{A_{n-2}(r_2)}{A_n(r_2)} - 1; \Delta R = R_{n-2}(r_2) - R_n(r_2) \quad (5.5)$$

Видно, что обе разности быстро убывают с ростом ренормвремени (справа налево). Существенно, что такая сходимость имеет место не только для основных масштабов ($q = q_n$), но и для всех промежуточных. Последние идентифицировались по величине $Q \nu$, где

Q — период траектории, по которой вычислялся Фурье-спектр.

Показательно, что значения Q для r_2 и r_1 совершенно различны: $Q(r_1) = 10612$; $Q(r_2) = 2554$; их отношение равно $4.15505\dots$. Это же справедливо и для значений q , определяющих безразмерные амплитуды $A = a q$, которые тем не менее совпадают с точностью $\sim 10^{-3}$. То же относится и к вычетам Грина R , которые характеризуют уже некоторую окрестность критической кривой.

Все это позволяет сделать заключение, что критическая структура в обоих случаях полностью совпадает в пределе $n \rightarrow \infty$. Иначе говоря, критическая структура любого двумерного канонического отображения характеризуется некоторым универсальным "ренорматтрактором", зависящим только от числа вращения τ . В случае типичного τ ренормдинамика на аттракторе является хаотической. Отметим, что для одномерного отображения подобный аттрактор исследовался в /24/.

Структура ренорматтрактора описывается универсальными функциями $A(r)$, $R(r)$ и т.д., которые соответствуют универсальному однопараметрическому семейству отображений. Представляет интерес выяснение характера этих универсальных функций.

6. Особенности граничной инвариантной кривой.

Попробуем связать обнаруженные в численных экспериментах статистические аномалии хаотического движения (§ 3) с критической структурой границы хаоса. Для этого необходимо прежде всего знать числа вращения граничной инвариантной кривой, которые мы будем обозначать r_2 . В /21/ на основе анализа фрактальной диаграммы $K_c(r)$ был сделан вывод о том, что r_2 должны иметь очень специальный вид с ограниченными значениями элементов цепной дроби m_i . Там же была высказана и более конкретная гипотеза, что $m_n = 1; 2$ принимают случайно только два значения, причем среднее число элементов $m = 1$ в два раза больше, чем $m = 2$.

Последующие численные эксперименты /25,26/ подтвердили особый характер r_2 , что следует из зависимости $r_2(K)$, которая имеет вид "чертовой лестницы", т.е. монотонной всюду разрывной функции. В /26/ было измерено также распределение различных значений m_n для r_2 . Отношение элементов с $m = 1$ и $m = 2$ оказалось равным 2.5, однако, наблюдались и элементы с $m = 3$ (12%); 4 (4%) и 5 (1%).

Кроме того, была обнаружена асимметрия распределения значений m_n в зависимости от четности или нечетности n . Эта асимметрия имеет простой физический смысл: расстройки $|r_2 - r_n|$ со стороны хаотической компоненты движения в среднем меньше, чем с противоположной стороны. Такая асимметрия вполне естественна для перехода хаос-порядок /27/.

Однако возможна и другая граница хаотической компоненты: переход хаос-хаос. Иначе говоря, граничная инвариантная кривая r_2 разделяет в этом случае две различные хаотические компоненты. Именно так обстоит дело в стандартном отображении при $K = K_g = K_G$ (§ 4). В таком случае хаотическая компонента может иметь другие статистические свойства, чем для перехода хаос-порядок. Действительно, измерения обнаружили /21/, что показатель степени в (3.1) $\rho \approx 1$ очень близок к единице и, соответственно, корреляции почти не убывают ($\rho_c = \rho - 1 \approx 0$) по крайней мере, до $\tau \sim 10^5$.

Однако значительно более длинный счет, выполненный Вивальди /28/, показал существенное увеличение локального $\tilde{\rho}$ для $\tau \gtrsim 10^5$ (рис.5 верхняя кривая). Это распределение относится к хаотическому слою, содержащему целый резонанс, например, $y = 0$. Для сравнения на этом же рисунке приведены аналогичные данные, относящиеся к соседнему слою, содержащему полуцелый (например, $y \approx 1/2$). В последнем случае режим $\rho_c \approx 0$ продолжается еще дольше, по крайней мере, до $\tau \sim 3 \times 10^6$. Для последних двух точек статистика очень мала, и наблюдаемое резкое падение $\rho(\tau)$ статистически недостоверно. В любом случае бросается в глаза асимметрия статистических свойств по обе стороны граничной критической кривой, несмотря на однородность цепной дроби $r_2 \neq r_G = (1, 1, \dots, 1, \dots)$.

Причина этой асимметрии, как и аномально медленного (даже для критических явлений) убывания корреляций в настоящий момент не ясна. Простейшее объяснение состоит в том, что зависи-

мость $P(\tau)$ на рис.5 еще не достигла асимптотического режима масштабной инвариантности (ср. рис.3). Дело в том, что при $P \sim \tau^{-1}$ мера $\mu_{\tau}P$ согласно (3.3) почти не убывает с τ (фактически $\langle \tau \rangle \sim \ln T$, где T - полное время движения). Возможно, однако, и другое объяснение: $K_g > K_G$ (§ 4), а последняя инвариантная кривая имеет $K_g < K_G$, т.е. сдвинута в сторону полуцелого резонанса. Остановимся теперь на вопросе о том, для каких чисел вращения Γ_g возможен переход хаос-хаос. Согласно гипотезе Грина (§ 4) такой переход может происходить только для благородных чисел $\Gamma_g = \Gamma_{nob}$ асимптотическое разложение которых содержит одни единицы и в частности для $\Gamma_g = \Gamma_G$. Другое следствие этой гипотезы состоит в том, что во фрактальной диаграмме, характеризующей зависимость критического значения параметра $K_c(\Gamma)$ от числа вращения Γ , все локальные максимумы имеют значение $\Gamma = \Gamma_{nob}$. Здесь нам хотелось бы высказать предположение, являющееся прямым обобщением гипотезы Грина. Из теории чисел (см., например, /29/) известно, что для так называемых чисел Маркова и только для них асимптотические минимальные значения расстройки $\rho^{(M)} = M \cdot [(3M)^2 - 4]^{-1/2} > 1/3$, все различны; здесь M - некоторые целые, (см. (4.5)). Таким образом числа Маркова, образующие счетные множество иррациональных чисел $\Gamma^{(M)}$ с неслучайной последовательностью элементов $m_n = 1; 2$, соответствуют дискретному спектру расстроек $\rho > 1/3$, а все остальные - непрерывному спектру $\rho \leq 1/3$. Исходя из такой структуры спектра ρ вполне естественно высказать гипотезу, что переход хаос-хаос и локальные максимумы во фрактальной диаграмме $K_c(\Gamma)$ имеют место только для чисел Маркова $\Gamma^{(M)}$ и для чисел, у которых асимптотика разложения Γ в непрерывную дробь совпадает с числом Маркова.

Следующий важный вопрос: полностью ли определяются статистические свойства граничным Γ_g ? Здесь пока также нет ясности. На рис.6 показаны возвраты в модели (2.1) для такого значения λ , что $\Gamma_g \approx \Gamma_G$. При этом показатель $\rho \approx 1.38$ имеет обычное значение (нижняя кривая, данные /28/). Вместе с тем возвраты из некоторого хаотического слоя с противоположной стороны границы являются аномальными с $\rho \approx 0.96$.

Выше мы видели (рис.4), что асимптотическая ($n \rightarrow \infty$) критическая структура зависит только от Γ . Возникает гипотеза, что статистические свойства хаотического движения с границей определяются не ренормдинамикой на аттракторе, а отклонениями

от нее при конечных n . Другое возможное объяснение - влияние внутренних границ хаоса, окружающих устойчивые области в основной хаотической компоненте, в частности, вокруг центров главных резонансов критической структуры.

7. Возможные механизмы статистических аномалий

Простейшая количественная гипотеза о "застревании" траектории вблизи границы хаоса состоит в том, что время перехода (τ_n) из одного масштаба в соседний того же порядка, что и характерное время данного масштаба (t_n):

$$\tau_n \sim t_n \sim q_n \quad (7.1)$$

Поскольку это время быстро падает с уменьшением n ($t_n/t_{n-2} \sim 5^2$), то и полное время застревания $\tau \sim \tau_n$. С другой стороны, мера всех масштабов $\gg n$ (до критической кривой) $\mu \sim \mu_n \sim q_n^{-2}$ (§4). Отсюда (см. (3.3))

$$C(\tau) \sim \mu(\tau) \sim \tau^{-2} \quad (7.2)$$

т.е. $\rho_c = 2$; $\rho = 3$, что определено противоречит результатам численных экспериментов /7,9,21/ (см. рис. 1,2,5,6). Оценка (7.2) была получена в /17/ и подтверждена более аккуратными вычислениями в /27/. При учете некоторых внутренних границ в работе /30/ получено значение $\rho \approx 2$ и высказано предположение, что полный учет всех внутренних границ позволит объяснить таким образом численное значение $\rho \approx 1.5$ (3.2).

На этом пути возникают, однако, следующие трудности. Во-первых, наши наблюдения показали, что наиболее длинные возвраты сопровождаются застреванием траектории именно на основной границе $Z = Z_c \approx \lambda$ (2.1), а не на внутренних границах. Во-вторых, вычисления /30/ фактически проведены для стандартного отображения при $K = K_G$, когда $\rho \approx 1$ (рис.5). Отметим, наконец, что в работе /17/ было получено то же значение $\rho = 2$ с учетом всех внутренних границ, если предположить универсальность зависимости $P(\tau)$ на любой границе хаоса.

Попытаемся подойти к решению этой задачи с другой стороны. Пусть время перехода траектории между соседними масштабами

$$\tau_n \sim q_n^k \quad (7.3)$$

Тогда из численного значения $\rho_c \approx 1/2$ и $\mu_n \sim q_n^{-2}$ следует, что

$$k \approx 4 \quad (7.4)$$

Как можно было бы объяснить такое большое значение k ? Прежде всего ясно, что (7.4) не может характеризовать собственно ренорматтрактор, на котором закон подобия для любого характерного времени имеет вид (7.1), или $\tau_n/\tau_{n-2} \sim s^2$, $k=1$. Но если предположить, что закон (7.3) с $k > 1$ характеризует сходимость к ренорматтрактору, то на самом аттракторе должно быть $\tau_n = \infty$, т.е. все масштабы динамически изолированы.

Чем же определяется все таки конкретное значение k (7.4)? В работе /21/ (см. также /19/ выдвинута следующая гипотеза. Закон (7.3) сходимости к ренорматтрактору определяется некоторым эффективным локальным параметром возмущения, который зависит, вообще говоря, от расстояния до границы хаоса. Например, для сепаратрисного отображения (2.1) таким эффективным параметром может служить параметр

$$K(r) \approx K_g + F(r-r_g) \quad (7.5)$$

стандартного отображения (2.2), которое описывает динамику (2.1) локально по Z (или по r). Линейная зависимость $K(r)$ представляется типичной для границы хаоса, соответствующей переходу хаос-порядок.

Из эмпирической зависимости (4.8), (4.II) следует тогда, что надкритичность (7.5) будет разрушать (с одной стороны границы) только резонансы с

$$q \approx Q_n \sim \frac{1}{|r_n - r_g|} \sim q_n^2 \quad (7.6)$$

Они-то и образуют тонкие ($\Delta t_s \sim Q_n^{-2} \sim q_n^{-4}$) хаотические слои между основными масштабами, которые и определяют время перехода τ_n . Последнее можно оценить следующим образом (см. /19/). Скорость диффузии в тонком слое $D_n \sim Q_n^{-4} Q_n^{-1} \sim Q_n^{-5}$. Функция распределения f_n нормированна на единицу на размере q_n^{-2} . Тогда градиент функции распределения $f_n \sim q_n^2$ в слое Q_n^{-2} порядка $\nabla f_n \sim q_n^2 Q_n^2$. Отсюда поток

$$\tau_n^{-1} \sim D_n \nabla f_n \sim Q_n^{-5} q_n^2 Q_n^2 \sim \frac{q_n^2}{Q_n^3} \sim q_n^{-4} \quad (7.7)$$

и мы получаем соотношение (7.3) с нужным значением $k = 4$.

Такая ситуация является, по-видимому, типичной для перехода хаос-порядок. Естественно предположить, что переход хаос-

хаос соответствует специальному случаю, когда в соотношении (7.5) постоянная $F = 0$. Если, например, $\Delta K \sim (\Delta r)^l$, то аналогично предыдущему получаем $Q_n \sim (\Delta r)^{-2/l} q_n^{2/l}$ и из (7.7)

$$\tau_n \sim \frac{Q_n^3}{q_n^2} \sim q_n^{2(3l-1)} \quad (7.8)$$

Отсюда $k = 6l - 2$ и $\rho_c = (3l - 1)^{-1}$. В частности, при $l=2$; $k=10$; $\rho_c = 1/5$.

Рассмотренный подход также не свободен от противоречий. В частности, численные данные в работе /26/ по зависимости $t_g(K)$ для стандартного отображения показывают, по-видимому, что $l = 1/2$, и мы возвращаемся к случаю (7.1), (7.2), который никак не согласуется с нашими численными результатами для $P(\tau)$.

Наиболее прямым методом исследования механизма статистических аномалий было бы непосредственное измерение показателя k в (7.3). Отметим, что при $k > 2$ влиянием внутренних границ хаоса можно пренебречь. Этот случай был пропущен в /17/.

8. Заключительные замечания

Несмотря на то, что вся критическая структура занимает ничтожно малую часть фазовой плоскости вдоль границы хаоса, именно она определяет некоторые важные статистические свойства всей хаотической компоненты движения. Важнейшее из этих свойств - степенное убывание корреляций и, что особенно существенно, с показателем $\rho_c \approx 0.5 < 1$. Это приводит прежде всего к сингулярному спектру движения (спектру "мощности") при $\omega \rightarrow 0$ /19/:

$$S(\omega) \sim \omega^{\rho_c - 1} \sim \omega^{-1/2} \quad (8.1)$$

Далее, если такие медленно убывающие корреляции определяют некоторый диффузионный процесс по другой степени свободы, то его скорость оказывается аномально быстрой /21/:

$$\sigma^2 \sim t^{2-\rho_c} \sim t^{3/2} \quad (8.2)$$

где σ^2 - дисперсия функции распределения. Возникает интересная задача о полном статистическом описании такой сверхбыстрой диффузии.

В какой мере сохраняются все эти аномалии в многомерной системе? Этот вопрос остается пока совершенно открытым, хотя в первой работе /24/ и упоминается возможность обобщения ренорм-

группы на многомерный случай.

Одним из наиболее интересных результатов исследований критических явлений в динамике было открытие нового вида динамического хаоса-ренормхаоса (§ 5). Упоминание о подобном явлении содержится также в работе /31/ в связи с нарушением колмогоровского спектра турбулентности и в работе /32/ о моделях спиновых стекол.

Пожалуй самым интересным и фактически давно известным примером ренормхаоса являются хаотические колебания метрики в однородных анизотропных космологических моделях /33/ (последние результаты см. в /34/).

Пользуемся случаем выразить искреннюю признательность Ф.Вивальди, который привлек наше внимание к теории критических явлений, за постоянные обсуждения и важные дополнительные численные данные, а также В.И.Арнольду, Л.А.Бунимовичу, П.Грасбергеру, Дж.Грину, И.Персивалю, Я.Г.Синаю, К.М.Ханину и Д.В.Ширкову за интересные замечания. Авторы благодарны Л.Каданову, Р.Мак-Каю и Д.Эсканду за предоставленную возможность ознакомиться с результатами их исследований до опубликования.

Литература

1. Alekseev V.M. and Yakobson M.V. - Phys. Reports, 1981, 75, 287.
2. Alder B.J. and Wainwright T.E. - Phys. Rev. Lett., 1967, 18, 988.
3. Reichl L.E. A Modern Course in Statistical Physics. Austin: University Press, 1984.
4. Бунимович Л.А. - ЖЭТФ, 1985, 89, 1452.
5. Chirikov B.V. - Phys. Reports, 1979, 52, 263.
6. Дихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика М.: Мир, 1984.
7. Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л. - Тр. IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям (Киев, 1981), Киев: Наукова думка, 1984, т.2, с.421.
8. Channon S.R. and Lebowitz J.L. - Ann. N.Y. Acad. Sci., 1980, 357, 108.
9. Karney C.F.F. - Physica D, 1983, 8, 360.
10. Greene J.M. - J. Math. Phys., 1968, 9, 760; 1979, 20, 1183.
11. MacKay R.S. - Physica D, 1983, 7, 283.
12. Shenker S.J. and Kadanoff L.P. - J. Stat. Phys., 1982, 27, 631.
13. MacKay R.S., Meiss J.D. and Percival I.C. - Physica D, 1984, 13, 55.
14. MacKay R.S. and Percival I.C. - Comm. Math. Phys., 1985, 98, 469.
15. Escande D.F. - Phys. Rep., 1985, 121, 163.
16. Zheng W.M. - Phys. Rev. A, 1986, 33, 2850.
17. Chirikov B.V. - Lecture Notes in Physics, 1983, 179, 29.
18. Greene J.M. and MacKay R.S. - Phys. Lett. A, 1985, 107, 1.
19. Chirikov B.V. - Proc. Int. Conf. on Plasma Physics, Lausanne, 1984, 2, 761.
20. Арнольд В.И. - УМН, 1963, 18, № 6, 91.
21. Chirikov B.V. and Shepelyansky D.L. - Physica D, 1984, 13, 395.
22. Ostlund S., Rand D., Sethna J. and Siggia E. - Physica D, 1983, 8, 303.
23. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

24. Rand D., Ostlund S., Sethna J. and Siggia E.D. - Phys. Rev. Lett., 1982, 49, 132;
Farmer J.D. and Satija I.I. - Phys. Rev. A, 1985, 31, 3520,
Farmer J.D. and Umberger D.K. - Phys. Lett. A, 1986, 114, 341.
25. Grassberger P. - private communication, 1985.
26. Greene J.M., MacKay R.S. and Stark J. Boundary Circles for Area-Preserving Maps, 1986 (unpublished).
27. Hanson J.D., Cary J.R. and Meiss J.D. - J. Stat. Phys., 1985, 39, 327.
28. Vivaldi F., private communication, 1985.
29. Касселс Дж. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИИЛ, 1961.
30. Meiss J.D. and Ott E. - Phys. Rev. Lett., 1985, 55, 2741; Physica, 1986, 20D, 387.
31. Frisch U. - Chaotic Behavior of Deterministic Systems. Les Houches 1981. Amsterdam, North-Holland, 1983, p. 665.
32. McKay S.R., Berker A.N. and Kirkpatrick S. - Phys. Rev. Lett., 1982, 48, 767.
33. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973, § II8.
34. Лифшиц Е.М., Халатников И.М., Синай Я.Г., Ханин К.М., Шур Л.Н. - Письма в ЖЭТФ, 1983, 38, 79.

Подписи к рисункам

Рис.1. Распределение возвратов Пуанкаре в хаотическом слое отображения (2.1): 10^7 итераций для каждого значения $\lambda = 1(+); 3(\bullet); 5(0); 7(\#); 10(x); 30(\Delta); 100(\square)$; прямая соответствует $P(\tau) = \tau^{-1.02}$; логарифмы десятичные.

Рис.2. Статистические свойства движения с границей хаоса:
а) возврат Пуанкаре;
в) убывание корреляций:
Непрерывные кривые - численные данные Карни /10/,
кружки - наши данные для модели (2.1) с $\lambda = 3$.
Прямые - степенная зависимость с указанным значением показателя.

Рис.3. Пример ренормхаоса для критической кривой с $\tau = \tau_g$ (см. текст) стандартного отображения (кружки). Стрелки показывают нужную шкалу для $aq = A(n)$ (нижняя часть рисунка) и $R(n)$ - верхняя часть; n - ренормвремя (номер основного масштаба). Для сравнения приведены те же данные при $\tau = \tau_g$ (точки), иллюстрирующие точную масштабную инвариантность.

Рис.4. Хаотический "ренорматтрактор" на примере стандартного отображения для $\tau = \tau_g$ (см. текст). Стрелки показывают нужную шкалу. Масштаб по оси QV разный. Цифры на верхних точках - значения ренормвремени n . Основные масштабы отмечены кружками.

Рис.5. Распределение возвратов Пуанкаре в двух хаотических слоях стандартного отображения при $K = K_g = K_g$. Верхняя кривая - слой целого резонанса, численные данные /28/. Нижняя кривая - слой полуцелого резонанса, кривая сдвинута на $\Delta \log P = -1$. Колебания $P(\tau)$ при малых $\tau \lesssim 10$ связаны с устойчивыми областями в центре резонансов.

Рис.6. То же, что и на рис.5, но для сепаратрисного отображения (2.1); $\lambda = 3.1819316$; $\tau_g \approx \tau_g$. Нижняя кривая

(сдвинута на $\Delta \log P = -1$) - возвраты в основном хаотическом слое; $\rho \approx 1.38$, данные /28/. Верхняя кривая - возвраты в некотором узком хаотическом слое с противоположной стороны границы.

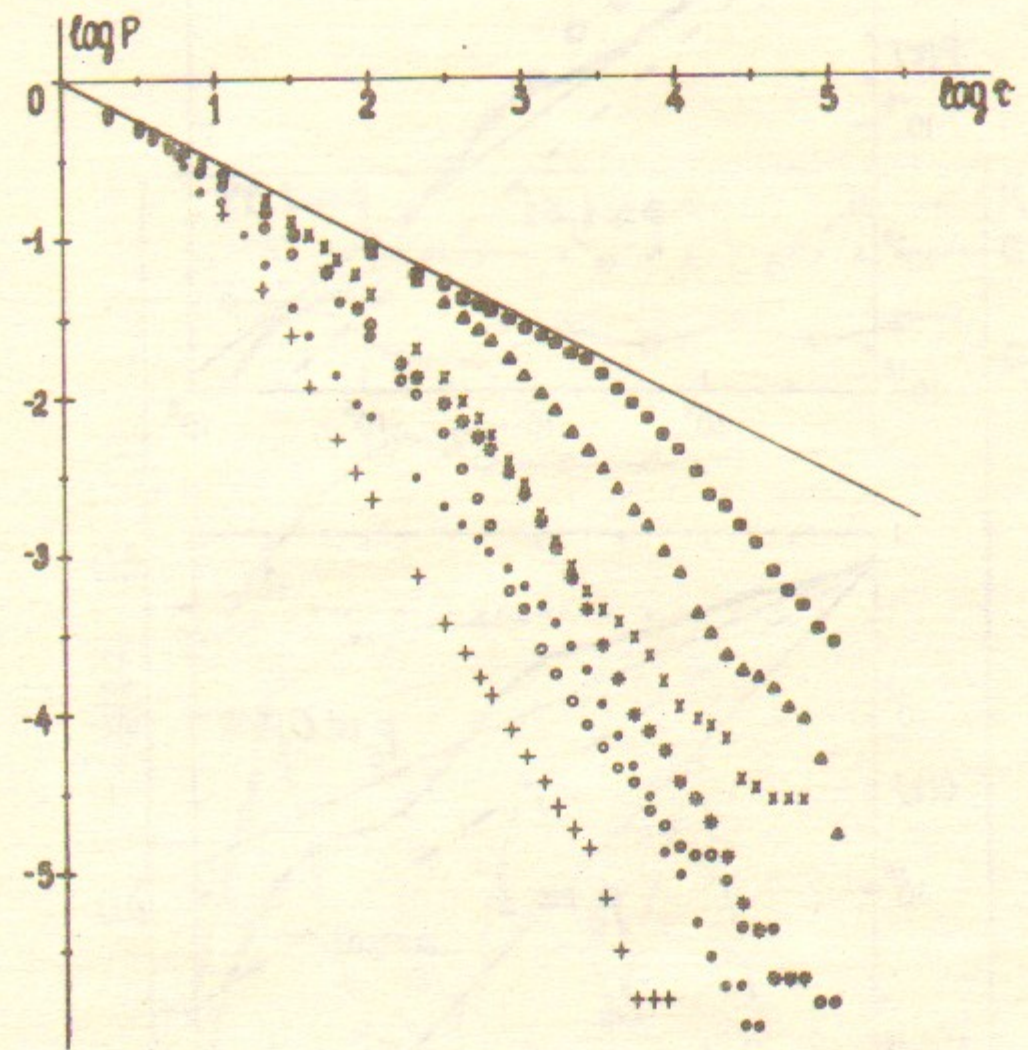


Рис. I

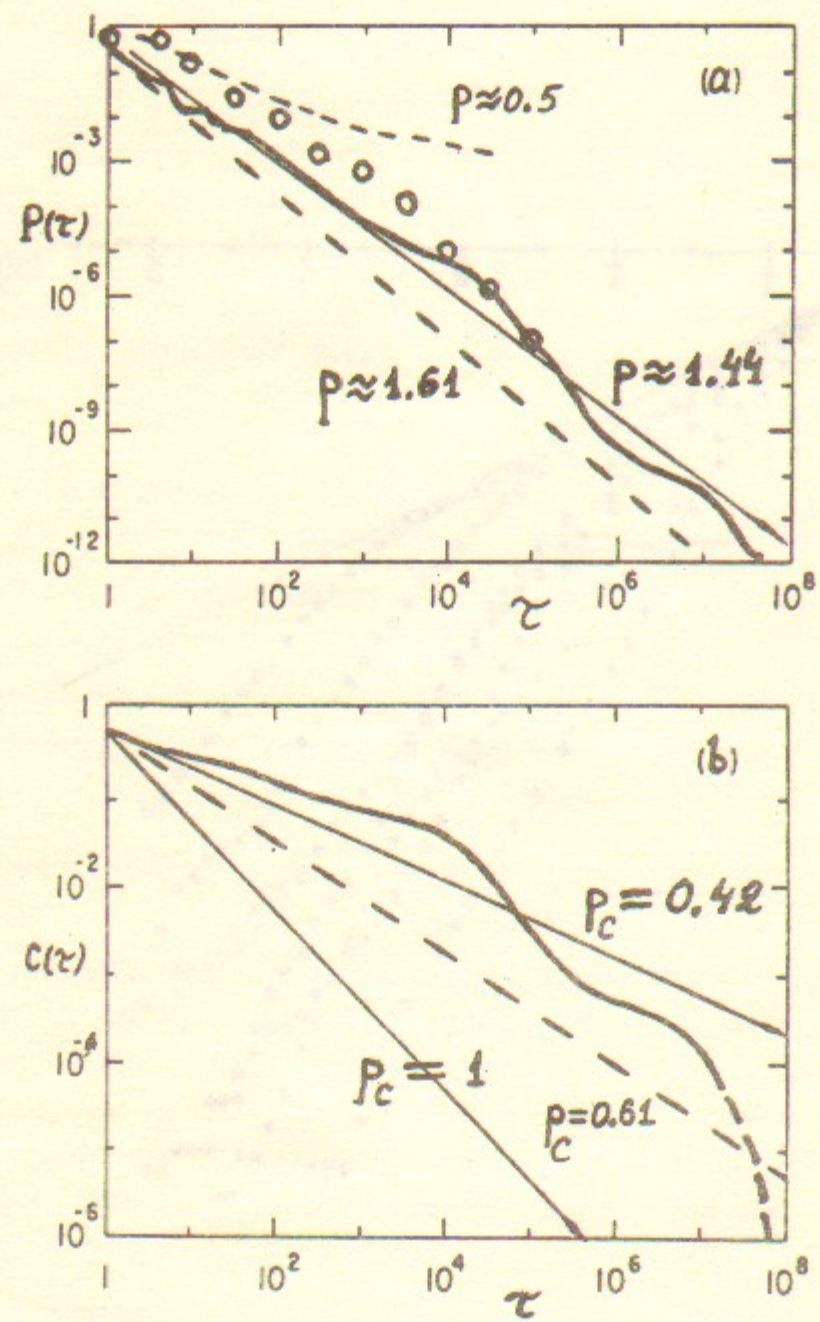


Рис.2

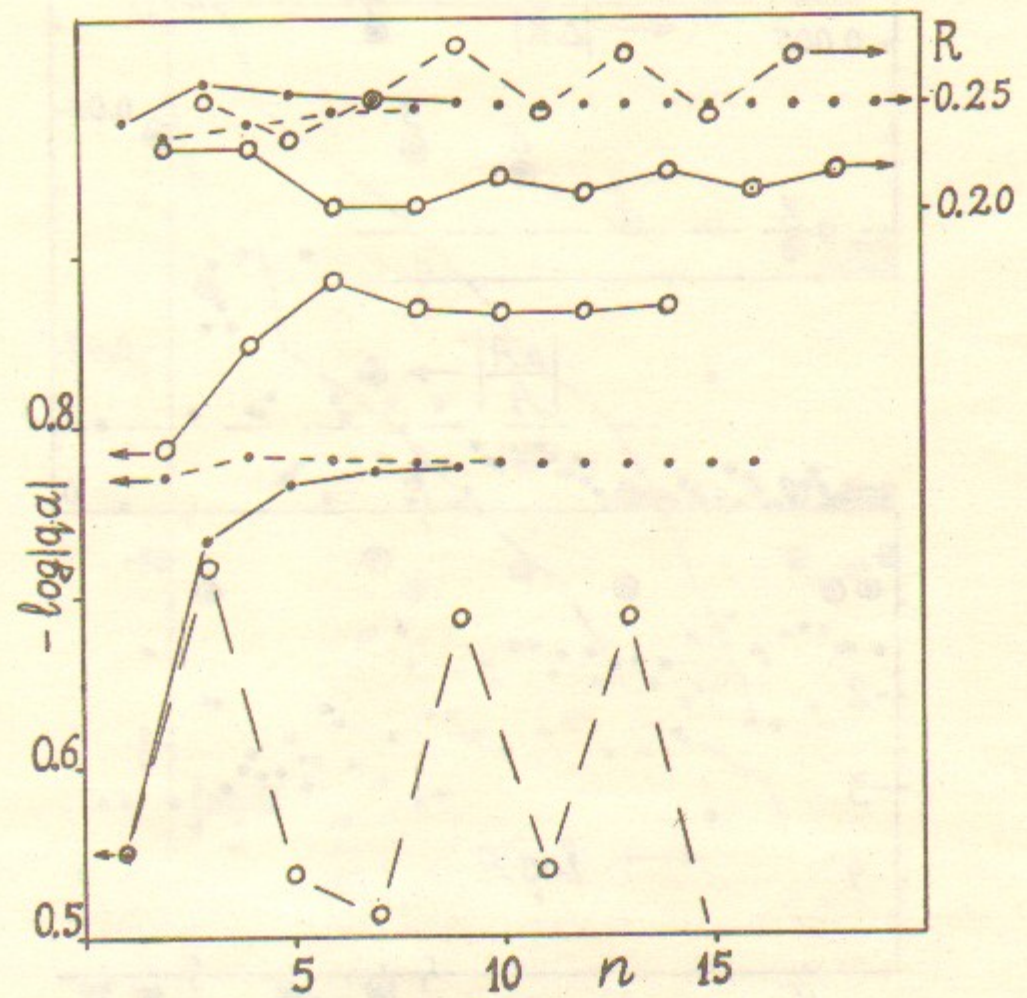


Рис.3

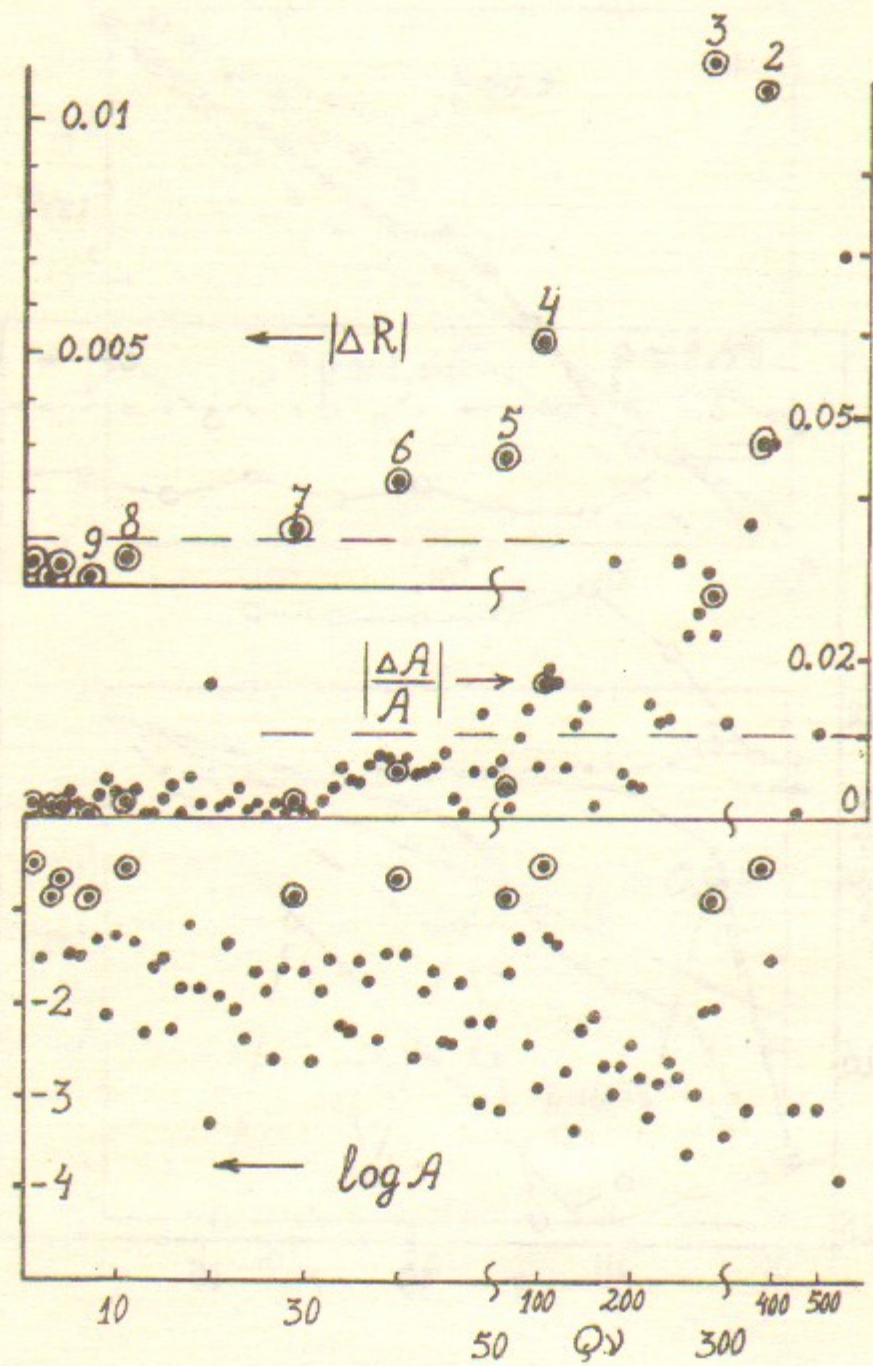


Рис.4

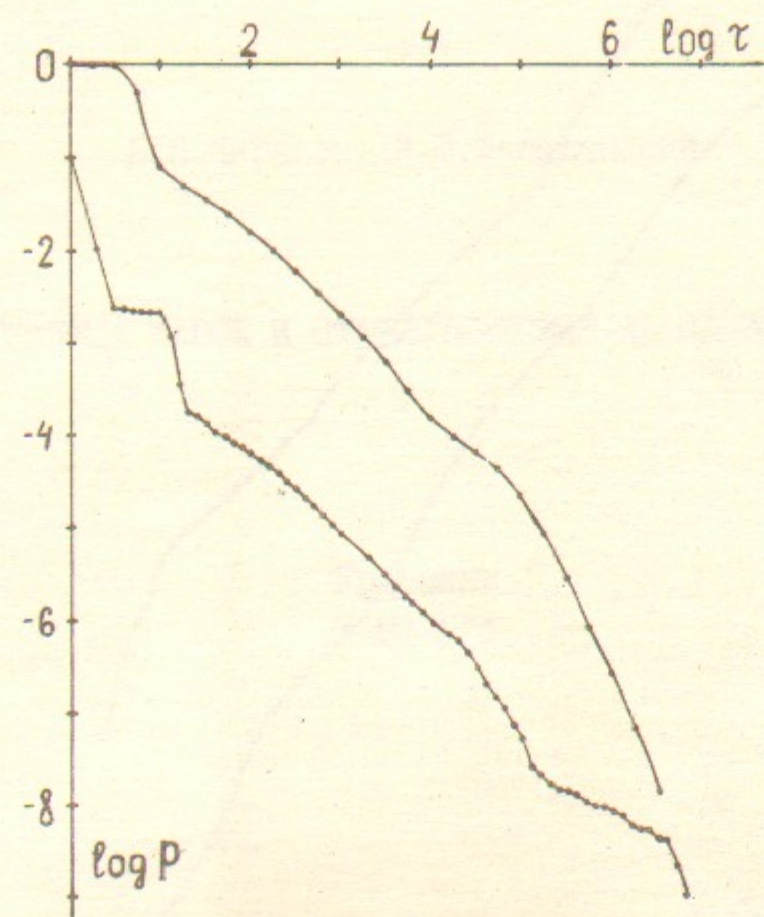


Рис.5

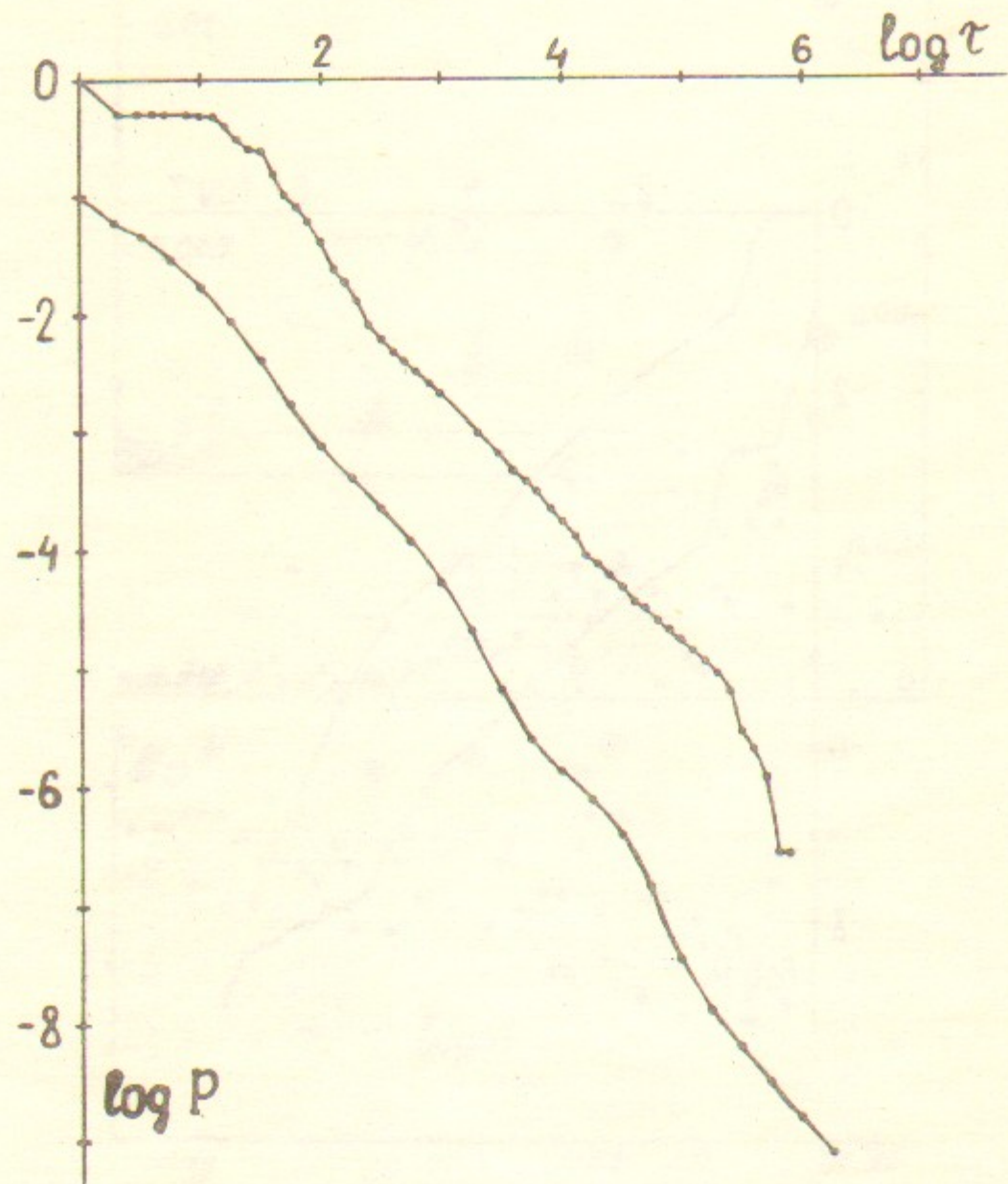


Рис.6

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

ГРАНИЦА ХАОСА И СТАТИСТИЧЕСКИЕ АНОМАЛИИ

Препринт
№ 86-174

Работа поступила - 26 июня 1986 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
 Подписано к печати 5.XII-1986г. МН 11883
 Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,0 печ.л., 1,6 учетно-изд.л.
 Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 174.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90