



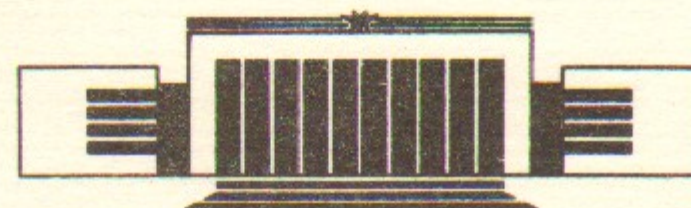
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

13

В.И. Ерофеев

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН
В ПЛАЗМЕ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ
ПУЧКОМ ЭЛЕКТРОНОВ С БОЛЬШИМИ
ПОПЕРЕЧНЫМИ СКОРОСТЯМИ

ПРЕПРИНТ 86-135



НОВОСИБИРСК

1986

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена теория пучковой неустойчивости для случая сжатого магнитным полем электронного пучка, в котором велики поперечные магнитному полю составляющие скоростей электронов. При различных величинах магнитного поля получены оценки инкремента и исследовано влияние неоднородности плотности плазмы на релаксацию пучка.

АБСТРАКТ

The theory of beam instability is considered for the case of a magnetically compressed electron beam. The transversal velocities of particles with respect to magnetic field are supposed to be not negligibly small. The estimates are derived of the instability growth rate for different magnetic fields. The influence is studied of the plasma density inhomogeneity on beam relaxation.

Для количественных предсказаний эффективности нагрева плазмы электронными пучками необходимы надежные оценки инкремента пучковой неустойчивости. Оценки, известные в настоящее время, соответствуют случаю, когда пучок генерируется в так называемом плоском диоде, а начальные угловые характеристики пучка определяются рассеянием электронов в анодной фольге (см. например, [1, 2]). В этом случае угловое распределение электронов в грубом приближении является гауссовым с центром при $\theta=0$ (здесь и ниже через θ обозначаетсяpitch-угол электрона в ведущем магнитном поле), причем абсолютная величина инкремента тем больше, чем меньше угловой разброс пучка $\Delta\theta$, который, соответственно, обычно стремятся уменьшить. Использование в расчетах такой структуры функции распределения пучковых электронов существенно влияет на выводы, касающиеся оценок инкремента, относительной роли черенковского и доплеровских резонансов, оценок влияния неоднородностей плотности плазмы на неустойчивость и т. д.

В последнее время обсуждается возможность увеличения энергосодержания электронного пучка и его длительности посредством его получения в бесфольговом диоде при относительно небольшой плотности тока с последующей компрессией пучка (см. [3, 4]). В процессе компрессии пучка pitch-углы его электронов возрастают; именно этим обстоятельством и ограничивается максимально возможная степень компрессии. Так как для улучшения удельных энергетических характеристик пучка (мощности на единицу сечения) желательно доводить плотность тока в нем до предельно дос-

тижимых значений, питч-угол электронов пучка будет порядка единицы, но так как при этом разброс питч-углов будет по-прежнему мал по сравнению со средним значением питч-угла, инкремент пучковой неустойчивости, который определяется именно угловым разбросом, может оставаться большим [5]. Соответственно, представляет интерес провести расчеты инкремента для функции распределения электронов пучка, показанной на рис. 1. Прямое перенесение на этот случай ранее выполненных расчетов [1, 2], как явствует из вышесказанного, невозможно, поэтому в настоящей работе приведены вычисления инкремента для моноэнергетического электронного пучка с питч-углом порядка единицы и малым угловым разбросом.

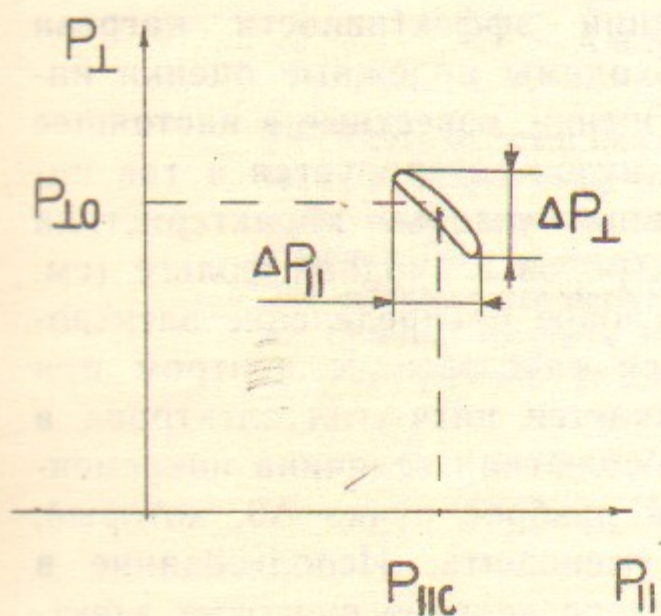


Рис. 1. Область пространства импульсов, занятая пучком. Пучок аксиально-симметричен; разброс по p_{\parallel} и p_{\perp} мал: $\Delta p_{\parallel} \ll p_{\parallel 0}$, $\Delta p_{\perp} \ll p_{\perp 0}$.

Структурно работа состоит из двух частей. В первой части (разделы 1—3) рассматривается линейный инкремент неустойчивости, развивающейся при прохождении электронного пучка через однородную плазму. Классификация различных режимов пучковой неустойчивости приводится в разделе 1. В разделе 2 рассматривается случай плазмы без магнитного поля. В разделе 3—случай магнитоактивной плазмы. Во второй части работы (раздел 4) обсуждается влияние неоднородности плазмы на релаксацию пучка.

Основные результаты работы изложены в заключении.

1. РЕЖИМЫ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Формула для инкремента неустойчивости ленгмюровских волн выводится стандартным образом [6] из дисперсионного уравнения. В нашем случае дисперсионное уравнение имеет вид

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{4\pi e^2}{k^2} \sum_n \int dp \frac{J_n^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_H}\right)}{k_{\parallel} v_{\parallel} + n\omega_H / \gamma - \omega - i0} \times \left[k_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} + \frac{n\omega_H}{\gamma v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right] = 0.$$

Здесь f —функция распределения электронов пучка; k_{\parallel} и k_{\perp} , p_{\parallel} и p_{\perp} —соответственно параллельные магнитному полю и поперечные ему компоненты волнового вектора \mathbf{k} и импульса \mathbf{p} ; γ —релятивистский фактор электрона. Ларморовская частота ω_H считается без учета релятивизма электронов: $\omega_H = \frac{eH}{m_0 c}$. $J_n(x)$ —функция Бесселя.

Дисперсионное уравнение написано в предположении потенциальности ленгмюровских волн ($\omega_H^2 \ll \omega_p^2$) и в пренебрежении дисперсией волн, как тепловой, так и магнитной. В общем случае решения ω дисперсионного уравнения являются комплексными величинами:

$$\omega = \omega_k - i\Gamma_k;$$

Γ_k —инкремент неустойчивости волн с данным \mathbf{k} .

Для упрощения дальнейших вычислений удобно перейти к безразмерным переменным. Будем измерять импульс электрона в единицах $m_0 c$, скорость в единицах c , волновой вектор \mathbf{k} в единицах ω_p/c , частоту ω в единицах ω_p . В этих переменных дисперсионное соотношение имеет вид:

$$1 - \frac{1}{\omega^2} - \frac{n_b}{n_0} \frac{1}{k^2} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2\left(\frac{k_{\perp} p_{\perp}}{v}\right)}{k_{\parallel} v_{\parallel} + n v / \gamma - \omega - i0} \times \left[k_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} + \frac{n v}{p_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right] = 0.$$

Здесь $v = \omega_H / \omega_p$; функция распределения f нормирована на единицу.

В задаче имеется три характерных масштаба частот. Это, во-первых, инкремент неустойчивости Γ . Во-вторых, циклотронная частота v/γ . И, в-третьих, уширение циклотронного резонанса из-за разброса электронов пучка по продольной скорости и энергии:

$$\tilde{\Delta} = k_{\parallel} \Delta v_{\parallel} + n v \Delta \frac{1}{\gamma}$$

В зависимости от их соотношения реализуются те или иные режимы неустойчивости. Их классификацию удобно произвести следующим образом.

Рассмотрим отдельный циклотронный резонанс. Его ширина складывается из двух величин: Γ и $\tilde{\Delta}$. Если она велика по сравнению с v/γ , то соседние резонансы перекрываются. В этом случае влиянием магнитного поля можно пренебречь. Неустойчивость будет кинетической, если

$$\Gamma \ll k_{\parallel} \Delta v_{\parallel} + k_{\perp} v_{\perp},$$

и гидродинамической, если

$$\Gamma \gg k_{\parallel} \Delta v_{\parallel} + k_{\perp} v_{\perp}.$$

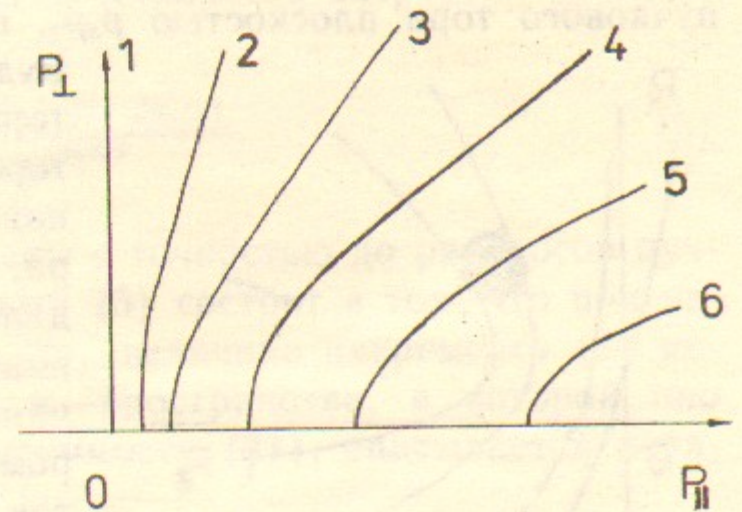
Если же ширина резонанса мала по сравнению с v/γ , то отдельные циклотронные резонансы расщеплены. В этом случае эффект магнитного поля существен. При $\Gamma \ll \tilde{\Delta}$ неустойчивость кинетическая, а при $\Gamma \gg \tilde{\Delta}$ — гидродинамическая.

2. ПУЧКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ПЛАЗМЕ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При не слишком малом разбросе электронов пучка по питч-углу неустойчивость будет кинетической. В случае пучка, генерируемого в кольцевом бесфольговом диоде, это условие обычно выполняется. Для такого пучка эффективный угловой разброс определяется степенью пространственной неоднородности питч-угла θ_p в поперечной магнитному полю плоскости. Получение пучков с однородным по сечению θ_p сопряжено с большими техническими трудностями (жесткие требования к конструкции катода, см. [5]). Поэтому именно кинетический инкремент неустойчивости и представляет наибольший интерес. Его исследование мы проведем следующим образом. Сначала мы рассмотрим качественное поведение инкремента в пространстве волновых векторов, после чего получим оценки инкремента наиболее неустойчивых волн.

Рис. 2. Форма резонансной поверхности в зависимости от модуля волнового вектора k .

1 — $k = \infty$;	4 — $k = 1,3$
2 — $k = 3$;	5 — $k = 1,1$
3 — $k = 2$;	6 — $k = 1,05$



1. Рассмотрим формулу инкремента кинетической пучковой неустойчивости в плазме без магнитного поля

$$\Gamma_k = \frac{\pi}{2} \frac{n_b}{n_0} \frac{1}{k^2} \int d^3 p \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \delta(1 - \mathbf{k} \mathbf{v}). \quad (1)$$

Инкремент Γ_k представляет собой интеграл проекции вектора $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$ на вектор \mathbf{k} , взятый по резонансной поверхности $\mathbf{k} \mathbf{v} = 1$. В импульсном пространстве резонансная поверхность имеет довольно сложный вид вследствие релятивистской связи \mathbf{v} и \mathbf{p} . Обратимся к рис. 2. На нем схематично изображены несколько резонансных поверхностей. Они соответствуют волновым векторам \mathbf{k} с одним и тем же направлением, но разной длиной. По оси абсцисс отложена параллельная вектору \mathbf{k} составляющая импульса \mathbf{p} , а по оси ординат — абсолютное значение поперечной вектору \mathbf{k} составляющей импульса. Значению $k = \infty$ соответствует плоскость $p_{\parallel} = 0$. По мере уменьшения k форма резонансной поверхности изменяется: угол раствора ее «конуса» постепенно уменьшается. Наконец, при $k \leq 1$ резонансная поверхность исчезает, так как при этом фазовая скорость волны больше скорости света.

В пространстве импульсов пучок представляет собой тор, ось вращения которого направлена вдоль магнитного поля. Рассмотрим сечения этого тора различными резонансными поверхностями. Зафиксируем направление волнового вектора \mathbf{k} . Резонансная поверхность, соответствующая данному направлению \mathbf{k} , в импульсном пространстве представляет собой поверхность вращения от-

носителем этого направления (см. рис. 3, где показано сечение пучкового тора плоскостью $p_x p_z$, параллельной векторам \mathbf{k} и \mathbf{H}).

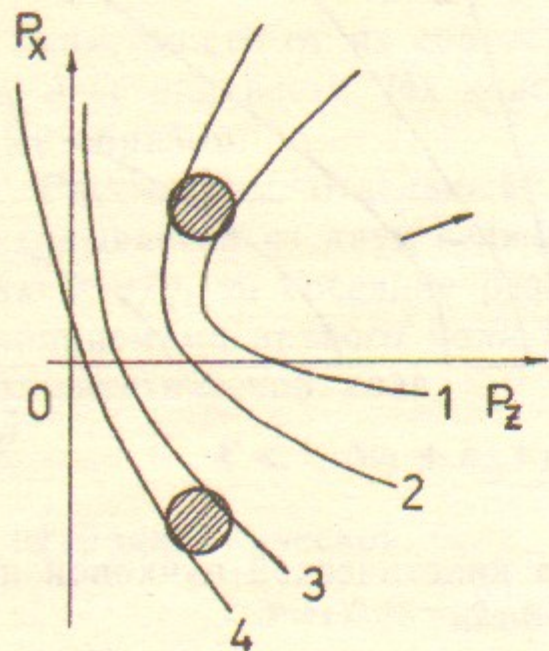


Рис. 3. Сечения пучкового тора и нескольких резонансных поверхностей плоскостью векторов \mathbf{k} и \mathbf{H} (\mathbf{H} параллельно оси z).

Будем менять длину волнового вектора k от $k=1$ до $k=\infty$. При некотором значении $k=k_1$ резонансная поверхность касается пучкового тора, а затем пересекает его. При дальнейшем увеличении k резонансная поверхность в одних случаях выходит из пересечения с тором (если направление \mathbf{k} выбрано так, что $k_{\perp}/k_{\parallel} > p_{\parallel}/p_{\perp}$), а в других она пересекает тор вплоть до $k=\infty$.

Наибольший интерес представляют те волны, которые почти касаются пучкового тора, рассекая его по односвязной области. Четыре таких поверхности изображены на рис. 3. Поверхности 1 и 4 «касаются» пучкового тора внешним образом. В сечении тора поверхностью 1 величина $\mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$ всюду отрицательна, что соответствует

затуханию волны. В сечении тора поверхностью 4 величина $\mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$ всюду положительна — волна раскачивается. В сечениях тора поверхностями 2 и 3 имеются участки как с положительным знаком $\mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$, так и с отрицательным. В большей части сечения тора поверхностью 2 знак $\mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$ положителен, а поверхностью 3 — отрицателен. Поэтому волна, соответствующая резонансной поверхности 2 раскачивается, а резонансной поверхности 3 — затухает.

2. Приступим к количественной оценке инкремента. В формуле (1) проведем интегрирование по азимутальному углу φ (φ — угол между поперечными магнитному полю составляющими векторов \mathbf{k} и \mathbf{p})

$$\Gamma = \pi \frac{n_b}{n_0} \frac{1}{k^2} \int p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} \frac{k_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} + \frac{1-k_{\parallel} v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}}}{\sqrt{(k_{\perp} v_{\perp})^2 - (1-k_{\parallel} v_{\parallel})^2}}. \quad (2)$$

При больших значениях k_{\perp} знаменатель в этой формуле слабо меняется в занятой пучком области пространства скоростей. Для таких k_{\perp}

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{n_b}{n_0} \frac{1}{\gamma k^2} \frac{-2k_{\perp}^2 v_{\perp}^2 + (1-k_{\parallel} v_{\parallel})(1+k^2-2k_{\parallel} v_{\parallel})}{(k_{\perp}^2 v_{\perp}^2 - (1-k_{\parallel} v_{\parallel})^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

В этой формуле v_{\parallel} и v_{\perp} определены с точностью до разбросов пучка Δv_{\parallel} , Δv_{\perp} . Условие применимости (3) состоит в том, что при изменении v_{\parallel} и v_{\perp} в пределах Δv_{\parallel} , Δv_{\perp} величина инкремента (3) меняется незначительно. Область \mathbf{k} -пространства, в которой оно выполняется (т. е. область применимости (3)), описывается неравенством

$$k_{\perp} - \frac{|1-k_{\parallel} v_{\parallel}|}{v_{\perp}} \gg \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp} \Delta v_{\perp} + |1-k_{\parallel} v_{\parallel}| k_{\parallel} \Delta v_{\parallel}}{k_{\perp} v_{\perp}^2}.$$

Волновые векторы интересующих нас волн (у которых резонансные поверхности «касаются» пучкового тора) в эту область не попадают. Поэтому для вычисления инкремента этих волн формула (3) неприменима. Оценку инкремента можно получить, вычисляя значение инкремента Γ , соответствующее границе области применимости (3). Она имеет вид

$$\Gamma \sim \frac{1}{\gamma} \frac{n_b}{n_0} \frac{k_{\perp} v_{\perp} (k^2-1)}{k^2 (2k_{\perp} \Delta k_{\perp})^{3/2} v_{\perp}^3}, \quad (4)$$

где

$$\Delta k_{\perp} = k_{\perp} - \frac{|1-k_{\parallel} v_{\parallel}|}{v_{\perp}} \sim \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp} \Delta v_{\perp} + |1-k_{\parallel} v_{\parallel}| k_{\parallel} \Delta v_{\parallel}}{k_{\perp} v_{\perp}^2}$$

Наибольшие абсолютные значения инкремента имеют продольные волны с $k_{\parallel} \approx \frac{1}{v_{\parallel}}$ ($|k_{\parallel} - \frac{1}{v_{\parallel}}| \lesssim \frac{\Delta v_{\parallel}}{v_{\parallel}}$, $k_{\perp} \lesssim \frac{\Delta v_{\parallel}}{v_{\parallel} v_{\perp}}$). Для них оценка (4) имеет вид

$$\Gamma \sim \frac{n_b}{n_0} \frac{1-v_{\parallel}^2}{\gamma} \left(\frac{v_{\parallel}}{\Delta v_{\parallel}} \right)^2, \quad (5)$$

что находится в полном соответствии с известной оценкой для случая пучка электронов с малыми поперечными скоростями

($\Delta \theta \gg \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\Delta \gamma}{\gamma}}$, где $\Delta \theta$ — угловой разброс пучка) [1].

Мы закончили исследование кинетического режима пучковой неустойчивости. На рис. 4 изображены области k -пространства, в которых справедливы полученные оценки.

При малом угловом разбросе пучка кинетическое описание неустойчивости параллельных магнитному полю волн несправедливо.

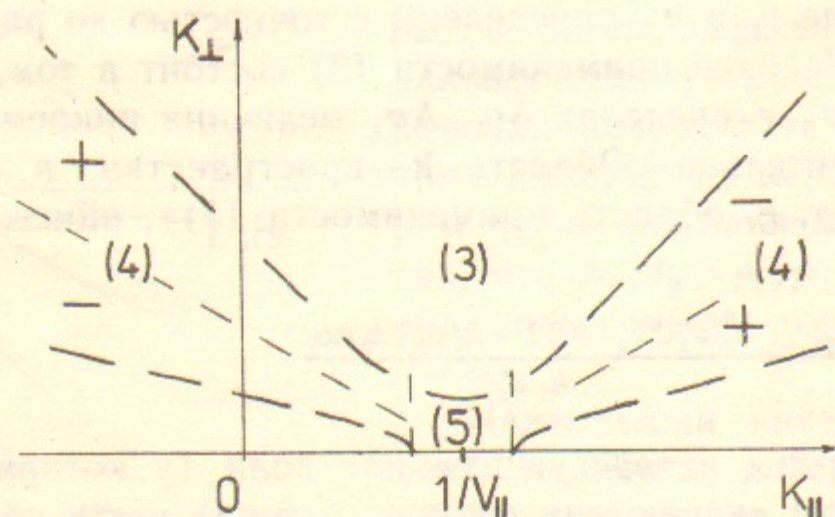


Рис. 4. Кинетический инкремент пучковой неустойчивости в плазме без магнитного поля. Изображены различные участки плоскости $k_{\parallel} k_{\perp}$ с соответствующими номерами оценок инкремента. Участки (4) и (5) соответствуют наиболее сильному взаимодействию волн с пучком. В них проставлен знак инкремента.

Критерий применимости кинетического описания для этих волн имеет вид

$$\left(\frac{\Delta v_{\parallel}}{v_{\parallel}}\right)^3 \gg \frac{n_b}{n_0} \frac{1-v_{\parallel}^2}{\gamma}$$

Если он не выполняется, то в плазме в гидродинамическом режиме раскачиваются продольные потенциальные колебания с собственными частотами пучка $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel}$. Из них наиболее неустойчивы ленгмюровские волны, у которых $k_{\parallel} = \frac{1}{v_{\parallel}}$. Инкремент этих волн описывается формулой

$$\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{n_b}{n_0} \frac{1-v_{\parallel}^2}{\gamma}} \quad (6)$$

которая справедлива в области k -пространства

$$k_{\perp} v_{\perp} + |k_{\parallel} - \frac{1}{v_{\parallel}}| \lesssim \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{n_b}{n_0} \frac{1-v_{\parallel}^2}{\gamma}}$$

Что касается косых ленгмюровских волн, то они раскачиваются (или затухают) в кинетическом режиме.

3. ПУЧКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ПЛАЗМЕ С СИЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В этом разделе мы рассмотрим кинетический режим неустойчивости для плазмы с сильным магнитным полем. Исследование гидродинамического режима, как уже отмечалось, особого интереса не представляет (хотя технически оно легко осуществимо^{*)}).

Рассмотрим волны, у которых волновой вектор находится внутри резонансной области, соответствующей n -му циклотронному резонансу:

$$\frac{1-nv/\gamma}{v_{\parallel 0}} - \frac{\tilde{\Delta}}{v_{\parallel 0}} \lesssim k_{\parallel} \lesssim \frac{1-nv/\gamma}{v_{\parallel 0}} + \frac{\tilde{\Delta}}{v_{\parallel 0}}$$

($v_{\parallel 0}$ — средняя скорость электронов пучка вдоль магнитного поля). Формула для инкремента неустойчивости одной из таких волн имеет вид

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} \frac{n_b}{n_0} \frac{1}{k^2} \int p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} d\varphi J_n^2\left(\frac{k_{\perp} p_{\perp}}{v}\right) \times \\ \times \delta(1-k_{\parallel} v_{\parallel} - nv/\gamma) \left[k_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} + \frac{nv}{p_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right]$$

Запишем ее в переменных p , φ и $\eta = k_{\parallel} v_{\parallel} + nv/\gamma$

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} \frac{n_b}{n_0} \frac{1}{k^2} \int \frac{p^2 dp d\varphi d\eta}{k_{\parallel} v} \delta(1-\eta) J_n^2\left(\frac{k_{\perp} p_{\perp}}{v}\right) \times \\ \times \left[\gamma \eta \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{\gamma} (k_{\parallel}^2 - \eta^2) \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] \quad (7)$$

^{*)} Оценку инкремента гидродинамической неустойчивости ленгмюровских волн легко получить из оценки инкремента кинетической неустойчивости. Для этого следует вычислить оценку кинетического инкремента, соответствующую границе ее применимости по угловому разбросу $\Delta\theta$.

Сначала рассмотрим случай пучка электронов с достаточно малым энергетическим разбросом, когда можно воспользоваться дельтаобразным приближением функции распределения по p

$$f = \frac{F(\eta) k_{\parallel} v}{2\pi p^2} \delta(p - p_0). \quad (8)$$

Здесь $F(\eta)$ — «колоколоподобная» функция, нормированная на единицу ($\int F(\eta) d\eta = 1$), с центром в точке $\eta_0 = k_{\parallel} v_{\parallel 0} + nv/\gamma$. Ширина интервала, в котором определена $F(\eta)$, порядка $\tilde{\Delta}$:

$$|\eta - \eta_0| \approx \tilde{\Delta}.$$

В нашем случае

$$\tilde{\Delta} \sim k_{\parallel} v \sin \theta \Delta \theta.$$

Подставляя (8) в (7) и проводя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{\pi}{2} \frac{n_b}{n_0} \frac{1}{k^2} \left[-F J_n^2(x) v \left(3 + \frac{1}{p^2} \right) - \right. \\ & - F \frac{d}{dx} J_n^2(x) \frac{k_{\perp} \gamma}{v \sin \theta} \left(1 - \frac{v \cos \theta}{k_{\parallel}} \right) + \\ & \left. + \frac{k_{\parallel}^2 - 1}{\gamma} J_n^2(x) \frac{dF}{d\eta} \right] \Big|_{p=p_0, \eta=1} \quad (9) \end{aligned}$$

В этой формуле $\cos \theta$ и x являются функциями импульса p :

$$\cos \theta = \frac{1 - nv/\gamma}{k_{\parallel} v}, \quad x = \frac{k_{\perp} p \sin \theta}{v}.$$

Сначала ограничимся случаем, когда внутри рассматриваемой резонансной области величина $|k_{\parallel}|$ не слишком близка к единице

$$||k_{\parallel}| - 1| \gtrsim \frac{\tilde{\Delta}}{2} \max \left(\left(3p + \frac{1}{p} \right) v, \frac{k_{\perp} \gamma (1 - v \cos \theta)}{v \sin \theta} \right). \quad (10)$$

В этом случае в большей части резонансной области инкремент оценивается по третьему слагаемому в (9)

$$\Gamma \sim \frac{\pi}{2} \frac{n_b}{n_0} \frac{1}{k^2} J_n^2(x) \frac{k_{\parallel}^2 - 1}{\gamma \tilde{\Delta}^2}. \quad (11)$$

Вклад в инкремент Γ второго слагаемого в (9) существен лишь в

узких по k_{\perp} полосках, внутри которых величина x принимает значения нулей функции Бесселя:

$$\left| \frac{k_{\perp} - k_{\perp 0}}{k_{\perp 0}} \right| \lesssim \frac{1}{v_0 \sin^2 \theta} \left| \frac{k_{\parallel} v_0 \sin \theta \gamma \Delta \theta}{k_{\parallel}^2 - 1} \left(1 - \frac{v_0 \cos \theta}{k_{\parallel}} \right) \right|$$

$(k_{\perp 0}(k_{\parallel}))$ — линия в плоскости $k_{\parallel} k_{\perp}$, на которой $J_n(x) = 0$. Величина инкремента внутри этих полосок меньше максимального значения инкремента в соседних по k_{\perp} участках (где справедлива оценка (11)), по крайней мере в

$$\left(\tilde{\Delta} \frac{k_{\perp} \gamma^2}{v \sin \theta} \frac{1 - \frac{v_0 \cos \theta}{k_{\parallel}}}{k_{\parallel}^2 - 1} \right)^2 \text{ раз.}$$

Обратимся к рис. 5. На нем изображены несколько резонансных областей. Каждая резонансная область разделена штриховой линией на две части, в которых проставлен знак инкремента. Он

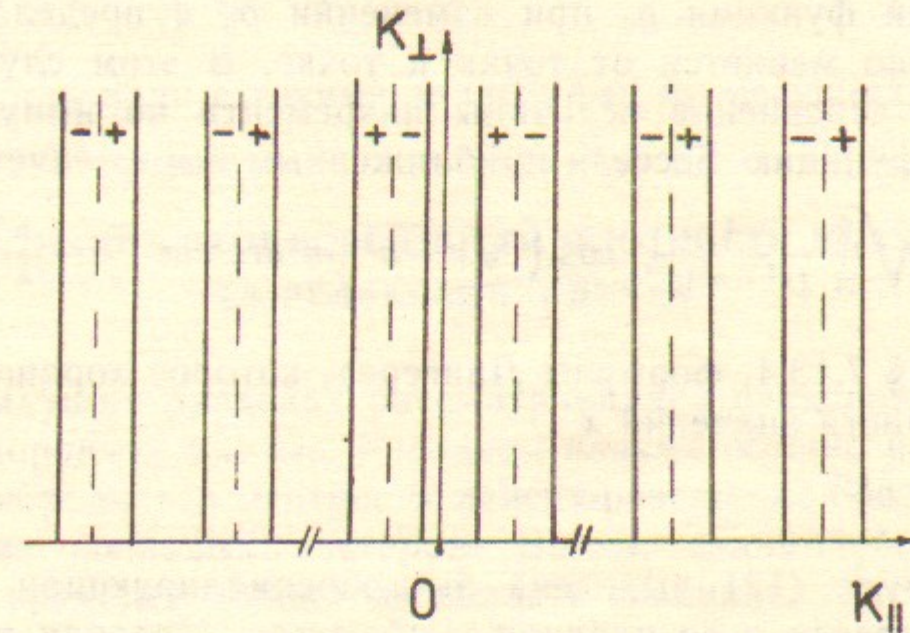


Рис. 5. Области резонансного взаимодействия и знак инкремента в их различных участках в кинетическом режиме пучковой неустойчивости в плазме с сильным магнитным полем. Левая часть рисунка соответствует волнам с $k_{\parallel} < -1$, средняя часть — волнам с $|k_{\parallel}| < 1$, правая часть — волнам с $k_{\parallel} > 1$.

определяется знаком производной $\frac{dF}{d\eta}$ в точке резонанса $\eta = 1$ и знаком $k_{\parallel}^2 - 1$.

Внутри резонансных областей, в которых $|k_{\parallel}|$ близок к единице (неравенство (10) нарушено), инкремент в

$$2|\tilde{k}_{\parallel}-1| / \left[\tilde{\Delta} \max \left((3\rho+1/\rho)v, \frac{k_{\perp} \gamma (1-v \cos \theta)}{v \sin \theta} \right) \right]$$

раз меньше инкремента (11) для волн из соседних резонансных областей (\tilde{k}_{\parallel} — продольная составляющая волнового вектора волны из соседней резонансной области).

Таким образом, для величины инкремента фактически всегда можно пользоваться оценкой (11).

Мы получили оценку инкремента в приближении моноэнергетического пучка электронов. Такое приближение оправдано, если при изменении ρ_0 (см. формулу (9) и оценку (11)) в пределах разброса пучка величина инкремента остается фактически постоянной. Допустимый этим условием энергетический разброс определяется неравенством

$$\Delta\rho \ll \frac{v}{k_{\perp} \sin \theta} \sqrt{1 - \left(\frac{nv}{k_{\perp} \rho \sin \theta} \right)^2}$$

В обратном предельном случае рассчитанный по формуле (9) инкремент как функция ρ_0 при изменении ρ_0 в пределах разброса пучка сильно меняется от точки к точке. В этом случае следует произвести усреднение величины инкремента по импульсу. Заменим в (9) функцию Бесселя приближенным выражением

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(x^2-n^2)^{1/4}} \cos \left(\sqrt{x^2-n^2} - n \arccos \frac{n}{x} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (12)$$

(ср. с [7], § 7.13.4, формулы Лангера), которое хорошо описывает $J_n(x)$ в области значений x

$$x - n \gtrsim n^{1/3}.$$

В формуле (12) выделена быстроосциллирующая по x часть функции Бесселя и ее плавная огибающая. Проводя в (9) усреднение по быстрым осцилляциям, получим

$$\Gamma = \frac{\pi n_b}{2 n_0 k^2} \left[-F \frac{k_{\perp} v}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho^2}{k_{\parallel} v} \gamma \frac{1}{\pi ((k_{\perp} \rho_{\perp}/v)^2 - n^2)^{1/2}} \right) + \frac{k_{\perp}^2 - 1}{\gamma} \frac{1}{\pi ((k_{\perp} \rho_{\perp}/v)^2 - n^2)^{1/2}} \frac{dF}{d\eta} \right] \Big|_{\rho=\rho_0, \eta=1}.$$

Отсюда следует оценка

$$\Gamma \sim \frac{1}{2} \frac{n_b}{n_0} \frac{k_{\perp}^2 - 1}{\gamma k^2} \frac{1}{((k_{\perp} \rho_{\perp}/v)^2 - n^2)^{1/2}} \frac{1}{\tilde{\Delta}^2}. \quad (13)$$

Она справедлива при k_{\parallel} не слишком близком к единице (условие (10)) и $k_{\perp} \rho_{\perp}/v - n \gtrsim n^{1/3}$. Если $|k_{\perp} \rho_{\perp}/v - n| \lesssim n^{1/3}$, ее следует заменить оценкой

$$\Gamma \sim \frac{1}{2} \frac{n_b}{n_0} \frac{k_{\perp}^2 - 1}{\gamma k^2} \frac{1}{n^{2/3}} \frac{1}{\tilde{\Delta}^2}. \quad (14)$$

При меньших значениях k_{\perp} ,

$$k_{\perp} - \frac{nv}{\rho_{\perp}} \ll -\frac{v}{\rho_{\perp}} n^{1/3},$$

величина инкремента экспоненциально мала:

$$\Gamma \sim \exp \left(- \int_{k_{\perp}}^{nv/\rho_{\perp}} \sqrt{\frac{n^2}{k_{\perp}^2} - \frac{\rho_{\perp}^2}{v^2}} dk_{\perp} \right).$$

Неустойчивость волн с такими значениями k_{\perp} несущественна.

4. ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ НА РЕЛАКСАЦИЮ ПУЧКА.

В предыдущих разделах рассматривалась пучковая неустойчивость в однородной плазме. Реальная плазма обычно неоднородна. Из-за неоднородности плотности ленгмюровские волны дрейфуют в пространстве волновых векторов. Волна, взаимодействующая с пучком, со временем выйдет из области резонанса. Это приведет к срыву релаксации пучка, если за время взаимодействия с пучком плотность энергии волны не успеет вырасти до сколь-нибудь значительной величины.

С практической точки зрения срыв релаксации пучка — недопустимое явление. Поэтому большой интерес представляет степень неоднородности плазмы, при которой он происходит. Этому вопросу посвящен данный раздел.

Обратимся к плазме без магнитного поля. В ней спонтанно рождаются и гибнут флуктуации электрического поля. Некоторые из них рождаются в резонансной области и раскачиваются в ней.

Релаксация пучка происходит только в том случае, когда уровень, до которого за время взаимодействия с пучком успевает вырасти их энергия, сопоставим с энергией пучка^{*}). Этот уровень определяется интегралом $\int \Gamma_k(t) dt$ по области с $\Gamma > 0$. Таким образом, для релаксации пучка необходимо выполнение неравенства

$$\int \Gamma_k(t) dt > \Lambda,$$

$$\Lambda \sim \ln(W_b/nT).$$

С помощью оценок (4) — (5) легко убедиться, что наибольшее значение интеграла $\int \Gamma_k dt$ набирают продольные волны:

$$\left| k_{\parallel} - \frac{1}{v_{\parallel}} \right| \approx \frac{\Delta v_{\parallel}}{v_{\parallel}} \sim \frac{\sin \theta \Delta \theta}{v \cos^2 \theta},$$

$$k_{\perp} \sim \frac{\Delta v_{\perp}}{v_{\parallel} v_{\perp}} \sim \frac{\Delta \theta}{v \cos \theta}.$$

(В этом разделе мы по-прежнему пользуемся безразмерными величинами. Время t измеряется в единицах ω_p^{-1} , а длина L — в единицах c/ω_p .) Сквозь резонансную область они проходят за время

$$\frac{\sin \theta \Delta \theta}{v \cos^2 \theta} L_{\parallel}$$

в случае продольной неоднородности масштаба L_{\parallel} и за время

$$\frac{\Delta \theta}{v \cos \theta} L_{\perp}$$

в случае поперечной неоднородности масштаба L_{\perp} . Отсюда следует, что неоднородность плазмы несущественна лишь при

$$L_{\parallel} > \frac{n_0}{n_b} \frac{2\Lambda}{p} \frac{\rho \sin \theta \Delta \theta}{1 - v_{\parallel}^2},$$

$$L_{\perp} > \frac{n_0}{n_b} \frac{2\Lambda \rho}{\pi(1 - v_{\parallel}^2)} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \Delta \theta. \quad (15)$$

Как видно из (15), в случае продольного пучка ($\theta \sim \Delta \theta$) более

^{*}) Такой способ оценки роли неоднородности плотности впервые использовался в [8], где получен минимальный масштаб продольной неоднородности, не влияющей на релаксацию в случае продольного пучка в плазме без магнитного поля. Соответствующий поперечный масштаб был получен в [9].

жестким является ограничение на степень продольной неоднородности плазмы. Наоборот, если в пучке продольные скорости электронов малы в сравнении с их поперечными скоростями, ограничение на продольную неоднородность мягче ограничения на поперечную неоднородность.

Теперь обратимся к случаю сильного магнитного поля. В этом случае всегда ограничение на степень продольной неоднородности жестче ограничения на степень поперечной неоднородности. Это связано с тем, что дрейф волны по k_{\perp} не выводит ее из резонансной области.

Рассмотрим циклотронный резонанс с номером n . Будем интересоваться наибольшими масштабами неоднородности $L_{\parallel}(n)$ и $L_{\perp}(n)$, при которых релаксация пучка на данном циклотронном резонансе сорвана. При их вычислении воспользуемся оценками (13—14) величины инкремента. Проводя вычисления аналогично случаю плазмы без магнитного поля, получим:

$$L_{\parallel}(n) = \frac{2\Lambda n_0}{n_b} \frac{k^2 |k_{\parallel}|}{|k_{\parallel}^2 - 1|} \rho v \sin \theta \cos \theta \Delta \theta \times$$

$$\times \begin{cases} \sqrt{(k_{\perp} \rho_{\perp} / v)^2 - n^2}, & k_{\perp} \rho_{\perp} / v - |n| \gg |n|^{1/3} \\ n^{2/3}, & |k_{\perp} \rho_{\perp} / v - |n|| \lesssim |n|^{1/3}, \end{cases}$$

$$L_{\perp}(n) = \frac{2\Lambda n_0}{n_b} \frac{|k_{\parallel}| k^2}{|k_{\parallel}^2 - 1|} n^2 v \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{((k_{\perp} \rho_{\perp}) / (nv))^2}{1 + \ln |k_{\parallel} \rho_{\perp} / (nv)|}, & k_{\parallel} \rho_{\perp} \gtrsim |n| v \\ 1, & k_{\parallel} \rho_{\perp} \lesssim |n| v \end{cases} \quad (16)$$

(Мы следили за волнами с

$$k_{\perp} - |n| v / \rho_{\perp} \gtrsim - |n|^{1/3} v / \rho_{\perp},$$

так как волны с $k_{\perp} - |n| v / \rho_{\perp} \ll - |n|^{1/3} v / \rho_{\perp}$ на релаксацию пучка не влияют.)

Величины $L_{\parallel}(n)$ и $L_{\perp}(n)$ сильно зависят от номера циклотронного резонанса n . При некотором $n = n_{\parallel}$ длина $L_{\parallel}(n)$ имеет наименьшее возможное значение $L_{\parallel 0}$. Точно так же при некотором $n = n_{\perp}$ наименьшее значение $L_{\perp 0}$ имеет и длина $L_{\perp}(n)$. Легко видеть, что $L_{\parallel 0}$ и $L_{\perp 0}$ соответствуют ближайшей к началу координат

$k_{\parallel} = 0$ резонансной области, т. е. $n_{\parallel} = n_{\perp} \approx \gamma/v$. Оценки сверху величин $L_{\parallel 0}$ и $L_{\perp 0}$ можно получить, подставляя в (16) верхнюю оценку величины $|k_{\parallel}|$ для этой резонансной области. Последняя во всяком случае не больше $v/(\gamma v_{\parallel})$. Проводя вычисления, получим для $L_{\parallel 0}$ и $L_{\perp 0}$

$$\begin{aligned} L_{\parallel 0} &\sim \frac{2\Lambda n_0}{n_b} \frac{v\Delta\theta}{v \sin\theta}, \\ L_{\perp 0} &\sim \frac{2\Lambda n_0}{n_b} \frac{v \sin\theta (\Delta\theta)^2}{v \cos^2\theta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценка для $L_{\parallel 0}$ написана в предположении, что волны из рассматриваемого резонанса раскачиваются в кинетическом режиме. Это справедливо при условии

$$\bar{\Delta} = k_{\parallel} \Delta v_{\parallel} \gg \sqrt[3]{\frac{1}{2} \frac{n_b v_{\perp}^2}{n_0 \gamma} \left(\frac{v}{\gamma}\right)^{2/3}}.$$

Если же последнее условие не выполняется, то при оценке $L_{\parallel 0}$ следует воспользоваться кинетическим инкрементом на пределе его применимости. В этом случае оценка имеет вид

$$L_{\parallel 0} \sim \frac{\Lambda p \sin^2\theta}{v \cos\theta \Delta\theta} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} \frac{n_b v^2 \sin^2\theta}{n_0 \gamma} \left(\frac{v}{\gamma}\right)^{2/3}}}. \quad (18)$$

Что касается $L_{\perp 0}$, для него оценка (17) справедлива всегда.

По смыслу длина $L_{\perp 0}$ есть наименьший допустимый с точки зрения релаксации пучка масштаб поперечной неоднородности плазмы. Аналогичным масштабом для продольной неоднородности является и $L_{\parallel 0}$. Этот факт далеко не тривиален. На первый взгляд релаксация пучка возможна и при масштабах неоднородности, меньших $L_{\perp 0}$, если необходимое значение интеграла $\int \Gamma_{k(t)} dt$ набирается дрейфующей волной на большом числе резонансов. Но в действительности такая возможность исключена: срыв «групповой» релаксации происходит при меньшей степени неоднородности плазмы, чем срыв релаксации на отдельных резонансах. В этом можно убедиться следующим образом. При вычислении $\int \Gamma_{k(t)} dt$ расщеплением резонансов можно пренебречь. Поэтому очевидно, что масштаб неоднородности, при котором срывается «групповая» релаксация, во всяком случае больше L_{\parallel} (см. (15)). А масштаб $L_{\parallel 0}$ меньше, чем L_{\parallel} , в чем легко убедиться непосредственно.

Сравнивая полученные оценки (17—18) и (15) легко видеть, что включение сильного магнитного поля позволяет смягчить требования на степень неоднородности плазмы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена линейная теория неустойчивости скомпенсированного по току пучка электронов с большими поперечными скоростями в магнитоактивной плазме. Кроме того, рассмотрено влияние неоднородности плотности плазмы на релаксацию пучка. Показано, что включение магнитного поля существенно смягчает требования на степень однородности плазмы, особенно в поперечном направлении. Это может оказаться важным для экспериментов по нагреву плазмы сжатым электронным пучком.

Автор признателен Д.Д. Рютову за постановку задачи, М.С. Пеккеру, В.М. Малкину за обсуждение работы, Б.Н. Брейзману за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brejzman B.N., Ryutov D.D. Nucl. Fus., 1974, v.14, p.873.
2. Ferch R.L., Sudan R.N. Plasma Phys., 1975, v.17, p.905.
3. Рютов Д.Д. ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез, 1978, вып. 1—2, с.96.
4. Benford J, Bailey V, Oliver D. E-Beam Heated Solenoid Reactors. Paper presented at 2nd Topical Meeting on Technology of Controlled Nuclear Fusion. Richland, Washington, Sept. 21—23, 1976
5. Рютов Д.Д. Препринт ИЯФ 83-146
6. Шафранов В.Д. В сб.: Вопросы теории плазмы / Под ред. Леонтовича М.А., М.: Атомиздат, 1963, вып. 3, с.3.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
8. Брейзман Б.Н., Рютов Д.Д. Письма в ЖЭТФ, 1970, т. 11, с.606.
9. Веденов А.А., Рютов Д.Д. В сб.: Вопросы теории плазмы / Под ред. Леонтовича М.А., М.: Атомиздат, 1972, вып. 6, с.3.

В.И. Ерофеев

**Возбуждение ленгмюровских волн
в плазме с магнитным полем
пучком электронов с большими
поперчными скоростями**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 9 июня 1986 г.
Подписано в печать 4.09. 1986 г. МН 11811
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,8 печ.л., 1,5 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 135

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринте Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*