

57

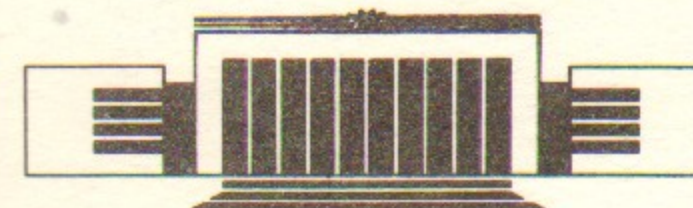
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР



А.Л. Герасимов, Ф.М. Израйлев, Дж. Теннисон

ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСОВ
ДЛЯ ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКОВ
С БОЛЬШИМ ОТНОШЕНИЕМ ПОПЕРЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

ПРЕПРИНТ 86-98



НОВОСИБИРСК

1986

Описание нелинейных резонансов
для встречных пучков
с большим отношением поперечных размеров

А.Л. Герасимов, Ф.М. Израйлев, Дж. Теннисон*

АННОТАЦИЯ

Проводится сравнительный анализ различных приближенных моделей для описания взаимодействия встречных пучков с большим отношением поперечных размеров $\kappa = \sigma_x/\sigma_z \gg 1$. Исследуются пределы применимости известных упрощенных моделей и предлагаются новые модели, удобные для численного моделирования и для аналитического описания нелинейных резонансов. Полученные формулы для изолированных резонансов сравниваются с численными данными.

* Колледж королевы Марии, Лондон, Англия.

Институт ядерной физики СО АН СССР

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время известно большое число работ по численному моделированию эффектов встречи частиц в электрон-позитронных накопителях. Тем не менее основная проблема нахождения оптимальных условий, при которых светимость в тех или иных установках будет максимальной, остается далеко не решенной. Это объясняется тем, что задача оптимизации является по существу многопараметрической, в то время как само моделирование взаимодействия пучков в ускорителе представляет собой отдельную и довольно сложную проблему. Основной подход для решения этой проблемы состоит в детальном исследовании физических явлений ограничения светимости в простых моделях и переходе к более сложным моделям, близким к реальной ситуации.

До недавнего времени рассматривались, в основном, «одномерные» модели, в которых учитывается движение частиц только в одном направлении, перпендикулярном к движению пучка как целого. Такие модели можно использовать для описания взаимодействия либо круглых в сечении пучков, либо, наоборот, почти плоских пучков, (см. например, обзоры [1—3]). В этом случае динамика отдельных частиц связана с одномерными нелинейными резонансами, которые могут приводить к увеличению поперечных размеров пучка, а, значит, и к уменьшению светимости.

В настоящее время влияние одномерных резонансов в эффектах встречи достаточно хорошо изучено. Необходимо отметить, что исследование даже сравнительно простых моделей дает возможность понять некоторые явления, имеющие место и в реальной ситуации. В частности, численное моделирование показало, что слабые эффекты синхротронных модуляций могут приводить к значи-

тельному понижению порога стохастичности и «раздуванию» поперечных размеров пучка (см. [1, 3]).

В действительности поперечное движение частиц в пучке является существенно «двумерным» и должно описываться моделями с двумя степенями свободы. Это обусловлено, в первую очередь, тем, что в поперечном сечении пучки в ускорителях, как правило, имеют эллиптическую форму. Поэтому движение отдельной частицы в поперечном сечении будет определяться как одномерными, так и двумерными резонансами. Детальное исследование «двумерных» моделей с эллиптическими пучками началось сравнительно недавно (см., например, [4—6]). Однако отсутствие простых аналитических формул для поля сил эллиптического пучка значительно осложняет не только теоретическое исследование свойств нелинейных резонансов, но и само численное моделирование. В имеющихся работах основные характеристики нелинейных резонансов либо получались из степенного разложения потенциала эллиптического пучка (см. например, [7]), либо представлялись в сложной интегральной форме [8—9]. Полученные выражения оказываются слишком громоздкими и не позволяют провести анализ свойств резонансов в зависимости от тех или иных параметров модели.

В настоящей работе предлагается иной подход, основанный на построении приближенных «двумерных» моделей и выводе относительно простых аналитических формул, позволяющих получать выражения, удобные для сравнения с результатами численного моделирования. Этот подход существенно использует то обстоятельство, что в действующих установках с электрон-электронными и электрон-позитронными пучками отношение поперечных размеров пучка $\kappa = \sigma_x / \sigma_z$, как правило, велико ($\kappa \gg 1$). Поэтому для приближенных моделей можно с самого начала учесть малость параметра $\nu = (1/\kappa) \ll 1$.

В § 2 в общем виде приводятся аналитические формулы для описания двумерных нелинейных резонансов в модели с двумя степенями свободы. Используется обычное приближение «тонкой линзы» без учета синхротронных колебаний. В следующем параграфе (§ 3) проводится сравнительный анализ нескольких упрощенных «двумерных» моделей для эллиптических пучков с большим отношением поперечных размеров. Определяется область поперечных смещений X, Z в которой движение частицы не слишком сильно отличается от истинного, описываемого точной моделью. Проводится сравнение численных результатов для всех рассматриваемых

моделей. Предлагаются две новые приближенные модели, достаточно хорошо описывающие истинное движение. В § 4 проводится аналитическое вычисление основных характеристик нелинейных резонансов в наиболее простой модели. Анализируются условия, при которых полученные выражения дают хорошее приближение точного описания. Результаты, полученные аналитическим путем, сравниваются с численными данными для точной модели. В последнем параграфе (§ 5) обсуждаются полученные результаты.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗОЛИРОВАННОГО РЕЗОНАНСА

Рассмотрим поперечное движение частицы в ускорителе с учетом взаимодействия со встречным пучком. Как известно (см., например, [1]), соответствующий гамильтониан при описании столкновения отдельной частицы со встречным пучком в приближении «тонкой линзы» имеет вид:

$$H = I_x v_{x0} + I_z v_{z0} + V(x, z) \delta_T(s), \quad (2.1)$$

где поперечные координаты x, z , от которых зависит потенциал $V(x, z)$, выражаются через канонические переменные «действие—фаза» $I_x, I_z, \theta_x, \theta_z$ по формулам

$$x = \sqrt{2I_x \beta_x} \cos \theta_x \quad z = \sqrt{2I_z \beta_z} \cos \theta_z, \quad (2.2)$$

а v_{x0}, v_{z0} являются невозмущенными бетатронными частотами.

Действия I_x, I_z могут быть в свою очередь представлены как функции от поперечных координат x, z и «скоростей» x', z'

$$I_x = \frac{x'^2}{2} \beta_x + \frac{x^2}{2\beta_x} \quad I_z = \frac{z'^2}{2} \beta_z + \frac{z^2}{2\beta_z}. \quad (2.3)$$

В формулах (2.2) — (2.3) под β_x, β_z понимаются значения бета-функций в месте встречи частицы со встречным пучком [1].

Для периодической δ -функции $\delta_T(s)$ в (2.1) период по переменной s , играющей роль безразмерного времени, равен $T = 2\pi/m_0$, где m_0 — число мест встречи на кольце.

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести нормированные амплитуды поперечных колебаний A_x, A_z

$$A_x = \sqrt{X^2 + P_x^2} \quad A_z = \sqrt{Z^2 + P_z^2}, \quad (2.4)$$

где безразмерные координаты и импульсы X, Z, P_x, P_z определяются выражениями:

$$X = \frac{x}{\sigma_x}; \quad Z = \frac{z}{\sigma_z}; \quad P_x = \frac{x'}{\sigma_x} \beta_x; \quad P_z = \frac{z'}{\sigma_z} \beta_z, \quad (2.5)$$

так что:

$$A_x = \frac{\sqrt{2I_x \beta_x}}{\sigma_x}; \quad A_z = \frac{\sqrt{2I_z \beta_z}}{\sigma_z}. \quad (2.6)$$

Здесь σ_x и σ_z — среднеквадратичные поперечные размеры встречного пучка с бигассовым распределением

$$\varrho(x, z) = \varrho_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right).$$

Одной из важных характеристик нелинейного движения является зависимость частоты колебаний частицы от амплитуды. Поскольку невозмущенный гамильтониан в нашем случае линеен по $I_{x,z}$, то основная нелинейность содержится в нулевой гармонике возмущения V_{00}

$$V_{00} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V(x, z) d\theta_x d\theta_z, \quad (2.7)$$

где x, z определяются формулами (2.2). Таким образом, нелинейные сдвиги бетатронных частот $\Delta v_x, \Delta v_z$ определяются соотношениями:

$$v_x = v_{x0} + \Delta v_x(A_x, A_z), \quad v_z = v_{z0} + \Delta v_z(A_x, A_z),$$

$$\Delta v_{x,z} = m_0 \frac{\partial V_{00}(I_x, I_z)}{\partial I_{x,z}}. \quad (2.8)$$

Введем безразмерные «силы» f_x, f_z :

$$f_x = \frac{1}{\xi_x} \frac{\beta_x}{\sigma_x} \frac{\partial V(x, z)}{\partial x}; \quad f_z = \frac{1}{\xi_z} \frac{\beta_z}{\sigma_z} \frac{\partial V(x, z)}{\partial z}. \quad (2.9)$$

Здесь ξ_x, ξ_z — линейные сдвиги бетатронных частот на одно место встречи ($\Delta v_{x,z} = m_0 \xi_{x,z}$ при $A_x, A_z \rightarrow 0$). Определенные таким образом «силы» f_x, f_z удовлетворяют следующим условиям нормировки [10]:

$$f_x = 4\pi X; \quad f_z = 4\pi Z; \quad \text{при } |X|, |Z| \ll 1. \quad (2.10)$$

Подставляя выражение (2.7) в формулу (2.8) и проводя дифференцирование под знаком интеграла, с учетом (2.9) получим:

$$\Delta v_{x,z} = \frac{m_0 \xi_{x,z}}{8\pi^3 A_{x,z}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_x d\theta_z f_{x,z} (A_x \cos \theta_x, A_z \cos \theta_z) \cos \theta_{x,z}. \quad (2.11)$$

Функции $\Delta v_{x,z}(A_x, A_z)$ задают положение произвольного нелинейного резонанса в амплитудном пространстве A_x, A_z с помощью резонансного соотношения

$$lv_x + mv_z + n = 0 \quad (l, m, n — \text{целые числа}), \quad (2.12)$$

где v_x, v_z определяются выражениями (2.8). Зная $\Delta v_{x,z}(A_x, A_z)$ и амплитуду гармоники соответствующего резонанса V_{lmn} , выделяемой из потенциала $V(x, z)$, можно получить такую важную характеристику резонанса, как его ширину (в амплитудном или частотном пространстве). Для этого необходимо уметь вычислять нелинейность резонанса α , которая имеет вид [11]:

$$\alpha = \frac{\sigma_x^2}{\xi_x \beta_x} \frac{\partial^2 V_{00}(I_x, I_z)}{\partial P_1^2}; \quad P_1 = \frac{1}{m^2 + l^2} (mI_x + lI_z), \quad (2.13)$$

где P_1 — резонансная переменная действия, а множитель $\sigma_x^2 / \xi_x \beta_x$ введен для получения удобных безразмерных формул. Нелинейность α можно выразить с помощью соотношения (2.8) через те же величины $\Delta v_{x,z}$:

$$\alpha = 2\pi \left\{ \frac{l^2}{A_x \xi_x} \frac{\partial(\Delta v_x)}{\partial A_x} + \frac{2ml}{A_x \xi_x} \frac{\partial(\Delta v_z)}{\partial A_x} + \frac{m^2 \kappa}{A_z \xi_z} \left(\frac{\xi_z}{\xi_x}\right)^2 \frac{\partial(\Delta v_z)}{\partial A_z} \right\}, \quad (2.14)$$

где $\kappa = \sigma_x / \sigma_z$.

Нормированная амплитуда резонансной гармоники $V_{lmn}^1 = \frac{\beta_x}{\xi_x \sigma_x^2} V_{lmn}$ определяется соотношениями:

$$V_{lmn}^1 = \begin{cases} \frac{A_x}{l(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_x d\theta_z \sin \theta_x \sin l\theta_x \cos m\theta_z \cdot f_x(A_x \cos \theta_x, A_z \cos \theta_z) \\ \frac{A_z \kappa}{m(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_x d\theta_z \sin \theta_z \sin m\theta_z \cos l\theta_x \cdot f_z(A_x \cos \theta_x, A_z \cos \theta_z), \end{cases} \quad (2.15)$$

где верхнее выражение в (2.15) применимо для $l \neq 0$, а нижнее — для $m \neq 0$. Оба выражения совпадают для ненулевых l, m . Поскольку V_{lmn}^1 не зависит от n , в дальнейшем будем опускать индекс n . Отметим также, что вследствие симметрии потенциала

$V(x, z)$ относительно изменения знака x, z только четные гармоники l, m не равны нулю.

Зная V_{lm}^1 и α , по известным формулам [11] можно получить ширину резонанса в амплитудном пространстве (A_x, A_z)

$$\Delta A_x^{lm} = \frac{2l}{A_x} \sqrt{\frac{V_{lm}^1}{\alpha}}; \quad \Delta A_z^{lm} = \frac{2m}{\kappa A_z} \frac{\xi_z}{\xi_x} \sqrt{\frac{V_{lm}^1}{\alpha}}; \quad (2.16)$$

Соответственно, частота фазовых колебаний Ω_ϕ может быть представлена в виде:

$$\Omega_\phi = \xi_x \sqrt{\alpha V_{lm}^1}. \quad (2.17)$$

§ 3. АНАЛИЗ УПРОЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПУЧКА

Одной из существенных трудностей при численном моделировании эффектов встречи является отсутствие достаточно простых аналитических формул для поля сил $f_{x,z}$ эллиптического пучка с произвольным соотношением поперечных размеров σ_x/σ_z . Это же обстоятельство не позволяет получить простые формулы для характеристик нелинейного резонанса, например, аналитически вычислить интегралы в выражениях для нелинейного сдвига частот и амплитуды гармоники (2.11), (2.15). Однако, поскольку в современных электрон-позитронных установках параметр эллиптичности $\kappa = \sigma_x/\sigma_z$ обычно много больше единицы, то в ограниченной области не слишком больших значений поперечных координат X, Z интегральные формулы для $f_{x,z}$ можно попытаться представить, с учетом малости $\nu = 1/\kappa \ll 1$, в простой аналитической форме. Используя эти упрощенные формулы далее можно вычислить интегралы (2.11), (2.15).

Как было предложено в работе Пеггса [13] (подробный анализ см. также в [12]), при $\kappa \gg 1$ в достаточно широкой области $|Z| \ll \kappa$ силы $f_{x,z}$ в нулевом приближении могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} f_x = 4\pi\sqrt{2} F_D\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right) \\ f_z = 2\pi\sqrt{2}\pi e^{-X^2/2} \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right); \end{cases} \quad (3.1)$$

где функция $F_D(y)$ обозначает интеграл Досона (см. [14]):

$$F_D(y) = e^{-y^2} \int_0^y e^{t^2} dt. \quad (3.2)$$

Характерной особенностью приближения (3.1) является факторизация зависимостей от X, Z , а именно, сила f_x — зависит только от X , а сила f_z является произведением двух функций, отдельно зависящих от X и Z .

Формулы (3.1) были получены в [12] путем разложения точных интегральных формул для сил $f_{x,z}$ по параметру малости ν при удержании только первого ненулевого члена. Отметим, что в результате такого разложения силы $f_{x,z}$ в выражении (3.1) оказываются непотенциальными (т. е. $\frac{\partial f_x}{\partial Z} \neq \nu \frac{\partial f_z}{\partial X}$). Для сохранения потен-

циальности сил $f_{x,z}$ (чтобы иметь гамильтоновы характер всех выражений) более корректным является разложение не сил, а потенциала по тому же параметру. Однако, потенциальность можно восстановить и другим путем, учитывая дополнительно к (3.1) первую линейную по ν поправку в разложении силы f_x . Тогда вместо формул (3.1) получим

$$\begin{cases} f_x = 4\pi\sqrt{2} F_D\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right) - 2\pi\sqrt{2}\pi\chi\nu e^{-X^2/2} \left(Z \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} (e^{-Z^2/2} - 1) \right) \\ f_z = 2\pi\sqrt{2}\pi \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right) e^{-X^2/2}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Отметим, что сила f_x в (3.3) совпадает с линейным, а сила f_z — с нулевым ($\nu=0$) приближением приведенного в [12] разложения f_x, f_z по ν .

Численное сравнение гамильтоновой модели (3.3) с моделью (3.1) показывает, что значительное улучшение точности возникает в той области X, Z , где относительная погрешность модели (3.1) по сравнению с точной моделью мала. В то же время там, где модель (3.1) дает плохую точность (20—30%), гамильтоновая модель (3.3) не дает преимущества. Так, например, для обеих моделей область малой относительной погрешности для сил f_x, f_z определяется соотношением $|Z| \ll \kappa e^{-X^2/2}$, а область малой абсолютной погрешности — соотношением $|Z| \ll \kappa$ [12]. Однако для больших вертикальных смещений Z сила f_x из (3.3) вместо стремления к нулю становится отрицательной и неограниченно растет по моду-

лю. Поэтому при моделировании эффектов встречи с использованием формул (3.3) (как было нами проверено численно) начиная с амплитуд $A_z \sim \kappa$, частицы начинают уходить на неограниченно большие амплитуды.

Следующим шагом по улучшению модели (3.3) является учет в f_z членов, обеспечивающих стремление f_z к нулю при $|Z| \rightarrow \infty$. Как можно показать из точных интегральных формул для поля сил (см. [12]), при $X=0$ выполняется точное равенство

$$f_z(X=0) = \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{1-v} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{vZ}{\sqrt{2}}\right) \right] e^{-v^2 Z^2/2}. \quad (3.4)$$

Естественно принять, что зависимость f_z от X аналогична зависимости в (3.1) и (3.3). Для упрощения можно также опустить множитель $e^{(-v^2 Z^2)/2}$ в выражении (3.4). Тогда новая модель с полученной из условия потенциальности силой f_x имеет следующую аналитическую форму:

$$\begin{aligned} f_x &= 4\pi\sqrt{2} F_D\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{1-v} v X e^{-X^2/2} \left[Z \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-Z^2/2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{v}\right) - Z \operatorname{erf}\left(\frac{vZ}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{v} e^{-Z^2 v^2/2} \right] \\ f_z &= \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{1-v} e^{-X^2/2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{vZ}{\sqrt{2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Новая модель (3.5) также обладает потенциальностью, и в области $|Z| \ll \kappa$ совпадает с моделями (3.1), (3.3). Однако, для больших значений $|Z| \gtrsim \kappa$ модель (3.5) дает гораздо лучшее приближение по сравнению с моделью (3.3). Действительно, сила f_z из (3.5) стремится при $|Z| \rightarrow \infty$ к нулю, а сила f_x — к значению $f_x^\infty = 4\pi\sqrt{2} F_D(X/\sqrt{2}) - 2\pi\sqrt{2\pi} X \exp(-X^2/2)$. Напомним, что точное значение силы f_x стремится к нулю при $|Z| \rightarrow \infty$, в то время как модель (3.3) дает грубо неверный результат $f_x \rightarrow -\infty$. Хотя функция f_x^∞ и не равна нулю, однако ее значение мало по сравнению с максимальным значением силы f_x , достигаемого при $Z=0$, $X \propto 1$.

Входящие в формулы (3.1) — (3.5) функции $F_D(y)$, $\operatorname{erf}(y)$ приводят к определенным неудобствам при численном моделировании. Поэтому вместо функций $F_D(y/\sqrt{2})$ и $\operatorname{erf}(y)$ можно использовать простые и в то же время довольно точные аппроксимирующие функции $\frac{y}{\sqrt{2}(1+y^2/5,11)^2}$ и $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$. При такой замене вместо

модели (3.1) получим

$$\begin{cases} f_x = \frac{4\pi X}{(1+X^2/5,11)^2} \\ f_z = \frac{4\pi Z e^{-X^2/2}}{\sqrt{1+Z^2/2}} \end{cases} \quad (3.6)$$

Отметим, что модель (3.6) уже использовалась ранее Теннисоном [15] для моделирования эффектов встречи на установке SPEAR. Аналогичным образом, указанной заменой вместо приближений (3.3) и (3.5) получим

$$\begin{cases} f_x = 4\pi X \left[\frac{1}{(1+X^2/5,11)^2} - 2v e^{-X^2/2} (\sqrt{1+Z^2/2} - 1) \right] \\ f_z = \frac{4\pi Z e^{-X^2/2}}{\sqrt{1+Z^2/2}} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} f_x = \frac{4\pi X}{(1+X^2/5,11)^2} - 8\pi v X e^{-X^2/2} \left[\sqrt{1+Z^2/2} - \frac{1}{v} \sqrt{1+v^2 Z^2/2} + \frac{1}{v} - 1 \right] \\ f_z = 4\pi Z e^{-X^2/2} \left[\frac{1}{\sqrt{1+Z^2/2}} - \frac{v}{\sqrt{1+v^2 Z^2/2}} \right] \end{cases} \quad (3.8)$$

Проведем теперь количественное сравнение точности описанных выше моделей. Для этого найдем в координатном пространстве X, Z области, внутри которых силы, вычисленные по формулам соответствующих моделей, отличаются от точных значений (полученных численным интегрированием) меньше, чем на 10% (область I), и меньше, чем на 30% (область II). Эти области для $\kappa=30$ показаны на рис. 1—3. Отметим, что модели (3.6), (3.7), (3.8) имеют фактически не меньшие области 10% и 30% погрешности, чем соответствующие модели (3.1), (3.3), (3.5). Как было проверено численно, при дальнейшем увеличении κ области I и II увеличивались.

Другой, более надежной, проверкой применимости рассматриваемых моделей является нахождение точности, которую дают эти модели для описания отдельных траекторий индивидуальных час-

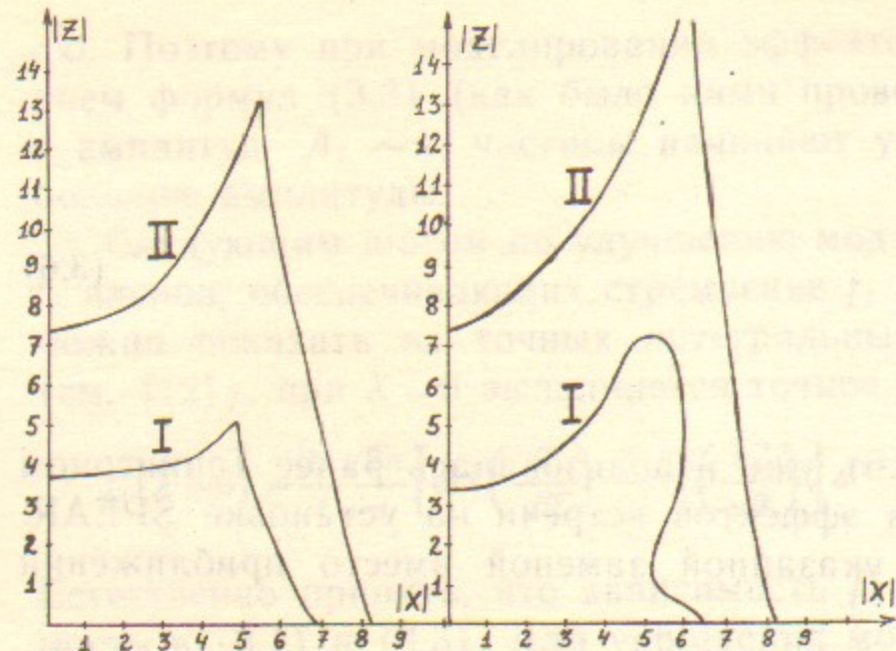


Рис. 1. Области 10% и 30% относительной погрешности сил f_x , f_z для: модели (3.1) (а); модели (3.6) (б). Кривая I ограничивает область 10% погрешности, кривая II — область 30% погрешности.

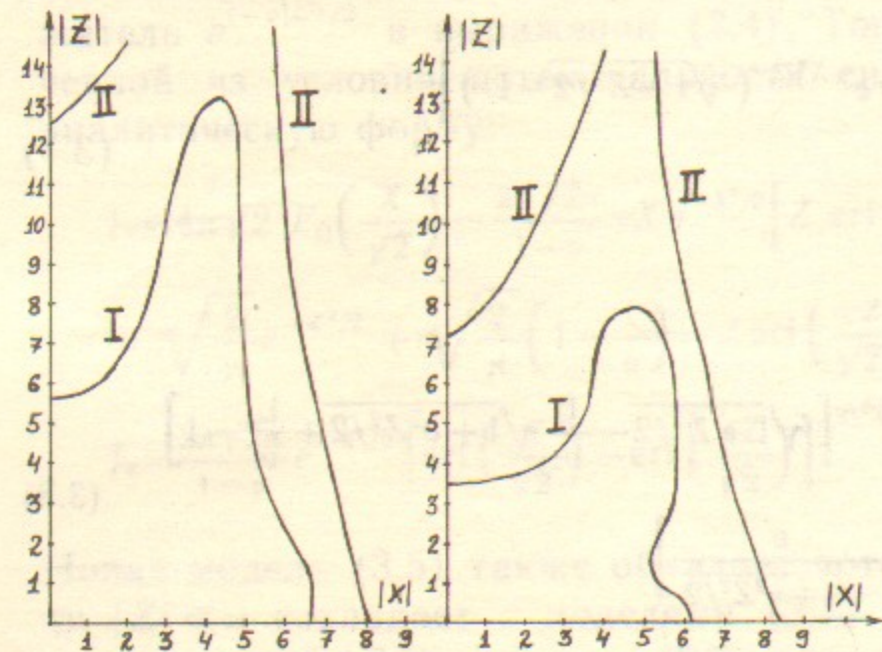


Рис. 2. То же, что на рис. 1. для модели (3.3) (а); модели (3.7) (б).

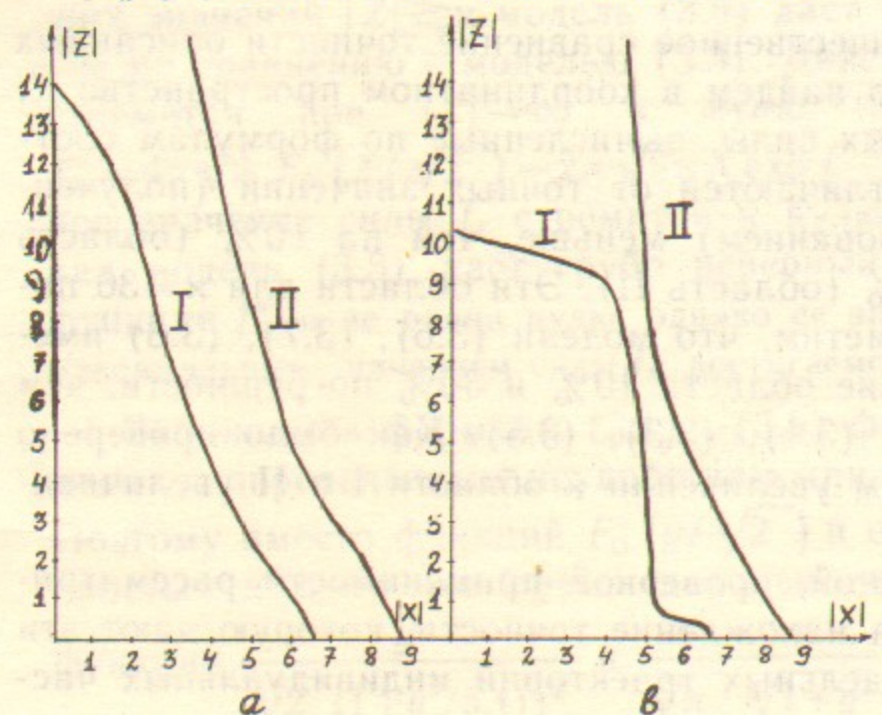


Рис. 3. То же, что на рис. 1. для модели (3.5) (а); модели (3.8) (б).

тиц. Для такой проверки рассмотрим режим ВЭПП-2М (см. [16]), где наиболее существенным для эффектов встречи является резонанс связи $2\nu_x - 2\nu_z = 0$ (рабочая точка $\nu_{x0} = 3,06$, $\nu_{z0} = 3,08$), а параметры $\xi_{x,z}$ линейного сдвига частот имеют минимальные значения $\xi_x = 0,07$, $\xi_z = 0,14$. Для анализа траекторий в четырехмерном фазовом пространстве применялась специальная методика представления движения в двумерных сечениях четырехмерного фазового пространства. Полученное с помощью этой методики положение центра резонанса $2\nu_x - 2\nu_z = 0$ и векторы колебаний на этом резонансе для различных моделей показаны на рис. 4—7. На этих рисунках резонанс показан в плоскости Z, P_x , в то время как две другие переменные имеют значения $P_z = 0$, $X = 0$.

На рис. 4 показан резонанс $2\nu_x - 2\nu_z = 0$ в точной (полученной численным интегрированием на сетке) модели (см. [6, 12]). На рис. 5—7 показано положение того же резонанса для моделей (3.6), (3.7), (3.8). Аналогичные рисунки можно получить и для моделей (3.1), (3.3), (3.5). Они с довольно высокой точностью совпадают с рис. 5—7.

Из рис. 5 (модели (3.1) и (3.6)) видно, что колебания на резонансе идут строго в направлении Z , поскольку сила f_x , а следовательно и все движение в X -плоскости не зависит от координаты Z . В то же время для моделей с гамильтоновой поправкой (3.3) и (3.7) траектории, лежащие целиком в области $|Z| < \kappa$ (см. рис. 6) неплохо совпадают с траекториями точной модели (рис. 4). В отличие от моделей (3.1) и (3.6), в этом случае векторы колебаний на резонансе направлены не точно по Z , а имеют правильный наклон. Однако частицы с начальными данными, при которых траектории в точной модели попадают в область $|Z| \gtrsim \kappa$, в моделях (3.3) и (3.7) уходят на бесконечность, т. е. координаты X и Z при этом начинают неограниченно расти.

Сравнение рис. 7 (модели (3.5) и (3.8)) с рис. 4 (точная модель) показывает, что использование моделей (3.5) и (3.8) позволяет достаточно точно воспроизводить траектории частиц даже в области $|Z| \gtrsim \kappa$. Таким образом, хотя для моделей (3.5) и (3.8) область 30% погрешности не сильно отличается от соответствующих областей для моделей (3.1), (3.6) и (3.3), (3.7) (см. рис. 1—3), однако в действительности, как показывают рис. 4—7, их различие весьма существенно для правильного описания движения частиц. Отметим, что область малой абсолютной погрешности для моделей (3.1), (3.6) и (3.3), (3.7) фактически ограничена неравенством $|Z| \ll \kappa$, в то время, как для (3.5) и (3.8) такого

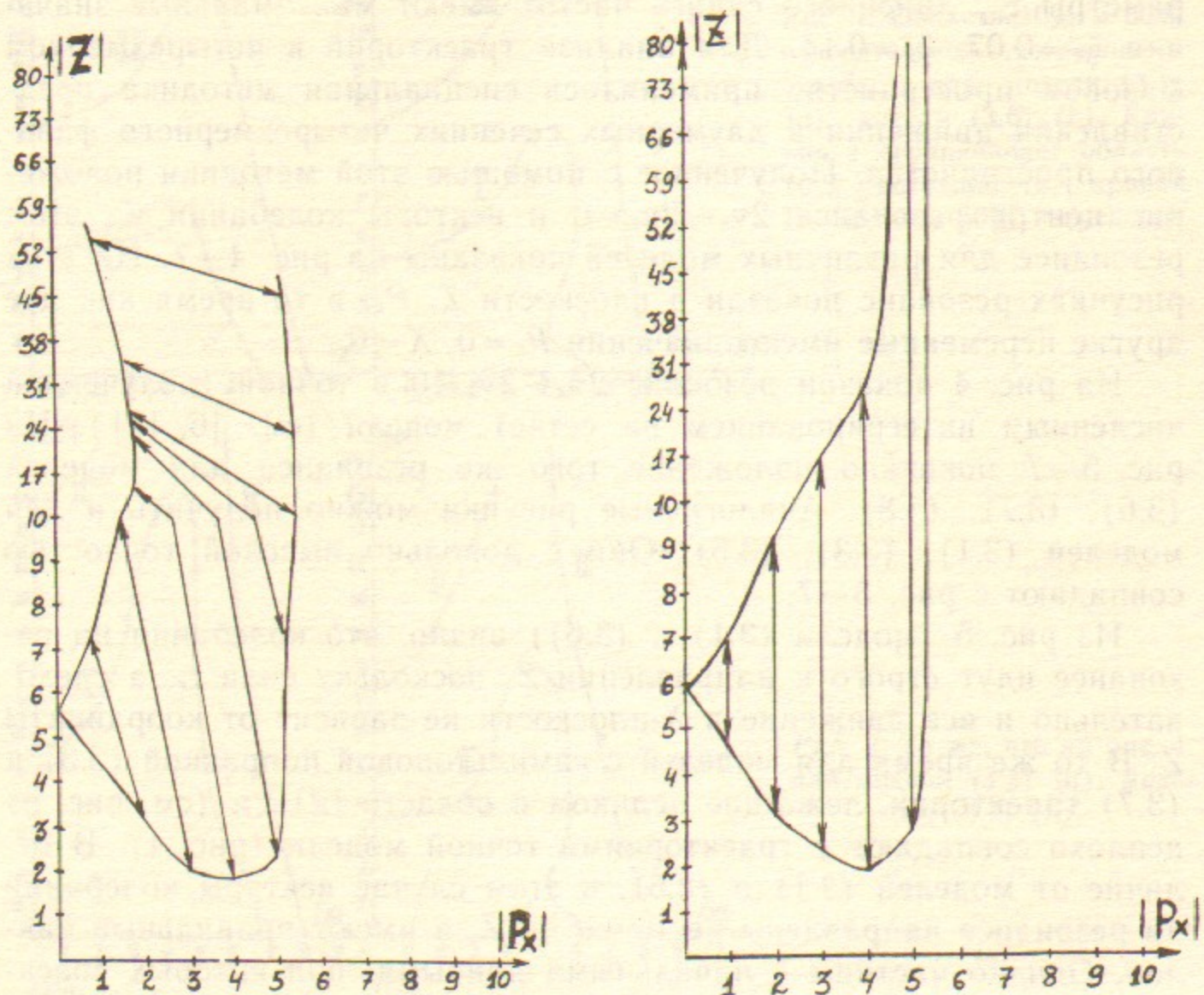


Рис. 4. Резонанс связи $2v_x - 2v_z = 0$ для точной модели с параметрами ВЭПП-2М ($v_{x0} = 1,06$, $v_{z0} = 1,08$, $\xi_x = 0,07$, $\xi_z = 0,14$, $\kappa = 20$). Стрелками показаны направление и размах резонансных колебаний (размер сепаратрисы). Для удобства использовался двойной масштаб по Z (в области $Z = 10$ — переход от одного масштаба к другому). Резонанс изображен в плоскости (Z, P_x) при фиксированных значениях $P_z = X = 0$.

Рис. 5. То же, что на рис. 4, но для модели (3.6).

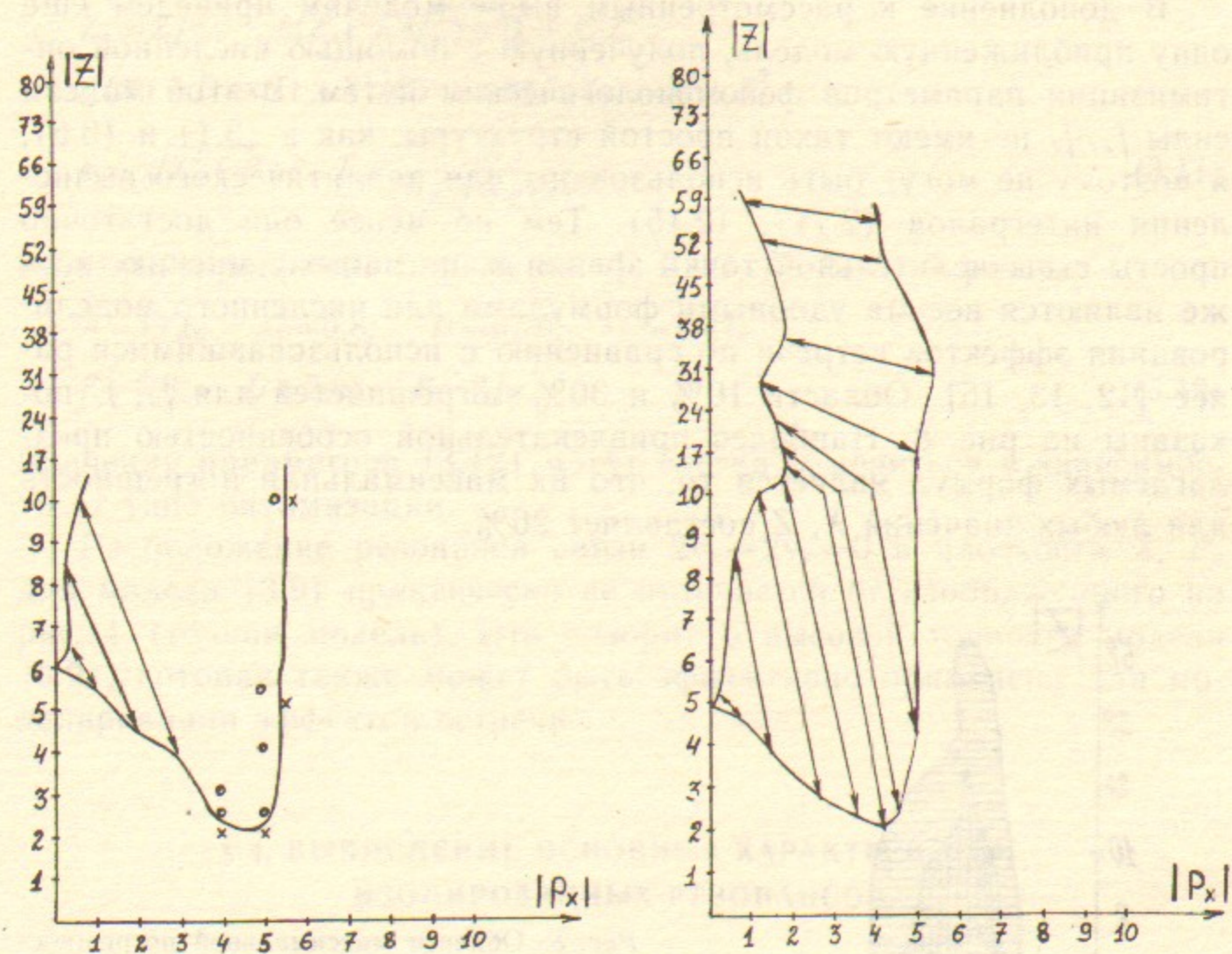


Рис. 6. То же, что на рис. 4, но для модели (3.7). Крестами обозначены траектории вне сепаратрис, кружками — траектории, уходящие на бесконечно большие амплитуды.

Рис. 7. То же, что на рис. 4, но для модели (3.8).

ограничения нет. Поэтому модели (3.5) и (3.8) можно считать наиболее точными из всех известных приближенных моделей для достаточно больших $\kappa \gg 1$.

В дополнение к рассмотренным выше моделям приведем еще одну приближенную модель, полученную с помощью численной оптимизации параметров феноменологическим путем. В этой модели силы f_x, f_z не имеют такой простой структуры, как в (3.1) и (3.6), и поэтому не могут быть использованы для аналитического вычисления интегралов (2.11), (2.15). Тем не менее они достаточно просты с вычислительной точки зрения и, по нашему мнению, также являются весьма удобными формулами для численного моделирования эффектов встречи по сравнению с использовавшимися ранее [12, 13, 15]. Области 10% и 30% погрешностей для f_x, f_z показаны на рис. 8. Наиболее привлекательной особенностью предлагаемых формул является то, что их максимальная погрешность для любых значений X, Z составляет 26%.

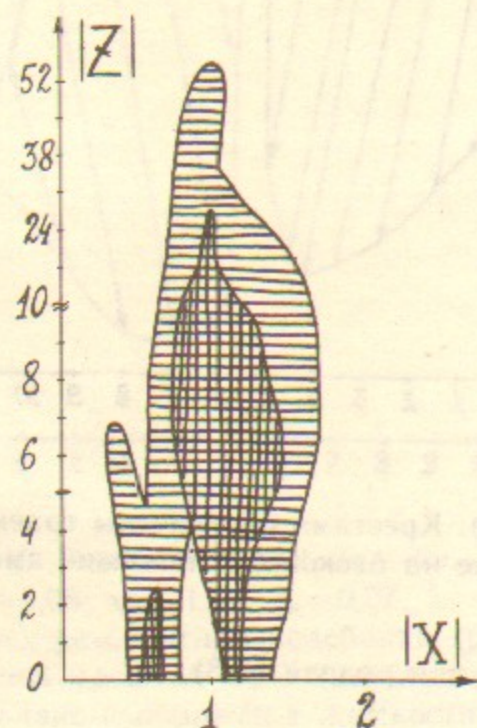


Рис. 8. Области максимальной погрешности $\delta = \max \left\{ \left| \frac{\delta f_x}{f_x} \right|, \left| \frac{\delta f_z}{f_z} \right| \right\}$ для модели (3.10). Горизонтальная штриховка для $5\% < \delta < 10\%$, двойная штриховка — для $10\% < \delta < 26\%$.

Потенциал, соответствующий силам взаимодействия в этой модели, имеет вид

$$\Phi(X, Z_1) = \frac{A}{f(Z_1) + g(X)} - F \ln h(X, Z_1). \quad (3.9)$$

Соответственно, силы f_x, f_z записываются в форме

$$f_x = 2X \left[\frac{Tg}{E} + \frac{F}{h} \right],$$

$$f_z = 2Z_1 \left[T \left(C + \frac{1}{2e} \right) + \frac{F}{h} \right], \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z/\kappa; & f(Z_1) &= \sqrt{Z_1^2 + B} + C Z_1^2; \\ g(X) &= D \exp(+X^2/E); & h(X, Z_1) &= X^2 + Z_1^2 + G; \\ e &= \sqrt{Z_1^2 + B}; & T &= \frac{A}{[f(Z_1) + g(X)]^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

и оптимизированные параметры A, B, C, D, E, F, G равны

$$\begin{aligned} A &= 11,6; & C &= 0,8; & D &= 0,79; & E &= 4,41; \\ F &= 6,8; & G &= 2,0; & B &= 2/\kappa. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Значения параметров (3.12) могут слегка изменяться в зависимости от типа оптимизации.

Расположение резонанса связи $2\nu_x - 2\nu_z = 0$ в плоскости Z, P_x для модели (3.9) практически не отличается от изображенного на рис. 4 (точная модель). Это говорит о высокой точности модели (3.9), которая также может быть эффективно применена для моделирования эффектов встречи.

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗОЛИРОВАННЫХ РЕЗОНАНСОВ

Перейдем теперь к описанию движения вблизи изолированных нелинейных резонансов для пучка с большим отношением поперечных размеров. Для получения основных характеристик резонансов можно использовать какую-либо из описанных выше моделей для поля сил f_x, f_z . Основная задача состоит в аналитическом вычислении интегралов (2.11), (2.15). При большом параметре эллиптичности $\kappa \gg 1$ в широкой области координат $|Z| \ll \kappa$ модели (3.1), (3.3) практически совпадают с моделью (3.5), поэтому для вычисления интересующих нас величин мы ограничимся моделью (3.1), которая позволяет получить наиболее простые результаты.

Используя в дальнейшем для аналитических вычислений вместо модели (3.5) самую простую модель (3.1), мы тем самым ограничиваем пределы применимости получаемых выражений условием $|Z| \ll \kappa$. Отметим, что в предыдущем параграфе контрольное

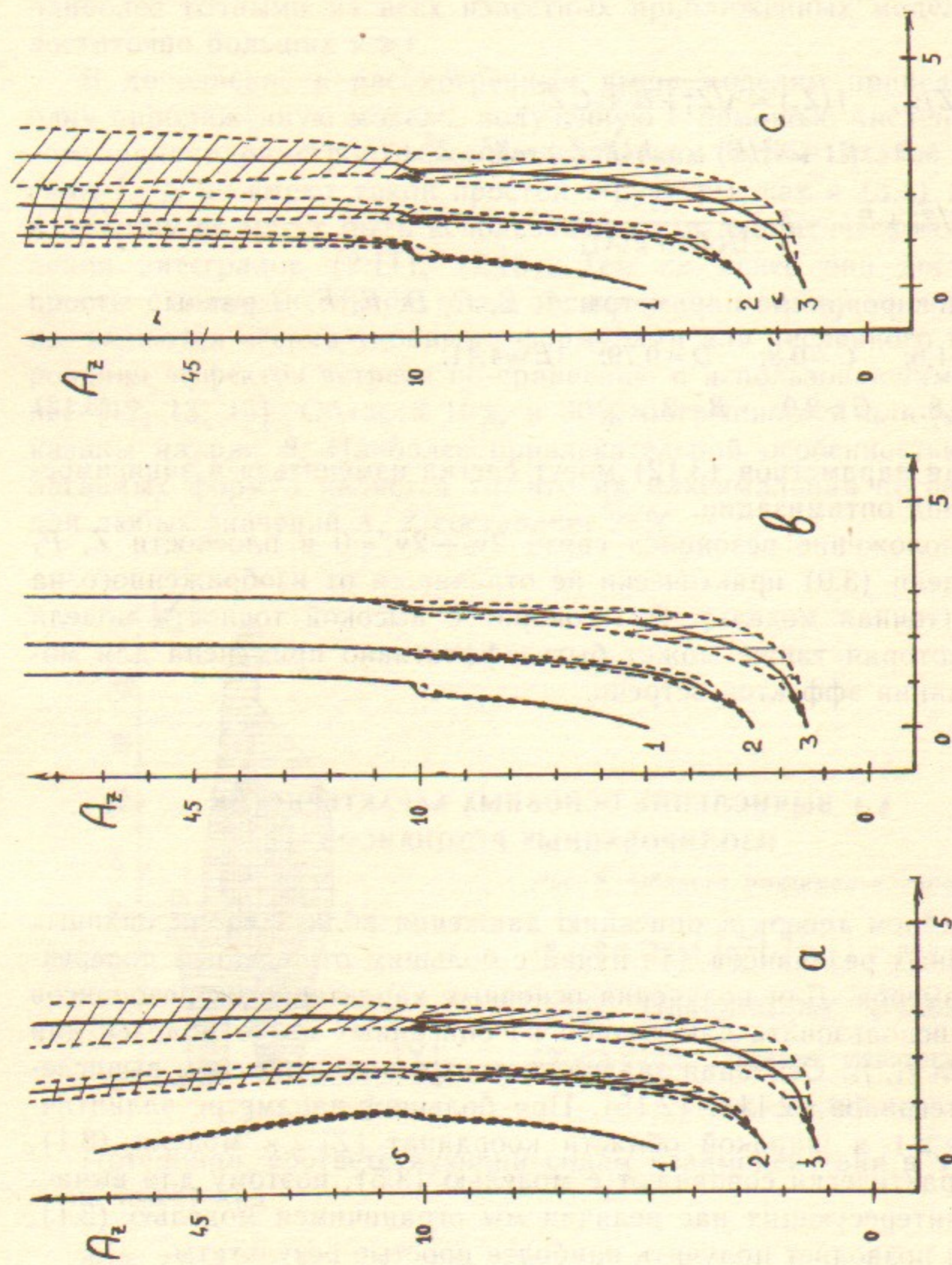


Рис. 9. Возможные положения резонанса $4\nu_x - 2\nu_z = n$ для различных моделей поля сил:
a — точная модель, *b* — модель (3.1), *c* — модель (3.5);
 $1 - \nu_{x0} = 0,535, \nu_{z0} = 0,58; 2 - \nu_{x0} = 0,5335, \nu_{z0} = 0,58; 3 - \nu_{x0} = 0,532, \nu_{z0} = 0,58; 4$ — для всех случаев $\xi_x = 0,01, \xi_z = 0,02, \kappa = 100$. Так же как и на рисунке 4, использовался двойной масштаб по Z (в области $Z = 10$ — переход от одного масштаба к другому).

сравнение моделей (3.1), (3.2) и (3.5) с точной моделью проводилось для параметров ВЭПП-2М, при которых влияние нелинейности велико (предельно большие ξ_x, ξ_z). В результате основной резонанс связи $2\nu_x - 2\nu_z = 0$ в рабочем режиме имеет очень большой размер (см. рис. 4–7). Такие параметры скорее считаются исключительными, чем типичными. Для большей части действующих установок параметры таковы, что интересующие нас нелинейные резонансы являются более слабыми.

В качестве примера рассмотрим типичную ситуацию для установки ВЭПП-4, когда наиболее существенным является резонанс связи $4\nu_x - 2\nu_z = k$. На рис. 9 показаны возможные положения этого резонанса в плоскости амплитуд A_x, A_z (см. (2.4)) при различных рабочих точках ν_{x0}, ν_{z0} для точной модели, а также для моделей (3.1) и (3.5). Видно, что в этом примере модель (3.1) дает хорошее описание траекторий в достаточно широкой области. Таким образом, мы ожидаем, что в широкой области $A_z \ll \kappa$, где модель (3.1) имеет малую абсолютную погрешность, для вычисления характеристик изолированного резонанса мы можем использовать в интегралах (2.11) и (2.15) выражение для сил f_x, f_z из этой модели.

Для дальнейшего, как уже отмечалось ранее, существенно, что амплитуда гармоники V_{lm}^1 (2.15) для $m \neq 0$ выражается только через силу f_z , одинаковую в моделях (3.1), (3.5). При этом величина V_{lm}^1 факторизуется — то есть имеет вид произведения функции от A_x на функцию от A_z . Отметим, что мы рассматриваем только резонансы с $m \neq 0$, так как при $m = 0$ величина $\Delta A_z = 0$. При определенных условиях первыми двумя слагаемыми в нелинейности α (2.14) можно пренебречь, а третье слагаемое при определении сдвига частоты $\Delta\nu_z$ из (2.11) и f_z из моделей (3.1), (3.3) всегда имеет вид произведения функции от A_x на функцию от A_z . Ширина резонанса ΔA_z^{lm} (2.17) и фазовая частота Ω_ϕ (2.18) при этом также факторизуются. Таким образом, при вычислении характеристик изолированного резонанса мы будем полагать

$$\alpha \approx 2\pi \frac{m^2}{A_z} \kappa \left(\frac{\xi_z}{\xi_x} \right)^2 \frac{1}{\xi_z} \frac{\partial(\Delta\nu_z)}{\partial A_z}, \quad (4.1)$$

условием чего являются неравенства:

$$\left| \frac{l^2}{A_x \xi_x} \frac{\partial(\Delta\nu_z)}{\partial A_x} \right| \ll \left| \frac{m^2 \kappa}{A_z} \left(\frac{\xi_z}{\xi_x} \right)^2 \frac{1}{\xi_z} \frac{\partial(\Delta\nu_z)}{\partial A_z} \right|, \quad (4.2a)$$

$$\left| \frac{2l}{A_x} \frac{\partial(\Delta v_z)}{\partial A_x} \right| \ll \left| \frac{m\kappa}{A_z} \frac{\xi_z}{\xi_x} \frac{\partial(\Delta v_z)}{\partial A_z} \right|. \quad (4.26)$$

Ограничения на значения амплитуд A_x , A_z , следующие из неравенств (4.2а,б) будут получены ниже.

При вычислении амплитуды гармоники V_{lm}^1 по формуле (2.15) с использованием силы f_z из (3.1), (3.3) получим

$$V_{lm}^1 = V_l(A_x) V_m(A_z), \quad (4.3)$$

где

$$V_l(A_x) = \int_0^{2\pi} d\theta_x \cos l\theta_x \exp\left(-\frac{A_x^2}{2} \cos^2\theta_x\right) = 2\pi e^{-A_x^2/4} I_{l/2}\left(\frac{A_x^2}{4}\right). \quad (4.4)$$

Здесь $I_\nu(y)$ — модифицированная функция Бесселя, а

$$V_m(A_z) = \frac{A_z}{\kappa m \sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\theta_z \sin \theta_z \sin m\theta_z \operatorname{erf}\left(\frac{A_z}{\sqrt{2}} \cos \theta_z\right). \quad (4.5)$$

Напомним, что l , m — четные целые числа (см. § 2) и $m \neq 0$.

Подставляя в (4.5) выражение для $\operatorname{erf}(p)$:

$$\operatorname{erf}(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^p e^{-t^2} dt \quad (4.6)$$

и интегрируя по частям, получим

$$V_m(A_z) = \frac{A_z^2}{2m\kappa} e^{-A_z^2/4} \left[\frac{I_{m/2-1}\left(\frac{A_z^2}{4}\right) + I_{m/2}\left(\frac{A_z^2}{4}\right)}{m-1} - \frac{I_{m/2}\left(\frac{A_z^2}{4}\right) + I_{m/2+1}\left(\frac{A_z^2}{4}\right)}{m+1} \right]. \quad (4.7)$$

Используя определение (2.11) и силу f_z из моделей (3.1), (3.3), можно получить явное выражение для сдвига бетатронной частоты Δv_z :

$$\Delta v_z = m_0 \xi_z e^{-A_z^2/4} \cdot I_0\left(\frac{A_x^2}{4}\right) \left[I_0\left(\frac{A_z^2}{4}\right) + I_1\left(\frac{A_z^2}{4}\right) \right] e^{-A_x^2/4}. \quad (4.8)$$

Для производной $\frac{\partial(\Delta v_z)}{\partial A_z}$, необходимой для вычисления нелинейности по приближенной формуле (4.1), будем иметь:

$$\frac{\partial(\Delta v_z)}{\partial A_z} = -m_0 \xi_z e^{-A_z^2/4} I_0\left(\frac{A_x^2}{4}\right) \frac{2}{A_z} I_1\left(\frac{A_z^2}{4}\right) e^{-A_x^2/4} =$$

$$= -m_0 \xi_z e^{-A_z^2/4} I_0\left(\frac{A_x^2}{4}\right) \frac{A_z}{4} \left(I_0\left(\frac{A_z^2}{4}\right) - I_2\left(\frac{A_z^2}{4}\right) \right) e^{-A_x^2/4}. \quad (4.9)$$

В итоге, собирая выражения (4.4), (4.7), (4.9) с учетом (4.1) и подставляя их в (2.16), получим основной результат — зависимость амплитуды резонансных колебаний ΔA_z^{lm} от бетатронных амплитуд A_x , A_z :

$$\Delta A_z^{lm} = \sqrt{F_m(A_z)} \sqrt{G_l(A_x)}, \quad (4.10)$$

где функция $G_l(A_x)$ имеет вид

$$G_l(A_x) = \frac{I_{l/2}\left(\frac{A_x^2}{4}\right)}{I_0\left(\frac{A_x^2}{4}\right)}, \quad (4.11)$$

а функция $F_m(A_z)$ может быть представлена в одной из эквивалентных форм:

$$F_m = \frac{8}{m(m^2-1)} \frac{I_{m/2-1}\left(\frac{A_z^2}{4}\right)(m+1) + 2I_{m/2}\left(\frac{A_z^2}{4}\right) - (m-1)I_{m/2+1}\left(\frac{A_z^2}{4}\right)}{I_0\left(\frac{A_z^2}{4}\right) - I_2\left(\frac{A_z^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A_z^2}{m(m^2-1)} \frac{I_{m/2-1}\left(\frac{A_z^2}{4}\right) + I_{m/2}\left(\frac{A_z^2}{4}\right) + \frac{2m(m-1)}{A_z^2} I_{m/2}\left(\frac{A_z^2}{4}\right)}{I_1\left(\frac{A_z^2}{4}\right)}. \quad (4.12)$$

Графики функций $\sqrt{F_m(A_z)}$ и $\sqrt{G_l(A_x)}$ представлены на рис. 10—11. Видно, что для $l=0$ величина ΔA_z не зависит от A_x , в то время как для $l \neq 0$ величина ΔA_z стремится к нулю при $A_x \rightarrow 0$. Существенно также выделить поведение величины ΔA_z при $|m|=2$, которая остается ненулевой при $A_z \rightarrow 0$. Последнее объясняется тем, что при малых A_z нулевая гармоника V_{00} и резонансная гармоника V_{l2} обе пропорциональны A_z^2 , поскольку они получаются из квадратичного члена разложения потенциала $V(x, z)$ по степеням $Z = A_z \cos \theta_z$.

Далее аналогичным способом получим значение частоты фазовых колебаний Ω_ϕ . Подставляя в общую формулу (2.18) значения вычисленных величин (4.1), (4.9), (4.4) и (4.7), получим

$$\Omega_\phi = m_0 \xi_z B_l(A_x) D_m(A_z), \quad (4.13)$$

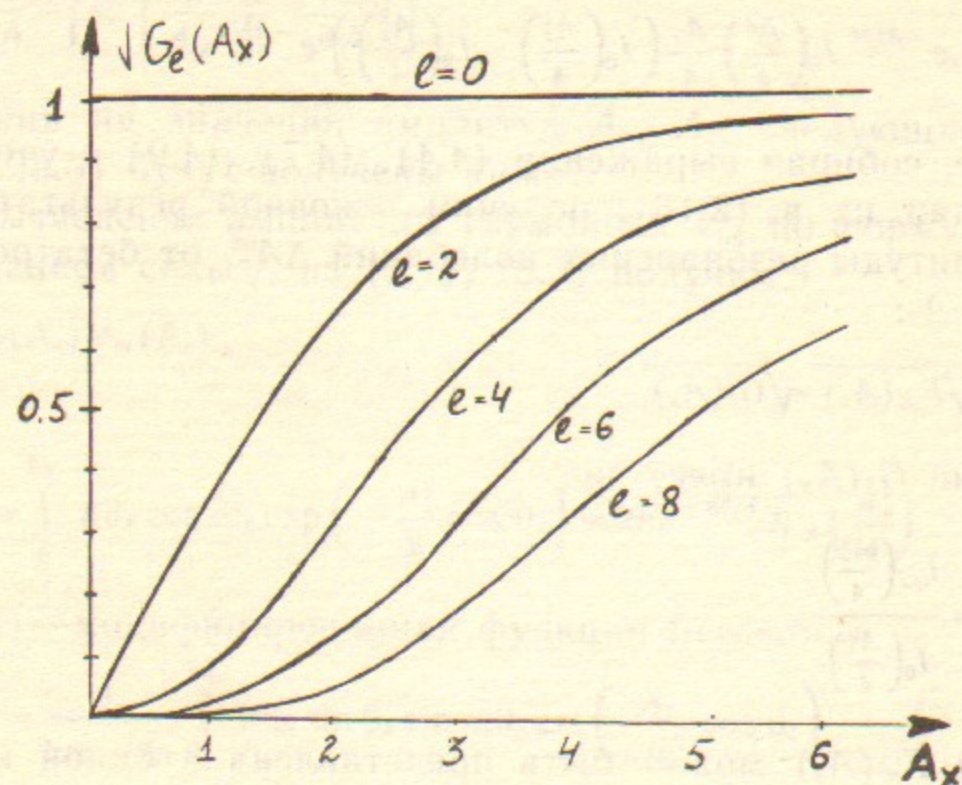


Рис. 10. Зависимость $\sqrt{G_l(A_x)}$ (см. (4.11)) для разных значений индекса l , резонанса $lv_x + mv_z = n$.

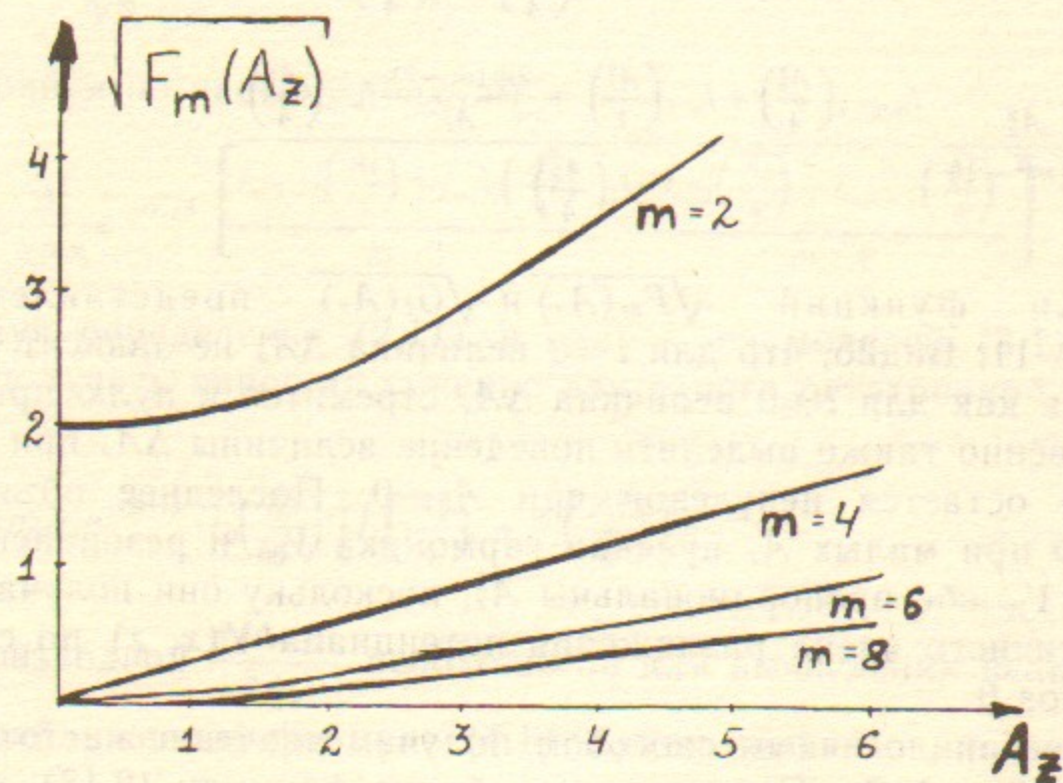


Рис. 11. Зависимость $\sqrt{F_m(A_z)}$ (см. (4.12)) для разных значений индекса m , резонанса $lv_x + mv_z = n$.

где функция $B_l(A_x)$ имеет вид

$$B_l(A_x) = e^{-A_x^2/4} \sqrt{I_0\left(\frac{A_x^2}{4}\right) I_{l/2}\left(\frac{A_x^2}{4}\right)}, \quad (4.14)$$

а функция $D_m(A_z)$ может быть представлена в одной из эквивалентных форм:

$$D_m(A_z) = \frac{2\pi m A_z e^{-A_z^2/4}}{\sqrt{8m(m^2-1)}} \cdot \sqrt{I_0\left(\frac{A_z^2}{4}\right) - I_2\left(\frac{A_z^2}{4}\right)} \times \quad (4.15)$$

$$\times \sqrt{I_{m/2-1}\left(\frac{A_z^2}{4}\right) (m+1) + 2I_{m/2}\left(\frac{A_z^2}{4}\right) - (m-1)I_{m/2+1}\left(\frac{A_z^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \pi m e^{-A_z^2/4}}{\sqrt{m(m^2-1)}} \sqrt{I_1\left(\frac{A_z^2}{4}\right) \left[I_{m/2-1}\left(\frac{A_z^2}{4}\right) + I_{m/2}\left(\frac{A_z^2}{4}\right) + \frac{2m(m-1)}{A_z^2} I_{m/2}\left(\frac{A_z^2}{4}\right) \right]}.$$

Отметим, что зависимость (4.13) фазовой частоты Ω_ϕ от амплитуд A_x, A_z является немонотонной — при малых и при больших амплитудах величина Ω_ϕ мала и принимает максимальное значение в области $A_x \sim l/2, A_z \sim m/2$. Используя то обстоятельство, что фазовая частота Ω_ϕ и ширина резонанса ΔA_z пропорциональны $\sqrt{V_{lm}^1}$ (см. (2.16), (2.17)), можно получить следующее соотношение:

$$\Omega_\phi = \frac{\pi m}{4} m_0 \xi_z e^{-A_z^2/4} I_0\left(\frac{A_z^2}{4}\right) A_z e^{-A_z^2/4} \left[I_0\left(\frac{A_z^2}{4}\right) - I_2\left(\frac{A_z^2}{4}\right) \right] \Delta A_z^{lm}. \quad (4.16)$$

Для больших амплитуд $A_x, A_z \gg 1$ формула (4.16) упрощается:

$$\Omega_\phi = \frac{4m m_0 \xi_z \Delta A_z^{lm}}{A_x A_z^2}. \quad (4.17)$$

Полученное выражение (4.17) позволяет оценить границы для области амплитуд, внутри которой выполняется условие малости времени затухания относительно периода фазовых колебаний. Это условие имеет большое значение, поскольку оно показывает, в какой области A_x, A_z резонанс эффективно подавляется синхронным затуханием и его влияние на равновесную функцию распределения мало. Отметим также, что обратное условие является критерием справедливости предлагаемого в работе [17] аналитического описания воздействия изолированного нелинейного резонанса на равновесную функцию распределения. Поскольку резонанс может существенно влиять на функцию распределения лишь если он имеет достаточно большую величину $\Delta A_z^{lm} \gtrsim 1$, то требуемое условие, получающееся из выражения (4.17), имеет вид

$$A_z^2 A_x \gg 4mm_0 \xi_z T_D \quad (4.18)$$

где T_D — время затухания, измеренное в числе столкновений со встречным пучком.

Из оценки (4.18) следует, что для большинства действующих установок со встречными пучками область амплитуд (A_x, A_z) , в которой резонансы не разрушаются трением, оказывается довольно большой. Так, например, для параметров ВЭПП-4 ($T_D \approx 3000$; $\xi_z \approx 0,05$; $m_0 = 1$) для резонанса $4v_x - 2v_z = k$ (т. е. $m = 2$) получим $A_x^2 A_z \lesssim 1000$.

Важным свойством полученных выражений (4.10; 4.13) является независимость величины ΔA_z^{lm} от параметра эллиптичности κ и от линейных сдвигов частот ξ_x, ξ_z , в то время как частота фазовых колебаний Ω_ϕ прямо пропорциональна ξ_z и не зависит от κ и ξ_x . Следует отметить, что независимость ΔA_z^{lm} от тока встречного пучка (то есть, от величин ξ_x, ξ_z при постоянном отношении ξ_x/ξ_z) и пропорциональность фазовой частоты этому току являются общим свойством «почти линейных колебаний» (см. [1]). В то же время независимость ΔA_z^{lm} и Ω_ϕ от отношения ξ_x/ξ_z и параметра эллиптичности κ является следствием предположения об «одномерной нелинейности» (4.1) и условия $|z| \ll \kappa$, позволяющего применять приближенную модель (3.1), что справедливо только в ограниченной области амплитуд (см. ниже).

Рассмотрим теперь область больших амплитуд A_z , при которых еще выполняются сделанные предположения. Тогда полученные в этом параграфе выражения для основных характеристик нелинейных резонансов существенно упрощаются. Из выражений (4.4) и (4.7) несложно получить асимптотику амплитуд гармоники $V_l(A_x)$ и $V_m(A_z)$:

$$V_l(A_x) \approx 2 \frac{\sqrt{2\pi}}{A_x},$$

$$V_m(A_z) \approx \frac{4A_z}{\kappa \sqrt{2\pi m(m^2-1)}}. \quad (4.19)$$

Следует отметить, что различие в асимптотике для $V_l(A_x)$ и $V_m(A_z)$ связано с особенностью потенциала встречного взаимодействия при $\kappa \gg 1$. Более конкретно, в модели (3.1) сила $f_z(X, Z)$ быстро убывает при $|X| \rightarrow \infty$, $Z = \text{const}$ и выходит на плато при $|Z| \rightarrow \infty$, $X = \text{const}$.

Поскольку в реальной ситуации увеличение пучка из-за эффек-

тов встречи происходит в основном по координате Z при относительно небольших радиальных смещениях X ($A_x \lesssim 5 \div 10$), имеет смысл привести также выражение для амплитуды гармоники V_{lm}^1 при произвольных A_x и $A_z \gg \frac{|m|}{2}$:

$$V_{lm}^1 = e^{-A_z^2/4} I_{l/2} \left(\frac{A_x^2}{4} \right) \frac{4\sqrt{2\pi} A_z}{\kappa m(m^2-1)} \left(1 - \frac{m^2-1}{2A_z^2} \right). \quad (4.20)$$

Для сдвига бетатронной частоты (4.8) в пределе $A_z \gg 1$ получим:

$$\Delta v_z = \frac{2m_0 \xi_z}{A_z} \sqrt{\frac{2}{\pi}} I_0 \left(\frac{A_x^2}{4} \right) e^{-A_z^2/4}. \quad (4.21)$$

При $A_x = 0$ выражение (4.21) в точности совпадает с приведенным в [18] выражением Δv_z для плоского пучка. Там же получено и полное выражение для Δv_z при произвольных значениях A_z , имеющее более сложную форму интеграла от бесселевых функций. Можно показать, однако, что точное выражение для Δv_z (см. (4.8)) при $A_x = 0$ и зависимость, полученная в [18], являются тождественными.

Аналогично можно получить точное выражение для резонансной гармоники V_{lm}^1 потенциала плоского пучка путем предельного перехода $A_x \rightarrow 0$ (при $l=0$) в формулах (4.3—4.4). По сравнению с приведенными в [18] оно так же, как и Δv_z , имеет значительно более простую форму и может представлять самостоятельный интерес.

Отметим, что зависимость $\Delta v_z(A_x, A_z)$ представляет собой произведение $\Delta v_z(A_z)$ для плоского пучка и некоторой функции от A_x (см. (4.8), (4.21)). То же самое можно сказать и об остальных характеристиках $V_{lm}^1, \Delta A_z^{lm}, \Omega_\phi$.

Приведем также асимптотические (при $A_z \gg m/2$) выражения для ширины резонанса ΔA_z^{lm} и для фазовой частоты Ω_ϕ :

$$\Delta A_z^{lm} \approx \sqrt{\frac{I_{l/2}(A_x^2/4)}{I_0(A_x^2/4)}} \frac{2A_z}{\sqrt{|m|(m^2-1)}}, \quad (4.22)$$

$$\Omega_\phi \approx e^{-A_z^2/4} \sqrt{I_0 \left(\frac{A_x^2}{4} \right)} I_{l/2} \left(\frac{A_x^2}{4} \right) \frac{4\sqrt{2\pi}}{A_z} \sqrt{\frac{|m|}{m^2-1}}. \quad (4.23)$$

Перейдем теперь к анализу условий применимости полученного описания нелинейных резонансов. Напомним, что первым из этих условий является условие малой абсолютной погрешности модели

(3.1), что выполняется в области $A_z \ll \kappa$ (см. § 3). Кроме того, должны выполняться условия «одномерной нелинейности» (4.2 а, б). Рассмотрим, что дают эти условия в области $A_x, A_z \gtrsim 1$. С помощью интегральной формулы (2.11) при $A_x \gg 1, A_z \ll \kappa$ величину Δv_x можно оценить по формуле $\Delta v_x \approx \frac{2m_0 \xi_x}{A_x^2}$. Далее, из выражения (4.21) при $A_x \gg 1$ получим оценку для Δv_z в области $A_x, A_z \gtrsim 1$, имеющую вид: $\Delta v_z \approx \frac{4m_0 \xi_z}{\pi A_x A_z}$. Подставляя эти оценки в неравенство (4.2а) и (4.2б) получим условия применимости выражений (4.10) — (4.17):

$$A_z^3 \ll \frac{\kappa}{\pi} \frac{\xi_z^2}{\xi_x^2} \frac{m^2}{l^2} A_x^3, \quad (4.24)$$

$$A_z^2 \ll \frac{\kappa}{2} \frac{\xi_z}{\xi_x} \left| \frac{m}{l} \right| A_x^2, \quad (4.25)$$

Для типичных значений параметров $\xi_x, \xi_z, l, m, \kappa$ условие (4.25) дает большую область A_x, A_z , чем условие (4.24); так что определяющим является условие (4.24). Например, для установки ВЭПП-4, где бетатронные частоты близки к резонансу $l=4, m=-2$, а рабочие параметры таковы, что $\kappa \approx 100, \xi_z/\xi_x \approx 2$, неравенство (4.24) приводит к соотношению $(A_z/A_x)^3 \ll 30$. Видно, что условие (4.24) дает довольно жесткие ограничения на область допустимых значений (A_x, A_z) . Однако следует напомнить, что само условие (4.24) было получено из (4.2а) в предположении $A_x, A_z \gg 1$. Поэтому, например, для $A_x=1$ получающееся из приведенного выше неравенства ограничение $(A_z)_{\max} \approx 3$ является заниженным. Это подтверждается прямым численным сравнением приближенных формул (4.10—4.12) с результатами точных расчетов (см. ниже), которые показывают, что величина ΔA_z при $A_x=1$ имеет точность 20% вплоть до $A_z \approx 6$.

Основной особенностью рассмотренных выше нелинейных резонансов для $\kappa \gg 1$, как уже отмечалось, является близость направления векторов резонансных колебаний к оси A_z . Это приводит к увеличению поперечного размера пучка по оси z , в то время как размер по x остается практически постоянным. Поэтому представляет интерес рассмотреть ситуацию, когда векторы колебаний имеют значительный наклон в плоскости A_x, A_z в области $A_x, A_z \sim 1$. В этом случае будет происходить «перекачка» резонансных колебаний из вертикального направления в горизонтальное (и обратно).

При этом можно ожидать существенного уменьшения вертикального «раздувания», в то время как горизонтальный размер увеличится незначительно. Такая ситуация означает, что резонансные колебания являются существенно двумерными, в то время как до сих пор мы фактически рассматривали движение по X независимым от движения по Z . Поэтому условия «одномерной нелинейности» (4.2а, б) нарушаются и необходимо учесть отброшенные члены в выражении (2.14) для нелинейности α .

Для того, чтобы получить оценку для α , заметим, что входящие в (2.14) производные $\frac{1}{\xi_x} \frac{\partial(\Delta v_x)}{\partial A_x}, \frac{1}{\xi_z} \frac{\partial(\Delta v_z)}{\partial A_x}, \frac{1}{\xi_z} \frac{\partial(\Delta v_z)}{\partial A_z}$ являются величинами порядка единицы при $A_x, A_z \sim 1$. Тогда нелинейность α в общем случае можно представить в виде

$$\alpha = \alpha_0 \left(1 + \frac{C_1 y + C_2 y^2}{\kappa} \right), \quad (4.26)$$

где α_0 — «одномерная нелинейность» (4.1), $y = \frac{l}{m} \frac{\xi_x}{\xi_z}$, а C_1 и C_2 являются положительными константами порядка единицы. Из выражения (4.26) видно, что знакопеременным членом $C_1 y$, соответствующим второму слагаемому в выражении (2.14) для α , всегда можно пренебречь — при $y \ll \sqrt{\kappa}$ величина $\frac{C_1 y + C_2 y^2}{\kappa}$ много меньше единицы, а при $y \gtrsim \kappa$ выполняется соотношение $C_1 y \ll C_2 y^2$. Таким образом, вместо (4.26) получим

$$\alpha \approx \alpha_0 \left(1 + \frac{C_2 y^2}{\kappa} \right), \quad (4.27)$$

откуда видно, что нелинейность α в общем случае всегда больше «одномерной нелинейности» (4.1). Для ширины резонанса ΔA_z^{lm} при $A_x, A_z \sim 1$ для произвольных значений ξ_x, ξ_z, l, m получим выражение

$$\Delta A_z^{lm} = \frac{\Delta A_{z0}^{lm}}{\sqrt{1 + C_2 g}}, \quad (4.28)$$

где ΔA_{z0}^{lm} — независимая от ξ_x, ξ_z, κ амплитуда резонансных колебаний, вычисленная в приближении «одномерной нелинейности» по формулам (4.10—4.12). Отличие величины ΔA_z^{lm} от ΔA_{z0}^{lm} в основном определяется «параметром двумерности» g колебаний на резо-

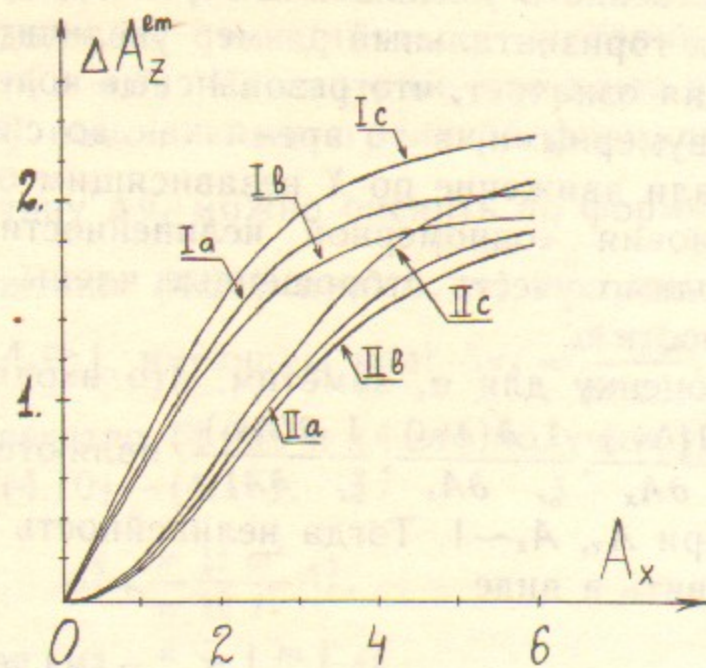


Рис. 12. Зависимость величины ΔA_z^{lm} от амплитуды A_x при $A_z=1$ для резонанса $2\nu_x-2\nu_z=n$ (кривые I) и резонанса $4\nu_x-2\nu_z=n$ (кривые II) для различных моделей поля сил: а—формула (4.10) (модель (3.1)), б—численное интегрирование (модель (3.10)), с—численное интегрирование (точная модель). Параметр эллиптичности $\kappa=\sigma_x/\sigma_z$ для кривых I равен $\kappa=20$, для кривых II равен 100.

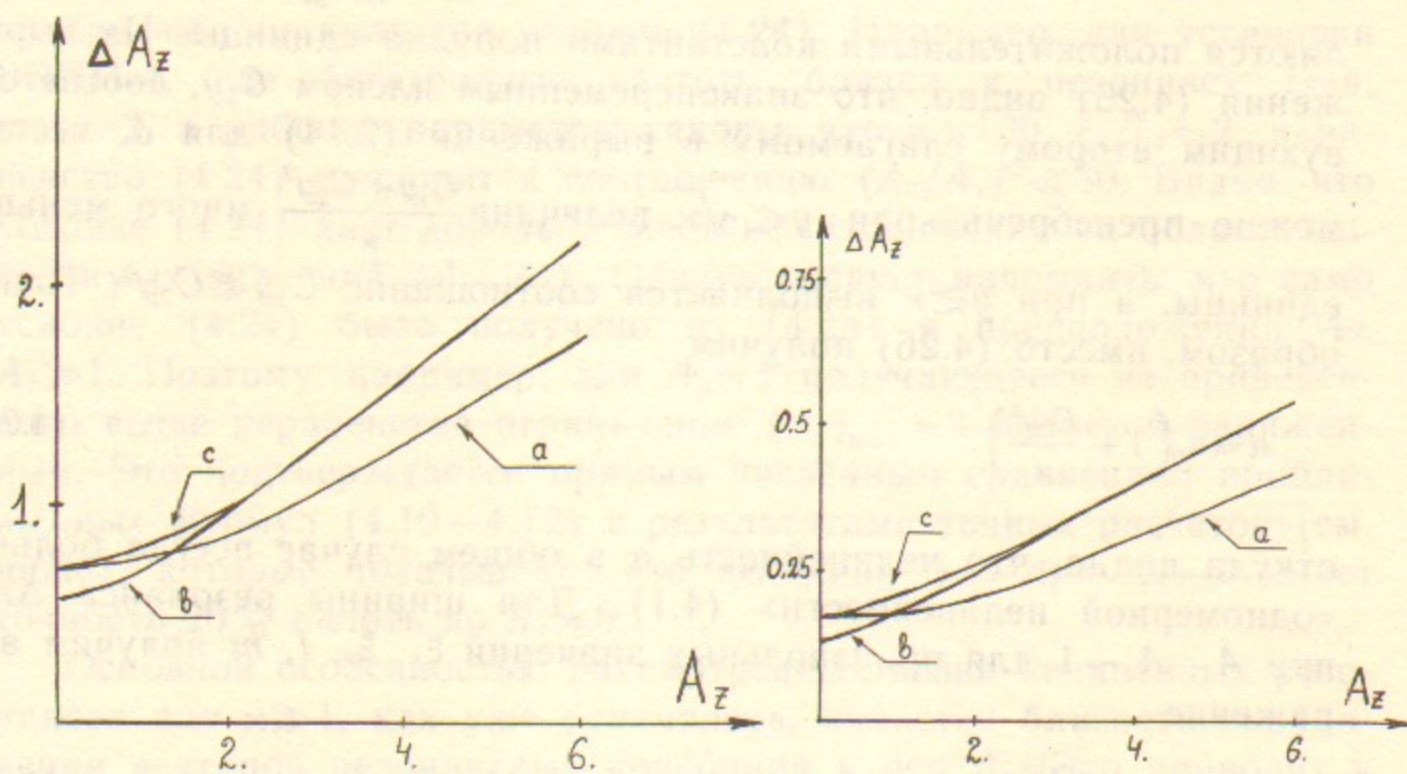


Рис. 13. Зависимость величины ΔA_z^{lm} от амплитуды A_z при $A_x=1$ для резонанса $2\nu_x-2\nu_z=n$. Обозначения а, б, с соответствуют принятым на рис. 12; $\kappa=20$.

Рис. 14. Зависимость величины ΔA_z^{lm} от амплитуды A_z при $A_x=1$ для резонанса $4\nu_x-2\nu_z=n$. Обозначения а, б, с соответствуют принятым на рис. 12; $\kappa=100$.

нансе $lv_x + mv_z = k$:

$$g = \frac{l^2 \xi_x^2}{m^2 \xi_z^2 \kappa} \quad (4.29)$$

Таким образом, выражение (4.28) показывает возможность подавления данного резонанса с помощью увеличения величины g . Подчеркнем, что выражение (4.28) указывает на преимущество большого соотношения ξ_x/ξ_z в противовес обычно используемому режиму $\xi_z \gg \xi_x$.

Для проверки точности полученного в этом параграфе описания изолированных резонансов было проведено вычисление ширины резонанса $l=2, m=-2$ для параметров ВЭПП-2М и резонанса $l=4, m=-2$ для параметров ВЭПП-4, с помощью численного интегрирования (2.11), (2.16) для «точной» модели (интегральные формулы [12, 19]) и приближенной модели (3.10). Результаты сравнивались также с аналитическими формулами (4.10) — (4.12). «Точные» силы f_x, f_z получались с помощью линейной интерполяции между полученными численным интегрированием значениями на сетке координат X, Z . Графики величины ΔA_z^{lm} в зависимости от амплитуды A_z при $A_x=1$ и от амплитуды A_x при $A_z=1$ для различных моделей показаны на рис. 12, 13, 14. Для выяснения причин отклонения теоретической кривой а от «точной» кривой с следует заметить, что существует два различных источника погрешности формул (4.10) — (4.12): отклонение приближенных формул для сил (3.3) от их точных значений и приближенный характер вычисления величины ΔA_z в рамках модели (3.3) (пренебрежение первыми двумя членами в нелинейности а). При увеличении амплитуды A_x для $A_z=1$ второе из упомянутых приближений выполняется все более хорошо (см. условия (4.18), (4.19)).

Поэтому естественно считать, что отклонение кривых а (выражение (4.10)) вниз от кривых с (точные значения) на рис. 12—14 обусловлено отличием приближенной модели (3.1) от точной. В целом можно сказать, что отклонение приближенных формул для сил (3.1) от точных значений при малых A_z приводит к уменьшению аналитически вычисляемых величин ΔA_z (4.10) — (4.12). При больших амплитудах A_z отбрасывание первых двух членов в нелинейности а (2.14) приводит к увеличению ΔA_z по сравнению с точными значениями. Из рис. 12—14 видно также, что модель (3.10) (кривые б) дает точность вычисления ширины резонанса ΔA_z в пределах 20% при любых значениях амплитуд A_x, A_z .

Приведенные в этом параграфе аналитические зависимости для характеристик нелинейных резонансов позволяют получать оценки некоторых величин, непосредственно связанных с экспериментальными данными. В качестве примера рассмотрим величину максимальной расстройки $\Delta q = v_{z0} - v_{x0}$, при которой резонанс связи $2v_x - 2v_z = 0$ приводит к значительному увеличению вертикального размера пучка. В работе [7] оценка этой расстройки была получена на основе степенного разложения потенциала эллиптического пучка. Однако результат полученный в [7], противоречит численным данным (см. ниже) и представляется, по нашему мнению, ошибочным. Действительно, по данным [7] в рассмотренном нами случае для параметров ВЭПП-2М резонанс связи $2v_x - 2v_z = 0$ должен захватывать своей сепаратрисой частицы из области $A_x^2 + A_z^2 \lesssim 1$, в которой находится основная часть пучка. При этом оказывается, что величина Δq занижена по сравнению с численными данными в десятки раз.

Получим аналогичную оценку для Δq , используя формулы (4.10—4.12). Считая, что колебания амплитуд происходят по направлению Z , можно представить величину $(\Delta q)_+$, соответствующую положению рабочей точки v_{x0}, v_{z0} на верхней границе резонансной полосы, в виде:

$$(\Delta q)_+ = \max_{A_x} [\Delta v_x(A_x) - \Delta v_z(A_x, \tilde{A}_z)], \quad (4.30)$$

где \tilde{A}_z — положение центра резонанса при фиксированном A_x :

$$\tilde{A}_z = \sqrt{1 - A_x^2 + \Delta A_z^{lm}(A_x, \tilde{A}_z)}. \quad (4.31)$$

Здесь $A_x \in [0, 1]$ и максимальное значение в (4.30) берется по переменной A_x .

С помощью формул для ширины резонанса (4.10) можно получить оценку ΔA_z^{2-2} для значений $A_x, A_z \lesssim 1$:

$$\Delta A_z^{2-2} \approx 0,8 A_x. \quad (4.32)$$

Подставляя (4.31), (4.32) в (4.30) и используя численные данные для Δv_z из (4.8) и для Δv_x из той же модели (3.1) (численные данные для $\Delta v_x, \Delta v_z$ в точной модели приведены в [6]), найдем, что максимум $(\Delta q)_+$ (4.30) при дополнительном условии $\xi_z > 1,3 \xi_x$ достигается при $A_x = 1$. Значение $(\Delta q)_+$ при этом записывается в виде

$$(\Delta q)_+ \approx 0,8 (\xi_x - \xi_z). \quad (4.33)$$

Значение расстройки $(\Delta q)_-$ для нижнего края резонансной полосы в нашем описании изолированного резонанса можно получить из условия касания «галстука частот» с резонансной линией $2v_x - 2v_z = 0$

$$(\Delta q)_- = \xi_x - \xi_z. \quad (4.34)$$

Таким образом, центральная линия полосы частот v_{x0}, v_{z0} , в которой пучок сильно увеличивает под действием резонанса связи $2v_x = 2v_z$ свой вертикальный размер, смещена от линии $v_{x0} = v_{z0}$ вниз по оси v_{z0} на величину

$$\delta_0 v_z = \left| \frac{(\Delta q)_+ + (\Delta q)_-}{2} \right| = 0,9 (\xi_z - \xi_x) \quad (4.35)$$

и имеет ширину

$$\Delta_0 v_z = |(\Delta q)_+ - (\Delta q)_-| = 0,2 (\xi_z - \xi_x). \quad (4.36)$$

Из (4.36) следует, что для данных рис. 4 (ВЭПП-2М) резонанс связи $2v_x - 2v_z = 0$ не должен захватывать область $A_x^2 + A_z^2 < 1$, что соответствует численным данным.

§ 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем основные результаты, полученные в настоящей работе.

1. Проведено численное исследование наиболее простой модели Пеггса. В этой модели движение по радиальной координате X не зависит от вертикального движения по Z , в то время как обратное влияние учтено как модуляция вертикального движения радиальным с бетатронной частотой v_x . Была определена область применимости такой «полуторамерной» модели, используемой для описания взаимодействия отдельной частицы с эллиптическим пучком, имеющим большое отношение поперечных размеров. Установлено, что в области $A_z \gtrsim \kappa \equiv \sigma_x / \sigma_z$ эта модель дает грубо неверный результат. Более подробное аналитическое рассмотрение показывает, что пренебрежение обратной связью горизонтальных колебаний с вертикальными приводит к нарушению точности описания уже при значениях $A_z \sim \sqrt{\kappa}$ для типичных значений параметров задачи.

2. Предлагаются новые модифицированные аналитические мо-

дели для описания поля сил эллиптического пучка с большим значением $\kappa \gg 1$. В отличие от модели Пеггса в них в первом порядке по $1/\kappa \ll 1$ учтено обратное влияние вертикального движения на радиальное, вследствие чего движение в области больших A_z становится существенно двумерным. Численное моделирование показывает, что такие упрощенные модели дают хорошее согласие с точными моделями в широкой области A_x, A_z , вплоть до $A_z \sim \kappa$.

3. Предложена приближенная модель взаимодействия частицы с эллиптическим пучком (для $\kappa \gg 1$), которая получена оптимизацией небольшого количества подгоночных параметров. Особенность этой модели состоит в ее максимально простой (для вычисления на ЭВМ) форме, дающей возможность значительного сокращения «машинного» времени при моделировании эффектов встречи. Прямое численное сравнение с точной моделью дает высокую точность предложенной модели, хотя выражения для f_x, f_z менее пригодны для аналитических оценок, чем в моделях, описанных выше.

4. Получены аналитические зависимости для характеристик нелинейных (двумерных) резонансов на основе приближенных моделей для поля сил f_x, f_z . С помощью этих зависимостей становится возможным надежное описание изолированных резонансов для $\kappa \gg 1$ в широкой области поперечных амплитуд. Для произвольного резонанса $lv_x + mv_z = n$ получены формулы для ширины резонанса и нелинейного сдвига бетатронных частот в зависимости от различных параметров модели. В отличие от общепринятого подхода, основанного на использовании точных громоздких выражений для f_x, f_z (или для потенциала), полученные в этой работе зависимости имеют достаточно простую форму и позволяют проводить эффективный анализ роли нелинейных резонансов в эффектах встречи.

5. Проведено сравнение полученных аналитических зависимостей с данными численного моделирования для точной и приближенных моделей. Показано, что точность аналитических формул является вполне удовлетворительной и дает хорошее приближенное описание основных характеристик нелинейных резонансов. Область применимости формул определяется в основном параметром эллиптичности κ и не превышает 30% на границе допустимой области поперечных амплитуд $A_z < A_x / \sqrt{g}$ (где $g = \frac{l^2 \xi_x^2}{m^2 \xi_z^2 \kappa}$).

6. Основная причина, приводящая к увеличению поперечного размера встречных пучков с $\kappa \gg 1$ (для $\xi_z \gtrsim \xi_x$) связана с тем, что нелинейные резонансы, как правило, вытянуты в плоскости A_x, A_z

по оси A_z и имеют большую ширину ΔA_z . Показано, что «степень двумерности» резонансов определяется некоторым параметром $g = \frac{l^2 \xi_x^2}{m^2 \xi_z^2 \kappa}$, где l и m — гармоники резонанса $lv_x + mv_z = n$. При $g \ll 1$ резонансы близки к одномерным, что и имеет место для типичных значений $\xi_x, \xi_z, l, m, \kappa$. Напротив, при $g \gtrsim 1$ резонансы становятся существенно двумерными и величина колебаний вертикальной амплитуды ΔA_z уменьшается: $\Delta A_z \approx \frac{\Delta A_z^0}{\sqrt{g}}$. В этом случае (например,

при $\xi_z \ll \xi_x$) можно надеяться на меньшую потерю светимости из-за эффектов встречи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Израйлев Ф.М. Почти линейные отображения и их приложения. Препринт 80-149 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1980; *Physica 1D* (1980) 243.
2. Chao A. The Beam-Beam Instability.—Lecture at the 3 Summer School on High Energy Particle Accelerators, New York (1983); SLAC-PUB-3179 (1983).
3. Evans L.R. The Beam-Beam Interaction.—Lecture at the CERN Accelerator School (1983); CERN SPS/83-38 (DI-MST).
4. Piwinski A. *IEEE Trans. NS-24* (1977) 1408; DESY-77/18 (1977); *IEEE Trans. NS-28* (1981) 2440.
5. Myers S. *Nucl. Instr. and Meth.* 211 (1983) 263—282.
6. Герасимов А.Л., Израйлев Ф.М., Вассерман И.Б., Теннисон Д.Ж. Эффекты встречи для эллиптического пучка с большим отношением поперечных размеров. Доклад на XII Международной конф. по ускорителям заряж. частиц высоких энергий. Батавия, США, 1983; Препринт 84-16 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1984.
7. Montague B.W. *Nucl. Instr. and Meth.* 187 (1981) 335—340.
8. Chao A.W., Bambade P., Weng W.T. Nonlinear Beam-Beam Resonances.—Lecture at the Joint US CERN School on Particle Accelerators, Sardinia, Italy, Jan.31—Febr.5, 1985.
9. Bambade P. Beam-Beam Driven Coupling.—LAL/RT/84-02 (1984).
10. Вечеславов В.В. Приближенное представление потенциала встречного взаимодействия эллиптических пучков.—Препринт 80-72 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1980.
11. Chirikov B.V. *Physics Reports* 52 (1979) 263.
12. Герасимов А.Л. Приближенное представление поля сил встречного пучка с большим отношением поперечных размеров.—Препринт 84-95 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1984.
13. Peggs S. Some Aspects of Machine Physics at CESR.—Ph. D. Thesis, Cornell University (1981).
14. Справочник по специальным функциям/под ред. М. Абрамовича и И. Стигана. М., 1979.
15. Tennyson J. A Simulation Study of the Beam-Beam Interaction at SPEAR.—Proc. of the Beam-Beam Interaction Seminar, Stanford, 1980.

16. Вассерман И.Б., Кооп И.А., Мишнев С.И., Тумайкин Г.М., Шатунов Ю.М. Изучение эффектов электромагнитного взаимодействия встречных сгустков в накопителе ВЭПП-2М.—Препринт 76-79 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1979.
17. Shonfeld J. Statistical Mechanics of Colliding Beams.—Fermilab-Pub-83/93-THU.
18. Израйлев Ф.М., Вассерман И.Б. Влияние различных типов модуляций на понижение порога стохастичности.—Препринт 81-60 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1981.
19. Kheifets S. Potential of a Three-Dimensional Gauss Bunch.—Petra Note 119 (1976).

А.Л. Герасимов, Ф.М. Израйлев, Дж Теннисон

**Описание нелинейных резонансов
для встречных пучков
с большим отношением поперечных размеров**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 19 апреля 1986 г.
Подписано в печать 16.06.1986 г. МН 11756
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3,0 печ.л., 2,8 уч.-изд.л.
Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ № 98

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*