



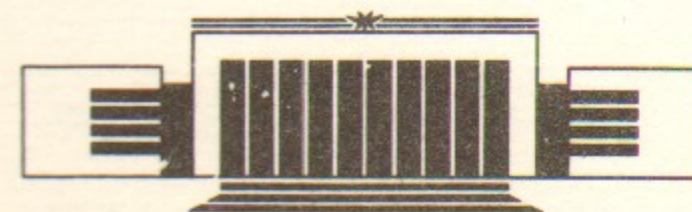
43
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Н.И. Зиневич, М.М. Карлинер

ТЕОРИЯ ПРОДОЛЬНОГО
СТОХАСТИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИНВ. № _____

ПРЕПРИНТ 86-80



НОВОСИБИРСК

1986

ТЕОРИЯ ПРОДОЛЬНОГО
СТОХАСТИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

ПРЕПРИНТ 88-80

© Институт ядерной физики СО АН СССР

ВВЕДЕНИЕ

Известные попытки построения более строгой теории стохастического охлаждения [1—3] основаны на использовании цепочки кинетических уравнений Боголюбова в предположении парных взаимодействий и самодействия частиц. При этом полагают, что самодействие дает полезный эффект охлаждения, в то время как взаимодействие вызывает обратный эффект—нагрев, ограничивая достижимые декременты охлаждения.

Между тем, возможен иной подход к этой задаче [4—5]. Напомним, что идея стохастического охлаждения впервые появилась как идея коллективного взаимодействия. Действительно, Ван-дер-Меер предложил [6] с целью охлаждения пучка воздействовать с помощью обратной связи на колебания его центра тяжести, являющегося коллективной степенью свободы. Цепь обратной связи при этом должна быть устроена так, чтобы отбирать энергию флуктуационных колебаний центра тяжести, которая возобновляется за счет связи с другими степенями свободы пучка.

Построение теории стохастического охлаждения на основе такой модели представляется более естественным. Получаемые при этом результаты легко интерпретируются и более явным образом связаны с реальными системами стохастического охлаждения.

В данной работе на основе модели коллективного взаимодействия исследуются различные схемы стохастического охлаждения разброса продольных импульсов несгруппированных пучков тяжелых частиц. Анализ основан на использовании формализма мик-

роскопической фазовой плотности, близкого к развитому Ю.Л. Климонтовичем [7].

На рис. 1 представлена схема устройства системы стохастического охлаждения. Сигнал с пикап-электрода усиливается и с помощью кикера воздействует на пучок. При этом сигнал с пикап-электрода, в зависимости от конструкции последнего, может быть пропорционален либо радиальной поперечной координате центра тяжести частиц, находящихся в данный момент внутри датчика, либо мгновенному значению тока пучка. В связи с этим различают две схемы стохастического охлаждения: метод Палмера и фильтровой метод [8]. Обе эти схемы рассмотрены в данной работе.

При анализе динамики охлаждения предполагается отсутствие взаимного влияния продольного и поперечного движений. Такое предположение допустимо, если, например, в цепь обратной связи введен фильтр, пропускающий только спектр флуктуаций продольного движения. В качестве такого фильтра может быть применен гребенчатый фильтр, выделяющий спектр в окрестности гармоник частоты обращения частиц. Предполагается также отсутствие взаимодействия между частицами помимо цепи обратной связи. Это ограничение введено с целью упрощения анализа, хотя применяемый метод позволяет учесть также и влияние сил объемного заряда. В реальных системах силы объемного заряда не играют существенной роли, ввиду малой плотности пучков.

В разделе 1 рассмотрено поведение циркулирующего пучка при воздействии на него напряжения на ускоряющем зазоре.

В разделе 2 приведены соотношения для флуктуаций, возникающих вследствие дискретности пучка.

В разделе 3 вычисляются декременты стохастического охлаждения для двух основных схем продольного стохастического охлаждения.

В разделе 4 выведены кинетические уравнения стохастического охлаждения с учетом шумов усилителя.

1. МОДЕЛЬ И ЕЕ СВОЙСТВА

Уравнения продольного движения частиц в накопителе, записанные в сопровождающей системе координат, имеют следующий вид:

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m_s} \left(\frac{1}{\gamma_s} - \alpha \right),$$

$$\dot{p}_z = e E_z(z + \omega_s R_s t, t), \quad (1)$$

где z — продольная координата в сопровождающей системе; $p_z = p - p_s$, p_s — импульс равновесной (неподвижной в сопровождающей системе координат) частицы; p — импульс частицы; γ_s — релятивистский фактор равновесной частицы; α — коэффициент расширения орбит; m_s , ω_s , R_s — соответственно масса, угловая частота обращения и средний радиус орбиты равновесной частицы. Электрическое поле $E_z(z + \omega_s R_s t, t)$ находится через поле в лабораторной системе $E_z(l, t)$ (l — продольная координата в лабораторной системе) формальной заменой $l = z + \omega_s R_s t$.

В дальнейшем предполагается, что продольное поле $E_z(l, t)$ — это поле ускоряющего зазора, определяемое через цепь обратной связи коллективными движениями несгруппированного пучка тяжелых частиц в накопителе, в котором осуществляется стохастическое охлаждение. Поле E_z предполагается не зависящим от поперечных координат в лабораторной системе.

В дальнейшем мы будем пользоваться другими переменными для описания продольного движения, а именно, азимутом ψ и частотой обращения ω в сопровождающей системе координат:

$$\psi = \frac{z}{R_s}, \quad \omega = \frac{p_z}{M R_s}, \quad M = m_s \left(\frac{1}{\gamma_s} - \alpha \right)^{-1}.$$

В этих переменных уравнения (1) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= \frac{e}{M R_s} E_z(\psi + \omega_s t, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения (2) являются каноническими с гамильтонианом

$$H = \frac{\omega^2}{2} - \frac{e}{M R_s} \int E_z(\psi + \omega_s t, t) d\psi,$$

так как E_z не зависит от ω явным образом.

Продольное поле E_z , создаваемое ускоряющим зазором, может быть представлено рядом Фурье

$$E_z(\vartheta, t) = \frac{U(t)}{2\pi R_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\vartheta}, \quad (3)$$

где ϑ — азимут в лабораторной системе, $\vartheta = \psi + \omega_s t$, $U(t)$ — напряжение на зазоре, коэффициенты a_m учитывают распределение поля в зазоре.

Множество частиц пучка описывается функцией микроскопической фазовой плотности в одночастичном фазовом пространстве

$$f(\psi, \omega, t) = \frac{1}{N} \sum_j \delta(\omega - \omega_j) \delta(\psi - \psi_j - \omega_j t), \quad (4)$$

где ψ_j и ω_j — соответственно азимут и частота обращения j -й частицы в сопровождающей координатной системе.

Функция микроскопической фазовой плотности может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(\psi, \omega, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(\omega, t) e^{im\psi}. \quad (5)$$

Средние по пучку значения $\langle \omega \rangle$ и $\langle \omega^2 \rangle$ определяются нулевой гармоникой

$$\langle \omega \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \omega \cdot f_0(\omega) d\omega; \quad \langle \omega^2 \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \cdot f_0(\omega) d\omega.$$

Сделаем некоторые замечания относительно представляющей наибольший интерес нулевой гармоники функции фазовой плотности

$$f_0(\omega, t) = \frac{1}{2\pi N} \sum_j \delta(\omega - \omega_j).$$

При свободном движении пучка частоты ω_j определяются начальными условиями и в общем случае произвольны. Поэтому при использовании вероятностного подхода возникают трудности с формированием ансамбля, по которому можно было бы производить усреднение. Эти трудности связаны с отсутствием выделенного равновесного состояния, к которому приходил бы достаточно быстро пучок независимо от начальных условий, как это имеет

место, например, для пучков электронов вследствие радиационного затухания и квантовых флуктуаций.

Можно, тем не менее, рассматривать сглаженную функцию $f_0(\omega, t)$, получаемую в результате усреднения исходной функции по интервалу частот, много меньшему разброса частот в пучке $\Delta\omega$, но много большему разности частот соседних частиц $\sim \Delta\omega/N$. При использовании вероятностного подхода будем рассматривать ансамбль систем, у которых сглаженная функция $f_0(\omega, t)$ одинакова. В выражениях для $\langle \omega \rangle$ и $\langle \omega^2 \rangle$, приведенных выше, функцию $f_0(\omega, t)$, можно считать сглаженной.

Величины $\langle \omega \rangle$ и $\langle \omega^2 \rangle$ зависят от выбора равновесной частоты ω_s . Естественно определить частоту ω_s так, чтобы

$$\langle \omega \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \omega \cdot f_0(\omega) d\omega = 0.$$

Такой выбор ω_s предполагается в дальнейшем, если не будет оговорено иное.

Частицы с $\omega \neq 0$ имеют орбиту, сдвинутую по радиусу относительно равновесной (в среднем по периметру накопителя) на величину

$$y = aR_s \frac{M}{m_s} \cdot \frac{\omega}{\omega_s}.$$

Координата центра тяжести пучка в некотором сечении может быть выражена через функцию микроскопической фазовой плотности

$$y_c(\psi, t) = aR_s \frac{M}{m_s \omega_s} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \cdot f(\psi, \omega, t) d\omega.$$

Геометрическое место мгновенных центров тяжести пучка в различных сечениях мы будем в дальнейшем называть центроидой. Периодичность центроиды позволяет представить ее в любой момент времени суммой азимутальных гармоник

$$y_c(\psi, t) = \sum_m y_{cm}(t) \cdot e^{im\psi}, \quad (6)$$

причем, принимая во внимание (5),

$$y_{cm}(t) = \alpha R_s \frac{M}{m_s \omega_s} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \cdot f_m(\omega, t) d\omega. \quad (7)$$

Заменяя в (6) $\psi = \vartheta - \omega_s t$, перейдем в лабораторную систему

$$y_c(\vartheta, t) = \sum_m y_{cm}(t) e^{im(\vartheta - \omega_s t)}. \quad (8)$$

Ток пучка в сопровождающей системе с азимутом ψ также может быть выражен через функцию микроскопической фазовой плотности

$$i(\psi, t) = \frac{e N v}{R_s} \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi, \omega, t) d\omega,$$

где v — продольная скорость движения частиц в лабораторной системе.

При этом

$$i(\psi, t) = \sum_m i_m(t) e^{im\psi}, \quad (9)$$

где

$$i_m(t) = \frac{e N v}{R_s} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(\omega, t) d\omega. \quad (10)$$

В лабораторной системе

$$i(\vartheta, t) = \sum_m i_m(t) e^{im(\vartheta - \omega_s t)}. \quad (11)$$

Формулы (8) и (11) понадобятся нам для вычисления сигнала, создаваемого пучком на пикап-электроде системы стохастического охлаждения.

Функция микроскопической фазовой плотности, представленная в виде (4), как показано Ю.Л. Климонтовичем (см., например, [7]), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\psi} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \frac{e}{MR_s} E_z \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) по форме напоминает уравнение Власова, но оно имеет совсем другой смысл (сохранение числа частиц) и позволяет построить всю цепочку уравнений Боголюбова [9]. В нашем случае, однако, более целесообразно получить уравнения для гармоник функции микроскопической фазовой плотности.

Подставляя разложения (3) и (5) в уравнение (12) и разделяя гармоники (после замены $\vartheta = \psi - \omega_s t$), получим бесконечную цепочку уравнений для амплитуд гармоник микроскопической фазовой плотности.

Уравнение для нулевой гармоники имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{e}{2\pi R_s^2 M} U(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \frac{\partial f_{-m}}{\partial \omega} e^{im\omega_s t} = 0. \quad (13)$$

Если считать все гармоники, кроме нулевой, малыми возмущениями и, соответственно, действующее напряжение $U(t)$ также считать малым, то с точностью до малых второго порядка остальные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial f_m}{\partial t} + im\omega f_m + \frac{e a_m}{2\pi R_s^2 M} U(t) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \omega} e^{im\omega_s t} = 0, \quad (14)$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Уравнения (13), (14) образуют замкнутую систему. Как следует из (13), производная $\frac{\partial f_0}{\partial t}$ — второго порядка малости относительно возмущений. Это позволяет при интегрировании уравнений (14) считать производную $\frac{\partial f_0}{\partial \omega}$ не зависящей от времени.

Такое приближение соответствует известному квазилинейному приближению в физике плазмы. В квазилинейном приближении имеют место два временных масштаба протекания процессов. А именно, время установления возмущений под действием внешнего поля, описываемых уравнениями (14), имеет порядок обратного разброса частот обращения, $(\Delta\omega)^{-1}$. Длительность изменений функции $f_0(\omega, t)$ много больше обратного разброса частот. Поэтому решение уравнений (14) на временах $t \gg (\Delta\omega)^{-1}$, но много меньших времени изменения $f_0(\omega, t)$, может быть представлено в виде

$$f_m(\omega, t) = f_m^{\text{ст}}(\omega, t) + F_m(\omega, t),$$

где $f_m^{\text{инд}}(\omega, t)$ — гармоники, индуцированные электрическим полем ускоряющего зазора; $F_m(\omega, t)$ — решения уравнений (14) без правой части, т. е. при нулевом напряжении на ускоряющем зазоре. Последнее слагаемое представляет собой, по существу, свободные флуктуации пучка вследствие дискретности.

Уравнение (13) позволяет найти скорость изменения среднеквадратичного разброса частот обращения $\langle \omega^2 \rangle$. Для этого умножим уравнение (13) на ω^2 и проинтегрируем по ω :

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 f_0(\omega) d\omega + \frac{e}{2\pi R_s^2 M} \cdot U(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \frac{\partial f_m}{\partial \omega} d\omega \cdot e^{im\omega t} = 0. \quad (15)$$

Учитывая, что

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 f_0(\omega) d\omega = \langle \omega^2 \rangle$$

и, согласно (7),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \frac{\partial f_{-m}}{\partial \omega} d\omega = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega \cdot f_{-m}(\omega) d\omega = -\frac{2m_s \omega_s}{a R_s M} y_{c, -m}(t),$$

из (15) находим, что

$$\frac{d \langle \omega^2 \rangle}{dt} = \frac{2e m_s \omega_s}{R_s^2 M^2 a} \cdot U(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m y_{c, -m}(t) \cdot e^{im\omega t}.$$

Учитывая медленность изменения $\langle \omega^2 \rangle$, можно путем усреднения исключить из правой части полученного выражения быстроосциллирующие слагаемые

$$\frac{d \langle \omega^2 \rangle}{dt} = \frac{2e m_s \omega_s}{R_s^2 M^2 a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \overline{U(t) \cdot [y_{cm}(t) \cdot e^{-im\omega t}]^*}, \quad (16)$$

где черта означает усреднение по интервалу времени, много большему $(\Delta\omega)^{-1}$, но меньшему времени изменения функции $f_0(\omega, t)$. Знак * обозначает комплексно-сопряженную величину.

Заметим, что гармоники центроиды $y_{cm}(t)$ в формуле (16) обусловлены, как выше указано, действием электрического поля ускоряющего зазора и флуктуациями вследствие дискретности пучка.

Найдем действие внешнего электрического поля на пучок. Подвергая уравнение (14) преобразованию Лапласа (считая $\frac{\partial f_0}{\partial \omega}$ не зависящей от времени), получим:

$$f_m^{\text{инд}}(\omega, s) = -\frac{e a_m}{2\pi R_s^2 M} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{U(s - im\omega_s)}{s + im\omega}, \quad (17)$$

где $f_m(\omega, s)$, $U(s)$ — Лаплас-изображения функций $f_m(\omega, t)$, $U(t)$. Подставляя (17) в (7), найдем

$$y_{cm}^{\text{инд}}(s) = -a \frac{e c_m U(s - im\omega_s)}{2\pi \omega_s R_s m_s} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{d\omega}{s + im\omega}. \quad (18)$$

Далее, подвергая преобразованию Лапласа (8) и подставляя y_{cm} из (18), получим

$$\begin{aligned} y_c^{\text{инд}}(\theta, s) &= \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} y_{cm}^{\text{инд}}(s + im\omega_s) e^{im\theta} = \\ &= -\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{a e a_m}{2\pi \omega_s R_s m_s} U(s) e^{im\theta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d\omega}{s + im(\omega + \omega_s)} = \eta(\theta, s) U(s), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\eta(\theta, s)$ — восприимчивость центра тяжести пучка на азимуте θ к напряжению на ускоряющем промежутке. Из (19) следует, что

$$\eta(\theta, s) = \sum_m \eta_m(s) \cdot e^{im\theta}, \quad (20)$$

причем

$$\eta_m(s) = -\frac{a e a_m}{2\pi \omega_s R_s m_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d\omega}{s + im(\omega + \omega_s)} \quad (21)$$

есть восприимчивость m -ой азимутальной гармоники центроиды пучка.

Восприимчивость по отношению к синусоидальному напряжению с временной зависимостью вида $e^{i\Omega t}$ может быть найдена заменой в (21) s на $i\Omega + \sigma$ с переходом к пределу $\sigma \rightarrow +0$:

$$\eta_m(i\Omega) = -\frac{ae a_m}{2\pi \omega_s R_s m_s} \times \left\{ \frac{\pi}{|m|} \left[\omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right]_{\omega = -\frac{\Omega}{m} - \omega_s} - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d\omega}{m\omega + m\omega_s + \Omega} \right\}. \quad (22)$$

Для тока пучка можно аналогичным способом получить

$$i(\theta, s) = \kappa(\theta, s) \cdot U(s), \quad (23)$$

где

$$\kappa(\theta, s) = \sum_m \kappa_m(s) e^{im\theta}, \quad (24)$$

причем

$$\kappa_m(s) = -\frac{e^2 N v a_m}{2\pi R_s^3 M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f_0}{\partial \omega} d\omega}{s + im(\omega + \omega_s)}. \quad (25)$$

Восприимчивость тока по отношению к синусоидальному напряжению $e^{i\Omega t}$, как и выше, получается заменой s на $i\Omega + \sigma$ и переходом к пределу $\sigma \rightarrow +0$:

$$\kappa_m(i\Omega) = -\frac{e^2 N v a_m}{2\pi R_s^3 M} \left\{ \frac{\pi}{|m|} \left[\frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right]_{\omega = -\frac{\Omega}{m} - \omega_s} - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f_0}{\partial \omega} d\omega}{m\omega + m\omega_s + \Omega} \right\}. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь вопрос о так называемом «перемешивании» в рассматриваемой модели. Как следует из (22) и (26), восприимчивости m -ой гармоники центроиды и тока пучка отличны от нуля в области частот (при $m > 0$)

$$m\omega_s - \frac{m\Delta\omega}{2} < \Omega < m\omega_s + \frac{m\Delta\omega}{2}, \quad (27)$$

где $\Delta\omega$ — разброс частот, т. е. в интервале частот $-\Delta\omega/2 < \omega < \Delta\omega/2$, в котором функция $f_0(\omega)$ отлична от нуля. Для больших m , таких, что $m\Delta\omega \geq \omega_s$ (предполагая, что $\Delta\omega \ll \omega_s$), напряжение на ускоряющем зазоре частоты $\Omega \approx m\omega_s$ будет возбуждать не только m -ую азимутальную гармонику, но и смежные с

ней. При этом имеет место интерференция гармоник с близкими номерами, приводящая к затуханию возбуждения в пучке по мере удаления от ускоряющего промежутка в направлении движения пучка. Смысл этого затухания состоит в перемешивании частиц вследствие разброса частот.

Заметим, что при $\Delta\omega \ll \omega_s$ для низких гармоник перемешивание всегда слабое.

2. ФЛУКТУАЦИИ

В принятой модели стохастического охлаждения флуктуации центра тяжести и тока пучка играют определяющую роль. Ниже рассмотрены свойства этих флуктуаций.

Флуктуации в свободно циркулирующем пучке могут быть описаны с помощью волн со случайной амплитудой и фазой. При отсутствии непосредственного взаимодействия частиц и выключенной обратной связи движения отдельных частиц независимы.

Амплитуды гармоник центроиды и тока пучка выражаются через азимутальные гармоники функции микроскопической фазовой плотности $f(\psi, \omega, t)$. С учетом (4) для m -ой азимутальной гармоники функции фазовой плотности свободно циркулирующего пучка находим

$$F_m(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi, \omega, t) e^{-im\psi} d\psi = \frac{1}{2\pi N} \sum_j \delta(\omega - \omega_j) e^{-im(\psi_j + \omega_j t)}. \quad (28)$$

Соответствующие амплитуды гармоник центроиды и тока будут, согласно (7) и (10), равны

$$Y_{cm}(t) = \frac{a R_s M}{2\pi N \omega_s m_s} \sum_j \omega_j e^{-im(\psi_j + \omega_j t)}, \quad (29)$$

$$I_m(t) = \frac{e v}{2\pi R_s} \sum_j e^{-im(\psi_j + \omega_j t)}. \quad (30)$$

Прописными буквами Y_{cm} и I_m мы будем в дальнейшем обозначать амплитуды гармоник свободных флуктуаций.

Найдем корреляции и спектральные плотности флуктуаций. Для гармоник центроиды согласно (29) получим

$$Y_{cm}^*(t) \cdot Y_{cn}(t+\tau) = \left(\frac{\alpha R_s M}{2\pi N \omega_s m_s} \right)^2 \sum_{j,k} \omega_j \omega_k \cdot e^{i[m\psi_j - n\psi_k + (m\omega_j - n\omega_k)t - n\omega_k \tau]}$$

Для получения функции корреляции это выражение следует усреднить по ансамблю. Вследствие независимости движений отдельных частиц усреднение дает нуль при $n \neq m$. Если $n = m$, то в вышеприведенном выражении остаются лишь слагаемые с $j = k$. В результате получаем, что флуктуации гармоник с различными номерами статистически независимы и

$$\langle Y_{cm}^*(t) \cdot Y_{cm}(t+\tau) \rangle = \left(\frac{\alpha R_s M}{2\pi N \omega_s m_s} \right)^2 \sum_j \omega_j^2 e^{-im\omega_j \tau} \quad (31)$$

В (31) суммирование может быть заменено интегрированием со сглаженной функцией распределения $f_0(\omega)$:

$$\langle Y_{cm}^*(t) \cdot Y_{cm}(t+\tau) \rangle = \left(\frac{\alpha R_s M}{2\pi N \omega_s m_s} \right)^2 \cdot 2\pi N \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 f_0(\omega) e^{-im\omega \tau} d\omega \quad (32)$$

Спектральная плотность может быть найдена из (32):

$$\begin{aligned} S_{cm}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle Y_{cm}^*(t) \cdot Y_{cm}(t+\tau) \rangle e^{-i\Omega \tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 f_0(\omega) d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(m\omega + \Omega)\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(m\omega + \Omega)\tau} d\tau = \delta(m\omega + \Omega),$$

то

$$S_{cm}(\Omega) = \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s} \right)^2 \frac{1}{|m|} \left(\frac{\Omega}{m} \right)^2 f_0 \left(-\frac{\Omega}{m} \right) \quad (33)$$

Аналогично можно вычислить корреляцию тока пучка и взаимную корреляцию:

$$\langle I_m^*(t) \cdot I_m(t+\tau) \rangle = \left(\frac{ev}{2\pi R_s} \right)^2 \cdot 2\pi N \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega) e^{-im\omega \tau} d\omega, \quad (34)$$

$$\langle Y_{cm}^*(t) \cdot I_m(t+\tau) \rangle = \frac{ev\alpha M}{2\pi \omega_s m_s} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \cdot f_0(\omega) e^{-im\omega \tau} d\omega, \quad (35)$$

а также соответствующие спектральные плотности:

$$S_{im}(\Omega) = 2\pi N \left(\frac{ev}{2\pi R_s} \right)^2 \cdot \frac{1}{|m|} f_0 \left(-\frac{\Omega}{m} \right), \quad (36)$$

$$S_{cim}(\Omega) = -\frac{ev\alpha M}{2\pi \omega_s m_s} \frac{1}{|m|} \cdot \frac{\Omega}{m} \cdot f_0 \left(-\frac{\Omega}{m} \right). \quad (37)$$

Спектральные плотности (33), (36), (37) отличны от нуля в интервале

$$-\frac{m\Delta\omega}{2} < \Omega < \frac{m\Delta\omega}{2}.$$

В лабораторной системе координат спектр m -ой гармоники смещен на $m\omega_s$. В результате спектр флуктуаций в лабораторной системе (т. е. то, что видит пикап) представляет собой полосы шириной $m\Delta\omega$ около гармоник частоты обращения $m\omega_s$. Как видно из (33), (36), (37), с ростом m спектральные плотности убывают так, что интеграл по одной полосе не зависит от m .

Если при этом $m\Delta\omega < \omega_s$, то соседние полосы не перекрываются. В противоположном случае имеет место наложение спектров соседних гармоник, что соответствует перемешиванию.

Если на пучок действует внешнее напряжение на ускоряющем промежутке $U(t)$, то в квазилинейном приближении (т. е. при достаточно малом $U(t)$) азимутальные гармоники центроиды и тока пучка могут быть найдены путем суперпозиции флуктуаций и возбуждения. Тогда согласно (19), (23), (24) получим для азимутальных гармоник

$$y_{cm}(s) = \eta_m (s - im\omega_s) \cdot U(s - im\omega_s) + Y_{cm}(s), \quad (38)$$

$$i_m(s) = \kappa_m (s - im\omega_s) \cdot U(s - im\omega_s) + I_m(s). \quad (39)$$

3. СТОХАСТИЧЕСКОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕКРЕМЕНТОВ

Общая схема устройства для стохастического охлаждения продольных импульсов представлена на рис. 1. Начало отсчета азимута в накопителе выбрано так, что ускоряющий промежуток расположен на азимуте $\vartheta = 0$, а датчик — на азимуте $-\vartheta_0$. Обращение частиц предполагается происходящим против часовой стрелки.

В этой общей схеме датчик может быть различным. В одном случае датчик дает сигнал, пропорциональный радиальному положению центра тяжести частиц, находящихся в данный момент времени внутри датчика (метод Палмера). В другом случае датчик реагирует на ток пучка в датчике. В последнем случае в цепь обратной связи должен быть введен специальный фильтр, в связи с чем второй метод называют фильтровым методом.

Декремент охлаждения в обоих случаях может быть вычислен с помощью формулы (16). А именно, декремент равен

$$\delta = -\frac{1}{2\langle\omega^2\rangle} \frac{d\langle\omega^2\rangle}{dt} = -\frac{e\omega_s m_s}{\langle\omega^2\rangle a R_s^3 M^2} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} a_m U_{oc}(t) \cdot [y_{cm}(t) \cdot e^{-im\omega_s t}]^* \quad (40)$$

Здесь U_{oc} — напряжение обратной связи на ускоряющем промежутке.

3.1. Обратная связь по радиальному положению центра тяжести частиц в датчике

Предположим, что датчик реагирует на положение центра тяжести частиц, находящихся в данный момент времени внутри датчика. Для вычисления координаты центра тяжести воспользуемся формулой (8)

$$\bar{y}_c(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\vartheta_0 - \frac{\Delta}{2}}^{-\vartheta_0 + \frac{\Delta}{2}} y_c(\vartheta, t) \cdot d\vartheta = \sum_m b_m e^{-im\vartheta_0} y_{cm}(t) e^{-im\omega_s t}, \quad (41)$$

где Δ — азимутальная протяженность датчика,

$$b_m = b_{-m} = \frac{\sin m\Delta/2}{m\Delta/2}. \quad (42)$$

Подвергая (41) преобразованию Лапласа, найдем

$$\bar{y}_c(s) = \sum_m b_m e^{-im\vartheta_0} y_{cm}(s + im\omega_s). \quad (43)$$

Напряжение обратной связи на ускоряющем промежутке линейно зависит от \bar{y}_c

$$U_{oc}(s) = e N K(s) \cdot \bar{y}_c(s) = e N K(s) \cdot \sum_m b_m e^{-im\vartheta_0} y_{cm}(s + im\omega_s). \quad (44)$$

Здесь $K(s)$ — коэффициент усиления, включающий в себя характеристики датчика, усилителя, линии передачи и ускоряющего промежутка.

Входящие в (44) азимутальные гармоники центроиды обусловлены действием приложенного к ускоряющему промежутку напряжения обратной связи и флуктуациями пучка. Подставляя в (44) их выражение (38), получим уравнение обратной связи, из которого найдем напряжение обратной связи

$$U_{oc}(s) = \frac{e N K(s) \sum_m b_m e^{-im\vartheta_0} Y_{cm}(s + im\omega_s)}{1 - e N K(s) \sum_n b_n e^{-in\vartheta_0} \eta_n(s)}. \quad (45)$$

Как видно из (45), источником напряжения обратной связи являются флуктуации центра тяжести пучка в датчике. Вклад в напряжение обратной связи дают также шумы усилителя, не учитываемые формулой (45). Влияние этих шумов будет рассмотрено в дальнейшем.

Пользуясь (38) и (45), можно найти также амплитуды азимутальных гармоник центроиды при наличии обратной связи:

$$y_{cm}(s + im\omega_s) = Y_{cm}(s + im\omega_s) +$$

$$+ \frac{\eta_m(s) e N K(s) \sum_n b_n e^{-in\theta_0} Y_{cn}(s+in\omega_s)}{1 - e N K(s) \sum_k b_k e^{-ik\theta_0} \eta_k(s)} \quad (46)$$

Формулы (45) и (46) позволяют найти входящие в правую часть (40) средние $\overline{U_{oc}(t) \cdot [y_{cm}(t) \cdot e^{-im\omega_s t}]^*}$. Прежде всего, рассматривая флуктуации как стационарный случайный процесс (вследствие медленности стохастического охлаждения), усреднение по времени можно заменить усреднением по ансамблю. Тогда средние по ансамблю $\langle U_{oc}(t) \cdot [y_{cm}(t) \cdot e^{-im\omega_s t}]^* \rangle$ могут быть вычислены с помощью формулы (П.10), полученной в Приложении 1.

Лаплас-изображение $U_{oc}(t)$ определяется формулой (45), из которой видно, что $U_{oc}(t)$ линейно зависит от случайных функций

$$L^{-1}[Y_{cn}(s+in\omega_s)] = Y_{cn}(t) \cdot e^{-in\omega_s t}$$

Лаплас-изображение второго множителя

$$L\{y_{cm}(t) \cdot e^{-im\omega_s t}\} = y_{cm}(s+im\omega_s)$$

определяется формулой (46), из которой следует, что $y_{cm}(t) \cdot e^{-im\omega_s t}$ линейно зависит от тех же случайных функций $Y_{cn}(t) \cdot e^{-in\omega_s t}$. Заметим, что эти последние функции с различными номерами n статистически независимы; поэтому для вычисления корреляции

$$\langle U_{oc}(t) [y_{cm}(t) \cdot e^{-im\omega_s t}]^* \rangle \quad (47)$$

можно воспользоваться формулой (П.10) Приложения 1.

Выше были найдены спектральные плотности случайных функций $Y_{cn}(t)$ — формула (33). Исходя из (32) и (33), легко получить также спектральную плотность случайной функции $Y_{cn}(t) \cdot e^{-in\omega_s t}$. А именно, эта спектральная плотность равна

$$S'_{cn}(\Omega) = S_{cn}(\Omega + n\omega_s) = \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s} \right)^2 \cdot \frac{1}{|n|} \left(\frac{\Omega}{n} + \omega_s \right)^2 \cdot f_0 \left(-\frac{\Omega}{n} - \omega_s \right) \quad (48)$$

Ограничимся вычислением декремента для случая со слабым перемешиванием. Это означает, что мы учитываем лишь те гармоники, для которых $m\Delta\omega < \omega_s$, где m — номер гармоники, а $\Delta\omega$ — разброс частот обращения частиц в пучке.

В реальных системах обрезание верхних гармоник происходит, во-первых, за счет ограниченной полосы пропускания усилителя с коэффициентом усиления $K(s)$ и, во-вторых, за счет датчика, характеризующегося коэффициентами b_m и ускоряющего зазора (коэффициенты a_m).

При слабом перемешивании в суммах по n и k в выражениях (45) и (46) остаются лишь слагаемые с индексом m , так как восприимчивости $\eta_n(i\Omega)$ отличны от нуля лишь вблизи частот $n\omega_s$.

Применение формулы (П.10) Приложения 1 дает

$$\begin{aligned} \langle U_{oc}(t) [y_{cm}(t) \cdot e^{-im\omega_s t}]^* \rangle = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot S_{cm}(\Omega + m\omega_s) \cdot \frac{e N b_m K(i\Omega) e^{-im\theta_0}}{1 - e N b_m K(i\Omega) e^{-im\theta_0} \eta_m(i\Omega)} \times \\ \times \left\{ \frac{e N b_m K^*(i\Omega) \cdot \eta_m^*(i\Omega) e^{im\theta_0}}{1 - e N b_m K^*(i\Omega) e^{im\theta_0} \eta_m^*(i\Omega)} + 1 \right\}. \end{aligned}$$

После упрощения это выражение может быть сведено к следующему:

$$\begin{aligned} \langle U_{oc}(t) [y_{cm}(t) \cdot e^{-im\omega_s t}]^* \rangle = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot S_{cm}(\Omega + m\omega_s) \cdot \frac{e N b_m K(i\Omega) e^{-im\theta_0}}{|1 - e N b_m K(i\Omega) e^{-im\theta_0} \eta_m(i\Omega)|^2}. \quad (49) \end{aligned}$$

Подставляя (49) в выражение (40) получим для декремента

$$\begin{aligned} \delta = - \frac{e^2 \omega_s m_s N}{\langle \omega^2 \rangle \alpha R_s^3 M^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_m \int_{-\infty}^{\infty} S_{cm}(\Omega + m\omega_s) \times \\ \times \frac{K(i\Omega) e^{-im\theta_0} d\Omega}{|1 - e N b_m K(i\Omega) e^{-im\theta_0} \eta_m(i\Omega)|^2}. \quad (50) \end{aligned}$$

Если теперь в сумме (50) разделить слагаемые с различными знаками индекса m , затем заменить отрицательные m на положительные, сделать замену $\Omega + m\omega_s = -m\Omega'$ и подставить выражение для спектральной плотности (48), то получим следующее выражение для декремента

$$\delta = - \frac{e^2 \alpha}{\pi \langle \omega^2 \rangle \omega_s m_s R_s} \sum_{m=1}^{m_0} b_m \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega \cdot \Omega^2 f_0(\Omega) \cdot \operatorname{Re} \{a_m K(-im\Omega - im\omega_s) e^{-im\theta_0}\}}{|1 - e N b_m K(-im\Omega - im\omega_s) e^{-im\theta_0} \cdot \eta_m(-im\Omega - im\omega_s)|^2} \quad (51)$$

Количество слагаемых m_0 в сумме (51) ограничено убыванием с ростом m коэффициентов a_m , b_m и коэффициента усиления K . Желательно, чтобы ограничение сверху определялось частотной характеристикой усилителя.

Как следует из (51), условием стохастического охлаждения ($\delta > 0$) является неравенство

$$\operatorname{Re} \{a_m K(-im\Omega - im\omega_s) e^{-im\theta_0}\} < 0 \quad (52)$$

для всех m в полосе пропускания усилителя.

Выражение для декремента (51) показывает, что стохастическое охлаждение каждой степени свободы — азимутальной гармоники центроиды — происходит независимо. Напомним, что условием этого является слабое перемешивание, когда флуктуации в различных спектральных полосах $m\omega_s \pm m\Delta\omega/2$ статистически независимы.

При выполнении неравенства

$$|e N b_m K(-im\Omega - im\omega_s) e^{-im\theta_0} \cdot \eta_m(-im\Omega - im\omega_s)| \ll 1 \quad (53)$$

выражение (51) упрощается

$$\delta = -\frac{e^2 a}{\pi \langle \omega^2 \rangle \omega_s m_s R_s} \sum_m b_m \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot \Omega^2 \cdot f_0(\Omega) \cdot \operatorname{Re} \{a_m \cdot K \cdot e^{-im\theta_0}\}$$

или, предполагая, что $\operatorname{Re} \{a_m \cdot K \cdot e^{-im\theta_0}\} = \operatorname{const}$ в области интегрирования, получим

$$\delta = -\frac{e^2 a}{2\pi^2 \omega_s m_s R_s} \sum_m b_m \operatorname{Re} \{a_m \cdot K \cdot (-im\omega_s) e^{-im\theta_0}\}. \quad (54)$$

Если в цепи обратной связи имеется задержка, равная τ , то коэффициент усиления может быть записан в виде

$$K(i\omega) = K_0(i\omega) \cdot e^{-i\omega\tau} \quad (55)$$

Подставляя это в (54), мы видим, что для оптимального охлаждения должно выполняться известное условие

$$\omega_s \tau = \theta_0, \quad (56)$$

смысл которого состоит в том, что времена перемещения частиц и сигнала обратной связи от датчика до ускоряющего промежутка должны быть одинаковы.

Тем не менее, между датчиком и ускоряющим промежутком происходит некоторое перемешивание вследствие разброса импульсов частиц. Это находит свое отражение в том, что при подстановке (55) в (51) даже при выполнении условия (56) под интегралом остается множитель

$$e^{im\Omega\tau} = e^{im\Omega(\theta_0/\omega_s)} \quad (57)$$

Этот множитель при слабом перемешивании на одном обороте не играет существенной роли.

Заметим, что в приближении (53) декремент стохастического охлаждения не зависит от числа частиц, как это следует из (54).

Возвращаясь вновь к выражению для декремента (51), обратим внимание на то, что каждое из слагаемых в сумме по m имеет максимум по коэффициенту усиления K . Этот максимум соответствует тому, что второе слагаемое в знаменателе порядка единицы.

Так как восприимчивость (при $m > 0$)

$$\eta_m(-im\Omega - im\omega_s) = -\frac{a e a_m}{2\pi \omega_s m_s R_s} \cdot \frac{1}{m} \left\{ \pi \Omega \frac{\partial f_0}{\partial \Omega} - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d\omega}{\omega - \Omega} \right\},$$

т. е. пропорциональна m^{-1} , то оптимальный коэффициент усиления для каждой гармоники пропорционален ее номеру. При этом максимальный вклад в декремент соответствующей гармоники также оказывается пропорциональным ее номеру. Поэтому оптимальной является линейно нарастающая частотная характеристика усилителя. Она должна, однако, быть плоской на частотах $m\omega_s$, кратных частоте обращения, чтобы не вносить сдвиг фазы, уменьшающий вещественную часть коэффициента усиления.

Из (51) следует также, что оптимальное значение коэффициента усиления K обратно пропорционально числу частиц N . Отсюда следует, что соответствующее максимальное значение декремента обратно пропорционально числу частиц.

Анализ выражения для декремента (50) с преобразованием к безразмерной частоте показывает, что максимальное значение

каждого слагаемого в сумме по m пропорционально разбросу частот $\Delta\omega$.

Заметим, что указанные закономерности справедливы для каждого слагаемого в сумме (51). Но оптимум для каждой гармоники достигается при различных значениях коэффициента усиления. Поэтому при плоской частотной характеристике усилителя зависимость суммарного декремента от величины коэффициента усиления и числа частиц может быть более сложной.

3.2. Обратная связь по току пучка (фильтровой метод)

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, можно получить выражение для усредненной величины тока в датчике

$$\overline{i(t)} = \sum_m b_m e^{-im\theta_0} i_m(t) e^{-im\omega_s t}, \quad (58)$$

причем b_m определяется формулой (42), а $i_m(t)$ — формулой (10).

Подвергая (58) преобразованию Лапласа, найдем

$$\overline{i(s)} = \sum_m b_m e^{-im\theta_0} i_m(s + im\omega_s). \quad (59)$$

Аналогично предыдущему предполагаем линейную зависимость напряжения на ускоряющем промежутке от тока

$$U_{oc}(s) = K(s) \cdot \overline{i(s)} = K(s) \cdot \sum_m b_m e^{-im\theta_0} i_m(s + im\omega_s). \quad (60)$$

Подставляя в (60) выражение (39) для амплитуд гармоник тока с учетом собственных флуктуаций, получим

$$U_{oc}(s) = K(s) \cdot \sum_m b_m e^{-im\theta_0} [\chi_m(s) \cdot U_{oc}(s) + I_m(s + im\omega_s)],$$

откуда находим

$$U_{oc}(s) = \frac{K(s) \cdot \sum_n b_n e^{-in\theta_0} \cdot I_n(s + in\omega_s)}{1 - K(s) \cdot \sum_n b_n e^{-in\theta_0} \cdot \chi_n(s)} \quad (61)$$

и, подставляя (61) в (38),

$$y_{cm}(s + im\omega_s) = \frac{K(s) \cdot \eta_m(s) \cdot \sum_n b_n e^{-in\theta_0} \cdot I_n(s + in\omega_s)}{1 - K(s) \cdot \sum_n b_n e^{-in\theta_0} \cdot \chi_n(s)} + Y_{cm}(s + im\omega_s). \quad (62)$$

Корреляции $\langle U_{oc}(t) [y_{cm}(t) \cdot e^{-im\omega_s t}]^* \rangle$ в выражении для декремента (40) могут быть вычислены с помощью формулы (П.10) Приложения 1.

Применение этой формулы дает

$$\begin{aligned} & \langle [y_{cm}(t) \cdot e^{-im\omega_s t}]^* \cdot U_{oc}(t) \rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{b_m^2 |K(i\Omega)|^2 \{S_{im}(\Omega + m\omega_s) \cdot \eta_m^*(i\Omega) - S_{cim}(\Omega + m\omega_s) \cdot \chi_m^*(i\Omega)\}}{|1 - K(i\Omega) b_m e^{-im\theta_0} \cdot \chi_m(i\Omega)|^2} + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot S_{cim}(\Omega + m\omega_s) \cdot \frac{K(i\Omega) b_m e^{-im\theta_0}}{|1 - K(i\Omega) b_m e^{-im\theta_0} \cdot \chi_m(i\Omega)|^2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Легко убедиться, что фигурная скобка в подынтегральном выражении первого слагаемого в (63) при подстановке соответствующих выражений для спектральных плотностей и восприимчивостей тождественно обращается в нуль. В результате, для декремента стохастического затухания из (40) и (63) получаем

$$\begin{aligned} \delta = & - \frac{e \omega_s m_s}{\langle \omega^2 \rangle \alpha R_s^3 M^2} \cdot \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} a_m b_m \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot S_{cim}(\Omega + m\omega_s) \cdot \frac{K(i\Omega) \cdot e^{-im\theta_0}}{|1 - b_m \cdot K(i\Omega) \cdot e^{-im\theta_0} \chi_m(i\Omega)|^2} \end{aligned} \quad (64)$$

Аналогично тому, как это было сделано для получения формулы (51), разделим в сумме (64) слагаемые с различными знаками индекса m , заменим отрицательные m на положительные, заменим переменную $\Omega + m\omega_s = -m\Omega'$ и подставим выражение для спектральной плотности (37) (с соответствующей заменой переменной). В результате получим декремент охлаждения

$$\delta = -\frac{e^2 \omega_s}{\pi \langle \omega^2 \rangle R_s^2 M} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega \cdot \Omega \cdot f_0(\Omega) \cdot \operatorname{Re} \{ a_m K(-im\Omega - im\omega_s) e^{-im\theta_0} \}}{|1 - b_m \cdot K(-im\Omega - im\omega_s) e^{-im\theta_0} \chi_m(-im\Omega - im\omega_s)|^2}. \quad (65)$$

Выражение (65) упрощается в случае малого возвратного отношения, т. е. при выполнении неравенства

$$|b_m \cdot K(-im\Omega - im\omega_s) e^{-im\theta_0} \cdot \chi_m(-im\Omega - im\omega_s)| \ll 1. \quad (66)$$

Опуская в знаменателе (65) этот член, получаем

$$\delta \cong -\frac{e^2 v}{\pi \langle \omega^2 \rangle R_s^2 M} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot \Omega \cdot f_0(\Omega) \cdot \operatorname{Re} \{ a_m K \cdot e^{-im\theta_0} \}. \quad (67)$$

Заметим, что если, как это было сделано выше при выводе (54), $\operatorname{Re} \{ a_m K \cdot e^{-im\theta_0} \} = \text{const}$ в области интегрирования, то получим нулевой декремент, так как, по предположению

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot \Omega f_0(\Omega) = 0.$$

Для получения охлаждения коэффициент усиления должен быть пропорционален отклонению частоты от $m\omega_s$, по крайней мере в полосе $\pm m\Delta\omega/2$:

$$\operatorname{Re} \{ a_m K(-im\Omega - im\omega_s) \cdot e^{-im\theta_0} \} \cong -A_m m\Omega, \quad (68)$$

причем $A_m > 0$ (при $M > 0$).

Подставляя (68) в (67), получим декремент в приближении (66):

$$\delta = \frac{e^2 \omega_s}{2\pi^2 R_s^2 M} \sum_m b_m m A_m. \quad (69)$$

Заметим, что знак декремента в этом случае определяется также знаком эквивалентной продольной массы M .

Частотная характеристика усиления (68) является оптимальной также и в общем случае, когда условие (66) не выполняется.

В общем выражении для декремента (65) каждое из слагае-

мых в сумме по m имеет максимум в зависимости крутизны усиления A_m . Восприимчивость, входящая в знаменатели, в данном случае равна (при $m > 0$)

$$\chi_m(-im\Omega - im\omega_s) = \frac{e^2 N v a_m}{2\pi R_s^2 M} \cdot \frac{1}{m} \left\{ \pi \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \Omega} - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d\omega \right\}, \quad (70)$$

т. е. пропорциональна m^{-1} . Но так как коэффициент усиления вблизи частоты $m\omega_s$ определен формулой (68), где перед A_m стоит множитель m , то оптимальная крутизна коэффициента усиления A_m одинакова для всех m . При этом максимальный вклад в декремент пропорционален номеру соответствующей гармоники, который входит в числитель. Таким образом, в этом случае оптимальной является частотная характеристика с нулями на гармониках частоты обращения $m\omega_s$, причем крутизна одинакова для всех m . Такая частотная характеристика может быть создана с помощью специального фильтра.

Как видно из (70), величина χ_m пропорциональна числу частиц N . Поэтому оптимум для каждого из слагаемых в (65) достигается при значениях крутизны A_m , обратно пропорциональных N , вследствие чего и максимальный вклад в декремент каждого из слагаемых обратно пропорционален числу частиц.

Можно показать также, что максимальная величина каждого слагаемого в выражении для декремента (65) пропорциональна разбросу частот $\Delta\omega$.

4. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

Для лучшего понимания процесса стохастического охлаждения желательно получить также кинетическое уравнение, т. е. уравнение, описывающее эволюцию сглаженной функции $f_0(\omega, t)$. Для получения кинетического уравнения обратимся к уравнениям (13) и (14), в которых выполним процедуру сглаживания по ω :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{e}{2\pi R_s^2 M} \cdot U(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \frac{\partial f_{-m}}{\partial \omega} e^{im\omega t} = 0,$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial t} + im\omega f_m + \frac{e}{2\pi R_s^2 M} \cdot U(t) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \omega} e^{im\omega t} = 0.$$

Здесь $f_m(\omega, t)$ — сглаженные по ω гармоники фазовой плотности, определяемые действием напряжения на ускоряющем зазоре $U(t)$ и флуктуациями вследствие дискретности пучка:

$$f_m(\omega, t) = L^{-1} \left\{ -\frac{e a_m}{2\pi R_s^2 M} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \cdot \frac{U(s - im\omega_s)}{s + im\omega} + F_m(\omega, s) \right\}. \quad (71)$$

Так как время установления сглаженной функции $f_m(\omega, t)$ много меньше времени изменения $f_0(\omega, t)$, то в (71) $f_0(\omega, t)$ можно считать не зависящей от времени.

Подставляя в первое уравнение (с заменой m на $-m$), получаем уравнение для функции распределения (после усреднения по времени):

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{e}{2\pi R_s^2 M} \frac{\partial}{\partial \omega} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m U(t) e^{im\omega t} \cdot L^{-1} \left\{ -\frac{e a_{-m}}{2\pi R_s^2 M} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \cdot \frac{U(s + im\omega_s)}{s - im\omega} + F_{-m}(\omega, s) \right\}. \quad (72)$$

Ввиду медленного изменения функции распределения в правой части (72) произведено усреднение по времени. Усреднение должно быть произведено за время, много большее времени установления возмущения, но меньшее времени изменения функции распределения, которую при этом усреднении можно считать не зависящей от времени. Отметим, что в таком приближении усреднение по времени может быть заменено усреднением по ансамблю.

Для вычисления средних заметим, что по теореме о свертке

$$L^{-1} \left\{ \frac{U(s + im\omega_s)}{s - im\omega} \right\} = \int_0^t U(t - \tau) \cdot e^{-im\omega_s(t - \tau)} e^{im\omega\tau} d\tau. \quad (73)$$

Тогда первое слагаемое в правой части (72) равно

$$U(t) e^{im\omega t} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{U(s + im\omega_s)}{s - im\omega} \right\} = \int_0^t U(t) \cdot U(t - \tau) \cdot e^{im(\omega_s + \omega)\tau} d\tau.$$

Производя усреднение, получим

$$\overline{U(t) e^{im\omega t} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{U(s + im\omega_s)}{s - im\omega} \right\}} = \left\langle U(t) e^{im\omega t} L^{-1} \left\{ \frac{U(s + im\omega_s)}{s - im\omega} \right\} \right\rangle =$$

$$= \int_0^t Ru(\tau) \cdot e^{im(\omega_s + \omega)\tau} d\tau, \quad (74)$$

где $Ru(\tau) = \langle U(t) U(t - \tau) \rangle$ — автокорреляционная функция напряжения $U(t)$ (стационарного случайного процесса). Так как нас интересуют времена, много большие $(\Delta\omega)^{-1}$ (в течение которого автокорреляционная функция затухает), то верхний предел в (74) может быть сделан равным ∞ . Тогда

$$\overline{U(t) e^{im\omega t} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{U(s + im\omega_s)}{s - im\omega} \right\}} = \pi S_U[-m(\omega_s + \omega)]. \quad (75)$$

Здесь $S_U(\Omega)$ — спектральная плотность напряжения U :

$$S_U(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Ru(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau. \quad (76)$$

Для дальнейших вычислений по формуле (75) и вычисления усреднения второго слагаемого в (72) необходимо рассмотреть конкретную схему стохастического охлаждения. Ниже эти расчеты сделаны для радиальной обратной связи (метод Палмера) и токовой обратной связи (фильтровой метод).

4.1. Обратная связь по радиальному смещению пучка

Для вычисления среднего по формуле (75) в случае радиальной обратной связи будем исходить из формулы (45). Из этой формулы непосредственно следует для спектральной плотности напряжения на ускоряющем зазоре:

$$S_U(\Omega) \sum_k S_{ck}(\Omega + k\omega_s) \cdot \frac{(eN)^2 |K(i\Omega) \cdot b_k \cdot e^{-ik\theta_0}|^2}{|1 - eN \cdot K(i\Omega) \sum_n b_n e^{-in\theta_0} \cdot \eta_n(i\Omega)|^2}. \quad (77)$$

Пользуясь формулой (33) и делая соответствующую замену аргумента, имеем

$$S_{ck}(\Omega + k\omega_s) = \frac{1}{2\pi N} \cdot \left(\frac{aR_s M}{\omega_s m_s} \right)^2 \cdot \frac{1}{|k|} \cdot \left(\frac{\Omega}{k} + \omega_s \right)^2 \cdot f_0\left(-\frac{\Omega}{k} - \omega_s \right). \quad (78)$$

Подставляя сюда, согласно (75), $-m(\omega_s + \omega)$ вместо Ω , получим

$$S_{ck} [-m(\omega_s + \omega) + k\omega_s] = \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s} \right)^2 \times \\ \times \frac{1}{|k|} \cdot \left[\frac{-m(\omega + \omega_s)}{k} + \omega_s \right]^2 \cdot f_0 \left[\frac{m(\omega_s + \omega)}{k} - \omega_s \right].$$

При слабом перемешивании это выражение отлично от нуля лишь при $k=m$ (так как функция f_0 отлична от нуля лишь при $\omega \ll \omega_s$):

$$S_{cm}(-m\omega) = \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s} \right)^2 \cdot \frac{1}{|m|} \cdot \omega^2 \cdot f_0(\omega). \quad (79)$$

Отметим, что в знаменателе (77) при замене переменной Ω на $-m(\omega_s + \omega)$, согласно (75), также пропадают все слагаемые, кроме $n=m$. В результате, получаем

$$\overline{U(t) e^{im\omega t} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{U(s+im\omega_s)}{s-im\omega} \right\}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s} \right) \cdot \frac{1}{|m|} \cdot \omega^2 \cdot f_0(\omega) \times \\ \times \frac{e^2 N \cdot |b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega - im\omega_s)|^2}{|1 - e N K(im\omega - im\omega_s) \cdot b_m e^{-im\theta_0} \cdot \eta_m(-im\omega - im\omega_s)|^2} \quad (80)$$

Вычислим теперь усреднение второго слагаемого в (72):

$$\overline{U(t) e^{im\omega t} \cdot L^{-1} \{F_{-m}(\omega, s)\}} = \overline{L^{-1} \{U(s-im\omega_s)\} \cdot L^{-1} \{F_{-m}(\omega, s)\}} \quad (81)$$

Это среднее может быть вычислено с помощью формулы (П.10) Приложения 1. Действительно, согласно (45) при слабом перемешивании

$$U(s-im\omega_s) = \frac{e N \cdot b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(s-im\omega_s) Y_{cm}(s)}{1 - e N \cdot b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(s-im\omega_s) \cdot \eta_m(s-im\omega_s)},$$

где

$$Y_{cm}(s) = \frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s} \int_{-\infty}^{\infty} \omega' \cdot F_m(\omega', s) d\omega'.$$

Учитывая эти соотношения и переставляя операции обратного преобразования Лапласа и интегрирования по ω' , получим

$$\overline{U(t) e^{im\omega t} \cdot L^{-1} \{F_{-m}(\omega, s)\}} = \frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s} \int_{-\infty}^{\infty} \omega' d\omega' \times \\ \times \overline{L^{-1} \{F_m^*(\omega, s)\} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{e N b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(s-im\omega_s) \cdot F_m(\omega', s)}{1 - e N b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(s-im\omega_s) \cdot \eta_m(s-im\omega_s)} \right\}}. \quad (82)$$

Согласно (П.10) среднее под интегралом равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot S_m(\omega, \omega', \Omega) \cdot \frac{e N b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(i\Omega - im\omega_s)}{1 - e N b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(i\Omega - im\omega_s) \cdot \eta_m(i\Omega - im\omega_s)}, \quad (83)$$

где $S_m(\omega, \omega', \Omega) = S\{F_m(\omega, t), F_m(\omega', t)\}$ — взаимная спектральная плотность функций в скобках; ее вычисление приведено в Приложении 2:

$$S_m(\omega, \omega', \Omega) = \frac{1}{2\pi N} \cdot f_0(\omega') \delta(\omega - \omega') \cdot \delta(m\omega' + \Omega). \quad (84)$$

Подставляя это выражение в (83), получим для него следующее выражение

$$\frac{1}{2\pi N} \cdot f_0(\omega') \delta(\omega - \omega') \cdot \frac{e N b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega' - im\omega_s)}{1 - e N b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega' - im\omega_s) \cdot \eta_m(-im\omega' - im\omega_s)}.$$

И наконец, подставляя последнее выражение в (82), получим

$$\overline{U(t) e^{im\omega t} \cdot L^{-1} \{F_{-m}(\omega, s)\}} = \frac{e \alpha R_s M}{2\pi \omega_s m_s} \cdot \omega f_0(\omega) \times \\ \times \frac{b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega - im\omega_s) - |e N b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega - im\omega_s)|^2 \cdot \eta_m^*(-im\omega - im\omega_s)}{|1 - e N b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega - im\omega_s) \cdot \eta_m(-im\omega - im\omega_s)|^2}. \quad (85)$$

Подставляя (80) и (85) в уравнение (72) с учетом того, что

$$\eta_m^*(-im\omega - im\omega_s) = -\frac{e \alpha a_{-m}}{2\pi \omega_s R_s m_s} \left(\frac{\pi}{|m|} \omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \frac{i}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' \frac{\partial f_0}{\partial \omega'} d\omega'}{\omega' - \omega} \right),$$

получим кинетическое уравнение стохастического охлаждения при обратной связи по радиальному смещению пучка:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \omega \cdot f_0(\omega) \cdot D_R(\omega) \right\}, \quad (86)$$

где

$$D_R(\omega) = \frac{e^2 a}{(2\pi)^2 R_s \omega_s m_s} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{Re} \{ a_m b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega - im\omega_s) \}}{|1 - e N \cdot b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega - im\omega_s) \cdot \eta_m(-im\omega - im\omega_s)|^2}.$$

Заметим, что при подстановке (80) и (85) в (72) квадратичные по коэффициенту усиления члены взаимно уничтожаются, а мнимая часть исчезает при суммировании, так как представляет собой нечетную функцию m .

Полученное уравнение, как видим, не является уравнением Фоккера-Планка. Этого следовало ожидать, так как уравнение типа Фоккера-Планка описывает диффузию, которая не может быть обращена.

Решение уравнения (86) может быть получено в явном виде при выполнении условия (53). Если при этом еще считать постоянным числитель $D_R(\omega)$, то уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \delta \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \cdot f_0(\omega)], \quad (87)$$

где δ определяется формулой (54).

Уравнение (87), как легко проверить, имеет решение

$$f_0(\omega, t) = e^{\delta t} \tilde{f}_0(\omega \cdot e^{\delta t}), \quad (88)$$

где $\tilde{f}_0(\omega) = f_0(\omega, 0)$ — функция распределения в начальный момент $t=0$. В зависимости от знака δ решение (88) описывает подобное сжатие или расширение функции распределения. Декремент δ , определяемый (54), не зависит от числа частиц N и представляет собой одночастичный декремент.

Неравенство (53) дает, таким образом, условие, при котором частицы не взаимодействуют между собой. Это условие может быть сведено к неравенству

$$\delta < \frac{\Delta\omega}{N},$$

где $\Delta\omega$ — разброс частот в пучке.

Обратим еще внимание на то, что формула для декремента (51) может быть получена непосредственно из кинетического уравнения (86).

4.2. Обратная связь по току пучка

В этом случае напряжение обратной связи определяется формулой (61), из которой получаем спектральную плотность этого напряжения

$$S_U(\Omega) = \sum_k S_{ik}(\Omega + k\omega_s) \cdot \frac{|b_n e^{-ik\theta_0} \cdot K(i\Omega)|^2}{|1 - K(i\Omega) \sum_n b_n e^{-in\theta_0} \cdot \chi_n(i\Omega)|^2}. \quad (89)$$

Используя формулу (36), найдем

$$S_{ik}(\Omega + k\omega_s) = 2\pi N \left(\frac{ev}{2\pi R_s} \right)^2 \cdot \frac{1}{|k|} \cdot f_0 \left(-\frac{\Omega}{k} - \omega_s \right). \quad (90)$$

Подставляя сюда $-m(\omega_s + \omega)$ вместо Ω , получим

$$S_{ik}[-m(\omega_s + \omega) + k\omega_s] = 2\pi N \left(\frac{ev}{2\pi R_s} \right)^2 \cdot \frac{1}{|k|} \cdot f_0 \left[\frac{m(\omega_s + \omega)}{k} - \omega_s \right].$$

При слабом перемешивании в (89) сохраняется лишь слагаемое с $k=m$:

$$S_{im}(-m\omega) = 2\pi N \left(\frac{ev}{2\pi R_s} \right)^2 \frac{1}{|m|} f_0(\omega). \quad (91)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} U(t) e^{im\omega t} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{U(s+im\omega_s)}{s-im\omega} \right\} &= 2\pi^2 N \left(\frac{ev}{2\pi R_s} \right)^2 \frac{1}{|m|} f_0(\omega) \times \\ &\times \frac{|b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega - im\omega_s)|^2}{|1 - K(-im\omega - im\omega_s) \cdot b_m e^{-im\theta_0} \cdot \chi_m(-im\omega - im\omega_s)|^2}. \end{aligned} \quad (92)$$

Вычислим теперь усреднение второго слагаемого в (72) по формуле (81). Согласно (61) при слабом перемешивании

$$U(s-im\omega_s) = \frac{b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(s-im\omega_s) I_m(s)}{1 - b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(s-im\omega_s) \cdot \chi_m(s-im\omega_s)}, \quad (93)$$

причем

$$I_m(s) = \frac{e N v}{R_s} \int_{-\infty}^{\infty} F_m(\omega', s) d\omega'.$$

Учитывая эти соотношения и переставляя операции обратного преобразования Лапласа и интегрирования по ω' , получим

$$\begin{aligned} \overline{U(t) \cdot e^{im\omega_s t} L^{-1}\{F_{-m}(\omega, s)\}} &= \frac{e N v}{R_s} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \overline{L^{-1}\{F_{-m}^*(\omega, s)\} \cdot L^{-1}\left\{\frac{b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(s-im\omega_s) F_m(\omega', s)}{1-b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(s-im\omega_s) \chi_m(s-im\omega_s)}\right\}}. \end{aligned} \quad (94)$$

Согласно формуле (П.10) Приложения 1 среднее под интегралом равно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot S_m(\omega, \omega' \Omega) \frac{b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(i\Omega-im\omega_s)}{1-b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(i\Omega-im\omega_s) \chi_m(i\Omega-im\omega_s)}. \quad (95)$$

Используя выражение для взаимной спектральной плотности (84), получим для (95)

$$\frac{1}{2\pi N} \overline{f_0(\omega') \cdot \delta(\omega-\omega')} \frac{b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega'-im\omega_s)}{1-b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega'-im\omega_s) \cdot \chi_m(-im\omega'-im\omega_s)}.$$

Подставляя это выражение в (94), получим

$$\begin{aligned} \overline{U(t) \cdot e^{im\omega_s t} L^{-1}\{F_{-m}(\omega, s)\}} &= \frac{e v}{2\pi R_s} \overline{f_0(\omega)} \times \\ &\times \frac{b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega-im\omega_s) - |b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega-im\omega_s)|^2 \cdot \chi_m^*(-im\omega-im\omega_s)}{|1-b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega-im\omega_s) \cdot \chi_m(-im\omega-im\omega_s)|^2}. \end{aligned} \quad (96)$$

Подставляя (92) и (96) в уравнение (72) с учетом равенства

$$\chi_m^*(-im\omega-im\omega_s) = -\frac{e^2 N v a_m}{2\pi R_s^3 M} \left\{ \frac{\pi}{|m|} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \frac{i}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d\omega' \right\},$$

получим кинетическое уравнение стохастического охлаждения при

токовой обратной связи:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \omega} \{f_0(\omega) \cdot D_I(\omega)\}, \quad (97)$$

где

$$D_I = \frac{e^2 \omega_s}{(2\pi)^2 R_s^2 M} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\text{Re}\{a_m b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega-im\omega_s)\}}{|1-b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega-im\omega_s) \cdot \chi_m(-im\omega-im\omega_s)|^2}.$$

Здесь так же, как и в предыдущем случае, квадратичные по коэффициенту усиления слагаемые взаимно уничтожились, а мнимая часть исчезла при суммировании.

При выполнении неравенства (66) и равенства (68) уравнение (97) приобретает вид, аналогичный (87), и имеет решение (88).

4.3. Влияние шумов усилителя на стохастическое охлаждение

Влияние шумов усилителя на стохастическое охлаждение рассмотрим на примере обратной связи по радиальному смещению пучка.

В этом случае выражение для напряжения обратной связи на ускоряющем зазоре (44) должно быть дополнено шумовым членом

$$U_{oc}(s) = e N K(s) \bar{y}_c(s) + K_{yc}(s) \cdot U_{ш}, \quad (98)$$

K_{yc} — коэффициент усиления усилителя, $U_{ш}$ — напряжение шума, приведенное ко входу усилителя. Продолжая дальше процедуру получения равенства (45), получим с учетом шума усилителя

$$U_{oc}(s) = \frac{e N K(s) \sum_n b_n e^{-in\theta_0} Y_{cn}(s) + K_{yc}(s) U_{ш}}{1 - e N K(s) \sum_n b_n e^{-in\theta_0} \eta_n(s)}. \quad (99)$$

Равенство (76) справедливо и в этом случае. Ввиду статистической независимости флуктуаций пучка и шума усилителя спектральная плотность напряжения обратной связи в этом случае равна сумме спектральных плотностей, обусловленных указанными факторами. В результате получаем вместо (75)

$$U(t) \cdot e^{im\omega_s t} L^{-1} \left\{ \frac{U(s+im\omega_s)}{s-im\omega} \right\} = \pi S_U^n[-m(\omega_s + \omega)] + \pi S_U^w[-m(\omega_s + \omega)], \quad (100)$$

где S_U^n и S_U^w — соответствующие спектральные плотности. Дополнительное слагаемое в (100) легко может быть найдено с помощью равенства (99) (для случая слабого перемешивания):

$$S_U^w[-m(\omega_s + \omega)] = \frac{|K_{yc}(-im\omega - im\omega_s)|^2 \cdot S_w[-m(\omega_s + \omega)]}{|1 - eNK(-im\omega - im\omega_s) \cdot b_m e^{-im\theta_0} \cdot \eta_m(-im\omega - im\omega_s)|^2}, \quad (101)$$

где S_w — спектральная плотность входного шума усилителя. Это слагаемое непосредственно войдет в кинетическое уравнение.

Во второе слагаемое в уравнении (72) шумы усилителя вклада не дают вследствие статистической независимости шумов усилителя и флуктуаций пучка. В итоге получаем кинетическое уравнение с учетом шумов усилителя

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \omega} \{ \omega f_0(\omega) \cdot D_R(\omega) \} + \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ D_w(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right\}, \quad (102)$$

где

$$D_w(\omega) = \frac{e^2}{(2\pi)^2 R_s^4 M^2} \sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 \times \\ \times \frac{2\pi |K_{yc}(-im\omega - im\omega_s)|^2 \cdot S_w[-m(\omega_s + \omega)]}{|1 - eNK(-im\omega - im\omega_s) \cdot b_m e^{-im\theta_0} \cdot \eta_m(-im\omega - im\omega_s)|^2}.$$

Шумы усилителя, как видно из (102), вносят в уравнение диффузионную добавку. Коэффициент диффузии $D_w(\omega)$ всегда положителен. Характер эволюции $f_0(\omega)$ зависит от преобладания стохастического охлаждения или шумовой диффузии. Но $D_w(\omega)$ зависит от коэффициента усиления квадратично, в то время, как $D_R(\omega)$ линейно. Уменьшая коэффициент усиления, всегда можно добиться преобладания стохастического охлаждения, однако декремент охлаждения при этом уменьшается. Шумы усилителя, таким образом, дополнительно ограничивают декремент стохастического охлаждения.

Аналогично может быть получено кинетическое уравнение с учетом шумов усилителя для токовой обратной связи:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \omega} \{ f_0(\omega) \cdot D_I(\omega) \} + \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ D_w(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right\}, \quad (103)$$

причем в этом случае

$$D_w(\omega) = \frac{e^2}{(2\pi)^2 R_s^4 M^2} \sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 \times \\ \times \frac{2\pi |K_{yc}(-im\omega - im\omega_s)|^2 \cdot S_w[-m(\omega_s + \omega)]}{|1 - b_m e^{-im\theta_0} \cdot K(-im\omega - im\omega_s) \cdot \chi_m(-im\omega - im\omega_s)|^2}.$$

Приложение 1

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИИ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Пусть $x(t)$, $y(t)$ — случайные процессы, связанные линейно со случайными процессами $z_m(t)$, так что для Лаплас-изображений имеем

$$x(s) = \sum_n K_{xn}(s) \cdot z_n(s), \quad y(s) = \sum_m K_{ym}(s) \cdot z_m(s), \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (\text{П.1})$$

Предполагая в общем случае $z_m(t)$ комплексными, вычислим взаимную корреляцию $\langle x^*(t) \cdot y(t) \rangle$ процессов x и y .

Обозначим

$$\varphi_{xn}(t) = L^{-1}\{K_{xn}(s)\}, \quad \varphi_{ym}(t) = L^{-1}\{K_{ym}(s)\}, \quad (\text{П.2})$$

если эти обратные преобразования существуют. Тогда

$$x(t) = \sum_n \int_0^t z_n(t-\tau_1) \varphi_{xn}(\tau_1) d\tau_1, \quad (\text{П.3})$$

$$y(t) = \sum_m \int_0^t z_m(t-\tau_2) \varphi_{ym}(\tau_2) d\tau_2, \quad (\text{П.4})$$

и

$$\langle x^*(t) \cdot y(t) \rangle = \sum_{n,m} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 \langle z_n^*(t-\tau_1) \cdot z_m(t-\tau_2) \rangle \varphi_{xn}^*(\tau_1) \cdot \varphi_{ym}(\tau_2). \quad (\text{П.5})$$

Пусть $z_m(t)$ — стационарные и стационарно связанные случайные процессы. Тогда

$$\langle z_n^*(t-\tau_1) \cdot z_m(t-\tau_2) \rangle = R_{nm}(\tau_1-\tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{nm}(i\omega) e^{i\omega(\tau_1-\tau_2)} d\omega, \quad (\text{П.6})$$

где $R_{nm}(\tau_1-\tau_2)$ — взаимная корреляционная функция процессов $z_n(t)$ и $z_m(t)$, $S_{nm}(i\omega)$ — их взаимная спектральная плотность.

Предположим, что функции $\varphi_{xn}(t)$ и $\varphi_{ym}(t)$, определенные равенствами (П.2), затухают за ограниченное время T . Тогда для моментов времени $t > T$ верхние пределы интегралов в (П.5) могут быть сделаны равными ∞ .

Подставляя в (П.5) выражение корреляционной функции через взаимную спектральную плотность (П.6), получим

$$\begin{aligned} \langle x^*(t) \cdot y(t) \rangle &= \sum_{n,m} \int_{-\infty}^{\infty} S_{nm}(i\omega) d\omega \times \\ &\times \int_0^{\infty} \varphi_{xn}^*(\tau_1) e^{i\omega\tau_1} d\tau_1 \int_0^{\infty} \varphi_{ym}(\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} d\tau_2. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Учитывая (П.2), имеем

$$\int_0^{\infty} \varphi_{xn}(\tau_1) e^{i\omega\tau_1} d\tau_1 = K_{xn}^*(i\omega), \quad \int_0^{\infty} \varphi_{ym}(\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} d\tau_2 = K_{ym}(i\omega). \quad (\text{П.8})$$

В результате искомая корреляция равна

$$\langle x^*(t) \cdot y(t) \rangle = \sum_{n,m} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot S_{nm}(i\omega) \cdot K_{xn}^*(i\omega) \cdot K_{ym}(i\omega). \quad (\text{П.9})$$

В случае, когда случайные процессы $z_m(t)$ статистически независимы, формула (П.9) упрощается, так как взаимные спектральные плотности обращаются в нуль при неодинаковых индексах

$$\langle x^*(t) \cdot y(t) \rangle = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot S_n(i\omega) \cdot K_{xn}^*(i\omega) \cdot K_{yn}(i\omega), \quad (\text{П.10})$$

где $S_n(i\omega)$ — спектральные плотности случайных процессов $z_n(t)$.

Приложение 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ $S_m(\omega, \omega', \Omega)$

Спектральная плотность $S_m(\omega, \omega', \Omega)$ определяется соотношением

$$S_m(\omega, \omega', \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle F_m^*(\omega, t) \cdot F_m(\omega', t+\tau) \rangle e^{-i\Omega\tau} d\tau. \quad (\text{П.11})$$

Используя формулу (28), получим

$$\langle F_m^*(\omega, t) \cdot F_m(\omega', t+\tau) \rangle = \frac{1}{(2\pi N)^2} \sum_j \delta(\omega - \omega_j) \cdot \delta(\omega' - \omega_j) e^{-im\omega_j\tau}. \quad (\text{П.12})$$

Суммирование по j может быть заменено интегрированием с функ-

цией распределения $f_0(\omega'')$

$$\begin{aligned} \langle F_m^*(\omega, t) \cdot F_m(\omega', t+\tau) \rangle &= \\ &= \frac{1}{2\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' f_0(\omega'') \cdot \delta(\omega - \omega'') \delta(\omega' - \omega'') \cdot e^{-im\omega''\tau} = \\ &= \frac{1}{2\pi N} \cdot f_0(\omega') \cdot \delta(\omega - \omega') \cdot e^{-im\omega'\tau}. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Подставляя в выражение (П.11), найдем

$$S_m(\omega, \omega', \Omega) = \frac{1}{2\pi N} \cdot f_0(\omega') \cdot \delta(\omega - \omega') \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(m\omega' + \Omega)\tau} d\tau. \quad (\text{П.14})$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(m\omega' + \Omega)\tau} d\tau = \delta(m\omega' + \Omega),$$

то окончательно имеем

$$S_m(\omega, \omega', \Omega) = \frac{1}{2\pi N} \cdot f_0(\omega') \cdot \delta(\omega - \omega') \cdot \delta(m\omega' + \Omega). \quad (\text{П.15})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.С. Дербенев, С.А. Хейфец. Демпфирование некогерентного движения частиц в накопителях с помощью диссипативных элементов. ЖТФ, 1979, 49, 352—362.
2. Я.С. Дербенев, С.А. Хейфец. О стохастическом охлаждении. ЖТФ, 1979, 49, 363—371.
3. J. Bisognano. Stochastic cooling: recent theoretical directions. IEEE Transactions on Nuclear Science, v. NS-30, N 4, August 1983, p.2393—2396.
4. Н.И. Зиневич, М.М. Карлинер. Стохастическое охлаждение системы осцилляторов. Препринт ИЯФ 80-21. Новосибирск, 1980.
5. Н.И. Зиневич, М.М. Карлинер. Кинетическое уравнение для системы стохастического охлаждения разброса продольных импульсов. Препринт ИЯФ 82-43. Новосибирск, 1982.
6. S. Van der Meer. Stochastic damping of betatron oscillations in the ISR. CERN/ISR-PO/72-31, Geneva, August 1972.
7. Ю.Л. Климонтович. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975.
8. D. Möhl, G. Petrucci and oth. Physics and technique of stochastic cooling. CERN/PS/AA 79-23, Geneva, July 1979.
9. Г. Эккер. Теория полностью ионизованной плазмы. М.: Мир, 1974.

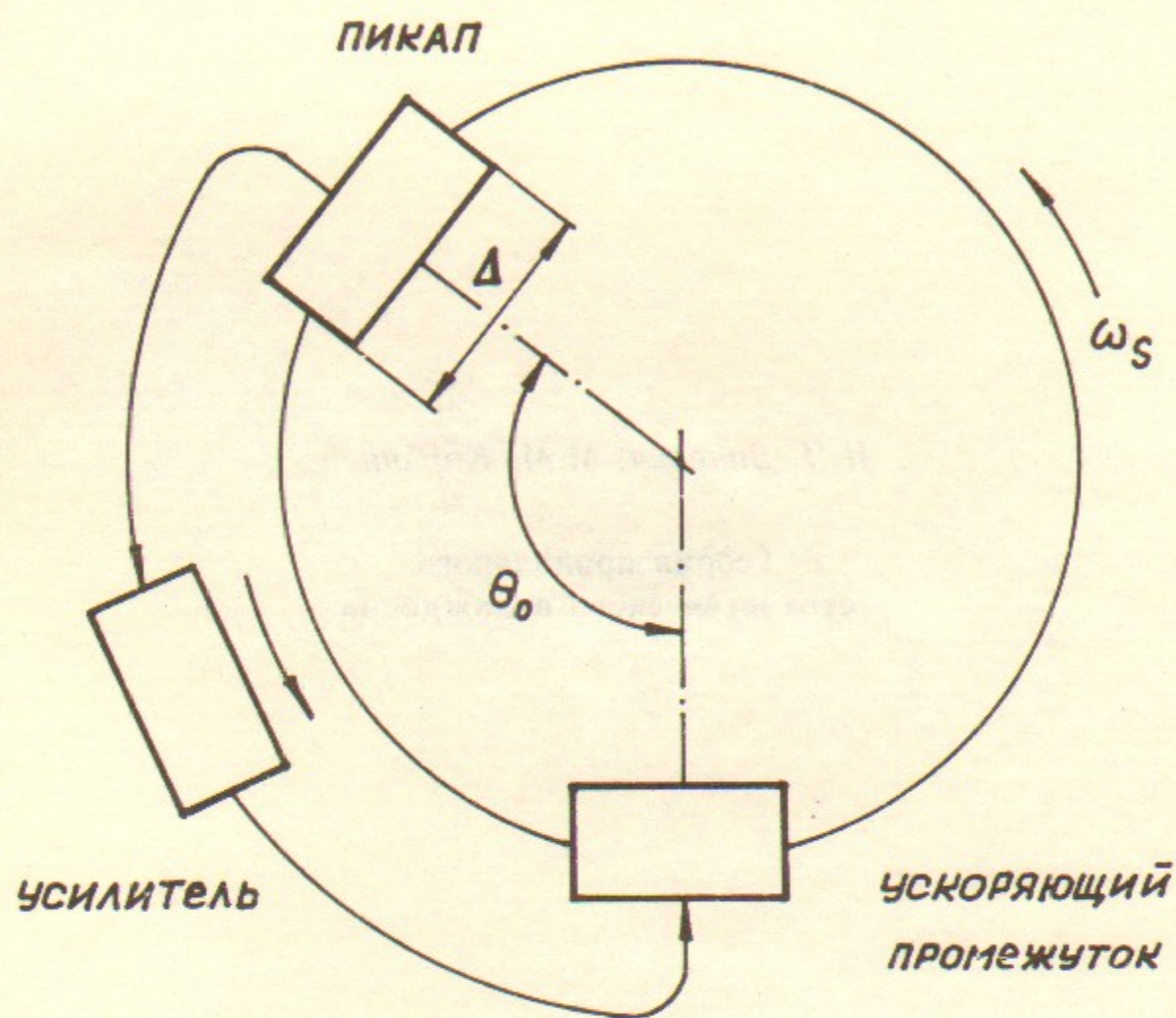
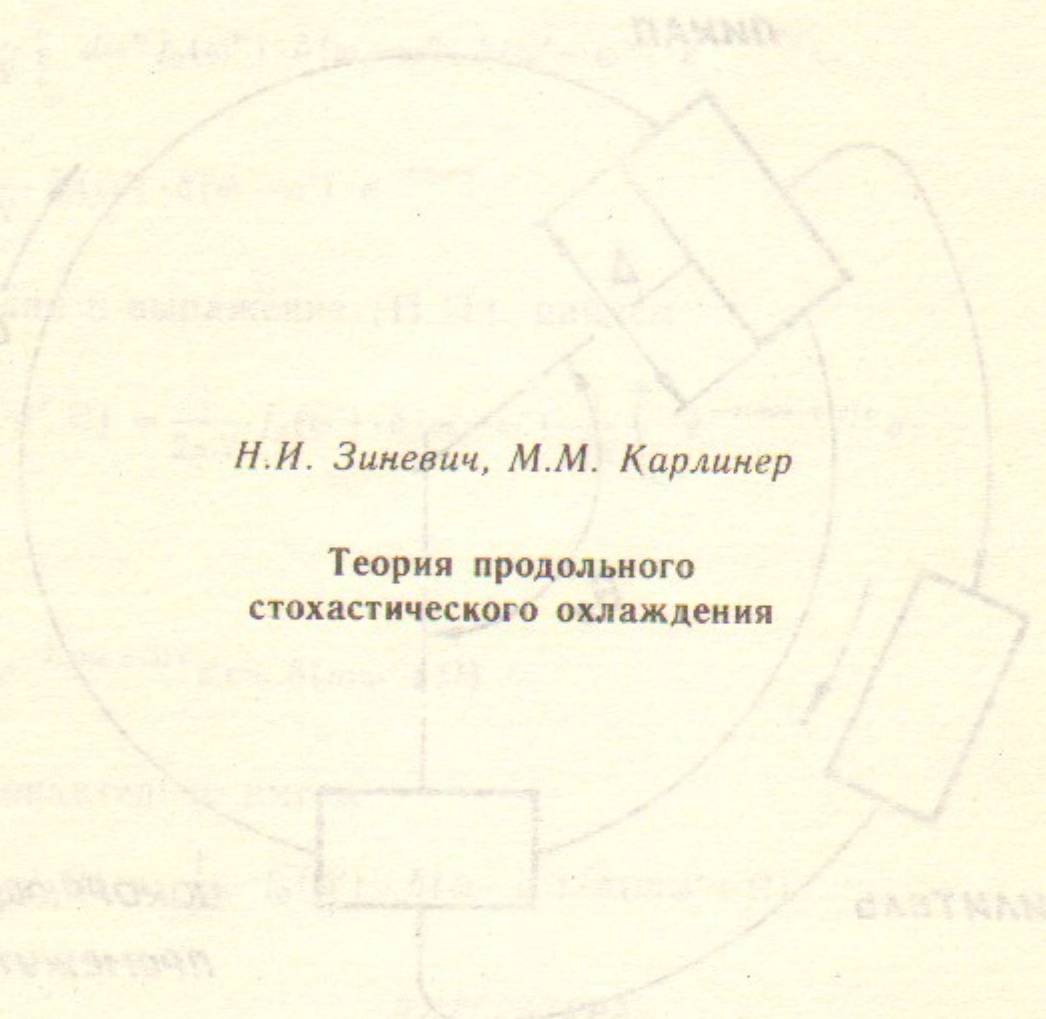


Рис. 1



Н.И. Зиневич, М.М. Карлинер

**Теория продольного
стохастического охлаждения**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 4 апреля 1986 г.
Подписано в печать 16.05.1986 г. МН 11731.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,6 печ.л., 2,1 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 80

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*