

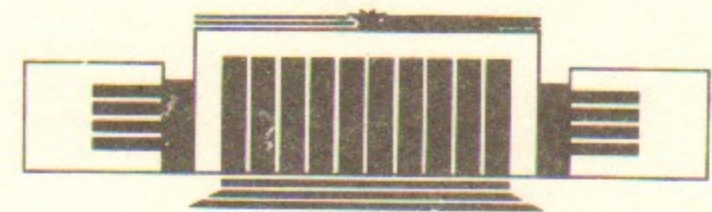


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР 34

В.Т. Астрелин, Б.Н. Брейзман, В.В. Васильев,
З. Седлачек, К. Юнгвирт

**ЗАХВАТ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ
В МЕЛКУЮ ПОТЕНЦИАЛЬНУЮ ЯМУ
И ОБРАЗОВАНИЕ СОЛИТОНА
ИЗ СГУСТКА ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН**

ПРЕПРИНТ 86-61



НОВОСИБИРСК

1986

Захват квантовой частицы в мелкую потенциальную яму
и образование солитона из сгустка ленгмюровских волн

В.Т. Астрелин, Б.Н. Брейзман, В.В. Васильев,
З. Седлачек^{*)}, К. Юнгвирт^{*)}

АННОТАЦИЯ

Исследована динамика формирования солитона при сверхзвуковом разлете сгустка ленгмюровских волн. Показано, что возмущение плотности плазмы, создаваемое разлетающимся сгустком, можно рассматривать в терминах квантовой механики как мелкую потенциальную яму. Это позволяет аналитически найти зависимость захватываемой в яму энергии от ширины и начальной энергии сгустка. После захвата плазмонов яма углубляется, излучая звуковые волны и превращаясь в конечном счете в солитон. На этой стадии число плазмонов в яме сохраняется, что определяет амплитуду образующегося солитона. Построенная модель находится в хорошем согласии с результатами контрольных численных расчетов.

^{*)} Институт физики плазмы ЧСАН, ЧССР, Прага

Trapping of a quantum particle into shallow potential well
and soliton formation from a bunch of Langmuir waves

V.T. Astrelin, B.N. Breizman, V.V. Vasiljev,
Z. Sedláček^{*)}, K. Jungwirth^{*)}

ABSTRACT

Formation of a soliton from a bunch of Langmuir waves, expanding with supersonic velocities, is investigated. Plasma density perturbation produced by the bunch is treated as a shallow quantum-mechanical potential well for plasmons. Within this approach, the number of plasmons trapped into the well is found as a function of the initial bunch width and energy. The well with the trapped plasmons deepens and turns into a soliton through radiating ion-acoustic waves. Amplitude of the resulting soliton is determined by the number of trapped plasmons which is conserved during final stages of the process. Our analytical results are in a good agreement with the results of test numerical calculations.

^{*)} Institute of Plasma Physics, Czech. Acad. Sci., 182 11 Praga 8, Pod vodárenskou věží 4, Czechoslovakia

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одной из характерных особенностей сильной ленгмюровской турбулентности является тенденция к самолокализации волн. Эта тенденция хорошо видна, в частности, из результатов одномерных численных расчетов, демонстрирующих возникновение солитонов [1—3]. Рождение солитона качественно объясняется деформацией профиля плотности плазмы под действием давления ленгмюровских волн и захватом некоторой части волн в область пониженной плотности с образованием в итоге самоподдерживающегося связанного состояния. Количественно этот процесс описывается следующей системой уравнений для комплексной амплитуды высокочастотного электрического поля E и возмущения плотности плазмы n [4]:

$$i \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{3}{2} \omega_p r_D^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} E = \frac{1}{2} \omega_p \frac{n}{n_0} E, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n - C_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} n = \frac{1}{16\pi M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2. \quad (2)$$

Здесь $\omega_p \equiv (4\pi n_0 e^2 / m)^{1/2}$ — электронная плазменная частота, отвечающая невозмущенной плотности n_0 ; $r_D \equiv [T / (4\pi n_0 e^2)]^{1/2}$ — дебаевский радиус; T — температура электронов; M — масса иона; C_s — скорость ионного звука.

Если характерная групповая скорость ленгмюровских волн V_g мала по сравнению с C_s , то при не слишком высокой энергии волн

уравнение (2) можно приближенно заменить соотношением $n = -|E|^2 / (16\pi T)$, означая, что возмущение плотности мгновенно подстраивается под распределение высокочастотного давления. В этом предельном случае имеется исчерпывающий ответ на вопрос о том, как связаны параметры солитонов с начальным распределением электрического поля, поскольку система (1), (2) сводится к нелинейному уравнению Шредингера, которое может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния [5]. При $V_g \gg C_s$, когда проинтегрировать систему (1), (2) в общем виде не удается, такой ясности пока нет. В настоящей работе предпринята попытка продвинуться в понимании этой ситуации.

Мы выясним, как формируется солитон в случае, когда начальные значения n и $\partial n / \partial t$ равны нулю, а начальное распределение электрического поля представляет собой сгусток, ширина которого λ^* удовлетворяет условию

$$\lambda \ll r_D \left(\frac{M}{m} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Из этого условия следует, в частности, что сгусток состоит преимущественно из сверхзвуковых плазмонов.

Имея в виду неравенство (3), полезно с самого начала выделить в уравнениях (1), (2) соответствующий малый параметр

$$g = \frac{2}{3} \frac{\lambda}{r_D} \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Для этого удобно привести систему (1), (2) к безразмерному виду

$$ig \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial^2}{\partial x^2} E = nE. \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n - \frac{\partial^2}{\partial x^2} n = \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2, \quad (6)$$

сделав следующие замены:

$$x \rightarrow \lambda x,$$

$$t \rightarrow \frac{\lambda}{C_s} t,$$

^{*} Здесь и в дальнейших оценках для простоты подразумевается, что у сгустка нет дополнительного внутреннего масштаба, т. е. характерная длина волны плазмонов оценочно равна λ .

$$n \rightarrow 3 n_0 (r_D / \lambda)^2 n \quad (7)$$

$$E \rightarrow (48\pi n_0 T)^{1/2} (r_D / \lambda) E.$$

Прежде чем перейти к формальному решению интересующей нас задачи, поясним качественно, к каким упрощениям ведет малость величины g .

При $g \ll 1$ возмущение плотности, создаваемое плазмонами за время их свободного разлета, оказывается относительно малым, что позволяет описать обратное воздействие этого возмущения на плазмоны в терминах квантовомеханической задачи о частице в мелкой потенциальной яме. Из-за нестационарности профиля плотности некоторая часть плазмонов захватывается ямой, переходя в связанное состояние. Захват продолжается до тех пор, пока уровень энергии, отвечающий связанному состоянию, не слишком далек от границы непрерывного спектра. По мере углубления ямы этот уровень постепенно опускается, и захват прекращается, так как зависимость параметров ямы от времени в конце концов становится адиабатически медленной. Захватываемые в яму плазмоны составляют, как мы увидим, лишь малую часть исходного сгустка, тогда как в создании ямы участвует весь сгусток. Это обстоятельство позволяет выделить в задаче о захвате две относительно независимые части: описание ямы, создаваемой свободно разлетающимся сгустком, и определение числа плазмонов, захватываемых в яму, изменяющуюся по известному закону.

По окончании захвата яма в течение некоторого времени продолжает углубляться по инерции, а затем постепенно перестраивается под влиянием захваченных плазмонов. В ходе этой перестройки яма, излучая звук, превращается в солитон. Существенно, что благодаря адиабатичности всей заключительной стадии процесса число плазмонов в яме на этой стадии сохраняется. Этот закон сохранения вместе с законами сохранения энергии и импульса позволяет найти амплитуду образующегося солитона и энергию излучаемого звука.

Придерживаясь намеченной здесь схемы, мы начнем рассмотрение с отыскания потенциальной ямы, создаваемой разлетающимся сгустком; этому посвящен второй раздел статьи. В третьем разделе решена задача о захвате в яму плазмонов. В разделе 4 уточнены условия применимости результатов, полученных в разделах 2 и 3, и обсуждена дальнейшая динамика формирования солитона. В последнем (пятом) разделе представлены результаты контроль-

ных численных расчетов и проведено их сравнение с аналитическими результатами.

2. ВОЗМУЩЕНИЕ ПЛОТНОСТИ И ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Используемое ниже приближение мелкой ямы требует, чтобы амплитуда n и пространственный масштаб l возмущения плотности удовлетворяли неравенству

$$nl^2 \ll 1. \quad (8)$$

Подчеркнем, что при $g \ll 1$ это требование оказывается легко выполнимым. Действительно, время разлета сгустка плазмонов с начальной шириной порядка единицы можно оценить как g , а скорость роста создаваемого этим сгустком возмущения плотности оценочно равна (см. уравнение (6))

$$\frac{\partial}{\partial t} n \sim g |A|^2,$$

где A — амплитуда электрического поля в сгустке. Пространственный масштаб этого возмущения равен начальному размеру сгустка, т. е. в неравенстве (8) следует положить $l=1$.

После разлета сгустка возмущение плотности продолжает по инерции линейно расти со временем до $t \sim 1$ (к этому моменту его рост прекращается за счет разлета со скоростью звука). Таким образом, возмущение ограничено сверху величиной

$$n \sim g |A|^2.$$

Из этой предварительной оценки видно, что условие (8) допускает рассмотрение весьма высоких плотностей энергии плазмонов. Более аккуратно соответствующее ограничение будет сформулировано в разделе 4.

Неравенство (8) означает, что характерные длины волн захватываемых в яму плазмонов велики по сравнению с размерами самой ямы. По отношению к таким плазмонам яму можно считать точечной, что соответствует переходу от уравнения (5) к уравнению с δ -функциональным потенциалом

$$ig \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial^2}{\partial x^2} E = -\eta \delta(x) E. \quad (9)$$

Местом локализации δ -функции здесь считается точка максимума начального сгустка плазмонов. Поскольку скорость движения ямы во всяком случае не превышает скорости звука, а захватываемые плазмоны предполагаются сверхзвуковыми, мы пренебрегли в уравнении (9) возможным перемещением ямы в процессе захвата.

Коэффициент η при δ -функции выбирается из того условия, чтобы первая производная электрического поля по x испытывала такой же скачок, как и на реальной яме. В первом порядке по па-

раметру nl^2 величина η , равная $-\int_{-\infty}^{+\infty} n dx$, обращается в нуль в си-

лу сохранения полного числа ионов. В следующем (втором) порядке стандартная процедура последовательных приближений дает

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\int_{-\infty}^x n(x') dx' \right]^2. \quad (10)$$

Входящая сюда функция

$$\xi = - \int_{-\infty}^x n(x'; t) dx'$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi = - \frac{\partial}{\partial x} |E|^2, \quad (11)$$

непосредственно следующему из уравнения (6). В интересующей нас задаче начальные значения $\xi(x; t)$ и $\dot{\xi}(x; t)$ равны нулю. Соответствующее решение уравнения (11) имеет вид

$$\xi(x; t) = \frac{1}{2} \int_0^t [|E(x-t+\tau; \tau)|^2 - |E(x+t-\tau; \tau)|^2] d\tau. \quad (12)$$

Считая разлет плазмонов, создающих яму, свободным, мы положим

$$|E(x; t)|^2 = \int \bar{E}_k \bar{E}_k^* e^{i(k_1 - k_2)x - it(k_1^2 - k_2^2)/g} dk_1 dk_2, \quad (13)$$

где \bar{E}_k — фурье-компоненты исходного поля. В интеграле (13) удобно ввести вместо k_1 и k_2 новые переменные $q = k_1 - k_2$ и $p = (k_1 + k_2)/g$. Выполнив затем в формуле (12) интегрирование по

времени, можно представить $\xi(x; t)$ в виде:

$$\xi = i \frac{g}{2} \int dp dq \frac{e^{iqx}}{q(1-p^2)} (\cos qt - \cos pqt) G_+(gp; q) + \\ + \frac{g}{2} \int dp dq \frac{e^{iqx}}{q(1-p^2)} (p \sin qt - \sin pqt) G_-(gp; q), \quad (14)$$

где G_+ и G_- — четная и нечетная по p части функции

$$G(gp; q) \equiv \bar{E}_{(gp+q)/2} \bar{E}_{(gp-q)/2}^*$$

Малость параметра q и тот факт, что характерные масштабы изменения функции G по p и q равны, соответственно, $1/q$ и 1 , позволяют при $t \gg q$ заменить в формуле (14) функцию $G_+(gp; q)$ на $G_+(0; q)$. С функцией G_- так поступить не удастся, поскольку остающийся интеграл по p расходится при $p \rightarrow \pm \infty$. Значение интеграла, содержащего G_- , определяется, следовательно, большими значениями p , что дает возможность опустить в подынтегральной функции величину $\sin pqt$, а также пренебречь в знаменателе единицей по сравнению с p^2 . В итоге $\xi(x; t)$ приобретает следующий вид:

$$\xi = - \frac{g}{2} \int dq \frac{\sin qt}{q} e^{iqx} R(q), \quad (15)$$

где

$$R(q) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dp}{p - i\epsilon^2 q/|q|} \bar{E}_{(p+q)/2} \bar{E}_{(p-q)/2}^* \quad (15a)$$

Эта формула для ξ справедлива во всей области изменения t , за исключением очень малых времен, сопоставимых со временем удвоения ширины исходного сгустка плазмонов (для этих времен $\xi \sim t^2$). Поскольку при не слишком высокой энергии сгустка столь малые времена в задаче о захвате плазмонов несущественны, формула (15) применительно к этой задаче может рассматриваться как точная. Подставив теперь $\xi(x; t)$ в формулу (10), получим

$$\eta = \frac{\pi}{2} g^2 \int dq \frac{\sin^2 qt}{q^2} |R(q)|^2. \quad (16)$$

Выпишем также приближенные выражения для η при $t \ll 1$ и $t \gg 1$ (напомним, что за единицу измерения времени выбрано время

прохождения звуковой волны через область локализации исходного сгустка плазмонов)

$$\eta = \frac{\pi}{2} g^2 t^2 \int |R(q)|^2 dq; \quad t \ll 1, \quad (17)$$

$$\eta = \frac{\pi^2}{2} g^2 t |R(0)|^2; \quad t \gg 1, \quad (18)$$

Множитель $|R(0)|^2$ в формуле (18) следует понимать, как значение $|R(q)|^2$ при $|q| \sim \frac{1}{t} \ll 1$. Хотя сама функция $R(q)$ вообще говоря, испытывает скачок при смене знака q (см. формулу (15a)), ее модуль при условии гладкости \bar{E} изменяется непрерывно, что и позволяет ввести величину $|R(0)|^2$.

Из формулы (18), на первый взгляд, следует, что при $t \rightarrow \infty$ функция $\eta(t)$ (а вместе с ней и энергия связанного состояния) неограниченно возрастает. С другой стороны, ясно, что энергия связи не может быть больше глубины ямы плотности, возникающей после разлета плазмонов, а глубина ямы заведомо конечна. Это противоречие указывает на нарушение модели мелкой ямы при достаточно больших значениях t^{**} . Действительно, выделив из решения (12) звуковую волну, бегущую в одну сторону, можно показать, что потенциальная яма, связанная с этой волной, сама по себе не является мелкой. Яма, образованная двумя волнами, бегущими в противоположные стороны, оказывается мелкой из-за того, что эти волны в значительной мере компенсируют друг друга, так что суммарное возмущение плотности убывает быстрее, чем возмущение от каждой из волн в отдельности. Иными словами, яма остается мелкой лишь до тех пор, пока волны не успели разойтись слишком далеко. Существенно, что предельно допустимое расхождение волн велико по сравнению с шириной исходного сгустка плазмонов. Именно по этой причине существует некоторая область значений t , в которой $\eta(t)$ задается формулой (18).

***) В пределе $t \rightarrow \infty$ нарушается также предположение о том, что яма создается преимущественно сверхзвуковыми плазмонами.

3. ЗАХВАТ ПЛАЗМОНОВ

3.1. Основные соотношения

Числом захваченных плазмонов N мы будем называть величину $|A_0|^2$, где A_0 — амплитуда связанного состояния в разложении электрического поля по полному набору собственных функций уравнения (9), отвечающих мгновенному значению $\eta(t)$:

$$E(x; t) = A_0(\eta/2)^{1/2} e^{-|x\eta/2|} + \int a_k(t) \psi_k(x; t) dk.$$

Здесь a_k — амплитуды состояний непрерывного спектра, характеризующихся волновыми функциями ψ_k .

После разлета исходного сгустка и наступления адиабатической стадии, на которой переходы из непрерывного спектра в связанное состояние и обратно оказываются запрещенными, амплитуда A_0 должна, очевидно, с точностью до множителя $(2/\eta)^{1/2}$ совпадать со значением электрического поля при $x=0$, поскольку все свободные плазмоны в конце концов покидают область локализации ямы. Таким образом, задача фактически сводится к отысканию асимптотики функции $E(0; t)$ при больших значениях t .

Уравнение для $E(0; t)$ легко получается из уравнения (9). Заметим, что согласно (9) коэффициенты разложения функции $E(x; t)$ в интеграл Фурье по x удовлетворяют уравнению

$$ig \frac{\partial}{\partial t} E_k - k^2 E_k = -\frac{\eta}{2\pi} \varepsilon,$$

где $\varepsilon \equiv E(0; t)$. Интегрирование этого уравнения дает

$$E_k(t) = \bar{E}_k e^{-ik^2 t/g} + \frac{i}{2\pi g} \int_0^t \eta(\tau) \varepsilon(\tau) e^{ik^2(\tau-t)/g} d\tau, \quad (19)$$

где \bar{E}_k — начальные значения коэффициентов Фурье. Функция $E_k(t)$ связана с $\varepsilon(t)$ соотношением

$$\varepsilon = \int E_k dk.$$

Поэтому интегрирование обеих частей формулы (19) по k дает для $\varepsilon(t)$ следующее интегральное уравнение:

$$\varepsilon(t) - \frac{1+i}{2(2\pi g)^{1/2}} \int_0^t \frac{\eta(\tau) \varepsilon(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = \int \bar{E}_k e^{-ik^2 t/g} dk. \quad (20)$$

В силу линейности уравнения (20) функция ε может быть записана как суперпозиция функций ε_k , удовлетворяющих уравнению (20), с правой частью вида $\exp(-ik^2 t/g)$. При этом на адиабатической стадии, где N не зависит от времени,

$$N = \frac{2}{\eta} \left| \int \bar{E}_k \varepsilon_k dk \right|^2. \quad (21)$$

При степенном законе изменения глубины ямы

$$\eta = Qt^m \quad (22)$$

уравнение для ε_k путем естественных замен

$$\begin{aligned} t &\rightarrow (g/Q^2)^{1/(2m+1)} \tau, \\ k &\rightarrow (g^m Q)^{1/(2m+1)} \kappa \end{aligned} \quad (23)$$

приводится к универсальному виду

$$\varepsilon_\kappa(\tau) - \frac{1+i}{2(2\pi)^{1/2}} \int_0^\tau \frac{\tau_1^m \varepsilon_\kappa(\tau_1) d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{1/2}} = e^{-i\kappa^2 \tau}. \quad (24)$$

Наличие такой универсальности позволяет сразу найти зависимость величины N , определяемой формулой (21), от параметров Q и g . Приняв во внимание, что при $g \ll 1$ в яму захватываются преимущественно длинноволновые плазмоны, мы заменим в формуле (21) функцию \bar{E}_k ее значением при $k=0$. Воспользовавшись дополнительно соотношениями (22) — (24), получим

$$N = |\bar{E}_0|^2 (g^m Q)^{1/(2m+1)} C_m, \quad (25)$$

где

$$C_m = 2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-m} \left| \int \varepsilon_\kappa(\tau) d\kappa \right|^2. \quad (26)$$

Формула (25) задает искомую зависимость N от Q и g с точностью до не известного пока численного множителя C_m , определяемого асимптотикой решения уравнения (24). Для $m=1$ и $m=2$ (а именно эти два случая, как видно из формул (17) и (18), представляют первоочередной интерес) множитель C_m удастся найти аналитически. Результат соответствующих вычислений (сами вычисления будут изложены во второй половине этого раздела) имеет вид

$$C_2 = \frac{8\pi^4(4/125)^{1/5}}{\Gamma^2(1/5)\Gamma^2(3/5)}, \quad (27)$$

$$C_1 = \pi 6^{1/3} \Gamma^2(2/3), \quad (28)$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Объединив формулы (17), (18), (22), (25) — (28), получим окончательно, что

$$N = \frac{8\pi^4(2\pi/125)^{1/5}}{\Gamma^2(1/5)\Gamma^2(3/5)} g^{4/5} |\bar{E}_0|^2 \left(\int |R(q)|^2 dq \right)^{1/5} \quad (29)$$

в случае квадратичного роста ямы, описываемого формулой (17), и

$$N = 3^{1/3} \pi^{5/3} \Gamma^2(2/3) g |\bar{E}_0|^2 |R(0)|^{2/3} \quad (30)$$

в случае линейного роста (см. формулу (18)).

3.2. Вычисление коэффициентов захвата

Приступая к решению уравнения (24), мы начнем рассмотрение со случая $m=1$. Применив к функции $\varepsilon_x(\tau)$ преобразование Лапласа

$$\varepsilon(\omega) = \int_0^\infty \varepsilon_x(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (31)$$

и, подвергнув этому преобразованию уравнение (24), получим, что $\varepsilon(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon - \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon = \frac{i}{\omega - \kappa^2}. \quad (32)$$

Здесь все функции определены в верхней полуплоскости комплексной переменной ω ($0 < \arg \omega < \pi$). Поэтому, в частности, $\operatorname{Re} \sqrt{\omega} > 0$. Решение уравнения (32) имеет вид

$$\varepsilon = \frac{i}{\omega - \kappa^2} - e^{\frac{4}{3}\omega^{3/2}} \int_\omega^\infty \frac{i}{(\omega_1 - \kappa^2)^2} e^{-\frac{4}{3}\omega_1^{3/2}} d\omega_1. \quad (33)$$

где интегрирование ведется по любому контуру, расположенному в верхней полуплоскости и уходящему в бесконечность в секторе $0 < \arg \omega_1 < \pi/3$, чем обеспечивается убывание подинтегрального выражения при $\omega_1 \rightarrow \infty$. Такой выбор константы интегрирования

определяется начальным условием для функции $\varepsilon_x(\tau)$:

$$\varepsilon_x(\tau) = \begin{cases} 1; & \tau = +0 \\ 0; & \tau = -0. \end{cases} \quad (34)$$

Для дальнейшего удобно считать, что контур интегрирования в формуле (33) уходит в бесконечность вдоль вещественной оси.

Формула (33) позволяет представить решение уравнения (24) в виде

$$\varepsilon_x(\tau) = e^{-i\kappa^2\tau} - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} e^{-i\omega\tau + \frac{4}{3}\omega^{3/2}} d\omega \int_\omega^{+\infty+i0} \frac{e^{-\frac{4}{3}\omega_1^{3/2}}}{(\omega_1 - \kappa^2)^2} d\omega_1. \quad (35)$$

Для определения коэффициента C_1 здесь достаточно удержать только второе слагаемое. Его асимптотика при $\tau \rightarrow \infty$ определяется точкой перевала, расположенной при больших отрицательных значениях ω ($\omega = -\tau^2/4$). Это позволит заменить в формуле (35) нижний предел интегрирования по ω_1 на $-\infty$, после чего вычисление интеграла по ω методом перевала дает

$$\varepsilon_x(\tau) \approx -\frac{1+i}{2(2\pi)^{1/2}} \tau^{1/2} e^{i\tau^3/12} \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{e^{-\frac{4}{3}\omega_1^{3/2}}}{(\omega_1 - \kappa^2)^2} d\omega_1.$$

Отсюда следует, что

$$\int \varepsilon_x(\tau) d\kappa \approx (1-i)(\pi\tau/2)^{1/2} e^{i\tau^3/12} \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} e^{-\frac{4}{3}\omega_1^{3/2}} d\omega_1.$$

Выполнив здесь интегрирование по ω_1 и, подставив результат в формулу (26), получим в итоге для C_1 выражение (28).

В случае $m=2$ преобразование Лапласа переводит уравнение (24) в дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varepsilon + \frac{i}{2\sqrt{\omega}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \varepsilon = \frac{i}{\omega - \kappa^2}. \quad (36)$$

Замены независимой переменной

$$z = \frac{4}{5}(1-i)\omega^{5/4} \quad (37)$$

и неизвестной функции

$$\dot{f} = \varepsilon/\omega^{1/2}$$

сводят уравнение (36) к неоднородному уравнению Бесселя, решение которого удобно выразить через функции Ганкеля $H_{2/5}^{(1)}$ и $H_{2/5}^{(2)}$. Получающееся в итоге выражение для ε имеет вид

$$\varepsilon = \frac{i}{\omega - \kappa^2} + \frac{2\pi}{5} \omega^{1/2} H_{2/5}^{(2)}(z) \int_{-\infty+i0}^{\omega} \frac{\omega_1^{1/2} H_{2/5}^{(1)}(z_1)}{(\omega_1 - \kappa^2)^3} d\omega_1 + \frac{2\pi}{5} \omega^{1/2} H_{2/5}^{(1)}(z) \int_{\omega}^{+\infty+i0} \frac{\omega_1^{1/2} H_{2/5}^{(2)}(z_1)}{(\omega_1 - \kappa^2)^3} d\omega_1. \quad (38)$$

Так же, как и в формуле (33), интегралы здесь берутся по контурам, лежащим в верхней полуплоскости переменной ω_1 и уходящим в бесконечность вдоль вещественной оси. Этим достигается выполнение начального условия (34). Нетрудно проверить, что решение (38) единственно: добавление к нему любого решения однородного уравнения (36) неизбежно ведет к нарушению условия (34).

Исследование выражения (38) показывает, что при отыскании асимптотики функции $\varepsilon_x(\tau)$ в формуле (38) достаточно удержать лишь последнее слагаемое, поскольку так же, как и в случае $m=1$, асимптотика $\varepsilon_x(\tau)$ определяется поведением ε при больших отрицательных значениях ω . Используя асимптотическое выражение для функции $H_{2/5}^{(1)}(z)$

$$H_{2/5}^{(1)}(z) \approx (2/\pi)^{1/2} (1/z)^{1/2} e^{i(z-9\pi/20)}$$

(см., например, [6]), и, заменяя нижний предел интегрирования по ω_1 на $-\infty$, получим, что для интересующих нас частот

$$\varepsilon(\omega) \approx \frac{(\pi)^{1/2} (2/25)^{1/4}}{\omega^{1/8}} e^{\frac{4}{5}(1+i)\omega^{5/4} - 13\pi/40} \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{\omega_1^{1/2} H_{2/5}^{(2)}(z_1)}{(\omega_1 - \kappa^2)^3} d\omega_1. \quad (39)$$

при переходе от $\varepsilon(\omega)$ к $\varepsilon_x(\tau)$ интеграл по ω может быть вычислен методом перевала (точка перевала лежит при $\omega = -\tau^4/4$). Получающийся при этом результат имеет вид

$$\varepsilon_x(\tau) \approx \frac{\tau}{5^{1/2}} e^{i(\tau^5/20) - i7\pi/10} \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{\omega_1^{1/2} H_{2/5}^{(2)}(z_1)}{(\omega_1 - \kappa^2)^3} d\omega_1.$$

Интегрирование этого выражения по κ дает

$$\int \varepsilon_x(\tau) d\kappa = \frac{\pi\tau}{5^{1/2}} e^{i(\tau^5/20) - i7\pi/10} \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \omega_1^{1/2} H_{2/5}^{(2)}(z_1) d\omega_1.$$

Вычисление здесь интеграла по ω_1 (при интегрировании удобно перейти от ω_1 к переменной z_1) и подстановка получающегося результата в формулу (26) дают в итоге для C_2 формулу (27).

4. ДИНАМИКА ФОРМИРОВАНИЯ СОЛИТОНА

Рассмотрим, основываясь на содержании разделов 2 и 3, различные сценарии формирования солитона и укажем условия осуществления каждого из них.

Как видно из формул (29), (30), возможны два различных режима захвата плазмонов в потенциальную яму. Первый режим реализуется при $g < t < 1$ и соответствует углублению ямы по инерции, а второй (называемый ниже звуковым) осуществляется при $t > 1$, когда ширина ямы становится больше ширины исходного сгустка плазмонов.

Обратимся сначала к инерционному режиму захвата. Время t_N , в течение которого идет захват плазмонов на дискретный уровень, характеризуемый собственной частотой

$$\Omega \sim \eta^2/g, \quad (40)$$

можно оценить из соотношения неопределенности

$$\Omega t_N \sim 1, \quad (41)$$

или, что то же самое, из условия $\tau \sim 1$, где величина τ определена формулой (23). Приняв во внимание, что в инерционном режиме $\eta \sim g^2 N_0^2 t^2$, где N_0 — число плазмонов в начальном сгустке, получим

$$t_N \sim g^{-3/5} \cdot N_0^{-4/5}. \quad (42)$$

Оценка (42) подразумевает, что условие адиабатичности начинает выполняться до перехода инерционного режима в звуковой, т. е. $t_N < 1$. Это налагает ограничение снизу на величину N_0 :

$$N_0 > g^{-3/4}. \quad (43)$$

Чтобы при $t = t_N$ яма оставалась мелкой, ее размер, равный в инерционном режиме начальному размеру сгустка плазмонов, должен быть меньше пространственного масштаба волновой функции связанного состояния $\eta^{-1}(t_N)$. Отсюда следует ограничение на N_0 сверху:

$$N_0 < g^{-2}. \quad (44)$$

Это неравенство равносильно условию $t_N > g$, обеспечивающему малость числа захватываемых в яму плазмонов по сравнению с N_0 . Отметим, что вследствие малости параметра g имеется широкий интервал значений N_0 , в котором неравенства (43) и (44) могут выполняться одновременно.

Оценим, далее, влияние захватываемых плазмонов на форму ямы. Пусть $\delta n(x; t)$ — возмущение профиля плотности, создаваемое этими плазмонами. Из уравнения (6) следует, что в момент захвата

$$|\delta n| \sim N \eta^3 t_N^2. \quad (45)$$

Здесь учтено, что характерный пространственный масштаб функции $\delta n(x; t)$ равен ширине волновой функции связанного состояния η^{-1} . Продавливание ямы захваченными плазмонами существенно в том случае, когда поправка к энергии связанного состояния, обусловленная возмущением δn , оказывается сопоставимой с самой энергией. Последнее имеет место при

$$\delta n \sim \eta^2. \quad (46)$$

Если же

$$\delta n \ll \eta^2, \quad (47)$$

то давлением захваченных плазмонов можно пренебречь. Условие (47) означает также, что возмущение оставляет потенциальную яму мелкой. Используя выражение (29) для N , нетрудно проверить, что ограничение на N_0 , вытекающее из соотношений (45) и (47), совпадает с неравенством (44).

В рассматриваемой нами ситуации, когда к моменту захвата давление плазмонов и газокINETическое давление пренебрежимо

малы, яма, захватив плазмоны, продолжает некоторое время углубляться по инерции. При этом захваченные плазмоны адиабатически сжимаются, и их давление возрастает. Соответственно, возрастает и деформация ямы δn . Время t_D , начиная с которого деформация становится существенной, оценивается с помощью соотношений (17), (29), (45), (46):

$$t_D \sim g^{-14/20} N_0^{-17/20}. \quad (48)$$

При выполнении неравенства

$$N_0 > g^{-14/17} \quad (49)$$

это время предшествует переходу инерционного режима в звуковой.

В области $t > t_D$ основным процессом становится сверхзвуковое сжатие ямы под влиянием находящихся в ней плазмонов. Динамика сжатия описывается автомодельным законом

$$|E|^2 \propto (t_0 - t)^{-2}; \quad \delta n \propto (t_0 - t)^{-4} \quad (50)$$

(см., например, [3]). В ходе этого сжатия, газокINETическое давление растет быстрее, чем давление плазмонов, вследствие чего сжатие в конце концов прекращается, яма превращается в солитон, а вытесненное из нее вещество уносится уходящими на бесконечность звуковыми волнами.

Вернемся теперь к соотношению (43). Если оно нарушено, то захват плазмонов определяется не инерционной, а звуковой стадией эволюции ямы, на которой

$$\eta \sim t g^2 N_0^2 \quad (51)$$

(см. формулу (18)). Из соотношений (40) и (51) видно, что захват заканчивается при

$$t = t_N \sim g^{-1} N_0^{-4/3} > 1 \quad (52)$$

В звуковом режиме размер ямы оценочно равен t . Чтобы в момент захвата яма оставалась мелкой, при $t = t_N$ должно выполняться условие

$$\eta t < 1,$$

которое с учетом оценок (51) и (52) сводится к неравенству

$$N_0 > 1.$$

Нетрудно показать, что это неравенство одновременно позволяет описывать процесс захвата без учета обратного влияния плазмонов на форму ямы. Давление захваченных плазмонов становится существенным лишь после их дополнительного адиабатического сжатия. Соответствующее время t_D оценочно равно $g^{-1}N_0^{-11/9}$ и превышает t_N . С момента времени $t=t_D$ поведение энергетического уровня в потенциальной яме начинает определяться не перестройкой профиля плотности плазмы в результате первоначального толчка, а возмущением плотности δn , создаваемым захваченными плазмонами. Само же возмущение δn и плотность энергии плазмонов $|E|^2$ эволюционируют по автомодельному закону (50) с последующим распадом на солитон и звук.

Чтобы определить возможные параметры образующегося солитона, воспользуемся законами сохранения числа плазмонов N , энергии H и импульса P , исключив из них вклад свободно разлетающихся плазмонов. Рассматриваемые интегралы движения уравнений (5), (6) имеют вид

$$N = \int |E|^2 dx,$$

$$H = \int \left(\frac{n^2 + u^2}{2} + n|E|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial x} E \right|^2 \right) dx,$$

$$P = \int \left[nu + \frac{ig}{2} \left(E \frac{\partial}{\partial x} E^* - E^* \frac{\partial}{\partial x} E \right) \right] dx,$$

где u — гидродинамическая скорость плазмы, определяемая уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} u = - \frac{\partial}{\partial x} (n + |E|^2).$$

Величина N в данном случае представляет собой число плазмонов, захватываемых в мелкую яму. В силу адиабатичности процессов, происходящих после захвата, число плазмонов в солитоне также равно N . При этом для энергии и импульса солитона, движущегося со скоростью V , справедливы следующие выражения (см., например, [7]):

$$H(N; V) = g^2 V^2 N/4 + \frac{N^3(5V^2-1)}{48(1-V^2)^3} \approx \frac{N^3(5V^2-1)}{48(1-V^2)^3},$$

$$P(N; V) = g^2 V N/2 + \frac{N^3 V}{12(1-V^2)^3} \approx \frac{N^3 V}{12(1-V^2)^3},$$

Простые оценки показывают, что благодаря малости параметра g значения H и P непосредственно после захвата плазмонов пренебрежимо малы по сравнению с $H(N; V)$ и $P(N; V)$. Это позволяет записать законы сохранения в виде

$$H(N; V) + \varepsilon_+ + \varepsilon_- = 0,$$

$$P(N; V) + \varepsilon_+ - \varepsilon_- = 0,$$

где ε_+ и ε_- — энергии звуковых волн, уходящих вправо (+) и влево (-) от солитона. Из положительности величин ε_+ и ε_- следует неравенство $|H(N; V)| \geq |P(N; V)|$, означающее, что в рассматриваемых нами режимах скорость солитона ограничена сверху неравенством

$$V \leq 1/5.$$

Численная малость величины V позволяет с высокой точностью найти амплитуду электрического поля в солитоне

$$E_0 = N/\sqrt{2},$$

ширину солитона

$$\Delta = 2/N$$

и суммарную энергию излучаемых звуковых волн

$$\varepsilon_+ + \varepsilon_- = N^3/48.$$

Присутствующая в этих формулах величина N определяется соотношениями (29), (30). Для отыскания скорости солитона необходимо более тщательное исследование процесса его формирования, что выходит за рамки данной работы.

Проделанные нами оценки позволяют выделить на плоскости параметров g , N_0 (см. рис. 1) три области (A, B, C), различающиеся динамикой образования солитона. Этим областям отвечают следующие сценарии.

Область A ($g^{-14/17} < N_0 < g^{-2}$)

1. Захват плазмонов в инерционном режиме ($N \sim N_0^{7/5} g^{4/5}$).
2. Адиабатическое сжатие плазмонов в инерционном режиме.
3. Автомодельное сжатие ямы под влиянием захваченных плазмонов.
4. Прекращение сжатия, излучение звука и образование солитона.

Область $B (g^{-3/4} < N_0 < g^{-14/17})$.

1. То же, что в области A .
2. Адиабатическое сжатие плазмонов сначала в инерционном, а затем в звуковом режиме.
- 3,4. То же, что в области A .

Область $C (1 < N_0 < g^{-3/4})$.

0. Инерционное углубление ямы без существенного захвата плазмонов.

1. Захват плазмонов в звуковом режиме ($N \sim N_0^{5/3} g$).
2. Адиабатическое сжатие плазмонов в звуковом режиме.
- 3,4. То же, что в областях A и B .

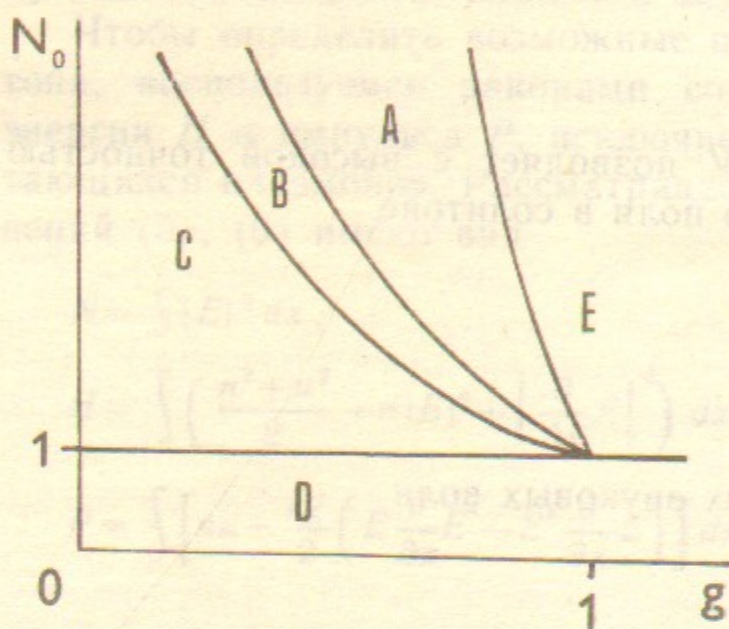


Рис. 1. Области с различными сценариями образования солитона.

Кроме областей A , B и C , на рис. 1 представлены также области D и E , к которым наше рассмотрение неприменимо. Частично эти области описываются нелинейным уравнением Шредингера. Для области E характерен почти полный переход плазмонов в связанное состояние с возможностью образования не только одного, но и нескольких солитонов. В противоположность этому область D характеризуется почти свободным разлетом плазмонов и малой вероятностью их объединения в солитон.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Чтобы проиллюстрировать полученные результаты и выяснить, насколько точна рассмотренная аналитическая модель формирования солитона, мы провели численное интегрирование уравнений

(5), (6) с помощью программы, использовавшейся ранее в работе [8]. Параметр g в уравнении (5) задавался равным 0.125, начальные значения n и $\partial n / \partial t$ полагались равными нулю, а начальное распределение электрического поля считалось гауссовым:

$$E(x; 0) = A e^{-x^2}. \quad (53)$$

Амплитуда поля A варьировалась в пределах от 2.5 до 7.5.

На рис. 2 и 3 показаны профили квадрата модуля электрического поля и возмущения плотности плазмы в различные моменты времени в случае $A = 5$. Чтобы продемонстрировать первоначальный разлет плазмонов^{***}, последовательность значений времени на рис. 2 сгущена к началу, тогда как на рис. 3 выбран постоянный временной шаг. На рис. 2 видно, что после разлета свободных плазмонов оставшаяся часть сгустка сжимается, принимая в конечном счете форму солитона. На рис. 3 отчетливо прослеживается распространение уходящих от солитона звуковых волн.

В ходе расчетов была найдена также зависимость числа плазмонов в солитоне от числа плазмонов в начальном сгустке

$$N_0 = (\pi/2)^{1/2} A^2.$$

Эта зависимость представлена на рис. 4 точками, соединенными штриховой линией. На том же рисунке нижней сплошной линией показана аналитически найденная зависимость для инерционного режима захвата (см. формулу (29)), а верхней — зависимость для звукового режима (формула (30)). Отметим, что верхняя кривая нанесена на рис. 4 фактически незаконно, так как те значения параметров, при которых велись расчеты, соответствуют, согласно оценкам, инерционному режиму. Тем не менее, даже эта кривая не слишком сильно отклоняется от расчетных точек. Как и следовало ожидать, расхождение между ними возрастает с увеличением N_0 . Что же касается линии, описывающей инерционный захват, то она во всем рассмотренном диапазоне согласуется с численными результатами с точностью не хуже 20%. Такое согласие можно признать вполне удовлетворительным, так как при выбранных для расчета параметрах в солитон захватывается уже довольно большая (до 40%) часть энергии исходного сгустка, т. е. сравнение ведется фактически на пределе применимости теории.

^{***} Наличие стадии свободного разлета плазмонов делает рис. 2 качественно отличным от соответствующего рисунка, приведенного в работе [1]. Различие обусловлено тем, что расчеты [1] велись при больших значениях параметра g .

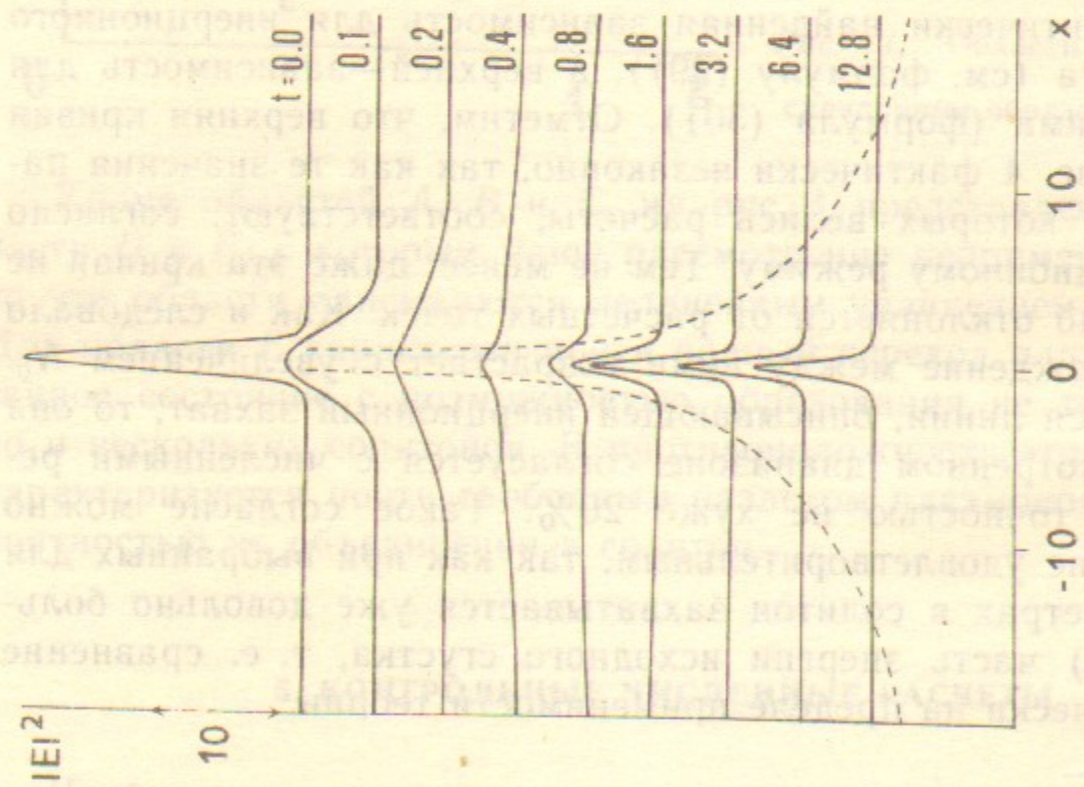


Рис. 2. Разлет и стягивание в солитон плазмонов с гауссовым начальным распределением (53) при $g=0.125$, $A=5$; для сравнения штриховыми линиями показаны траектории, соответствующие движению со скоростью звука.

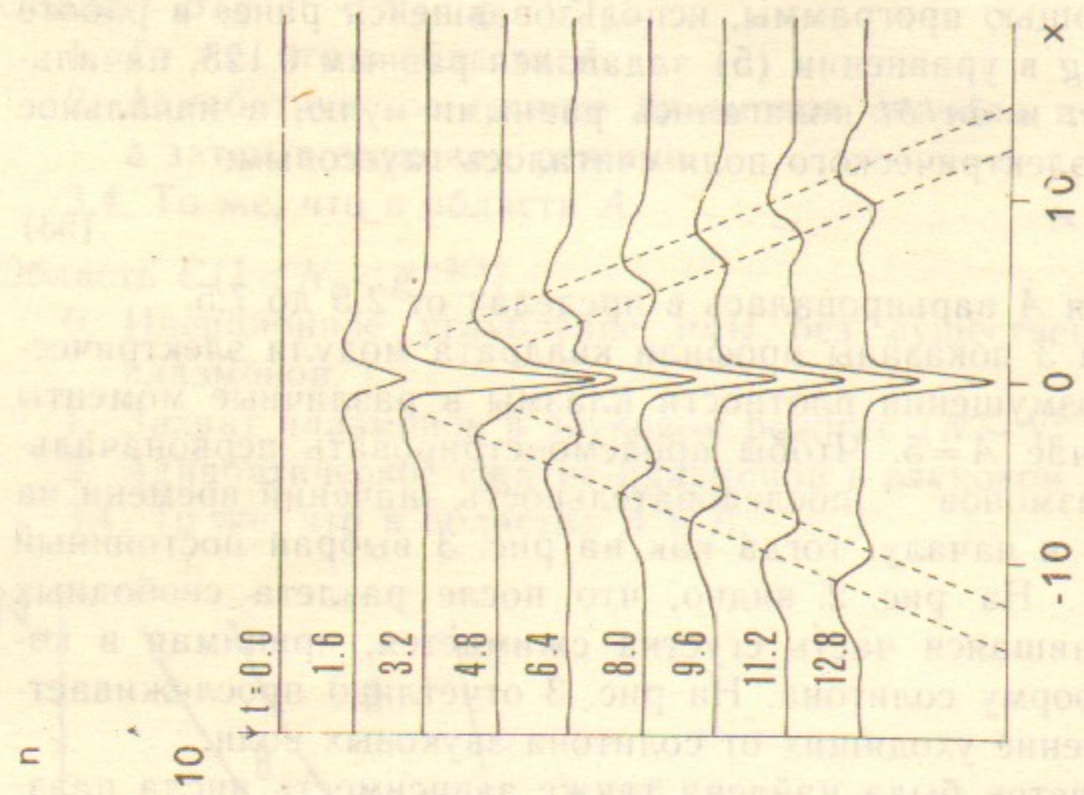


Рис. 3. Эволюция профиля плотности плазмы в режиме, отвечающем рис. 2. Штриховыми линиями выделены уходящие от солитона звуковые волны.

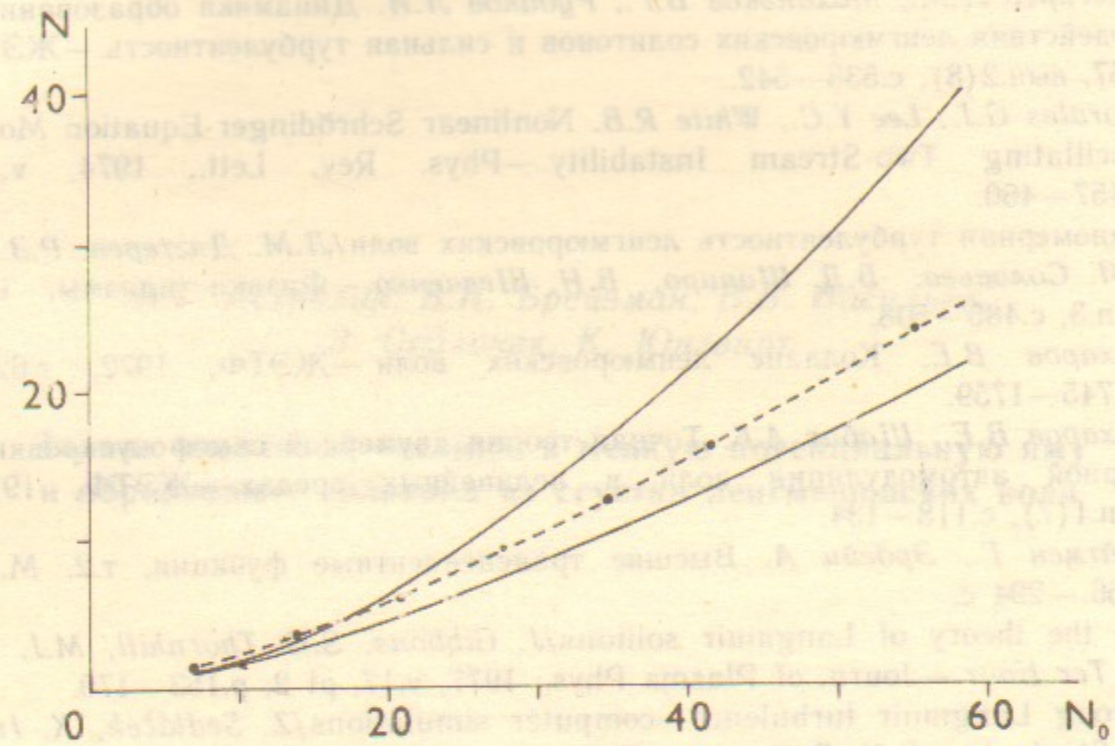


Рис. 4. К сравнению результатов численных и аналитических расчетов захвата плазмонов в солитон ($g=0.125$).

Заметим в заключение, что обсужденный нами элементарный процесс рождения солитона представляет собой существенную составную часть более сложной картины, наблюдавшейся при численном моделировании эволюции интенсивных сверхзвуковых ленгмюровских волн со случайными начальными фазами [8]. Ряд закономерностей, выявившихся при этом моделировании, качественно соответствует зависимостям, полученным в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дегтярев Л.М., Маханьков В.Г., Рудаков Л.И. Динамика образования и взаимодействия ленгмюровских солитонов и сильная турбулентность.—ЖЭТФ, 1974, т.67, вып.2(8), с.533—542.
2. Morales G.J., Lee Y.C., White R.B. Nonlinear Schrödinger-Equation Model of the Oscillating Two-Stream Instability.—Phys. Rev. Lett., 1974, v.32, N 9, p.457—460.
3. Одномерная турбулентность ленгмюровских волн/Л.М. Дегтерев, Р.З. Сагдеев, Г.И. Соловьев, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко.—Физика плазмы, 1980, т.6, вып.3, с.485—508.
4. Захаров В.Е. Коллапс ленгмюровских волн.—ЖЭТФ, 1972, т.62, вып.5, с.1745—1759.
5. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах.—ЖЭТФ, 1971, т.61, вып.1(7), с.118—134.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2. М.: Наука, 1966.—294 с.
7. On the theory of Langmuir solitons/J. Gibbons, S.G. Thornhill, M.J. Wardrop, D. Ter Haar.—Journ. of Plasma Phys., 1977, v.17, pt 2, p.153—170.
8. Strong Langmuir turbulence—computer simulations/Z. Sedláček, K. Jungwirth, P. Stavinoha, B.N. Breizman.—Proc. 12. Europ. Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys., Budapest, 1985, Pt 2, p.338—341.

В.Т. Астрелин, Б.Н. Брейзман, В.В. Васильев,
З. Седлачек, К. Юнгвирт

**Захват квантовой частицы в мелкую потенциальную яму
и образование солитона из сгустка ленгмюровских волн**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 30 января 1986 г.
Подписано в печать 9.04 1986 г. МН 11701
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,2 печ.л., 1,8 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 61.

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.