



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

14

В.В. Вечеславов

РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ С  
МЕДЛЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

ПРЕПРИНТ 86-32



НОВОСИБИРСК

1986

## АННОТАЦИЯ

Приводится гамильтонова формулировка задачи о движении релятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле и поле медленной наклонной электромагнитной волны. Исследуются условия возникновения сильной стохастичности, вызванной перекрытием черенковского и соседних с ним циклотронных резонансов. На основе метода ДЛТ вводятся приближенные интегралы движения, позволяющие оценить размеры отдельных резонансов и построить приближенный фазовый портрет системы. Критические величины возмущения определяются по критерию перекрытия и по методу ренормализации для двух резонансов. Полученные результаты проверяются численным интегрированием уравнений движения, осуществляемым с помощью вспомогательного канонического отображения.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованиям динамики взаимодействий заряженных частиц с волнами уделяется в последние годы большое внимание, что в значительной степени объясняется фундаментальной важностью этой проблемы для физики плазмы [1—5]. В таких исследованиях используется, как правило, современная теория близких к интегрируемым гамильтоновых систем с разделенным (на регулярную и стохастическую компоненты) фазовым пространством [6, 7]. Многие процессы (например, ускорение и нагрев частиц) осуществляются в условиях, при которых стохастическая траектория может «блуждать» между резонансами по системе перекрывшихся стохастических слоев. Отыскание этих условий на практике заметно облегчается, если используется известный критерий перекрытия резонансов Чирикова [6].

К настоящему времени достаточно подробно обследовано взаимодействие заряда с электростатической волной, падающей наклонно [1, 3] или нормально [2] к направлению однородного магнитного поля; нормальная электромагнитная волна рассматривалась в [4]. Во всех этих работах применялся критерий перекрытия резонансов и полученные с его помощью прогнозы оказывались в согласии с результатами численного моделирования. Пример отсутствия такого согласия содержится в работе [5], где изучается движение частицы в поле медленной наклонной электромагнитной волны. Авторы обнаружили, что в относительно сильном магнитном поле найденная по критерию перекрытия величина возмущения значительно (примерно в 20 раз) ниже полученной численным

интегрированием уравнений движения; в слабом поле такого расхождения нет. Причины указанного несоответствия неясны, и это оправдывает сделанную в настоящей работе попытку еще раз рассмотреть поставленную в [5] задачу, используя по возможности другие подходы и методы.

В п. 2 вводится записанный в дрейфовых переменных гамильтониан исследуемой динамической системы; изложение здесь близко следует работе [1], но учитываются релятивистские эффекты. В п. 3 на основе метода ДЛТ строятся приближенные интегралы движения двух типов. Первый дает описание отдельных резонансов в приближении маятника и входит в критерий перекрытия. Второй учитывает совместное действие всех основных резонансов и позволяет получить приближенный фазовый портрет системы (рис. 1). Результаты аналитического и численного подходов сопоставляются в п. 4. Численное интегрирование осуществляется с помощью вспомогательного неявного канонического отображения, что гарантирует сохранение гамильтоновости. Вначале исследуется перекрытие черенковского и двух соседних с ним циклотронных резонансов (рис. 2), а затем — перекрытие всех циклотронных резонансов, расположенных в доступной системе области фазового пространства (рис. 3). В обоих случаях для предсказанных критерием перекрытия величин амплитуды волны прослеживаются траектории, блуждающие по стохастическим слоям всех перекрывшихся резонансов.

## 2. ГАМИЛЬТониАН ЗАДАЧИ

Рассматривается описанная в [5] динамическая система: частица с зарядом  $q$  и массой покоя  $M$  движется в однородном магнитном поле  $\vec{B}_0$ , под углом  $\alpha$  к которому распространяется электромагнитная волна

$$\vec{E} = \{0; -\varepsilon \cos \theta; 0\}, \quad \vec{B} = \left\{ \left( \frac{\varepsilon n}{c} \right) \cos \alpha \cos \theta; 0; -\left( \frac{\varepsilon n}{c} \right) \sin \alpha \cos \theta \right\} \quad (1)$$

с амплитудой  $\varepsilon$  и фазой  $\theta = \vec{k}\vec{r} - \omega t = k_{\perp}x + k_z z - \omega t$ . Ось  $z$  декартовой системы координат направлена вдоль  $\vec{B}_0$ , волновой вектор  $\vec{k}$  лежит в плоскости  $(x, z)$ ;  $n$  — показатель преломления среды,  $n^2 = k^2 c^2 / \omega^2$ .

Действующее на частицу результирующее электромагнитное поле можно, используя лоренцову калибровку, полностью задать

векторным потенциалом вида

$$\vec{A} = \left\{ -B_0 y; -\frac{\varepsilon}{\omega} \sin \theta; 0 \right\}. \quad (2)$$

Если выбрать единицы измерений согласно равенству  $q = c = M = 1$ , то гамильтониан задачи запишется так:

$$H_c = \gamma = (1 + \vec{p}^2)^{1/2} = \left[ 1 + P_z^2 + (P_x + \Omega y)^2 + \left( P_y + \frac{\varepsilon}{\omega} \sin \theta \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3)$$

где  $\Omega \equiv B_0$  — ларморовская частота;  $\vec{p} = \gamma \vec{v}$  — импульс частицы;  $\vec{P} = \vec{p} + \vec{A}$  — обобщенный импульс, сопряженный вектору  $\vec{r} = \{x; y; z\}$ .

Перейдем к так называемым дрейфовым переменным [1] и заодно исключим явную зависимость от времени, используя последовательно производящие функции [7]

$$F_1(x, y, \varphi, Y) = -\Omega \left[ \frac{1}{2} (y - Y)^2 \operatorname{tg} \varphi + xY \right],$$

$$F_2(z, P_{\psi}, t) = k_z^{-2} (\Omega P_{\psi} + \omega) (k_z z - \omega t).$$

Новые координаты  $\psi, \varphi, Y$  и сопряженные им импульсы  $P_{\psi}, P_{\varphi}, \Omega X$  связаны со старыми переменными соотношениями

$$\begin{aligned} X &= x + \varrho \sin \varphi, & Y &= y + \varrho \cos \varphi, & \psi &= \Omega k_z^{-2} (k_z z - \omega t), \\ P_x &= -\Omega Y, & P_y &= \Omega \varrho \sin \varphi, & P_z &= k_z^{-1} (\Omega P_{\psi} + \omega). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $X, Y$  — координаты ларморовского центра,  $\varrho = v_{\perp} / \Omega$  — ларморовский радиус,  $P_{\varphi} = \Omega \varrho^2 / 2$  — магнитный момент частицы и  $\varphi = \operatorname{arctg} [-P_y / (P_x + \Omega y)]$  — ларморовский угол. Преобразованный гамильтониан не зависит от времени и является интегралом движения

$$\begin{aligned} H_d(\psi, P_{\psi}; \varphi, P_{\varphi}) &= \gamma - \frac{\omega}{k_z^2} (\Omega P_{\psi} + \omega) = \left\{ 1 + \left( \frac{\Omega P_{\psi} + \omega}{k_z} \right)^2 + 2\Omega P_{\varphi} + \right. \\ &+ \left. \frac{2\varepsilon\Omega}{\omega} \varrho \sin \varphi \sin \theta + \left[ \frac{\varepsilon}{\omega} \sin \theta \right]^2 \right\}^{1/2} - \frac{\omega}{k_z^2} (\Omega P_{\psi} + \omega) = \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (5)$$

где фаза  $\theta = k_z^2 \psi / \Omega + k_{\perp} (X - \varrho \sin \varphi)$ . Имеется второй интеграл движения  $\Omega X = \operatorname{const}$ , отвечающий циклической координате  $Y$ . Оба эти интеграла, принимающие в исходных декартовых переменных форму

$$H_d(\vec{r}, \vec{p}) = \gamma - \frac{\omega}{k_z} p_z,$$

$$\Omega X(\vec{r}, \vec{p}) = \Omega x + p_y - \frac{\varepsilon}{\omega} \sin(k_{\perp} x + k_z z - \omega t),$$

были получены в [5] из уравнений движения.

Наличие постоянного слагаемого  $k_{\perp} X$  в выражении для фазы  $\theta$  приводит к несущественному сдвигу в отсчете координаты  $\psi$ , поэтому ниже используется укороченная формула

$$\theta = \frac{k_z^2}{\Omega} \psi - k_{\perp} \varrho \sin \varphi. \quad (6)$$

Гармонические составляющие взаимодействия частицы с внешним полем можно выписать явно с помощью известных разложений в ряды по функциям Бесселя

$$H_d = \left\{ 1 + \left( \frac{\Omega P_{\psi} + \omega}{k_z} \right)^2 + 2\Omega P_{\varphi} + \frac{2\varepsilon\Omega}{\omega} \varrho \sum_{m=-\infty}^{\infty} J'_m(k_{\perp} \varrho) \cos\left(\frac{k_z^2}{\Omega} \psi - m\varphi\right) + \left[ \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_{\perp} \varrho) \sin\left(\frac{k_z^2}{\Omega} \psi - m\varphi\right) \right]^2 \right\}^{1/2} - \frac{\omega}{k_z^2} (\Omega P_{\psi} + \omega), \quad (7)$$

где  $J'_m(\xi) \equiv dJ_m(\xi)/d\xi$ . Условие резонанса с  $m$ -ой гармоникой возмущения  $k_z^2 \dot{\psi}/\Omega - m\dot{\varphi} = 0$  преобразуется к выражению

$$\gamma(k_z v_z - \omega) - m\Omega = O(\varepsilon), \quad (8)$$

которое при  $\varepsilon \rightarrow 0$  совпадает с формулой (1) работы [3].

Все численные результаты и оценки, приведенные в п. 4, относятся к заимствованному из работы [5] примеру, в котором параметры волны  $\omega$ ,  $\vec{k}$ , ларморовская частота  $\Omega$  и начальные значения продольной  $v_z$  и поперечной  $v_{\perp}$  скорости частицы равны соответственно

$$\omega = 1; \quad k_z = k_{\perp} = 3; \quad \Omega = 1/2; \quad v_z = 0,3667; \quad v_{\perp} = 0,3333. \quad (9)$$

В этом случае, как следует из условия (8), анализ движения частицы вблизи черенковского ( $m=0$ ) и младших циклотронных ( $m = \pm 1; \pm 2$ ) резонансов может быть выполнен в нерелятивистском приближении [5]. Кроме того, в силу малости практически

интересных значений амплитуды волны  $\varepsilon$  (см. п. 4), допустимо пренебречь эффектами порядка  $\varepsilon^2$ . Преобразуя с учетом этих замечаний формулу (7), получаем гамильтониан системы, аналитическое и численное исследование которой содержится в пп. 3 и 4:

$$\begin{aligned} H(\psi, P_{\psi}; \varphi, P_{\varphi}) &= H_0(P_{\psi}; P_{\varphi}) + \varepsilon H_1(\psi; \varphi, P_{\varphi}) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega}{k_z} P_{\psi} \right)^2 + \Omega P_{\varphi} + \frac{\varepsilon\Omega}{\omega} \varrho \sin \varphi \sin \left( \frac{k_z^2}{\Omega} \psi - k_{\perp} \varrho \sin \varphi \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega}{k_z} P_{\psi} \right)^2 + \Omega P_{\varphi} + \frac{\varepsilon\Omega}{\omega k_{\perp}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi J'_m(\xi) \cos \left( \frac{k_z^2}{\Omega} \psi - m\varphi \right) = E = \text{const}, \quad (10) \end{aligned}$$

где  $\xi = k_{\perp} \varrho = k_{\perp} (2P_{\varphi}/\Omega)^{1/2}$ .

### 3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМЫ (10) И ПЕРЕКРЫТИЕ РЕЗОНАНСОВ

При практическом отыскании областей регулярности и стохастичности полезны приближенные интегралы движения, с помощью которых удастся оценивать размеры и взаимное расположение основных резонансов. Построение таких интегралов в рамках классической теории возмущений наталкивается на известные трудности, связанные с возникновением резонансных знаменателей [7]. Для устранения этих знаменателей вблизи одного изолированного резонанса широко используется каноническое преобразование к специальным (резонансным) переменным, дающее так называемое универсальное описание в приближении маятника [6, 7]. Дуннетом, Лейнгом и Тейлором предложен метод (метод ДЛТ), позволяющий в ряде случаев учитывать совместное действие нескольких и даже всех резонансов первого порядка [8]. Построение ДЛТ-инвариантов более высоких порядков и некоторые их общие свойства обсуждаются для непрерывных систем в [9] и для отображений в [10].

Следуя рекомендациям метода ДЛТ, будем искать интеграл первого порядка системы (10) в виде

$$I(\psi, P_{\psi}; \varphi, P_{\varphi}) = I_0(P_{\psi}) + \varepsilon I_1(\psi, P_{\psi}; \varphi; P_{\varphi}),$$

где  $I_0(P_{\psi})$  — неизвестная пока аналитическая функция одного лишь действия  $P_{\psi}$ . Обозначая через  $[..., ...]$  скобку Пуассона и учиты-

вая условие  $[I, H] = O(\varepsilon^2)$ , для определения второго слагаемого  $I_1$  получаем уравнение

$$P_\psi \frac{\Omega^2}{k_z^2} \frac{\partial I_1}{\partial \psi} + \Omega \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} = -I'_0(P_\psi) \frac{k_z^2}{\omega k_\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi J'_m(\xi) \sin\left(\frac{k_z^2}{\Omega} \psi - m\varphi\right).$$

Интересующее нас частное решение этого уравнения имеет форму

$$I_1 = I'_0(P_\psi) \frac{k_z^2}{\omega \Omega k_\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi J'_m(\xi) \frac{\sin\left(\frac{k_z^2}{\Omega} \psi - m\varphi\right)}{P_\psi - m}, \quad (11)$$

содержащую резонансные знаменатели и связанные с ними сингулярности. Теперь следует так распорядиться неизвестной пока функцией  $I'_0(P_\psi)$  (она называется определяющей функцией [9]), чтобы устранить все резонансные особенности в решении (11); число и порядок нулей  $I'_0$  должны при этом совпадать с числом и порядком полюсов остальных сомножителей. В нашем случае естественно положить  $I'_0(P_\psi) = \pi \sin(\pi P_\psi)$ , что дает окончательное выражение ДЛТ-интеграла первого порядка:

$$I = -\cos(\pi P_\psi) + \frac{\pi \varepsilon k_z^2}{\omega \Omega k_\perp} \sin(\pi P_\psi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi J'_m(\xi) \frac{\cos\left(\frac{k_z^2}{\Omega} \psi - m\varphi\right)}{P_\psi - m}, \quad (12)$$

где  $\xi = k_\perp (2P_\psi/\Omega)^{1/2}$  определяется соотношением (10).

Выше упоминалось о том, что метод ДЛТ пригоден для исследования системы конечного числа резонансов. В частности, его можно использовать в случае одного изолированного резонанса, что оказывается эквивалентно универсальному описанию этого резонанса в приближении маятника (факт, отмеченный в § 2.4г книги [7]). Вернемся к формуле (11), но вместо бесконечной суммы оставим в ней одну гармонику с номером  $m=l$ . Для подавления единственного полюса первого порядка в точке  $P_\psi = l$  назначим  $I'_0(P_\psi) = \Omega k_z^{-2} (P_\psi - l)$ , выполним замену переменных  $\psi, P_\psi \rightarrow \alpha, p$  с помощью производящей функции

$$F_3(\alpha, P_\psi) = -k_z^{-2} \Omega (P_\psi - l) (\alpha + l\varphi)$$

и в качестве ДЛТ-интеграла получим гамильтониан маятника, описывающего действие одиночного резонанса

$$K(\alpha, p) = \frac{k_z^2}{2\Omega} p^2 + \frac{\varepsilon}{\omega k_\perp} \xi J'_l(\xi) \cos \alpha. \quad (13)$$

Интегралы типа (13) позволяют оценить с помощью критерия перекрытия [6] величину амплитуды волны  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , при которой происходит касание сепаратрис соседних резонансов с номерами  $l$  и  $l+1$ :

$$\varepsilon^* = \frac{\omega \Omega k_\perp}{4k_z^2} (|\xi^* J'_l(\xi^*)|^{1/2} + |\xi^* J'_{l+1}(\xi^*)|^{1/2})^{-2}. \quad (14)$$

Величина аргумента  $\xi^*$  вычисляется, согласно закону сохранения (10), по значениям динамических переменных в точке касания, и наряду с равенством (14) должно быть обеспечено выполнение дополнительных соотношений. Эти соотношения, как и результаты применения формул (12), (14), обсуждаются в следующем разделе.

#### 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Анализ гамильтоновых систем обычно связывают с методом поверхности сечения Пуанкаре [1, 2, 7]. В качестве такой поверхности выберем плоскость  $(\psi, P_\psi)$ , а сечение определим заданием конкретных величин гамильтониана  $H = E_S$  и ларморовского угла  $\varphi = \varphi_S$ . Числовые значения параметров исследуемой системы (10) даны равенствами (9); напомним, что именно для этих значений в работе [5] обнаружено серьезное несоответствие между аналитическим и численным подходами. Если назначить, например,  $\varphi_S = 0$  или  $\varphi_S = \pi$ , то с учетом соотношений (4), (9) и (10) находим  $E_S = 0,05611$ .

Условия  $H = E_S = \text{const}$  и  $P_\psi = \Omega \varphi^2 / 2 \geq 0$  ограничивают доступную системе (10) область фазового пространства, поэтому значения импульса  $P_\psi$  всегда принадлежат интервалу

$$-D \leq P_\psi \leq D, \quad (15)$$

где  $D = k_z (2E_S)^{1/2} / \Omega \simeq 2,01$ . Из всей бесконечной совокупности первичных резонансов в этот интервал попадают только пять ( $l=0; \pm 1; \pm 2$ ), причем картина их взаимного расположения выглядит по-разному в различных сечениях [11]. Так, при  $\varphi_S = 0$  сепаратрисы резонансов  $l=0$  и  $l=1$  находятся в противофазе (горб против впадины), а сепаратрисы  $l=0$  и  $l=-1$  в фазе (горб против гор-

ба); при  $\varphi_S = \pi$  в фазе оказываются сепаратрисы  $l=0$ ,  $l=1$  и т. д. Найдем вначале условия перекрытия черенковского и соседнего с ним циклотронного резонансов. Формула (14) правильно отражает геометрическую ситуацию только для сечений  $\varphi_S = 0$  (перекрыты резонансы  $l=0$  и  $l=-1$ ) и  $\varphi_S = \pi$  (перекрыты резонансы  $l=0$  и  $l=1$ ). Назначим  $\varphi_S = \pi$ , тогда дополнительные соотношения (см. конец п. 3), совместно с которыми надо использовать формулу (14), принимают вид

$$P_\psi^* = 2k_z \left| \frac{\varepsilon^*}{\omega \Omega k_\perp} \xi^* J'_0(\xi^*) \right|^{1/2}, \quad (16)$$

$$\xi^* = \frac{k_\perp}{\Omega} \left[ 2E_S - \left( \frac{\Omega}{k_z} P_\psi^* \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (17)$$

где  $P_\psi^*$  — импульс в точке касания сепаратрис. Разрешая уравнения (14), (16), (17), находим предсказанные критерием перекрытия пороговую амплитуду волны  $\varepsilon_{01} = \varepsilon^* \simeq 0,030$  и полуширину черенковского резонанса  $\Delta P_0 = P_\psi^* \simeq 0,872$ . Отсюда следует, что циклотронный резонанс  $l=1$  имеет полуширину  $\Delta P_1 = 1 - P_\psi^* \simeq 0,128$  и оказывается существенно слабее черенковского (в работе [5] они принимались равносильными, что привело авторов к значениям  $P_\psi^* = 0,5$  и  $\varepsilon_{01} \simeq 0,01$ ).

Доказано, что критерий перекрытия резонансов дает обычно завышенные (грубо говоря, вдвое) оценки возмущений, поскольку не учитывает наличия высших резонансов и стохастических слоев [6, 7]. Появилось даже эмпирическое правило «двух третей», которое не знает исключений для близких по ширине резонансов [7]. Но использование этого критерия в отношении различных по силе резонансов может иногда приводить к заниженным величинам; основной пример такого рода — движение частицы в поле двух волн

$$H_r = p^2/2 - M_1 \cos \alpha - M_2 \cos [h(\alpha - t)]. \quad (18)$$

На базе этого примера Эсканде и Довейл разработали метод ренормализации, позволяющий для различных отношений  $M_1/M_2$  отыскивать условия перехода к сильной стохастичности по разрушению находящейся между резонансами наиболее устойчивой инвариантной кривой [11]. Полученные таким путем результаты анализа системы (18) представлены на рис. 8 работы [11] и на рис. 4.12 книги [7] в виде графиков. Используя эти графики в нашем случае ( $h=1$ ;  $\Delta P_0 = 2\sqrt{M_1} = 0,872$ ;  $\Delta P_1 = 2\sqrt{M_2} = 0,128$ ), находим значение критического возмущения  $\varepsilon_r \simeq 0,077$ , что примерно в

2,5 раза больше предсказанной критерием перекрытия величины  $\varepsilon_{01}$ . Два различных способа определения порога перекрытия черенковского  $l=0$  и циклотронного  $l=1$  резонансов привели, таким образом, к сильно несовпадающим оценкам и для разрешения возникшего противоречия естественно обратиться к численному эксперименту.

На рис. 1 представлен фазовый портрет системы (10) при амплитуде волны  $\varepsilon = 0,025$  в сечении  $\varphi_S = \pi/2$ , построенный с помощью ДЛТ-инварианта первого порядка (12); сечение выбрано с таким расчетом, чтобы имела место симметрия по вертикали. Представленная на этом рисунке картина, конечно, приближенная, поскольку никакая теория возмущений не в состоянии описать стохастическую компоненту [7]. На самом деле, как известно, при любом конечном возмущении вблизи сепаратрис резонансов образуются стохастические слои конечной ширины [6]. Если справедлива оценка  $\varepsilon_{01} \simeq 0,030$  по критерию перекрытия, то при  $\varepsilon = 0,025$  слои резонансов  $m=0$ ;  $\pm 1$  будут перекрыты, в то время как резонансы  $m = \pm 2$  сохраняют свою изолированность. Для проверки этого обстоятельства требуется численное интегрирование порожденной гамильтонианом (10) системы уравнений

$$\dot{\psi} = \frac{\Omega^2}{k_z^2} P_\psi,$$

$$\dot{P}_\psi = \frac{\varepsilon k_z^2}{k_\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi J'_m(\xi) \sin\left(\frac{k_z^2}{\Omega} \psi - m\varphi\right),$$

$$\dot{\varphi} = \Omega + \frac{\varepsilon \Omega}{k_\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dP_\psi} [\xi J'_m(\xi)] \cos\left(\frac{k_z^2}{\Omega} \psi - m\varphi\right), \quad (19)$$

$$\dot{P}_\varphi = -\frac{\varepsilon \Omega}{k_\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \xi J'_m(\xi) \sin\left(\frac{k_z^2}{\Omega} \psi - m\varphi\right).$$

Здесь возникают определенные трудности, связанные с необходимостью обеспечения каноничности (сохранения фазового объема) в процессе вычислений — требование, которому не удовлетворяют многие популярные алгоритмы численного интегрирования [12]. Потеря каноничности приводит к подавлению слабых реальных и возникновению ложных динамических эффектов.

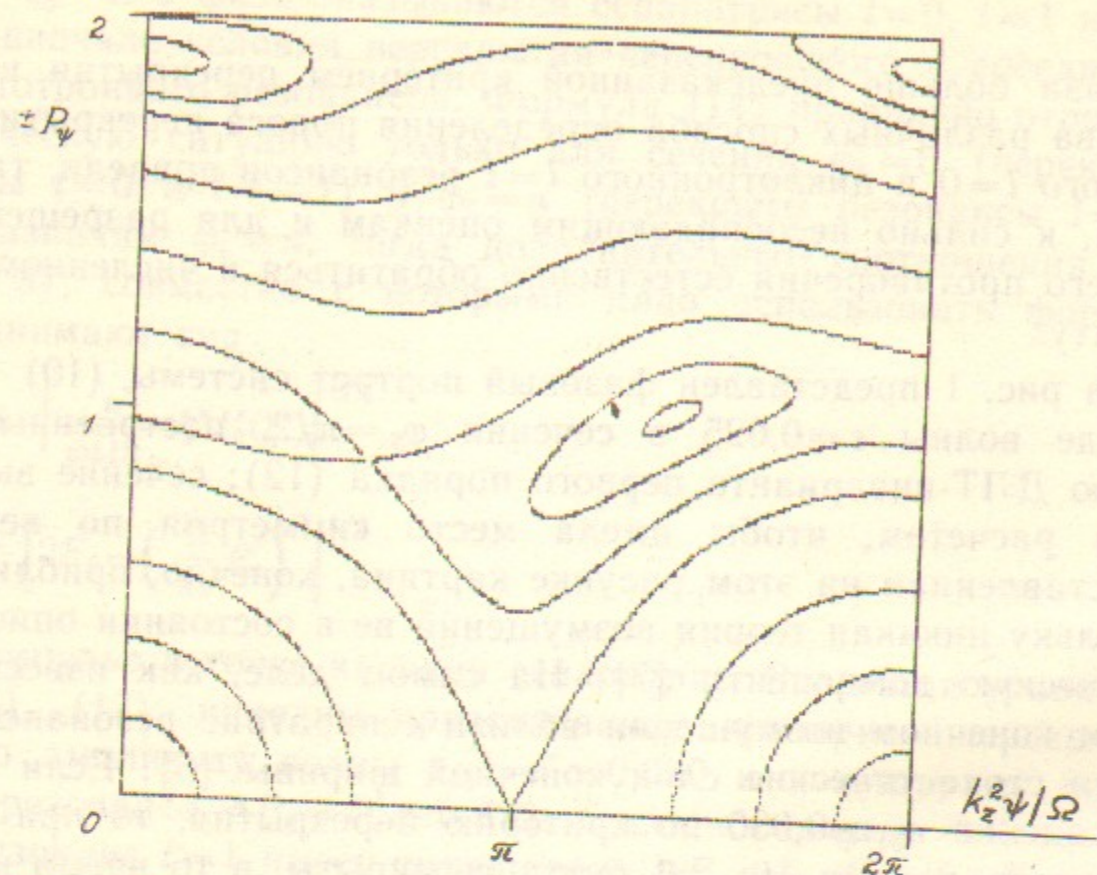


Рис. 1. Инвариантные кривые на поверхности сечения  $E_S = 0,05611$ ,  $\varphi_S = \pi/2$ , построенные по методу ДЛТ первого порядка; амплитуда волны  $\varepsilon = 0,025$ .

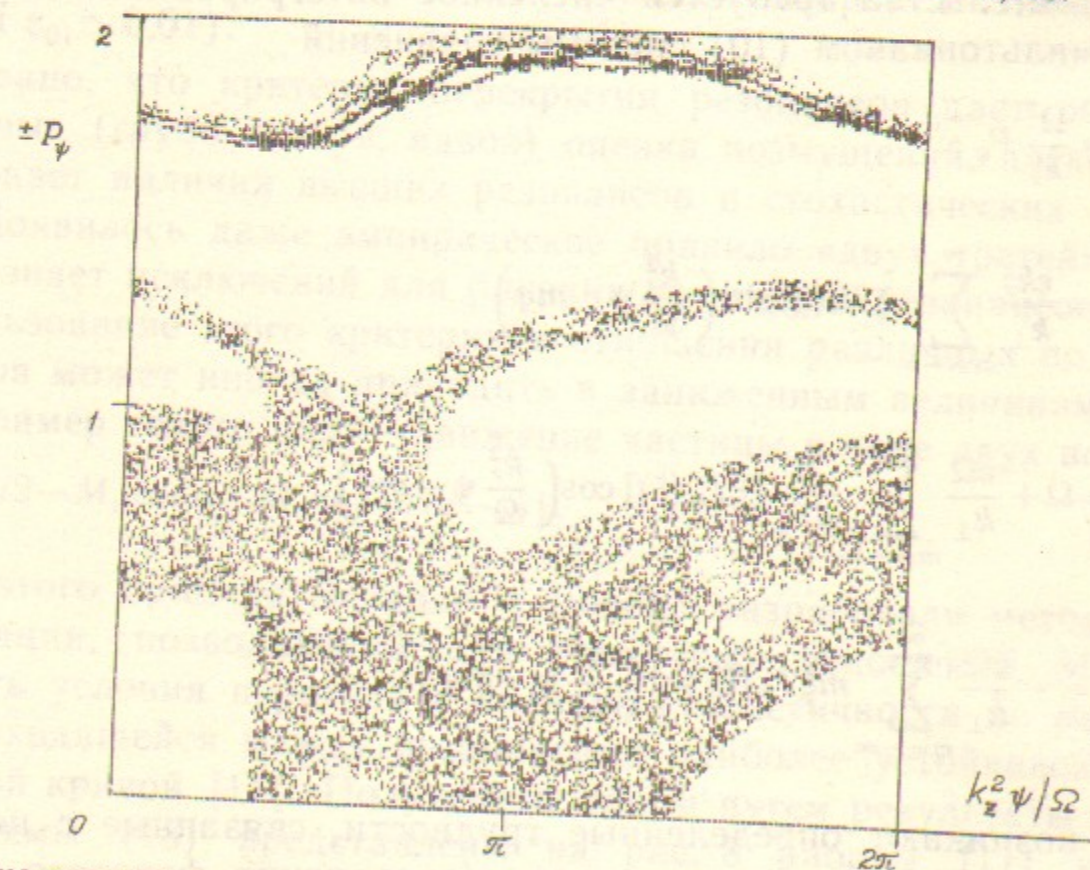


Рис. 2. Следы встречи с поверхностью сечения  $E_S = 0,05611$ ,  $\varphi_S = \pi/2$  двух траекторий; численное моделирование. Начальные условия нижней траектории выбраны вблизи седловой точки ( $k_z^2 \psi / \Omega = \pi$ ,  $P_\psi = 0$ ) черенковского резонанса, число встреч около  $10^4$ . Верхняя траектория стартовала в стохастическом слое циклотронного резонанса  $m = 2$ , число встреч около  $5 \times 10^3$ . Амплитуда волны  $\varepsilon = 0,025$ .

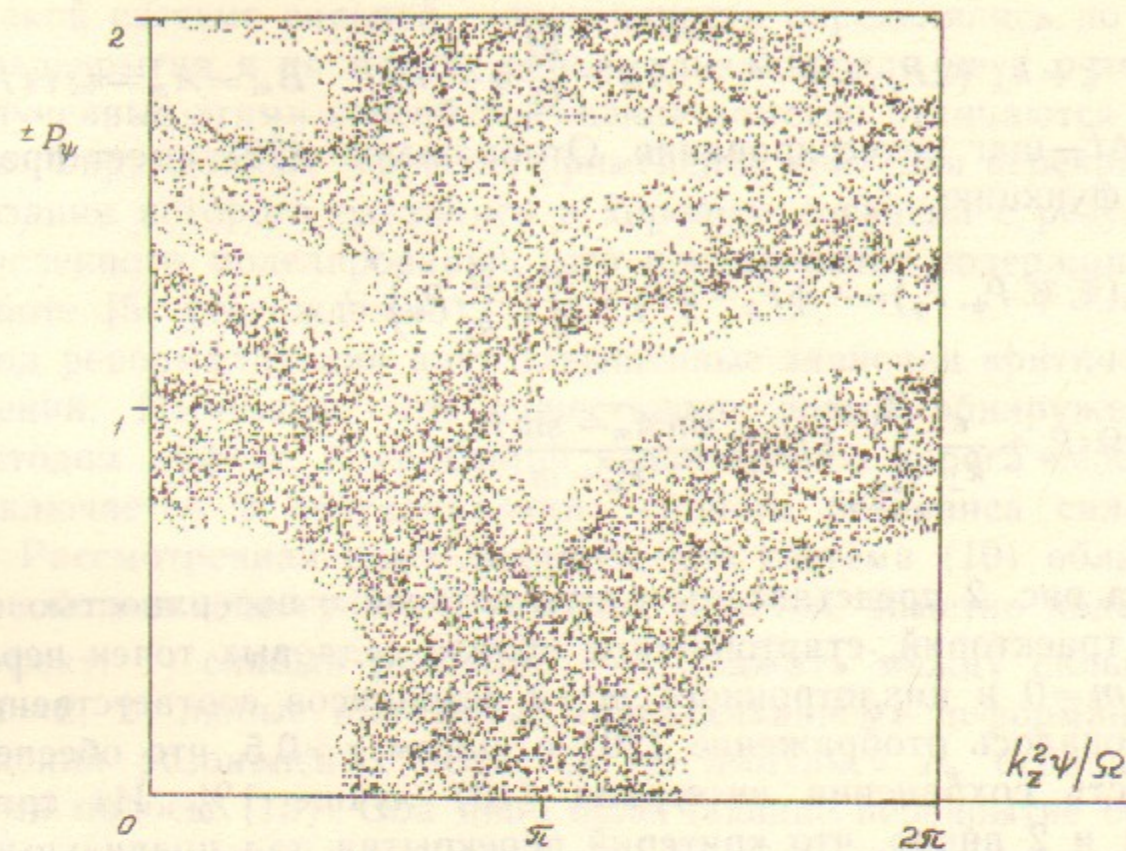


Рис. 3. Следы встречи с поверхностью сечения  $E_S = 0,05611$ ,  $\varphi_S = \pi/2$  одной траектории с начальными условиями вблизи седловой точки черенковского резонанса; численное моделирование. Число встреч около  $10^4$ , амплитуда волны  $\varepsilon = 0,035$ .

В работе [12] предложен способ интегрирования гамильтоновых уравнений, сводящийся к многократному выполнению неявного канонического отображения  $(\psi, P_\psi; \varphi, P_\varphi; t) \rightarrow (\bar{\psi}, \bar{P}_\psi; \bar{\varphi}, \bar{P}_\varphi; t + \Delta t)$ . Такое отображение, построенное по рекомендациям этой работы и отвечающее системе (19), имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \psi + \frac{\Omega^2}{k_z^2} \tau P_\psi + \frac{\varepsilon}{k_\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi J'_m(\xi) \frac{\sin B_m - \sin A_m + \Omega \tau (P_\psi - m) \cos B_m}{(P_\psi - m)^2}, \\ \bar{P}_\psi &= P_\psi - \frac{\varepsilon k_z^2}{\Omega k_\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi J'_m(\xi) \frac{\cos A_m - \cos B_m}{P_\psi - m}, \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \Omega \tau + \frac{\varepsilon}{k_\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dP_\psi} [\xi J'_m(\xi)] \frac{\sin A_m - \sin B_m}{P_\psi - m}, \\ \bar{P}_\varphi &= P_\varphi + \frac{\varepsilon}{k_\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \xi J'_m(\xi) \frac{\cos A_m - \cos B_m}{P_\psi - m}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\xi = k_{\perp} (2P_{\psi} / \Omega)^{1/2}$ ,  $A_m = \frac{k_z^2}{\Omega} \bar{\psi} - m\bar{\varphi}$ ,  $B_m = A_m - \Omega\tau(P_{\psi} - m)$ ,  $\tau = \omega\Delta t$  — шаг интегрирования. Отображение (20) имеет производящую функцию

$$F_3(\bar{\psi}, \bar{\varphi}, P_{\psi}, P_{\varphi}) = -\bar{\psi}P_{\psi} - \bar{\varphi}P_{\varphi} + \frac{\tau}{2} \left( \frac{\Omega}{k_z} P_{\psi} \right)^2 + \\ + \Omega\tau P_{\varphi} + \frac{\varepsilon}{k_{\perp}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi J'_m(\xi) \frac{\sin A_m - \sin B_m}{P_{\psi} - m}.$$

На рис. 2 представлены следы встречи с поверхностью сечения двух траекторий, стартовавших вблизи седловых точек черенковского  $m=0$  и циклотронного  $m=2$  резонансов соответственно. Использовалось отображение (20) с шагом  $\tau=0,5$ , что обеспечивало точность сохранения интеграла (10) лучше 1%. Из сравнения рис. 1 и 2 видно, что критерий перекрытия дал правильный прогноз: нижняя траектория блуждает по объединившимся стохастическим слоям резонансов  $m=0; \pm 1$ , в то время как верхняя не покидает «своего» резонанса  $m=2$ . Заметим, что такая же картина наблюдалась на экране дисплея (фотографиями с которого являются рис. 1, 2 и 3) при уменьшении амплитуды волны вплоть до  $\varepsilon=0,022$ .

С помощью формулы (14) и дополнительных соотношений вида (16), (17) нетрудно установить, что касание сепаратрис  $l=\pm 1$  и  $l=\pm 2$  наступает при возрастании амплитуды волны до значения  $\varepsilon_{12} \simeq 0,035$  в точках с импульсом  $P_{\psi}^* \simeq \pm 1,47$ . Это соответствует условию установления глобальной стохастичности, так как перекрыты оказываются все пять первичных резонансов, расположенных в доступной системе (10) области фазового пространства. Численный счет подтверждает и это предсказание критерия перекрытия: на рис. 3 показаны следы встречи с поверхностью сечения единственной траектории, стартовавшей возле седловой точки ( $k_z^2\psi/\Omega = \pi$ ;  $P_{\psi} = 0$ ) черенковского резонанса.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение взаимодействия частицы с медленной электромагнитной волной сводится к исследованию автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы [1, 2, 3]. Условия возникнове-

ния в такой системе сильной стохастичности определялись по критерию перекрытия и по методу ренормализации для двух резонансов; полученные этими способами оценки заметно отличаются друг от друга. Оправданным является применение критерия перекрытия, предсказания которого оказались в хорошем согласии с результатами численного моделирования (что противоречит содержащемуся в работе [5] утверждению).

Метод ренормализации дает завышенные значения критических возмущений. Напомним, что существенно новый обнаруженный этим методом эффект, приводящий к повышению порога перекрытия, заключается в «отталкивании» слабого резонанса сильным [7, 11]. Рассмотренная нами динамическая система (10) обладает двумя свойствами, могущими, как нам кажется, заметно подавить этот эффект: 1) слабый резонанс  $l=1$  «зажат» между сильными  $l=0$  и  $l=2$ ; 2) любые вызванные «отталкиванием» деформации и перемещения резонансных областей по импульсу  $P_{\psi}$  ограничены пределами полосы (15). Оба явно облегчающие перекрытие обстоятельства отсутствуют у положенной в основу метода ренормализации системы (18) и потому не отразились на результатах ее анализа.

Автор благодарен Б.В. Чирикову и В.И. Купчику за обсуждения и советы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Smith G.R., Kaufman A.N. Stochastic acceleration by an oblique propagating wave. An example of overlapping resonances.—Phys. Fluids, 1978, v.21, N 12, p.2230—2241.
2. Karney C.F.F., Bers A. Stochastic ion heating by perpendicularly propagating electrostatic wave.—Phys. Rev. Lett., 1977, v.39, p.550—557.
3. Шкляр Д.Р. Стохастическое движение релятивистских частиц в поле монохроматической волны.—ЖЭТФ, 1981, т.80, № 6, с.2272—2282.
4. Балакирев В.А., Буц В.А., Толстолужский А.П., Туркин Ю.А. Нерегулярное движение заряженной частицы в постоянном магнитном поле и в поле плоской электромагнитной волны.—ЖТФ, 1983, т.53, № 10, с.1922—1927.
5. Балакирев В.А., Буц В.А., Толстолужский А.П., Туркин Ю.А. Динамика движения осциллятора в поле медленной электромагнитной волны.—ЖТФ, 1985, т.55, № 4, с.641—648.
6. Chirikov B.V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems.—Phys. Rep., 1979, v.52, N 5, p.263—379.
7. Лухтенберг А., Либерман В. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984, 528с.
8. Dunnet D.A., Laing E.W., Taylor J.B. Invariants in the motion of a charged particle in a spatially modulated magnetic field.—J. Math. Phys., 1968, v.9, N 11, p.1819—1823.



9. *McNamara B.* Super-convergent adiabatic invariants with resonant denominators by Lie transform.—*J. Math. Phys.*, 1978, v.19, N 10, p.2154—2164.
10. *Вечеславов В.В.* Приближенные инварианты двумерных канонических отображений.—Препринт ИЯФ СО АН СССР 85-104, Новосибирск, 1985, 20с.
11. *Escande D.F., Doveil F.* Renormalization method for computing the threshold of large-scale stochastic instability in two degrees of freedom Hamiltonian system.—*J. Stat. Phys.*, 1981, v.26 N 2, p.257—284.
12. *Menyuk C.R.* Some properties of the discrete Hamiltonian method.—*Physica*, 1984, v.11D, N 1—2, p.109—129.

*В.В. Вечеславов*

**Резонансное взаимодействие  
заряженной частицы  
с медленной электромагнитной волной**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 28 января 1986 г.  
Подписано в печать 3.02 1986 г. МН 11651  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,7 печ.л., 1,4 уч.-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 32

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*