



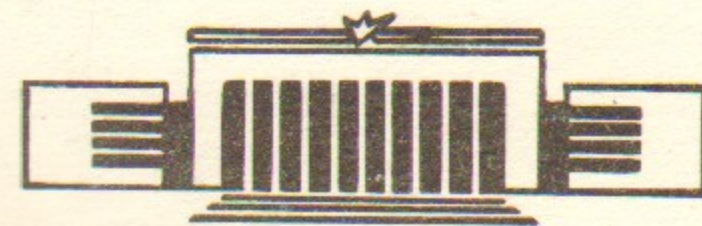
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

12

**В.В. Мирнов, О.А. Ткаченко**

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ  
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА  
В ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ**

**ПРЕПРИНТ 86-28**



**НОВОСИБИРСК**

**1986**

# THE ELECTROSTATIC POTENTIAL DISTRIBUTION IN GASDYNAMIC TRAP

V.V. Mirnov, O.A. Tkachenko

## ABSTRACT

The theory of the longitudinal losses from the mirror trap is developed within the limit of high mirror ratio, when one can consider that the «halves» of the ion and electron Maxwellian distributions are falling to the mirrors from the central part of the machine. The Knudsen regime of plasma flow through the mirrors is analyzed with taking into account the electrostatic potential distribution. The problem is complicated by the fact that the ion effective potential energy maximum value is reached not at the throat but inside the transient area between homogeneous magnetic field of the central part and the throat of the mirror. An approximate solution for the potential that takes into account this effect is found. It provides the accuracy about 3% within the interval  $0.1 < T_e/T_i < 3$ . The rates of the particle and energy losses are calculated and the continuity problem for the electrostatic potential distribution in the vicinity of the throat is discussed.

## АННОТАЦИЯ

Строится теория продольных потерь плазмы из пробкотрона с большим пробочным отношением, когда можно считать, что на пробку из ловушки падают «половинки» максвелловских распределений электронов и ионов. Анализируется кнудсеновский режим течения плазмы через пробку с учетом распределения электростатического потенциала. Обстоятельством, усложняющим количественное рассмотрение задачи, является то, что максимум эффективной потенциальной энергии движения ионов достигается не на срезе пробки, а в переходной области между однородным полем центральной части и срезом пробки. Найдено приближенное решение для электростатического потенциала, учитывающее этот эффект. Оно обеспечивает точность около 3% в диапазоне  $0.1 < T_e/T_i < 3$ . Вычислены скорости потерь частиц и энергии по электронному и ионному каналам. Обсуждается непрерывность распределения потенциала вблизи среза пробки.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Газодинамическая ловушка (ГДЛ) представляет собой пробкотрон с большим пробочным отношением  $k \sim 100$  и длиной  $L$ , такой что на одном пролете установки ионы успевают рассеяться на угол, много больший угла конуса потерь:

$$kL/\lambda \gg 1. \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина пробега по отношению к рассеянию на угол порядка единицы. При этом условии практически всюду в ловушке функция распределения ионов близка к максвелловской с заполненным конусом потерь.

Время жизни частиц оценивается по порядку величины отношением полного числа частиц в системе  $LSn$ , где  $S$  — сечение плазменного шнура, к потоку ионов  $nvS/k$ , вылетающих через пробки в единицу времени:

$$\tau \sim Lk/v_{Ti} \quad (2)$$

Для нахождения точных значений скоростей продольных потерь частиц и энергии необходимо количественное рассмотрение задачи о прохождении частиц через область сужающегося магнитного поля. Решение ее существенно зависит от распределения электростатического потенциала. Приближенные расчеты, учитывающие этот фактор, были выполнены в работе [1], где приведены результаты исследования двух режимов течения через пробку — бесстолкновительного и столкновительного. Цель настоящей работы состоит в

уточнении результатов, относящихся к бесстолкновительному режиму. Эти уточнения возникают при учете немонотонности эффективной потенциальной энергии ионов, определяющейся суммой магнитного и электростатического потенциалов (см. [1, 6]). Немонотонность проявляется в том, что максимум эффективной потенциальной энергии продольного движения ионов достигается не на срезе пробки, как это обычно считается при грубом рассмотрении, а внутри переходного участка, соединяющего центральную часть ловушки с пробкой. В результате оказывается, что имеется заметное число ионов, которые по формальному признаку выполнения законов сохранения в исходной и конечной точках могут достичь пробки, но фактически туда не попадают, отражаясь от расположенного на их пути горба потенциала. Этот эффект приводит к уменьшению плотности плазмы в пробке и, соответственно, росту потенциала, что несколько меняет скорости потерь частиц и энергии по сравнению со значениями, полученными в [1].

В настоящей работе предлагается способ расчета параметров ионного и электронного потоков, учитывающий эти эффекты и обеспечивающий сравнительно высокую точность расчетов (около 3%) в интересном для приложений диапазоне отношений электронной и ионной температур ( $T_e/T_i \lesssim 3$ ). Получены уточненные значения скоростей потерь частиц и энергии, обсуждается вопрос о том, существуют ли скачки потенциала на срезе пробки ГДЛ, аналогичные тем, которые были обнаружены Л.С. Пеккером [2] в задаче о распределении потенциала в тепловых барьерах амбиполярной ловушки. Приводятся аргументы в пользу отсутствия подобных эффектов в ГДЛ, что связано с предускорением ионов на переходном участке до среза пробки.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Придерживаясь схемы, принятой в [1], будем считать, что ловушка состоит из длинного центрального соленоида с однородным магнитным полем, соединенного с пробками относительно короткими переходными участками, имеющими длину  $l_m$  (см. рис. 1, а). Предполагается, что на центральном участке сосредоточена инжекция нейтралов, поддерживающая в плазме стационарное состояние. Вылетающая из ловушки плазма расширяется в запробочной области и поглощается условной стенкой, относительно которой предполагается, что она поглощает все частицы (электроны и

ионы), достигающие ее поверхности. На переходных участках напряженность магнитного поля меняется от величины  $H_{\min}$ , соответствующей полю в центральной части ловушки, до значения  $H_{\max}$  в пробке и далее спадает, убывая до значения  $H_w$  на поглощающей стенке.

Поддержание в каждой точке ловушки квазинейтральности и равенства потоков уходящих из системы электронов и ионов осуществляется за счет электростатического потенциала. Возникающее при этом электрическое поле ускоряет вылетающие ионы и тормозит электроны. Прежде чем переходить к точным расчетам, рассмотрим картину распределения потенциала качественно.

Если считать потенциал на стенке равным нулю, то всюду в ловушке он положителен и монотонно спадает от центра к краю. При этом на участке однородного поля потенциал постоянен, испытывает перепад порядка  $T_e$  на масштабе от начала переходного участка до среза пробки, а профиль его в расширителе зависит от режима удержания электронов в этой области. Если предполагать, что столкновения при пролете через расширитель происходят так редко, что за рассматриваемые времена там нет заметного накопления запертых электронов, то в этом случае потенциал за пробкой практически постоянен и лишь в узком дебаевском слое на стенке испытывает скачкообразное падение до нуля. Величина дебаевского скачка подбирается такой, чтобы выполнялось равенство потоков электронов и ионов:

$$\Delta\varphi_d \sim \frac{T_e}{e} \ln \left( \frac{n_{Te}}{v_{Ti}} \right) \quad (3)$$

Соответственно, с точностью до величины порядка  $T_e$  такое же значение имеет потенциал плазмы в центральной части ловушки.

Противоположный случай, когда в результате кулоновских столкновений в расширителе успевает накопиться большое количество запертых электронов, обсуждался в работе [3]. В этом режиме полный перепад потенциала в расширителе оказывается примерно таким же, как и в случае редких столкновений. Отличие двух режимов проявляется лишь в разных формах распределения потенциала. В режиме частых столкновений при больших степенях расширения он локализован не в узком дебаевском слое на поглощающей стенке, а в некоторой протяженной области внутри расширителя. Качественно распределения потенциалов для этих двух случаев изображены на рис. 1, б.

Независимо от того, какой из режимов реализуется, большая

часть электронов оказывается запертой в потенциальной яме, глубина которой в 4–5 раз превышает среднюю энергию частиц. В этих условиях время их жизни, равное времени жизни ионов, ока-

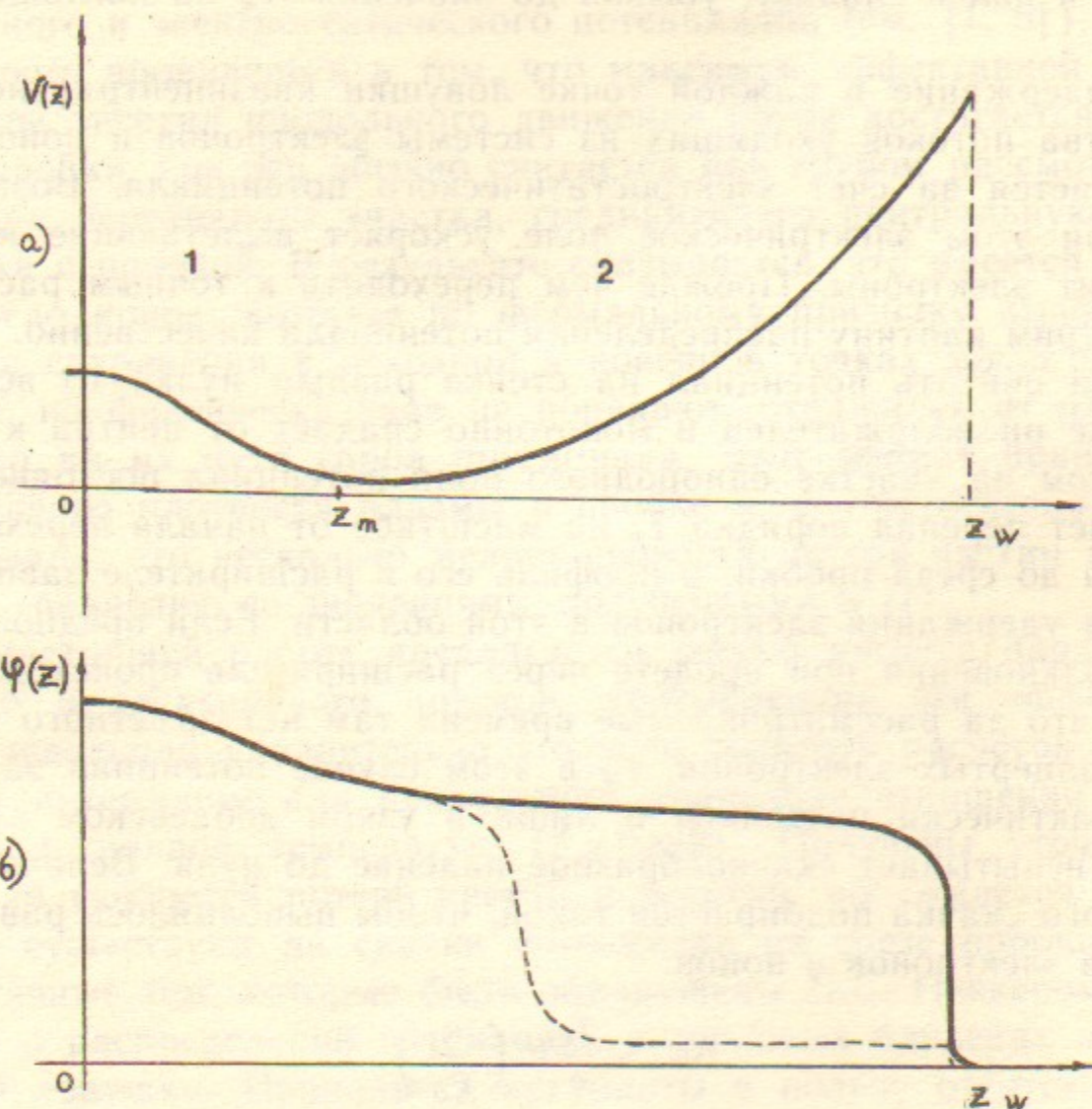


Рис. 1, а—профиль силовой линии ГДЛ: 1—переходный участок, 2—область расширителя; б—примерная зависимость потенциала  $\varphi(z)$ : пунктирная кривая соответствует накоплению запертых в расширителе электронов.

зывается намного больше времени максвеллизации электронной функции распределения, поэтому можно считать, что для электронов вдоль силовых линий устанавливается больцмановское распределение:

$$n_e = n_0 \exp(-U/T_e) \quad (4)$$

Здесь вместо потенциала введена более удобная характеристика—потенциальная энергия электронов  $U = e(\varphi(0) - \varphi(z))$ . Координата  $z$  отсчитывается от начала переходного участка (пробке соответствует значение  $z_m = l_m$ ), значение  $U$  в точке  $z=0$  равно нулю, значения  $U$  на срезе пробки и на поглощающей стенке обоз-

начены соответственно через  $U_m$  и  $U_w$ ,  $n_0$ —значение плотности плазмы при  $z=0$ .

Как отмечалось выше, при выполнении условия (1) функцию распределения ионов в ловушке можно считать максвелловской. Строго говоря, это утверждение справедливо только для «половинки» максвелловского распределения, падающей на пробку. Действительно, вблизи пробки функция распределения ионов, летящих от пробки к центру ловушки ( $v_z < 0$ ), не является максвелловской; среди этих ионов отсутствуют частицы, покинувшие ловушку. Соответственно, при  $v_z < 0$  в фазовом пространстве имеется незаполненная область, где функция распределения равна нулю. Эта область заполняется, очевидно, на расстоянии  $\lambda$  от пробки. Мы будем предполагать, что длина переходного участка мала по сравнению с этим масштабом и, соответственно, считать, что движение ионов через пробку происходит без столкновений.

Бесстолкновительная функция распределения зависит только от интегралов движения:

$$\frac{m_i v^2}{2} - U(z) = \frac{m_i v_0^2}{2}, \quad \frac{v_z^2}{H(z)} = \frac{v_{z0}^2}{H_{\min}} \quad (5)$$

индексом 0 отмечены значения скоростей в точке  $z=0$ . Учитывая, что на пробку падает «половинка» максвелловского распределения, можно найти функцию распределения этой «половинки» в любой точке силовой линии:

$$f_i = n \left( \frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{3/2} e^{U/T_i} \exp\left(-\frac{m_i v^2}{2T_i}\right) \quad (6)$$

Следует отметить, что, поскольку потенциал  $U$ —ускоряющий, функция распределения (6) отлична от нуля не во всем полупространстве  $v_z \geq 0$ , а лишь при достаточно больших значениях  $v_z$ . Что касается исходной точки  $z=0$ , то, поскольку на прилегающем к ней слева участке однородного поля изменение плотности и, соответственно, перепад потенциала малы по параметру  $k^{-1}$ , можно не учитывать проявлений этого эффекта в точке  $z=0$  и считать, что здесь выражение (6) справедливо при всех  $v_z$ .

Функция распределения в области  $v_z < 0$  формируется за счет отраженных частиц. Нормировочная константа  $n$  в формуле (6) должна выбираться таким образом, чтобы плотность в точке  $z=0$  с учетом падающих и отраженных частиц совпадала со значением  $n_0$ , введенным в формуле (4).

### 3. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА

Граница области, занятой ионами в пространстве скоростей, меняется с координатой  $z$ . Для отыскания ее удобно ввести эффективную потенциальную энергию продольного движения

$$U_{eff}(z, v_{\perp 0}) = \frac{m_i v_{\perp 0}^2}{2} \left( \frac{H(z)}{H_{min}} - 1 \right) - U(z), \quad (7)$$

так что

$$\frac{m_i v_z^2}{2} + U_{eff} = \frac{m_i v_{z0}^2}{2}. \quad (8)$$

Эффективная потенциальная энергия определяется суммой двух слагаемых; первое описывает замедление продольного движения в нарастающем магнитном поле, второе — ускорение ионов в электростатическом потенциале. Поскольку действия этих факторов противоположны, результирующий эффект оказывается очень чувствительным к форме функции  $U(z)$ .

Чтобы составить предварительное представление о профиле  $U(z)$ , рассмотрим предельный случай  $T_e \ll T_i$ . В нулевом приближении по этому параметру можно пренебречь влиянием электростатического потенциала на движение ионов. Тогда их функция распределения задается выражением (6) во всем пространстве скоростей за исключением обращенного в сторону ловушки конуса с углом раствора  $\sin^2 \theta = h(z)$ , внутри которого функция распределения равна нулю. Здесь через  $h(z)$  обозначена напряженность магнитного поля, отнесенная к величине  $H_{max}$ .

Интегрируя (6) по этой области, нетрудно получить выражение для плотности ионов, после подстановки которого в (4) находим в первом приближении по  $T_e/T_i$  распределение электростатического потенциала:

$$U = T_e \ln \frac{1 + \sqrt{1-k^{-1}}}{1 + \sqrt{1-h}}. \quad (9)$$

Используя (9), проанализируем зависимость  $U_{eff}(z)$  при различных значениях  $v_{\perp 0}$ . Так как зависимость от координаты входит в (9) в виде комбинации  $h(z)$ , можно рассматривать  $U_{eff}$  как функцию параметра  $h$ , изменяющегося в пределах  $k^{-1} \leq h \leq 1$ . Чтобы эти пределы не зависели от пробочного отношения, перейдем к более удобной характеристике  $\xi = (kh-1)/(k-1)$ , значения которой меняются в диапазоне  $0 \leq \xi \leq 1$ . Уравнение для экстремумов  $U_{eff}(\xi)$

определяется соотношением:

$$\frac{m_i v_{\perp 0}^2}{2} = \frac{1}{k-1} \frac{dU}{d\xi} \quad (10)$$

Для профиля (9) оно предсказывает существование максимума, если значение  $v_{\perp 0}$  достаточно велико ( $v_{\perp 0} > v_{\perp 0}^* = \sqrt{T_e/2m_i k}$ ). Максимум достигается в некоторой точке  $\xi'(v_{\perp 0})$ , координата  $z$  которой монотонно растет по мере увеличения  $v_{\perp 0}$  от значения  $z=0$  (при  $v_{\perp 0} = v_{\perp 0}^*$ ) до значения  $z=z_m$  (при  $v_{\perp 0} = +\infty$ ). В диапазоне  $v_{\perp 0} < v_{\perp 0}^*$  функция  $U_{eff}(z)$  не имеет экстремумов внутри переходного участка и монотонно убывает с координатой  $z$ . Примерная зависимость  $U_{eff}$  от  $z$  для ряда значений  $v_{\perp 0}$  представлена на рис. 2.

Переходя к задаче о распределении потенциала при конечных значениях  $T = T_e/T_i$ , будем считать, что подлежащая определению функция  $U(\xi)$  ведет себя подобно (9). Точнее предполагается, что обращаясь в нуль в начале переходного участка, она далее монотонно растет, а первая  $U' = dU/d\xi$  и вторая  $U'' = d^2U/d\xi^2$  производные в этой области положительны и имеют особенности (стремятся к плюс бесконечности) при подходе к пробке слева. В этом случае семейство кривых  $U_{eff}(v_{\perp 0}, z)$  выглядит аналогично представленным на рис. 2.

Анализируя изменение кривой  $U_{eff}(z)$  по мере увеличения параметра  $v_{\perp 0}$ , найдем границы области в пространстве скоростей, где функция распределения отлична от нуля. Построение проведем для некоторой точки переходного участка, положение которой на силовой линии фиксируется значением параметра  $\xi$ . В диапазоне малых поперечных скоростей:

$$v_{\perp 0} < v_{\perp 0}^* = \sqrt{U'(\xi)/(k-1)} \quad (12)$$

функция  $U_{eff}(\xi)$  отрицательна и монотонно убывает. Соответственно, летящие из ловушки ионы имеют в точке  $\xi$  продольные скорости в интервале:

$$\sqrt{-U_{eff}(\xi, v_{\perp 0})} \leq v_z \leq +\infty \quad (13)$$

а отраженные частицы отсутствуют. В этих формулах скорости нормированы на  $(2T_i/m_i)^{1/2}$ , а потенциал на  $T_i$ . С переходом к скоростям  $v_{\perp 0} > v_{\perp 0}^*$  на кривой  $U_{eff}(\xi)$  в точке  $\xi'(v_{\perp 0})$  появляется максимум, положение которого в зависимости от параметра  $v_{\perp 0}$  определяется уравнением (10). Так как по предположению  $U'' > 0$ ,

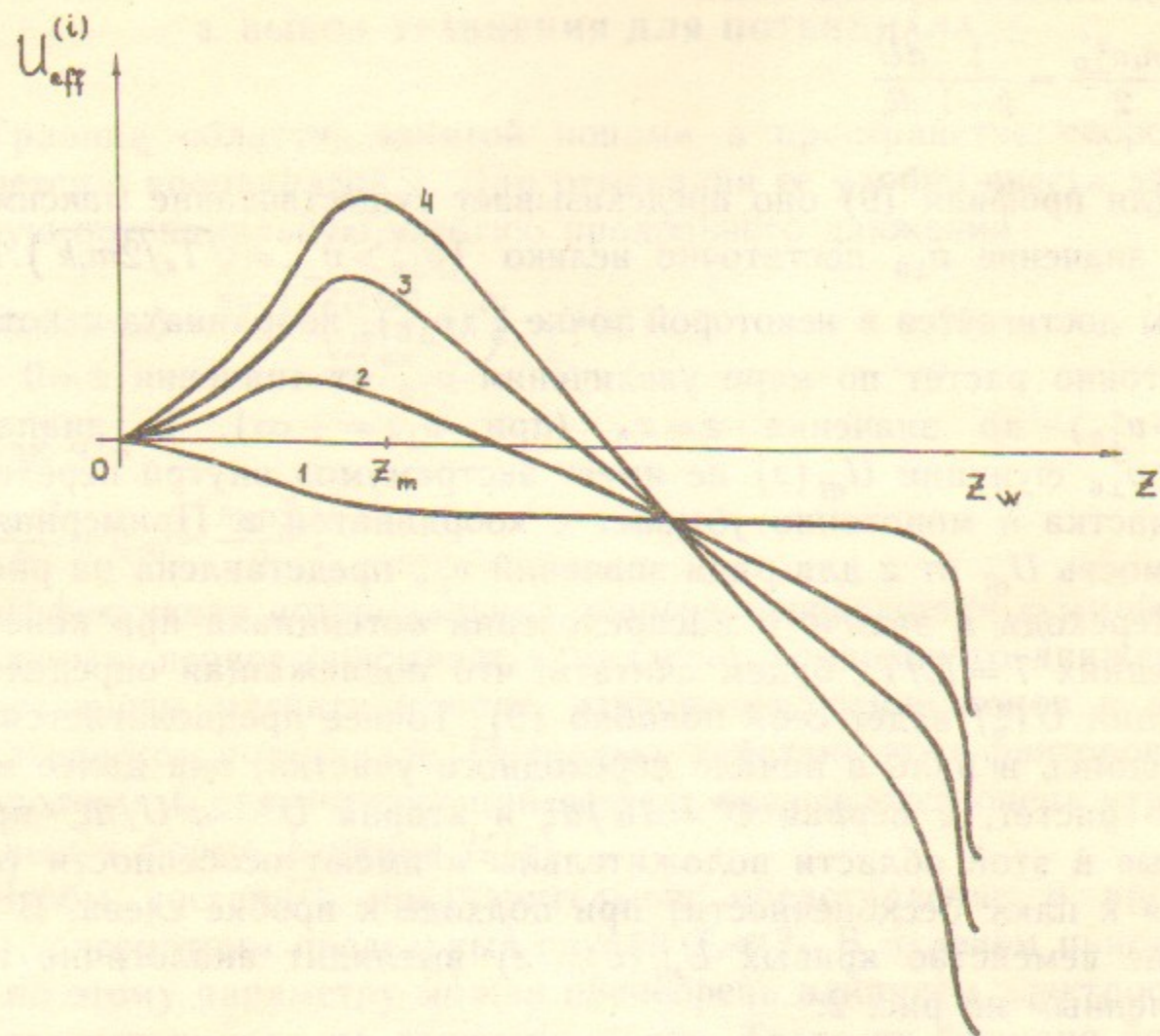


Рис. 2. Зависимость от  $z$  эффективной потенциальной энергии продольного движения ионов; кривые пронумерованы в порядке возрастания  $v_{\perp 0}$ .

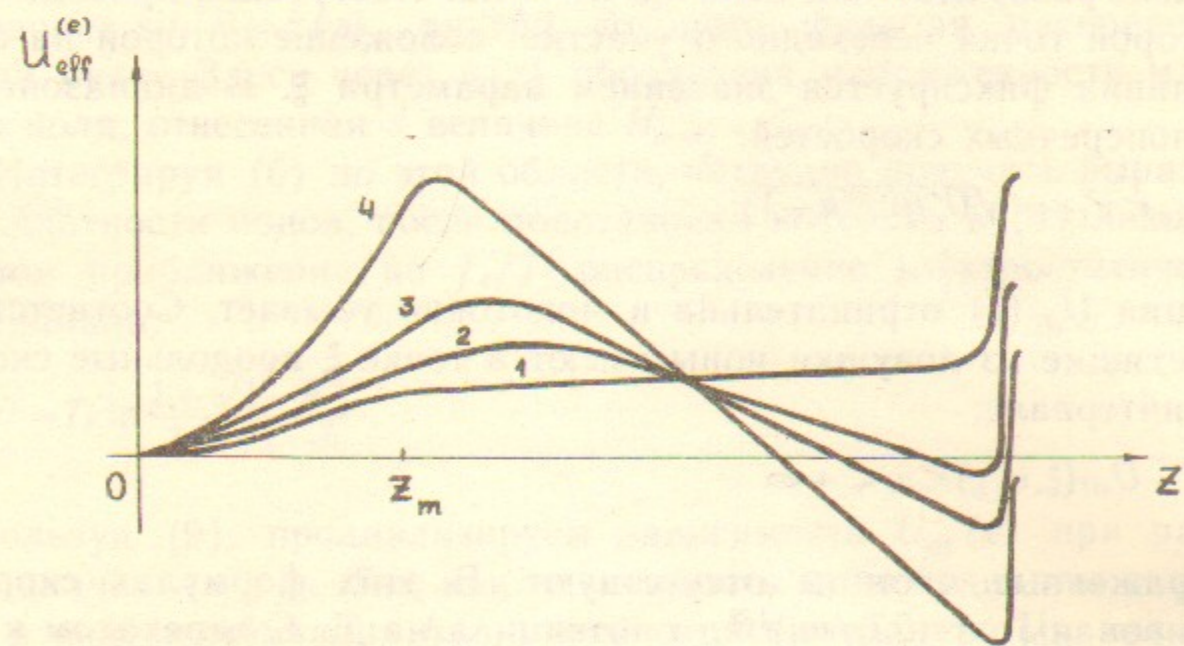


Рис. 3. Зависимость от  $z$  эффективной потенциальной энергии продольного движения электронов; кривые пронумерованы в порядке возрастания  $v_{\perp 0}$ .

функция  $\xi'(v_{\perp 0})$  монотонно растет с ростом  $v_{\perp 0}$ , причем  $\xi'(v_{\perp 0}^*) = 0$ ,  $\xi'(\infty) = 1$ . Если значение  $v_{\perp 0}$  таково, что точка  $\xi'$  расположена слева от точки  $\xi$ , то отраженных частиц нет, и область интегрирования по продольным скоростям определяется соотношением:

$$\sqrt{U_{eff}[v_{\perp 0}, \xi'(v_{\perp 0})] - U_{eff}(v_{\perp 0}, \xi)} \leq v_z \leq +\infty$$

Если же значения  $v_{\perp 0}$  достаточно велики, так что максимум смещается вправо от точки  $\xi$ , то появляются отраженные частицы и граница переходит в область отрицательных значений:

$$-\sqrt{U_{eff}[v_{\perp 0}, \xi'(v_{\perp 0})] - U_{eff}(v_{\perp 0}, \xi)} \leq v_z \leq +\infty$$

Объединяя два последних выражения и используя (10), можно записать уравнение границы с помощью одной формулы:

$$\text{sign}(\xi - \xi') \sqrt{(\xi' - \xi) U'(\xi') + U(\xi) - U(\xi')} \leq v_z \leq +\infty \quad (14)$$

Плотность ионов определяется интегралом от функции (6) по области, занятой частицами:

$$\frac{n_i}{n} = e^U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} e^{-v_{\perp}^2} \int_{v_z(v_{\perp})}^{\infty} e^{-v_z^2} dv_z \quad (15)$$

где через  $v_z^*(v_{\perp})$  обозначена функция, объединяющая найденные выше зависимости (13) и (14). Проводя в (15) интегрирование по частям, можно свести двойной интеграл к одинарному. Если перейти от переменной интегрирования  $v_{\perp}$  к переменной  $v_{\perp 0}$  и далее, используя связь (10), к переменной  $\xi'$ , то выражение для  $n_i$  записывается в сравнительно компактной форме:

$$\frac{n_i}{n} = e^U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{U}}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} F(\xi, \xi') d\xi' + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^1 F(\xi, \xi') d\xi' \quad (16)$$

где ядро  $F(\xi, \xi')$  имеет вид:

$$F = e^{U(\xi') - \xi' U'(\xi')} [(\xi' - \xi) U'(\xi') + U(\xi) - U(\xi')]^{1/2} \xi' U''(\xi') \quad (17)$$

В этих формулах опущены малые по параметру  $k^{-1}$  слагаемые. Подробное описание вывода (16), (17) приводится в Приложении 1.

Первое слагаемое в (16), локально зависящее от  $U(\xi)$ , даёт в пробке то же значение плотности ионов, что и выражение, используемое в работе [1], где пренебрегалось эффектами немонотонности. Второе и третье слагаемые носят нелокальный характер. Если рассмотреть их значения в пробке, то третье слагаемое обращается в нуль, а второе показывает, какое изменение плотности возникает при учете эффектов немонотонности. Так как это слагаемое всегда отрицательно, плотность ионов в пробке уменьшается и, соответственно, потенциал увеличивается по сравнению со значениями, найденными в [1].

Чтобы описать эти эффекты количественно, необходимо знать распределение электростатического потенциала на всем переходном участке. Оно определяется уравнением квазинейтральности (4). Нормировочная константа  $n$  в формуле (16) должна выбираться равной  $n_0$ . Действительно, форма ядра такова, что независимо от профиля потенциала значение  $F(\xi, \xi')$  в точке  $\xi=0$  представляется в виде:

$$F d\xi' = e^{-g} \sqrt{g} dg$$

где  $g = \xi' U'(\xi') - U(\xi')$  (напомним, что  $U(0) = 0$ ). В этом случае третий интеграл в (16) вычисляется точно и равен  $1/2$ . В сумме с первым интегралом он даёт единицу, откуда следует, что значение  $n$  должно совпадать с  $n_0$ . Принимая это во внимание, сформулируем уравнение для  $U(\xi)$ :

$$e^{-U/T} = e^U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{U}}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} F(\xi, \xi') d\xi' + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^1 F(\xi, \xi') d\xi' \quad (17')$$

Аналитически его решить не удастся, но результаты численных расчетов показывают, что вплоть до значений  $T \lesssim 3$  решение с хорошей точностью (около 3%) аппроксимируется функцией (9). Для иллюстрации этого утверждения приведем результаты прямой подстановки (9) в (18). Интегралы, входящие в (18), преобразовывались к удобным переменным (см. Приложение 1.), находились численно, и далее определялась относительная разность  $\Delta_0 = \frac{n_i}{n_e} - 1$  правой и левой частей (18) для ряда значений  $\xi$  и  $T$ . Полученные значения  $\Delta_0$  (в процентах) приведены в таблице 1.

Таблица 1 ( $\Delta_0$  %)

$T \backslash \xi$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.01	-0.01	-0.01	-0.03	-0.04	-0.05	-0.07	-0.09	-0.12	-0.16	-0.22
0.1	-0.04	-0.09	-0.15	-0.22	-0.29	-0.38	-0.50	-0.64	-0.85	-1.50
0.5	-0.02	-0.08	-0.17	-0.28	-0.43	-0.61	-0.84	-1.15	-1.62	-3.12
1.0	0.12	0.16	0.15	0.10	0.007	-0.14	-0.36	-0.68	-1.20	-2.98
2.0	0.54	0.89	1.14	1.32	1.42	1.44	1.38	1.20	0.79	-0.98
5.0	2.09	3.54	4.69	5.64	6.44	7.10	7.64	8.02	8.17	7.30

#### 4. СКОРОСТИ ПОТЕРЬ ЧАСТИЦ И ЭНЕРГИИ

Плотность потока ионов в некоторой точке  $\xi$  переходного участка определяется интегралом:

$$q_i = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{T_i}{m_i}} e^U \int_0^{\infty} dv_{\perp}^2 e^{-v_{\perp}^2} \int_{v_{\perp}(v_{\perp})}^{\infty} e^{-v_{\parallel}^2} dv_{\parallel}^2 \quad (18)$$

Область интегрирования задается теми же формулами (13), (14), что и при нахождении распределения плотности ионов. После ряда преобразований, описанных в Приложении 2, выражение (18) представляется в виде:

$$q_i = q_{0i} \xi F_1(T) \quad (19)$$

где нормировочный фактор  $q_{0i} = n_0 \sqrt{T_i/2\pi m_i}$ , а функция  $F_1(T)$  определяется интегралом:

$$F_1(T) = \int_0^1 d\xi' \xi' U'(\xi') U''(\xi') e^{U(\xi') - \xi' U'(\xi')} \quad (20)$$

Наличие множителя  $\xi$  связано с геометрией силовых линий магнитного поля. Он обеспечивает постоянство по длине переходного

участка полного потока плазмы, протекающего внутри магнитной поверхности. Зависимость плотности потока ионов от параметра  $T$  описывается интегралом (20). Найдем эту функцию, используя приближенное решение (9). В пределе малых ( $T \ll 1$ ) и больших ( $T \gg 1$ ) значений аргумента она представляется аналитически (см. Приложение 2):

$$F_1 = \begin{cases} 1 + T \ln 2 & T \ll 1 \\ T/4 & T \gg 1 \end{cases} \quad (21)$$

Значения в области промежуточных  $T$  находились численно и приведены в таблице 2. Отметим, что результаты, относящиеся к большим значениям  $T$ , ненадежны из-за ухудшения точности приближенного решения (9). Этот предельный случай холодных ионов эквивалентен гидродинамическому режиму, для которого из [1] следует асимптотика  $F_1 = \sqrt{2\pi T/e}$ .

Поток энергии, уносимый ионной компонентой, определяется интегралом:

$$Q_i = q_{0i} T_i e^U \int_0^\infty dv_\perp^2 e^{-v_\perp^2} \int_{v_i}^\infty dv_z^2 e^{-v_z^2} (v_z^2 + v_\perp^2) \quad (22)$$

Проводя интегрирование по частям и переходя от переменной  $v_\perp$  к  $\xi'$  (см. Приложение 2), его можно преобразовать к виду:

$$Q_i = q_{0i} T_i \xi [2F_1 - F_2] + q_i T_i U(\xi), \quad (23)$$

где

$$F_2 = \int_0^1 U''(\xi') U(\xi') \exp[U(\xi') - \xi' U'(\xi')] d\xi'.$$

Так же как и в формуле (19), множитель  $\xi$  компенсирует изменение сечения магнитной поверхности. Слагаемое, пропорциональное  $U(\xi)$ , соответствует изменению потока энергии за счет ускорения ионов в электростатическом потенциале. Как будет показано ниже, в выражении для полного потока энергии, уносимого электронной и ионной компонентами, это слагаемое сокращается с соответствующим членом от электронного вклада, поэтому полный поток энергии внутри магнитной трубки постоянен вдоль силовой линии. Найдем теперь, оставляя в (23) только те слагаемые, которые дают вклад в полный поток (это соответствует значению  $Q_i$ , отнесен-

ному к началу переходного участка), какое количество энергии  $\kappa_i = Q_i/q_i T_i$  (в единицах  $T_i$ ) выносится из системы с одним ионом. Асимптотические по  $T$  выражения для  $\kappa_i$  имеют вид:

$$\kappa_i = \begin{cases} 2 - T \ln 2 & T \ll 1 \\ 1 & T \gg 1 \end{cases} \quad (24)$$

Значения  $\kappa_i$  в промежуточной области  $T$  находились с помощью численного интегрирования. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2

$T$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$F_1$	1.06	1.12	1.18	1.23	1.28	1.33	1.38	1.43	1.48	1.53
$\kappa_i$	1.94	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.75	1.73	1.71	1.70
$T$	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0	7.0	10.0	$\infty$
$F_1$	1.75	1.96	2.17	2.36	2.56	2.75	3.12	3.82	4.84	$\sqrt{2\pi T/e}$
$\kappa_i$	1.63	1.58	1.54	1.50	1.48	1.45	1.42	1.36	1.31	—

Проанализируем теперь, какие потоки энергии выносятся из системы электронной компонентой плазмы. В отличие от ионов большая часть электронов, вылетающих из ловушки в расширитель, возвращается обратно после отражения от дебаевского слоя на поглощающей поверхности. Потери электронов связаны с высокоэнергетичным «хвостом» функции распределения, способным преодолеть тормозящий потенциал. При нахождении скоростей потерь будем исходить из того, что, как и в случае ионной компоненты, на пробку из центра ловушки падает «половинка» максвелловского распределения. С точностью до знака потенциала функция распределения этой «половинки» меняется вдоль силовой линии в соответствии с формулой (6). Граница области в пространстве скоростей, где электронная функция распределения отлична от нуля, может быть найдена из выражения для эффективной потенциальной энергии электронов:

$$U_{eff}(z, v_{10}) = v_{10}^2 (kh(z) - 1) + U(z) \quad (24')$$

В отличие от аналогичной формулы (7) для ионов здесь скорости нормированы на  $(2T_e/m_e)^{1/2}$ , изменен знак  $U(z)$ , значение его из-



меряется в единицах  $T_e$ , определение  $h(z)$  дано в разделе 3.

Как отмечалось выше, функция  $U(z)$  монотонно растет на переходном участке и в некоторой области за пробкой. В основном объеме расширителя она практически постоянна и испытывает скачок в дебаевском слое, достигая на поглощающей поверхности значения  $U_w \simeq 4 \div 5$ . Примерные зависимости  $U_{eff}(z)$  для электронов, соответствующие такому профилю потенциала, изображены на рис. 3 для нескольких значений  $v_{\perp 0}$ .

Примечательно, что если характеристики ионной компоненты на переходном участке зависят от распределения потенциала только на этом участке, то в аналогичные формулы для электронов входят значения потенциала как на переходном участке, так и в расширителе. Если рассматривать  $U(z)$  как функцию напряженности магнитного поля  $h(z)$ , то в каждой точке она будет иметь два значения, поскольку одной и той же напряженности поля в ловушке и расширителе соответствуют разные значения потенциала. Чтобы различать эти зависимости, мы будем использовать обозначение  $U(\xi)$  для переходного участка, а значение потенциала в за пробочной области обозначим через  $U(h)$ . Поскольку предполагается, что магнитное поле на поглощающей исчезающе мало ( $H_w \ll H_{min}$ ), будем считать, что  $h_w = 0$ . Таким образом, интервал изменений  $h$  в расширителе задается значениями  $0 \leq h \leq 1$ .

Представление о поведении  $U(h)$  в окрестности пробки можно получить, рассмотрев решение, соответствующее пределу низких электронных температур. В этом случае электростатический потенциал практически не влияет на движение ионов и их плотность в расширителе легко находится интегрированием (6) по объему конуса  $\sin^2 \theta = h(z)$ , обращенного в сторону расширителя, соответственно чему потенциал (нормированный на  $T_e$ ) равняется:

$$U(h) = \ln \frac{2}{1 - \sqrt{1-h}} \quad (25)$$

Отметим, что первая и вторая производные (25) отрицательны и стремятся при  $h \rightarrow 1$  к минус бесконечности.

Из (24') видно, что если значения  $v_{\perp 0}$  малы, то функция  $U_{eff}(z)$  не имеет максимумов во внутренних точках промежутка  $z_m \leq z \leq z_w$ . Ее максимальное значение достигается на поглощающей стенке и равно:

$$U_{eff}^{(w)} = U_w - v_{\perp 0}^2 \quad (27)$$

С ростом  $v_{\perp 0}$  на графике  $U_{eff}(z)$  появляется максимум во внутренней точке  $h'(v_{\perp 0})$ , положение которой меняется в зависимости от  $v_{\perp 0}$  согласно уравнению:

$$k v_{\perp 0}^2 = - \frac{dU}{dh} \quad (28)$$

До тех пор пока  $U_{eff}(h') < U_{eff}^{(w)}$ , наличие этого максимума не влияет на параметры электронной компоненты в точках переходного участка. По мере увеличения  $v_{\perp 0}$  значение  $U_{eff}(h')$  растет, в то время как  $U_{eff}^{(w)}$  уменьшается, поэтому при достаточно больших  $v_{\perp 0}$  соотношение между максимумами может измениться. Равенство их достигается при

$$\tilde{v}_{\perp 0} = \sqrt{\frac{U_w - U(h_0)}{k h_0}} \quad (29)$$

в точке  $h_0$ , положение которой определяется уравнением:

$$U(h_0) - h_0 U'(h_0) = U_w, \quad (30)$$

следующим из (28) и (29).

Найдем теперь границы области в пространстве скоростей, где электронная функция распределения отлична от нуля. Из рис. 3 видно, что при  $v_{\perp 0} < \tilde{v}_{\perp 0}$  эта граница задается соотношением:

$$- \sqrt{U_{eff}^{(w)} - U_{eff}(\xi)} \leq v_z \leq + \infty \quad (31)$$

а при  $v_{\perp 0} > \tilde{v}_{\perp 0}$  уравнение границы имеет вид:

$$- \sqrt{U_{eff}(h') - U_{eff}(\xi)} \leq v_z \leq + \infty \quad (32)$$

Потоки частиц и энергии электронной компоненты с точностью до замены масс, температур и знака  $U$  определяются теми же формулами (18), (22), что и для ионной компоненты. После вычисления соответствующих интегралов посредством разложения их по степеням разности  $1 - h_0 \ll 1$  получаем (см. Приложение 2.):

$$q_e = q_{0e} e^{-U_w} \xi \left[ \frac{U_w - U(h_0) + 1}{h_0} \right] \quad (33)$$

$$Q_e = T_e q_{0e} e^{-U_w} \xi \left[ \frac{U_w - U(h_0) + 1}{h_0} (1 + U_w) + \frac{1}{h_0} \right] - T_e q_e U(\xi) \quad (34)$$

В (34) выделено слагаемое, пропорциональное  $U(\xi)$ , которое при

суммировании электронного и ионного потоков энергии сокращается с аналогичным слагаемым от ионного вклада. Как и следовало ожидать, полный поток энергии, протекающий внутри магнитной поверхности, оказывается постоянным вдоль силовой линии. Вклад в него от электронов представляется первым слагаемым в (34). Отношение этого слагаемого к величине  $q_e T_e$  показывает, какое количество энергии  $\kappa_e$  (в единицах  $T_e$ ) выносится из системы с одним электроном. Для вычисления  $q_e$  и  $Q_e$  упростим выражения (33), (34), разложив их по степеням разности  $1-h_0$ , после чего  $q_e$  и  $Q_e$  становятся функциями только двух параметров  $U_m$  и  $U_w$ .

Если формально положить в (34)  $h_0=1$ , то результат в точности совпадет с полученным в работе [1] (с учетом того, что формулы этой работы относятся к значениям  $q_e$  и  $Q_e$  в точке  $\xi=1$ ). Корректное разложение (34) по малости  $1-h_0 \sim U_w^{-2}$  показывает (см. Приложение 2), что совпадают лишь старшие члены разложения, пропорциональные  $U_w^2$  и  $U_w$ , а следующие поправки, независимые от  $U_w$  оказываются различными. Результативно учет этих различий приводит лишь к очень незначительному изменению величины  $Q_e$  (порядка 1%), что выходит за рамки точности подхода, развиваемого в настоящей работе. Таким образом, потери частиц и энергии по электронному каналу с погрешностью менее одного процента можно находить по формулам (33), (34), полагая в них  $h_0=1$ ,  $U(h_0)=U_m$ .

Таблица 3

$T$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$U_w$	4.01	4.38	4.58	4.70	4.79	4.85	4.91	4.95	4.98	5.00
	4.59	4.96	5.15	5.27	5.35	5.42	5.47	5.50	5.54	5.56
$\kappa_e$	5.24	5.60	5.78	5.90	5.99	6.05	6.10	6.14	6.17	6.19
	5.80	6.15	6.33	6.45	6.53	6.59	6.64	6.68	6.71	6.73

$T$	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0	7.0	10.0	$\infty$
$U_w$	5.09	5.12	5.14	5.14	5.14	5.13	5.12	5.07	5.00	5.01
	5.64	5.68	6.69	5.70	5.70	5.70	5.67	5.63	5.56	5.57
$\kappa_e$	6.27	6.32	6.33	6.33	6.32	6.32	6.30	6.26	6.19	6.20
	6.81	6.84	6.86	6.86	6.86	6.86	6.84	6.80	6.73	6.73

Поскольку поток энергии целиком обусловлен надбарьерными частицами, энергия, выносимая каждым электроном из системы, намного превышает электронную температуру. Значения потенциала стенки  $U_w$  и фактора  $\kappa_e$  зависят от параметра  $T$  и определяются из условия равенства потоков электронов (33) и ионов (19, 20) и формулы (34). В качестве иллюстрации приведем результаты численных расчетов для ионов водорода  $m_i=m_H$ , (верхняя строка) и  $m_i=2.5m_H$  (нижняя строка), что соответствует равнокомпонентной D-T смеси (см. табл. 3).

### 5. ОТСУТСТВИЕ СКАЧКОВ ПОТЕНЦИАЛА НА СРЕЗЕ ПРОБКИ ГДЛ

Кроме дебаевского скачка на поглощающей стенке непосредственно за срезом пробки может, вообще говоря, возникать еще один скачок потенциала, аналогичный по своей природе тому, который был выявлен Л.С. Пеккером в задаче о «тепловых барьерах» амбиполярной ловушки [2]. Ниже показано, что несмотря на то, что конфигурации пробки ГДЛ и барьерного пробкотрона очень похожи — вначале силовые линии магнитного поля сужаются, а потом расширяются — в ГДЛ таких скачков нет и потенциал меняется с переходом через пробку непрерывным образом. Этот эффект обусловлен тем, что в амбиполярной ловушке за барьерным пробкотроном имеется пик удерживающего амбиполярного потенциала, который отражает назад все ионы, вылетающие из центрального пробкотрона в барьерный, тогда как в ГДЛ все вылетевшие ионы поглощаются стенкой. Из-за отсутствия отраженных частиц плотность плазмы в ГДЛ уменьшается по мере продвижения вдоль переходного участка, в то время как в амбиполярной ловушке она постоянна в этой области. Перепад плотности в ГДЛ приводит к появлению разности потенциалов, ускоряющей ионы на переходном участке, в результате чего на срезе пробки область, занимаемая ими в пространстве скоростей, оказывается отделенной конечным интервалом от оси абсцисс  $v_z=0$ . В той же самой точке амбиполярной ловушки ионы заполняют все пространство скоростей. Это различие (присутствие на срезе пробки амбиполярной ловушки ионов с нулевыми продольными скоростями) приводит к тому, что с уменьшением магнитного поля, соответствующем смещению наружу от среза пробки, плотность ионов в амбиполярной ловушке спадает быстрее, чем плотность электронов, и поэто-

му оказывается невозможным удовлетворить условию квазинейтральности при непрерывном пространственном распределении потенциала. В ГДЛ эта зависимость выражена гораздо слабее, и уравнение квазинейтральности допускает непрерывное решение с плавной зависимостью потенциала от напряженности поля.

Чтобы проверить это утверждение, рассмотрим уравнение квазинейтральности в за пробочной области. Выведенное ранее уравнение (16) справедливо только на переходном участке. При продолжении его в за пробочную область следует иметь в виду, что здесь функция  $U_{eff}(z, v_{\perp 0})$  монотонно убывает, а максимум ее лежит внутри переходного участка. В этом случае пределы интегрирования по  $v_z$  в некоторой точке  $h$  расширителя определяются неравенством:

$$\sqrt{(\xi' - h)U'(\xi') + U(h) - U(\xi')} \leq v_z \leq \infty$$

где  $U(h)$  — значение потенциала в за пробочной области,  $\xi'$  — координата максимума  $U_{eff}(\xi, v_{\perp 0})$ . Проводя вычисления по схеме, описанной в Приложении 1, приходим к соотношению:

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{2e^U}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{U}}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 F(h, \xi') d\xi' \quad (35)$$

где ядро  $F(h, \xi')$  выражается формулой:

$$F(h, \xi') = \xi' U''(\xi') e^{U(\xi') - \xi' U'(\xi')} \sqrt{(\xi' - h)U'(\xi') + U(h) - U(\xi')}$$

Примечательно, что  $n_i$  локально зависит от  $U(h)$  и нелокально от потенциала на переходном участке, значения которого, как показано в разделе 2, с хорошей точностью описываются выражением (9).

Что касается зависимости  $n_e(U)$ , то в точках переходного участка  $U_{eff}(z, v_{\perp 0})$  для электронов монотонно растет (см. рис. 3), и, следовательно, их функция распределения отлична от нуля всюду за исключением области, соответствующей отраженным частицам, энергия которых превышает  $U_w$ . По этой причине на переходном участке с точностью до членов порядка  $v_{Ti}/v_{Te}$  справедливо бoльцмановское распределение (4).

За срезом пробки функция  $U_{eff}(z, v_{\perp 0})$  уменьшается, образуя потенциальную яму для электронов. Если яма заполнена частицами, накопившимися в ней в результате столкновений, то всюду,

где степень расширения не очень велика ( $h \gtrsim v_{Ti}/v_{Te}$ ), зависимость  $n_e(U)$  с хорошей точностью описывается формулой (4). В противоположном предельном случае редких столкновений потенциальная яма не заполнена, и, соответственно, вблизи оси  $v_z = 0$  в пространстве скоростей появляется область, где функция распределения равна нулю. Очевидно, что плотность электронов в этом случае спадает вглубь расширителя быстрее, чем по бoльцмановскому закону. Так как образование скачков потенциала связано с медленностью уменьшения электронной плотности, то, очевидно, что если скачков нет при бoльцмановском распределении электронов, то их заведомо не будет и в режиме редких столкновений. Исходя из этого, рассмотрим уравнение квазинейтральности с бoльцмановским распределением плотности электронов.

Проанализируем зависимости  $n_e$  и  $n_i$  от  $U$ , рассматривая  $U$  как параметр, значения которого близки к  $U_m$ . Разлагая  $n_i$  и  $n_e$  в ряд по малости  $U - U_m$ , и имея в виду, что  $1 - h \ll 1$ , получаем:

$$n_e(U_m) + \left. \frac{\partial n_e}{\partial U} \right|_{U_m} (U - U_m) = n_i(U_m, h) + \left. \frac{\partial n_i}{\partial U} \right|_{U_m, h=1} (U - U_m) \quad (36)$$

Из (36) видно, что так как  $n_i(U_m, h) < n_i(U_m, 1) = n_e(U_m)$ , то непрерывное решение для  $U$ , растущее вглубь расширителя, существует, если выполнено условие:

$$\left. \frac{\partial n_i}{\partial U} \right|_{U_m, h=1} > \left. \frac{\partial n_e}{\partial U} \right|_{U_m} \quad (37)$$

В случае тепловых барьеров амбиполярной ловушки  $\partial n_i / \partial U = -\infty$ , что приводит к отсутствию непрерывных решений. Выполнение этого неравенства в ГДЛ проверялось численно, путем нахождения относительной разности  $\Delta_1 = 1 - \frac{\partial n_i}{\partial U} / \frac{\partial n_e}{\partial U}$  (см. Приложение 3). Результаты численных расчетов на основе приближенного решения (9) приведены в таблице 4 и дают близкие к нулю отрицательные значения  $\Delta_1$ , что формально соответствует нарушению неравенства (37). На самом деле, так как точность решения (9) сопоставима с величиной  $\Delta_1$ , сделать определенное заключение о знаке неравенства (37) на основании этих численных результатов нельзя. Близость  $\Delta_1$  к нулю связана с тем, что вычисленное по точному решению уравнения квазинейтральности значение этой величины должно равняться нулю. В этом нетрудно убедиться, дифференцируя (17') по  $\xi$  и учи-

ывая тот факт, что  $dU/d\xi \rightarrow +\infty$  при  $\xi \rightarrow 1$ .

Принимая во внимание это обстоятельство, опустим в (36) линейные слагаемые и удержим следующие, квадратичные по  $U - U_m$  члены. Значения коэффициента при них  $\Delta_2 = \frac{\partial^2 n_i}{\partial U^2} / \frac{\partial^2 n_e}{\partial U^2} - 1$ , вычисленные по решению (9) (см. таблицу 4), показывают, что с запасом, намного превышающим точность (9),  $\Delta_2 > 0$ . Из (36) видно, что положительность  $\Delta_2$  обеспечивает непрерывность  $U(h)$  при переходе через срез пробки.

Таблица 4

$\tau$	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Delta_1$	-0.009	-0.03	-0.04	-0.05	-0.07	-0.08	-0.09
$\Delta_2$	32.6	8.55	5.56	4.58	4.10	3.82	3.64

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенный в работе анализ роли немонотонности потенциальной энергии продольного движения показывает, что для электронной компоненты эти эффекты несущественны. Напротив, для ионной компоненты зависимость  $n_i(U, \xi)$  меняется заметно, что приводит к уменьшению плотности на срезе пробки и, соответственно, увеличению потенциала по сравнению с результатами приближенного рассмотрения [1]. Поскольку влияния этих двух факторов противоположны, результирующие значения скоростей потерь близки к найденным в работе [1].

Рассмотренный выше режим потерь электронов и ионов реализуется в случае длинного пробкотрона, когда можно считать, что на пробку падают «половинки» максвелловского распределения электронов и ионов. Для ионов условием справедливости такого подхода является неравенство (1). Сформулируем аналогичное условие для электронной компоненты.

Поскольку ловушку покидают электроны с энергиями  $mv^2/2 > U_w$ , функция распределения отраженных частиц на входе в однородное магнитное поле равна нулю при скоростях  $v > v_0 = \sqrt{2U_w/m}$  и углах  $\pi - \theta \leq k^{-1/2}$ . Для того, чтобы за время пролета до противоположной пробки в этой области успело сформироваться максвелловское распределение по скоростям, высокоэнерге-

тичные электроны должны за счет столкновений с основной массой частиц рассеяться на угол  $\Delta\theta$  больше или порядка  $k^{-1/2}$ . Закон диффузионного расплывания по углу имеет хорошо известный вид [4]:  $\Delta\theta^2 \simeq \nu(v_0)t$ . Подставляя в это выражение время пролета  $t = L/v_0$ , приходим к условию применимости формул (33), (34) для скоростей потерь по электронному каналу:

$$v_0(v_0)L/v_0 \gtrsim k^{-1}$$

Учитывая, что  $\nu(v_0) = \nu(v_{Te})(v_{Te}/v_0)^3$ , выразим это условие через длину пробега тепловых частиц:

$$kL/\lambda \gtrsim (U_w/T_e)^2 \quad (38)$$

Сравнивая (1) и (38), можно сделать вывод, что если для ионов условие (1) за счет  $k \gg 1$  может быть выполнено в сравнительно коротких установках, то рассмотренный выше режим потерь по электронному каналу реализуется при более жестких ограничениях на длину системы. В случае нарушения неравенства (38) в ловушке устанавливается режим потерь по электронному каналу, аналогичный исследованному В.П. Пастуховым [5].

## Приложение 1

### Вывод формулы для распределения плотности ионов

Представим формулу (15) в виде:

$$n_i = -ne^U \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty de^{-v_\perp^2} \int_{v_z^*(v_\perp)}^\infty e^{-v_z^2} dv_z \quad (П.1)$$

где  $v_z^*(v_\perp)$  — уравнение границы, которое в зависимости от значения  $v_\perp$  (или связанного с ним формулой (5) значения  $v_{\perp 0}$ ) задается либо выражением (13) при  $v_{\perp 0} < v_{\perp 0}^*$  (см. (12)), либо выражением (14) при  $v_{\perp 0} > v_{\perp 0}^*$ . Интегрируя (П.1) по частям, приходим к равенству:

$$\frac{n_i}{n} = \frac{e^U}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{v_z^*(0)}^\infty e^{-x^2} dx - \int_0^\infty e^{-v_\perp^2 - v_z^2} \frac{dv_z^*}{dv_{\perp 0}} dv_{\perp 0} \right]$$

Во втором слагаемом показатель экспоненты является функцией  $v_{\perp 0}$ . Это слагаемое удобно вторично проинтегрировать по частям, после чего получаем:

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{e^U}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{v_{\perp 0}^*(0)}^{\infty} e^{-x^2} dx + v_z^*(0) e^{-v_z^{*2}(0)} - \int_0^{\infty} e^{-v_{\perp 1}^2 - v_z^2} v_z^* d(v_{\perp 1}^2 + v_z^{*2}) \right]$$

Первые два слагаемых в этом выражении объединяются в один интеграл, а в последнем область интегрирования удобно разбить на две части; от нуля до  $v_{\perp 0}^*$  и от  $v_{\perp 0}^*$  до бесконечности. Используя (13), нетрудно найти, что на первом участке показатель экспоненты равен:

$$v_{\perp 1}^2 + v_z^{*2} = v_{\perp 0}^2 + U \quad (\text{П.2})$$

поэтому первый интеграл принимает вид:

$$\frac{e^U}{\sqrt{\pi}} \int_0^{U'(0)/k-1} dv_{\perp 0}^2 e^{-v_{\perp 0}^2} \sqrt{U - v_{\perp 0}^2 (k-1)\xi}$$

Поскольку значение производной  $U'(0)$  — порядка единицы, этот интеграл мал по параметру  $k^{-1}$ , поэтому соответствующим вкладом в плотность можно пренебречь.

В интеграле по второму участку показатель экспоненты равен:

$$v_z^{*2} + v_{\perp 1}^2 = U'(\xi') \left( \xi' - \frac{1}{k-1} \right) + U(\xi) - U(\xi')$$

Здесь удобно от интегрирования по  $v_{\perp 0}$  перейти к интегрированию по переменной  $\xi'(v_{\perp 0})$ , соответствующей положению точки максимума эффективной потенциальной энергии. Учитывая (10) и опуская в (П.3) слагаемое, содержащее малость  $(k-1)^{-1}$ , приходим к выражению (16).

При подстановке (9) в (18) удобно перейти от переменной интегрирования  $\xi$  к переменной:

$$x = \frac{T}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{T-\xi}} - 1 \right) \quad (\text{П.4})$$

При такой замене функции, входящие в подынтегральное выражение, преобразуются следующим образом:

$$\xi = x(x+T)/(x+T/2)^2$$

$$U = T \ln [(2x+T)/(x+T)]$$

$$U' = (x+T/2)^2/(x+T)$$

$$U'' d\xi = dx \cdot (x+3T/2)(x+T/2)/(x+T)^2$$

а дифференциал  $F(\xi, \xi') d\xi'$  переходит в  $F(x, x') dx'$ , где

$$F(x, x') = \left( \frac{2x'+T}{x'+T} \right)^T e^{-x'} \frac{x'(x'+3T/2)}{(x'+T/2)(x'+T)} \times \\ \times \left[ \frac{T^2(x'-x)(x'+x+T)}{4(x+T/2)^2(x'+T)} + T \ln \left[ 1 + T \frac{x-x'}{(2x'+T)(x+T)} \right] \right]^{1/2}$$

Интегралы (16) с этим ядром вычислялись по методу Симпсона. Число точек разбиения выбиралось равным 10000, бесконечный предел интегрирования заменялся величиной  $x=20$ . Значения в процентах относительной разности правой и левой частей уравнения (18), вычисленной в 10 точках по  $\xi$  для нескольких значений  $T$ , приведены в таблице 1.

## Приложение 2

### Вывод формул для плотности потока частиц и энергии а) ионная компонента

Производя в (18) интегрирование по  $v_z$  и переходя далее от интегрирования по  $v_{\perp}$  к интегрированию по  $v_{\perp 0}$ , получаем:

$$q_i = q_{0i} (\xi(k-1) + 1) e^U \int_0^{\infty} dv_{\perp 0}^2 e^{-v_{\perp 1}^2 - v_z^{*2}} \quad (\text{П.5})$$

Разобьем область интегрирования по  $v_{\perp 0}$  на два участка: от нуля до  $v_{\perp 0}^*$  (см. (12)) и от  $v_{\perp 0}^*$  до бесконечности. На каждом из них показатель экспоненты выражается, соответственно, формулами (П.2) и (П.3). Интеграл по первому участку с учетом малости  $(k-1)^{-1}$  равен:  $q_{0i} \xi U'(0)$ . В интеграле по второму участку можно перейти от интегрирования по  $v_{\perp 0}$  к интегрированию по координате  $\xi'(v_{\perp 0})$  точки максимума эффективной потенциальной энергии. Суммируя эти два вклада, приходим к выражению:

$$q_i = q_{0i} \xi [U'(0) + \int_0^1 d\xi' U'' e^{U(\xi') - \xi' U'(\xi')}],$$

откуда после интегрирования по частям получаем формулы (19), (20).

Аналогичные преобразования используются при вычислении плотности потока энергии ионов. После интегрирования по  $v_z$  и перехода к переменной интегрирования  $v_{\perp 0}$  выражение для  $Q_i$  представляется в виде:

$$Q_i = T_i q_{0i} e^U [\xi(k-1) - 1] \int_0^\infty dv_{\perp 0}^2 (1 + v_{\perp}^2 + v_z^{*2}) e^{-v_{\perp}^2 - v_z^{*2}} \quad (\text{П.6})$$

Разбивая область интегрирования по  $v_{\perp 0}$  на два участка и преобразуя соответствующие интегралы так же, как это делалось выше, приходим к формуле (23).

Для нахождения численных значений  $q_i$  и  $\chi_i$  воспользуемся решением (9), переходя в соответствующих интегралах к переменной (П.4). После этой процедуры они представляются следующим образом:

$$F_1 = \int_0^\infty dx e^{-x} \frac{x(x+3T/2)(x+T/2)}{(x+T)^2} \left( \frac{2x+T}{x+T} \right)^T$$

$$F_2 = T \int_0^\infty dx e^{-x} \ln \left( \frac{2x+T}{x+T} \right) \frac{(x+3T/2)(x+T/2)}{(x+T)^2} \left( \frac{2x+T}{x+T} \right)^T$$

откуда, в частности, следуют асимптотические разложения (21), (24).

### б) электронная компонента

Скорости потерь частиц и энергии для электронов вычисляются по схеме, аналогичной расчетам для ионной компоненты. Заменим в (П.5) и (П.6) ионные параметры на электронные (с заменой знака  $U$ ) и разобьем область интегрирования по  $v_{\perp 0}$  на два участка: от нуля до  $\tilde{v}_{\perp 0}$  (см. (29)) и от  $\tilde{v}_{\perp 0}$  до бесконечности. На каждом из них величины  $v_z^*$  определяемые формулами (31), (32), имеют вид:

$$v_z^{*2} = \begin{cases} U_w - U(\xi) - v_{\perp 0}^2 [(k-1)\xi + 1], & v_{\perp} < \tilde{v}_{\perp 0} \\ U(h') - U(\xi) + v_{\perp 0}^2 kh' - v_{\perp 0}^2 [(k-1)\xi + 1], & v_{\perp} > \tilde{v}_{\perp 0} \end{cases}$$

а соответствующие показатели экспоненты выражаются соотношениями:

$$v_z^* + v_{\perp}^2 = \begin{cases} U_w - U(\xi) \\ U(h') - U(\xi) - h'U'(h') \end{cases}$$

Вычисляя интегралы по первому участку и переходя во втором интеграле от переменной  $v_{\perp 0}$  к интегрированию по координате  $h'(v_{\perp 0})$  (они связаны равенством (28)), приходим к формулам:

$$q_e = q_{0e} \xi \left[ \frac{U_w - U(h_0)}{h_0} e^{-U_w} - \int_{h_0}^1 dh' U'' e^{h'U' - U(h')} \right] \quad (\text{П.7})$$

$$Q_e = q_{0e} T_e \xi \left[ \frac{U_w - U(h_0)}{h_0} (1 + U_w) e^{-U_w} - \int_{h_0}^1 dh' U'' (1 + U(h') - h'U'(h')) e^{h'U' - U(h')} \right] - q_e T_e U(\xi) \quad (\text{П.8})$$

Упростим (П.7), (П.8) путем разложения по степеням малости  $1 - h_0$ . Для этого в подынтегральных выражениях выделим комбинацию  $g = U(h') - h'U'$ , ее дифференциал  $dg = -h'U''dh'$ , и произведем интегрирование по частям:

$$\int_{U_w}^\infty \frac{dg}{h'} e^{-g} = \frac{e^{-U_w}}{h_0} - \int_{h_0}^1 \frac{dh'}{h'^2} e^{-g} \quad (\text{П.9})$$

$$\int_{U_w}^\infty \frac{dg}{h'} (g+1) e^{-g} = \frac{(U_w+2)e^{-U_w}}{h_0} - \int_{h_0}^1 \frac{dh'}{h'^2} (g+2) e^{-g} \quad (\text{П.10})$$

Нетрудно проверить, что вторые слагаемые в этих формулах, представляемые интегралами, малы по сравнению с первыми. Действительно, величина интегралов оценивается как произведение подынтегральной функции в точке  $h_0$  на ширину  $\Delta h'$  интервала по  $h'$ , на котором экспонента уменьшается в  $e$  раз. Используя (П.11), полу-

чаем для ширины интервала  $\Delta h' \sim (1-h_0)^{3/2}$ , после чего интегралы оцениваются как, соответственно,  $(1-h_0)^{3/2} e^{-U_w}$  и  $(1-h_0)^{3/2} (2+U_w) e^{-U_w}$ , и в силу малости  $(1-h_0)^{3/2}$  ими можно пренебречь. Подставляя упрощенные таким образом формулы (П.9), (П.10) в (П.7), (П.8), приходим к выражениям (33), (34).

Для дальнейшего упрощения этих соотношений выразим разность  $1-h_0$  через  $U_m$  и  $U_w$ . Вблизи пробки функцию (25) можно представить в виде:

$$U = \ln 2 + (1-h)^{1/2} + (1-h)/2 \quad (\text{П.11})$$

$$U' = -\frac{1}{2} [(1-h)^{1/2} + 1]$$

Подставляя эти соотношения в (30), находим:

$$(1-h_0)^{1/2} = \frac{1}{2(U_w - U_m) - 1},$$

после чего разложение (34) по степеням  $U_w^{-1}$  вплоть до членов, независимых от  $U_w$ , приобретает вид:

$$Q_e = T_e q_{0e} \xi e^{-U_w} (U_w^2 + U_w(2-U_m) + 7/4 - U_m)$$

Если сравнить его со значением (34) при  $h_0=1$ , то относительная разность этих выражений равна  $1/4 U_w^2$ , что составляет величину порядка одного процента.

### Приложение 3

#### Вычисление производных $\frac{\partial n_i}{\partial U}$ , $\frac{\partial^2 n_i}{\partial U^2}$

Дифференцируя (4) и (35) по параметру  $U(h)$  при  $h=1$ , имеем:

$$\frac{\partial n_e}{\partial U} = -\frac{1}{T} \exp\left(\frac{-U_m}{T}\right) \quad \frac{\partial^2 n_e}{\partial U^2} = \frac{1}{T^2} \exp\left(\frac{-U_m}{T}\right)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial U} = \frac{e^{U_m}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{U_m}}^{\infty} dx e^{-x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\xi' U'' d\xi' e^{U(\xi') - \xi' U'}}{\sqrt{(\xi' - 1)U'(\xi') + U_m - U(\xi')}} d\xi'$$

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial U^2} = \frac{e^{U_m}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{U_m}}^{\infty} dx e^{-x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi} U_m} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\xi' U'' d\xi' e^{U(\xi') - \xi' U'}}{[(\xi' - 1)U'(\xi') + U_m - U(\xi')]^{3/2}}$$

Подставляя в эти выражения распределение потенциала (9) и переходя во втором интеграле к переменной (П.4), приходим к следующим соотношениям для  $\Delta_1(T)$ ;  $\Delta_2(T)$ :

$$\Delta_1 = 1 - \frac{T}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dx e^{-x} (x + 3T/2) x [(2x + T)/(x + T)]^T}{(x + T)(x + T/2) \sqrt{T \ln [1 + T/(2x + T)] - T^2/4(x + T)}} +$$

$$+ T^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{T \ln 2}}^{\infty} dx e^{-x^2}$$

$$\Delta_2(T) = \frac{T^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dx e^{-x} (x + 3T/2) x [(2x + T)/(x + T)]^T}{(x + T)(x + T/2) [T \ln [1 + T/(2x + T)] - T^2/4(x + T)]^{3/2}} +$$

$$+ T^2 \cdot 2^T \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{T \ln 2}}^{\infty} dx e^{-x^2} - \frac{T^2}{\sqrt{\pi} T \ln 2} - 1$$

Численные значения  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  в зависимости от  $T$  приведены в таблице 4.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Мирнов В.В., Рютов Д.Д. Газодинамическая ловушка. — Вопросы атомной науки и техники. Серия термоядерный синтез. 1980, Вып.1, №5, с.57—66.
2. Пеккер Л.С. Рассеяние частиц на скачках потенциала в амбиполярной ловушке с тепловым барьером. — Физика плазмы, 1984, т.10, №1, с.61—65.
3. Конкашбаев И.К., Ландман И.С., Улинич Ф.Р. О возможности уменьшения электронного потока тепла из открытых ловушек. — ЖЭТФ, 1978, т.74, №3, с.956—963.
4. Трубников Б.А. Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме. В сб.: Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1963, т.1, с.98—182.
5. Pastukhov V.P. Collisional losses of electrons from an adiabatic trap in a plasma with a positive potential. — Nuclear fusion, v.14, №1, p.3—6.
6. Юшманов Е.Е. Удержание медленных ионов в ловушке с пробками при положительном потенциале плазмы. — ЖЭТФ, 1965, т.49, №2, с.588—598.

*В.В. Мирнов, О.А. Ткаченко*

**Распределение электростатического потенциала  
в газодинамической ловушке**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 23 декабря 1985 г.  
Подписано в печать 6.02.1986 г. МН 11654  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,2 печ.л., 1,8 уч.-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 28

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*