ИЯФ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Б.В. Чириков

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АДИАБАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

ПРЕПРИНТ 86-22

НОВОСИБИРСК

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АДИАБАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ*)

Б.В.Чириков

Институт ядерной физики СО АН СССР

А Н Н О Т А Ц И Я

Обсуждается теория стационарных адиабатических колебаний, основанная на введении специального, резонансного параметра адиабатичности, экспоненциально малого по обычному параметру медленности возмущения. Рассмотрен "простой" пример нелинейных колебаний с двумя степенями свободы, демонстрирующий, в частности, любопытный феномен хаотической адиабатичности. Приведены некоторые новые асимптотики инкремента неустойчивости и ширины резонансных зон для уравнений Матье и Хилла.

*) Статья в сборнике "Асимптотические методы математической физики". Ред. Королюк В.С. Киев: Наукова думка, 1986.

I. Введение

Адиабатические задачи, т.е. теоретический анализ действия адиабатического возмущения на колебательную систему, встречаются во многих приложениях классической и квантовой динамики. Примером может служить задача Будкера /I/ о колебании заряженной частицы в адиабатической магнитной ловушке, предложенной им еще в начале 50-х г.г. для удержания горячей термоядерной плазмы. Помимо очевидного прикладного значения подобных задач исследование адиабатической инвариантности переменных действия представляет для физики интерес и в принципиальном отношении, поскольку речь здесь идет об одном из законов сохранения, хотя бы и приближенном. Не удивительно, что исследованию условий и точности сохранения адиабатических инвариантов посвящено огромное число работ (обширную, хотя и далеко не исчерпывающую библиографию можно найти, например, в /2/).

Адиабатические задачи можно грубо разбить на два класса. В первом из них адиабатическое возмущение эффективно действует в течение конечного интервала времени, т.е. является импульсным, однократным. Например, некоторый параметр системы монотонно изменяется от одного асимптотического значения $(t \to -\infty)$ до другого $(t \to +\infty)$. Для таких задач, как это хорошо известно, основным условием адиабатической инвариантности является медленность возмущения по сравнению с характерными частотами системы. В классе аналитических функций нарушение адиабатичности колебаний при этом экспоненциально мало по параметру медленности и потому, как правило, не существенно. Здесь интересны особые случаи нарушения условия медленности возмущения, например, при прохождении частоты осциллятора через нуль, в частности, при пересечении сепаратрисы нелинейного осциллятора /2/ или при медленном прохождении резонанса /3/.

Ниже мы рассмотрим другой, более интересный и более сложный класс адиабатических задач, в которых возмущение является стационарным, многократным (периодическим или почти - периодическим). Примером может служить движение частицы в упомянутой выше адиабатической магнитной ловушке. Это - консервативная гамильтонова система с несколькими степенями свободы, отношение частот колебаний в которой очень мало (или велико). В § 2 ниже подобный пример используется для иллюстрации некоторых современных методов теоретического анализа стационарных адиабатических процессов.

В рассматриваемом случае медленность возмущения (его низкая частота) еще не гарантирует сохранения адиабатических инвариантов на достаточно большом интервале времени, поскольку малые изменения переменных действия на каждом периоде возмущения могут накапливаться. Как и во многих других задачах теории колебаний на первый план здесь выступают резонансы (линейные или нелинейные) между возмущением и колебаниями системы или между различными степенями свободы под действием возмущения.

Неясная идея о влиянии резонансов на адиабатическую инвариантность возникла довольно давно. Так, например, Борн писал (цитируется по работе /4/): "Мы рассматриваем как адиабатическое такое изменение системы, которое, во-первых, не находится ни в каком соотношении с периодом невозмущенной системы..." . Зоммерфельд определял адиабатическое возмущение как "бессистемный, неупорядоченный по отношению к фазам движения вид воздействия" /4/ . Но это была лишь интуиция. Впервые вопрос о роли резонансов в проблеме адиабатической инвариантности был четко поставлен и решен Андроновым, Леонтовичем и Мандельштамом /4/ в случае линейных колебаний. Для этого оказалось достаточно внимательно посмотреть с точки зрения физики на хорошо известное уравнение Матье и его решения. Действительно, зоны неустойчивости (параметрический резонанс) существуют при сколь угодно малых значениях параметра медленности

$$\varepsilon = \frac{\Omega}{2\omega_0} \qquad (I.I)$$

в окрестности $\varepsilon \approx 1/n$, где $n \neq 0$ - любое целое; ω_0 - невозмущенная частота линейного осциллятора, а Ω - частота гармонического параметрического возмущения. Таким образом, в данном случае необходимым условием адиабатической инвариантности является <u>нерезонансность</u> возмущения. Его медленность только помогает в том смысле, что ширина резонанса $\Delta\Omega$, как и инкремент неустойчивости в нем, экспоненциально падают с ε (см., например, /5,6/ и § 3 ниже):

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \sim \varepsilon g^{1/\varepsilon} \qquad (I.2)$$

где $g \ll 1$ безразмерная амплитуда возмущения.

Для нелинейных колебаний задача становится значительно более сложной. Прежде всего резонансы зависят теперь не только от параметров системы, но и от начальных условий движения, определяющих частоты колебаний. Далее, отдельный нелинейный резонанс вообще не вызывает неустойчивости движения и сколько-нибудь существенного изменения адиабатического инварианта из-за стабилизации резонансного возмущения нелинейностью (см., например, /7/). Однако взаимодействие нескольких (хотя бы двух) нелинейных резонансов уже приводит, вообще говоря, к неустойчивости и притом весьма неожиданной - к так называемому динамическому хаосу (стохастичности) /7/.

Специфическая трудность стационарных адиабатических задач в теории нелинейных колебаний состоит в том, что здесь нельзя прямо использовать мощные асимптотические методы теории возмущений и, в частности, простой и эффективный метод усреднения /8/. Это видно уже из простой оценки (I.2). Хотя зависимость от амплитуды возмущения g является степенной и может быть получена с помощью стандартных асимптотических рядов /5,6/ , разложение по степеням малого параметра медленности ε невозможно. Между тем при большой амплитуде возмущения, что типично для адиабатических процессов, ε остается единственным малым параметром задачи.

Как обойти эту трудность? Идея одного из подходов, которому и посвящена эта статья, состоит в том, чтобы ввести новый, "хороший" параметр адиабатичности ξ , который бы с самого начала включал в себя неаналитическую экспоненту типа (I.2), вместо исходного, "плохого" параметра ε . В неявном виде подобный метод использовался фактически еще в работе /9/ и позднее был развит в /I0/ (см. также /II/ , раздел 4.4).

2. <u>Адиабатические колебания</u>

Рассмотрим нелинейный осциллятор с двумя степенями свободы, заданный гамильтонианом:

$$H(p_x,p_y,x,y)=\frac{1}{2}\left[p_x^2+p_y^2+(1+\varepsilon^2x^2)^2y^2\right] \qquad (2.1)$$

где ε – малый параметр адиабатичности аналогичный (1.1), т.е. параметр медленности. Система (2.1) качественно моделирует движение заряженной частицы в аксиально-симметричной магнитной ловушке. Эта сторона вопроса, также как и другие более реалистические модели динамики частиц в магнитном поле, подробно рассмотрены в обзоре /12/. Мы же займемся здесь исследованием собственно модели (2.1) в качестве относительно "простого" примера стационарных адиабатических колебаний.

При $\varepsilon = 0$ движение финитно только по y, тогда как $p_x = const$. Покажем прежде всего, что в адиабатическом приближении ($\varepsilon \to 0$) движение является финитным также и по x, т.е. представляет собой стационарные колебания. Для этого введем вспомогательный гамильтониан

$$H_y^0(p_y,y;x)=\frac{p_y^2}{2}+\frac{\omega_y^2(\varepsilon x)y^2}{2}=\omega_y(\varepsilon x)I_y \qquad (2.2)$$

в котором мы рассматриваем x как параметр. Тогда вспомогательная система (2.2) есть гармонический осциллятор с переменной действия I_y и частотой

$$\omega_y(\varepsilon x)=1+(\varepsilon x)^2$$

В адиабатическом приближении $I_y = const$, и полный гамильтониан (2.1) принимает вид

$$H \to H_x^0(p_x,x)=\frac{p_x^2}{2}+\omega_y(\varepsilon x)I_y \qquad (2.3)$$

Он описывает только движение по x, которое имеет характер ограниченных колебаний при любом $\varepsilon > 0$. Вводя действие I_x, запишем (2.3) в виде

$$H^0(I_x,I_y)=H_x^0(p_x,x,I_y)=I_y+\varepsilon I_x\sqrt{2I_y} \qquad (2.4)$$

Основная проблема состоит в том, будет ли движение по x финитным на самом деле, а не только в адиабатическом приближении. Это и есть задача Будкера /1/. Заметим, что сохранение энергии здесь не помогает, поскольку эквипотенциали исходной системы ($y(1+\varepsilon^2x^2)=const$) не замкнуты.

Решение этой задачи разобьем на два этапа. Сначала найдем изменение действия ΔI_y на полупериоде медленных колебаний по x (оба полупериода для системы (2.1) симметричны). Величина

$$\xi \sim \frac{\Delta I_y}{I_y} \qquad (2.5)$$

и будет новым, "хорошим" параметром адиабатичности. Поэтому эту часть задачи нужно решить каким-то прямым (неасимптотическим) методом. Зато на втором этапе, исследуя динамику системы (2.1) с параметром ξ на произвольном интервале времени, мы уже можем использовать, например, просто метод усреднения или любой другой вариант асимптотических разложений.

2.1. <u>Невозмущенная система</u>. Для выполнения этой программы нужно прежде всего правильно выбрать невозмущенную систему. Если в качестве последней взять, например, частный (и вполне реальный) случай системы (2.1) при $\varepsilon = 0$, то вычисление ξ окажется просто невозможным, так как в этом случае никаких колебаний по x нет. Такая невозмущенная система является вырожденной, а ее (инфинитное) движение качественно отличается от возмущенного (финитного).

Для того, чтобы обойти это затруднение, выберем в качестве невозмущенной вспомогательную систему (2.4), движение которой, строго говоря, никогда не осуществляется в исходной системе (2.1), но может быть близко к нему, а, главное, оно качественно такое же (финитное).

Адиабатическое приближение (2.4) для рассматриваемой классической задачи соответствует хорошо известному методу Борна-Оппенгеймера в квантовой динамике молекул /13/. Недавно этот метод был вновь использован и для некоторых классических задач /14/.

Интересно отметить, что колебания выбранной невозмущенной системы (2.4) являются почти гармоническими (с точностью до медленного изменения частоты колебаний по y из-за колебаний по x). Тем не менее система (2.4) существенно нелинейна, поскольку ее частоты

$$\omega_x = \frac{\partial H^0}{\partial I_x} = \varepsilon\sqrt{2I_y}; \quad \langle\omega_y\rangle = \frac{\partial H^0}{\partial I_y} = 1 + \frac{\varepsilon I_x}{\sqrt{2I_y}} \tag{2.6}$$

зависят от переменных действия. Например, $\frac{1}{\omega_x}\cdot\frac{\partial\omega_x}{\partial I_y} = \frac{1}{2I_y}$. Более того, детерминант

$$\left|\frac{\partial^2 H^0}{\partial I_i\,\partial I_k}\right| = -\frac{\varepsilon^2}{2I_y} \neq 0$$

т.е. невозмущенная система невырождена. Наконец, отметим, что отношение частот на энергетической поверхности $H^0 = const$

$$\varepsilon\frac{\langle\omega_y\rangle}{\omega_x} = \frac{H^0}{(2I_y)^{3/2}} + \frac{1}{2(2I_y)^{1/2}} \tag{2.7}$$

также не остается постоянным.

Частота $\langle\omega_y\rangle$ равна временно́му среднему "мгновенной" частоты $\omega_y(\varepsilon x(t))$ /I2/. Это можно показать, используя общее соотношение*)

$$\frac{\partial I(\mathcal{H},\mu)}{\partial\mu} = -\frac{1}{\omega}\left\langle\frac{\partial\mathcal{H}(p,x,\mu)}{\partial\mu}\right\rangle \tag{2.8}$$

где μ - некоторый параметр, а угловые скобки обозначают усреднение при $\mu = const$. Полагая здесь $\mathcal{H} = H_x^0$; $\mu = I_y$ и используя закон сохранения $H^0 = const$, получим:

$$\langle\omega_y\rangle = -\omega_x\frac{\partial I_x(H^0, I_y)}{\partial I_y} = \left\langle\frac{\partial H_x^0(p_x, x, I_y)}{\partial I_y}\right\rangle$$

*) Это соотношение получается из определения $I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dx = \frac{1}{2\pi}\oint p\dot{x}\,dt$ и $\left(\frac{\partial p}{\partial\mu}\right)_x = -\frac{1}{\dot{x}}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu}$.

2.2. Адиабатическое возмущение. Дальше можно пойти двумя путями. Первый /II,I2/ - найти точное уравнение для $\dot{I}_y$. В общем случае это может быть сделано следующим образом /I5/. Считая в (2.2) $x(t)$ заданной функцией времени и используя общие соотношения $d\mathcal{H}/dt = \partial\mathcal{H}/\partial t$ и (2.8), найдем:

$$\dot{I}_y(H_y^0, x(t)) = \frac{\partial I_y}{\partial H_y^0}\dot{H}_y^0 + \frac{\partial I_y}{\partial x}\dot{x} = \tag{2.9}$$

$$= \frac{\dot{x}}{\omega_y}\left(\frac{\partial H_y^0(p_y, y; x)}{\partial x} - \left\langle\frac{\partial H_y^0(p_y, y; x)}{\partial x}\right\rangle\right) = -I_y\frac{\dot{\omega}_y}{\omega_y}\cos(2\theta)$$

Последнее выражение относится к рассматриваемой системе (2.I), а фаза θ определяется из условий:

$$y \equiv \sqrt{\frac{2I_y}{\omega_y}}\sin\theta; \quad p_y \equiv \sqrt{2I_y\omega_y}\cos\theta \tag{2.I0}$$

Второй путь - каноническое преобразование к переменным действие-фаза: $p_x, p_y, x, y \to I_x, I_y, \theta_x, \theta_y$. Выбрав, например, производящую функцию в виде /I4/:

$$F(I_x, I_y, x, y) =$$

$$= \int dy\sqrt{2\left[H_y^0 - \frac{\omega_y^2(\varepsilon x)y^2}{2}\right]} + \int dx\sqrt{2\left[H^0 - \omega_y(\varepsilon x)I_y\right]} \tag{2.II}$$

и проделав необходимые вычисления, найдем:

$$x = \sqrt{\frac{2I_x}{\varepsilon\sqrt{2I_y}}}\sin\theta_x$$

$$\omega_y = 1 + \frac{2\varepsilon I_x}{\sqrt{2I_y}}\sin^2\theta_x = \langle\omega_y\rangle - \frac{\varepsilon I_x}{\sqrt{2I_y}}\cos(2\theta_x) \tag{2.I2}$$

$$y = \sqrt{\frac{2I_y}{\omega_y}}\sin\left[\theta_y - \frac{I_x}{4I_y}\sin(2\theta_x)\right] \equiv \sqrt{\frac{2I_y}{\omega_y}}\sin\theta$$

$$P_y = P_y^\circ \equiv \sqrt{2\left[H_y^\circ - \frac{\omega_y^2(\varepsilon x) y^2}{2}\right]}$$

$$P_x = P_x^\circ + \Delta P_x$$

где

$$P_x^\circ \equiv \sqrt{2\left[H^\circ - \omega_y(\varepsilon x) I_y\right]} \qquad (2.13)$$

и

$$\Delta P_x = \frac{I_y \omega_y'}{2\omega_y} \sin(2\theta); \qquad \omega_y' \equiv \frac{d\omega_y}{dx} \qquad (2.14)$$

Последняя величина и описывает адиабатическое возмущение в новом гамильтониане

$$H(I_x, I_y, \theta_x, \theta_y) = H^\circ(I_x, I_y) + P_x^\circ \Delta P_x + \frac{(\Delta P_x)^2}{2} \qquad (2.15)$$

Отсюда

$$\dot{I}_y = -\frac{\partial H}{\partial \theta_y} = -P_x \frac{\partial(\Delta P_x)}{\partial \theta} = -I_y \frac{\dot{x}\omega_y'}{\omega_y} \cos(2\theta) \qquad (2.16)$$

что совпадает с выражением (2.9).

2.3. <u>Уточненный адиабатический инвариант I_y^*</u>. Уравнение (2.16) показывает, что невозмущенное действие I_y (также как и I_x) сохраняется только с точностью $\sim\varepsilon$. Действительно, подставляя в правую часть (2.16) невозмущенное решение

$$\theta_x = \omega_x t + \theta_{x0}; \qquad \theta_y = \langle\omega_y\rangle t + \theta_{y0}$$

$$\theta = \theta_y - \frac{I_x}{4I_y} \sin(2\theta_x) = \int dt\, \omega_y(\theta_x) \qquad (2.17)$$

и интегрируя по частям, получим поправку

$$\delta I_y = -I_y \frac{\dot{\omega}_y}{2\omega_y^2} \sin(2\theta) + O(\varepsilon^2) \qquad (2.18)$$

Это асимптотическое разложение можно продолжить. В любом порядке по ε поправка будет периодической функцией фаз θ_x, θ_y и, следовательно, не может накапливаться. Иначе можно сказать, что изменение уточненного инварианта $I_y^* = I_y - \delta I_y$ убывает при $\varepsilon \to 0$ быстрее любой степени ε, т.е. экспоненциально. В достаточно общем случае это было выяснено в свое время Крускалом /16/.

Простой способ исключения всех этих малых и несущественных поправок состоит в том, чтобы перейти от дифференциальных уравнений движения к отображению на полупериоде колебаний по x /10/. Если выбрать при этом начальные условия движения (I_x, I_y или H°, I_y) так, чтобы отношение частот (2.7) равнялось целому кратному π, т.е. чтобы изменение фазы θ_y, а, следовательно, и фазы $\vartheta = 2\theta$ адиабатического возмущения

$$\Delta\vartheta = 2\pi \frac{\langle\omega_y\rangle}{\omega_x} = \frac{\pi}{\varepsilon}\left[\frac{2H^\circ}{(2I_y)^{3/2}} + \frac{1}{(2I_y)^{1/2}}\right] = 0 \mod 2\pi \qquad (2.19)$$

то поправка δI_y выпадает, и вместо очень сложной величины I_y^* можно использовать просто невозмущенное действие I_y. Соотношение (2.19) определяет, очевидно, условие точного резонанса между двумя степенями свободы, когда квазипериодические колебания становятся периодическими.

2.4. <u>Резонансный параметр адиабатичности</u>. Проинтегрируем теперь уравнение (2.9), по-прежнему, с невозмущенными $\omega_y(t)$ и $\theta(t)$, но не по частям, а точно. На полупериоде колебаний по x это вполне возможно, а для рассматриваемой задачи и относительно элементарно. Соответствующая техника интегрирования подробно описана в /12/. Здесь мы упомянем только, что контур интегрирования в плоскости комплексной фазы θ замыкается по двум вертикальным прямым $\theta_x = \pm i\pi/2$. В точном резонансе (2.19) их вклады взаимно уничтожаются, и интеграл определяется особенностью $\omega_y = 0$ в точке

$$x_p = \frac{i}{\varepsilon}; \qquad \theta_p = \theta_0 + \int_0^{x_p} \frac{\omega_y\, dx}{\dot{x}} \approx \theta_0 + \frac{2i}{3\varepsilon\sqrt{2H^\circ}} \qquad (2.20)$$

где $\theta_0 = Re\, \theta_p$ – значение действительной фазы $\theta(t)$ при $x = 0$. Для упрощения формул мы приняли в последнем выражении $\dot{x} \approx \sqrt{2H^\circ}$, или $I_y \omega_y \leq I_y \ll H^\circ$ (общий случай рассмотрен в /12/). Производя необходимые вычисления, окончательно получим:

$$\frac{\Delta I_y}{I_y} \approx \Delta \ln I_y = -\int dt\, \frac{\dot{\omega}_y}{\omega_y} \cos(2\theta) \approx -Re \int d\theta\, \frac{\dot{x}\omega_y'}{\omega_y^2} e^{2i\theta} = \tag{2.21}$$

$$= -\pi Re\left(i e^{2i\theta_p}\right) = \pi e^{-\frac{4}{3\varepsilon\sqrt{2H^\circ}}} \sin(2\theta_0)$$

где мы использовали соотношение

$$\theta - \theta_p = \int_{x_p}^{x-x_p} \left(\frac{\omega_y'}{\dot{x}}\right)_p (x-x_p)\, dx = \left(\frac{\omega_y'}{2\dot{x}}\right)_p (x-x_p)^2 \to 0$$

В качестве нового малого параметра возьмем амплитуду величины $\Delta \ln I_y$, т.е.

$$\xi = \pi e^{-\frac{4}{3\varepsilon\sqrt{2H^\circ}}} \tag{2.22}$$

и будем называть ее резонансным параметром адиабатичности.

2.5. Отображение. Новый параметр ξ (2.22) улавливает основной неасимптотический эффект адиабатического возмущения и поэтому теперь по нему можно производить обычное асимптотическое разложение и использовать эффективный метод усреднения. В частности, можно просто отбросить нерезонансные малые поправки δI_y (п.2.3) и вычислять изменение фазы θ_0 между двумя последовательными прохождениями положения $x = 0$, во-первых, по невозмущенному отношению частот (2.19) (см. также § 3 ниже), а, во-вторых, для любых значений I_y, а не только в точном резонансе. Вместе с соотношением (2.21) это дает возможность описывать долговременную динамику рассматриваемой системы с помощью канонического двумерного отображения $\Lambda, \vartheta \to \bar{\Lambda}, \bar{\vartheta}$, где $\Lambda = \ln I_y$; $\vartheta = 2\theta_0$ и

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + \xi \cdot \sin\vartheta; \quad \bar{\vartheta} = \vartheta + \Delta\vartheta(H^\circ, \bar{\Lambda}) \tag{2.23}$$

$$\Delta\vartheta(H^\circ, \Lambda) = \frac{\pi}{\varepsilon\sqrt{2}} \left(H^\circ e^{-\frac{3\Lambda}{2}} + e^{-\frac{\Lambda}{2}}\right)$$

Резонансы этой системы определяются условием $\Lambda = \Lambda_r$, где $\Delta\vartheta(\Lambda_r) = 2\pi r$ с любым целым r. Поскольку резонансов много, их взаимодействие приводит к образованию хаотической компоненты движения.

При достаточно малом ε это отображение можно еще упростить, линеаризуя функцию $\Delta\vartheta(\Lambda)$ вблизи резонансного значения $\Lambda = \Lambda_r$, такого, что $\Delta\vartheta(\Lambda_r) = 0 \mod 2\pi$ (2.19). Вводя новое действие

$$P = \left(\frac{d\,\Delta\vartheta}{d\Lambda}\right)_{\Lambda=\Lambda_r} \equiv (\Delta\vartheta)_r' (\Lambda - \Lambda_r) \tag{2.24}$$

получим так называемое стандартное отображение

$$\bar{P} = P + K \cdot \sin\vartheta; \quad \bar{\vartheta} = \vartheta + \bar{P} \tag{2.25}$$

с единственным параметром

$$K = \xi \left|(\Delta\vartheta)_r'\right| \tag{2.26}$$

который и определяет условия адиабатичности исходной модели (2.1). Стандартное отображение описывает динамику системы (2.23) локально по Λ, а, значит, и динамику исходной модели (2.1) локально по I_y на энергетической поверхности. Резонансы соответствуют теперь $P = P_r = 2\pi r$.

2.6. Хаотическая адиабатичность. Исследованию системы (2.25) посвящено большое число работ (см., например, /7,10-12/). Динамика этой нехитрой на первый взгляд модели оказывается очень сложной, богатой и своеобразной. Прежде всего существует критическое значение параметра

$$K_c = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3H^\circ + e^{\Lambda_c}}{\varepsilon} \cdot \exp\left[-\left(\frac{4}{3\varepsilon\sqrt{2H^\circ}} + \frac{3}{2}\Lambda_c\right)\right] \approx 1 \tag{2.27}$$

такое, что при $K<K_c$ колебания P строго ограничены на любом интервале времени $(|\Delta P| \le 2\sqrt{K})$. Изменение I_y при этом также ограничено и мало (см. (2.18,24)):

$$\left|\frac{\Delta I_y^*}{I_y^*}\right| \lesssim \frac{2\xi}{\sqrt{K}}; \qquad \left|\frac{\Delta I_y}{I_y}\right| \lesssim \varepsilon\frac{3\sqrt{6H^\circ}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{4\ln\left(\frac{\pi}{\xi}\right)} \qquad (2.28)$$

Мы имеем, следовательно, стационарные адиабатические колебания конечной амплитуды. При этом изменения невозмущенного действия $|\Delta I_y| \gg |\Delta I_y^*|$, но также не накапливаются.

При заданных начальных условиях адиабатичность движения зависит от параметра медленности ε, который должен быть достаточно малым (2.27). При заданном ε адиабатичность определяется начальными условиями движения H°, Λ, причем Λ должно быть достаточно большим: $\Lambda > \Lambda_c(H^\circ, \varepsilon)$. В принятом выше упрощающем предположении $I_y \simeq exp(\Lambda) \ll H^\circ$ критическое значение

$$\Lambda_c \approx -\frac{8}{9\varepsilon\sqrt{2H^\circ}} + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{\pi^2 H^\circ}{\varepsilon}\right) \qquad (2.29)$$

Вместо Λ_c можно ввести критическое значение α_c максимального (по быстрым y – колебаниям) угла между осью X и вектором скорости в окрестности $X = 0$:

$$\sin^2\alpha_c = \frac{e^{\Lambda_c}}{H^\circ} \approx \left(\frac{\pi^4}{\varepsilon^2 H^\circ}\right)^{1/3}\cdot \exp\left(-\frac{8}{9\varepsilon\sqrt{2H^\circ}}\right) \qquad (2.30)$$

Область адиабатичности $(K<K_c)$ имеет весьма сложную и своеобразную структуру. Хотя движение здесь и является глобально устойчивым в смысле неравенств (2.28), оно может быть (в зависимости от начальных условий) и хаотическим. При $K\to K_c$ мера хаотических траекторий в фазовом пространстве системы достигает 50%. Такой необычный режим движения можно назвать *хаотической адиабатичностью*. В устойчивых областях адиабатический инвариант I_y^* становится точным. Для достаточно малого возмущения это строго доказано Арнольдом /I7/, который назвал такой случай *вечной адиабатической инвариантностью*.

Замечательный результат Арнольда о том, что хаотическая компонента строго ограничена (2.28) на энергетической поверхности и не ведет к глобальной неустойчивости, связан с топологией фазового пространства и определяется числом степеней свободы системы ($N = 2$ в нашем случае). При $N > 2$ это уже не так, и возникает слабая (при $\varepsilon \to 0$), но универсальная неустойчивость – диффузия Арнольда /I8/, которую также можно успешно исследовать асимптотическими методами /II/.

Возвращаясь к нашей задаче, отметим, что в области $K>K_c$ движение для большинства начальных условий является хаотическим как результат сильного взаимодействия резонансов. Хотя оно и сохраняет колебательный характер, амплитуда колебаний по X неограниченно возрастает, а $I_y \to 0$ $(\Lambda \to -\infty)$. Движение такого рода называется в небесной механике осциллирующим. В данном случае этот процесс является стохастическим и описывается некоторым диффузионным уравнением для фазовой плотности $\rho(I_y, t)$. Поскольку для нашей системы инвариантная эргодическая мера на энергетической поверхности /I2/

$$\frac{d\mu(I_y, H^\circ)}{dI_y} = \frac{1}{\omega_x(I_y)} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2I_y}} \qquad (2.31)$$

компактна (нормируема), то в процессе статистической релаксации фазовая плотность $\rho(I_y,t) \to \rho_s(I_y) \propto d\mu/dI_y$ стремится к равновесной. Последняя является сингулярной при $I_y = 0$, но интегрируемой.

Как показывает рассмотренный "простой" пример, условия адиабатичности нелинейных колебаний сложным образом зависят как от параметров системы, так и от начальных условий движения, а нарушение адиабатичности определяется взаимодействием нелинейных резонансов.

3. Линейный параметрический резонанс

Описанную выше технику можно применять и для асимптотических оценок инкремента неустойчивости и ширины линейного параметрического резонанса. Начнем с простого уравнения Матье

$$\ddot{y} + [a - 2q\cdot\cos(2t)]y = 0 \qquad (3.1)$$

Здесь переменная частота $\omega(t)$ задана как явная функция времени

$$\omega^2(t) = a\left[1 - g\cdot \cos(2t)\right] \qquad (3.2)$$

и можно использовать непосредственно уравнение (2.9) с заменой $\omega_y(x(t)) \to \omega(t)$ и $I_y \to I$. При произвольных $0 < g \le 1$ условие параметрического резонанса имеет вид

$$\langle\omega\rangle = n = \frac{1}{\varepsilon} \qquad (3.3)$$

Здесь целое n – номер гармоники частотной модуляции $\omega(t)$ и номер зоны параметрической неустойчивости; ε – адиабатический параметр медленности, а среднее значение частоты осциллятора

$$\frac{\langle\omega\rangle}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{1-g\cdot\cos\varphi}\,d\varphi = \frac{2\sqrt{1+g}}{\pi}E\left(\sqrt{\frac{2g}{1+g}}\right) \qquad (3.4)$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл 2-го рода. Отметим, что в интервале $0 \le g \le 1$ отношение (3.4) изменяется весьма незначительно (от 1 до $2\sqrt{2}/\pi \approx 0.9$).

Интегрируя, как и в п.2.4 выше, уравнение (2.9) с заменой $d\theta/dt \approx \omega(t)$ (см. (3.8) ниже), найдем изменение действия за период модуляции частоты $\omega(t)$:

$$\Delta \ln I \approx \xi\cdot \sin(2\theta_0) \qquad (3.5)$$

Резонансный параметр адиабатичности равен

$$\xi(g,n) = \frac{2\pi}{3}\cdot\exp\left[\pi n\,\frac{E(k')-K(k')}{E(k)}\right] \qquad (3.6)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл I-го рода; $k^2 = 1-(k')^2 = 2g/(1+g)$. Отсюда максимальный инкремент в зоне n есть

$$\Gamma_n = \frac{\xi(g,n)}{\pi} \qquad (3.7)$$

При выводе (3.6) использовано аналогичное (2.20) выражение для фазы колебаний

$$\theta_p - \theta_0 \approx \sqrt{a}\int_0^{t_p}\sqrt{1-g\cdot\cos(2t)}\,dt =$$

$$= -\frac{i\sqrt{a}}{2}\int_0^{z_p}\sqrt{1-g\cdot\operatorname{ch} z}\,dz =$$

$$= -i\sqrt{a(1+g)}\left[E\left(\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right)-K\left(\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right)\right]$$

в особенности $\omega(t_p) = 0$, или

$$\cos(2it_p) = \operatorname{ch} z_p = \frac{1}{g} > 1$$

а также соотношения вблизи особенности:

$$\theta-\theta_p = \int_{t_p}^{t-t_p}\sqrt{(t-t_p)\frac{d}{dt}\omega^2(t_p)}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{d}{dt}\omega^2(t_p)}\,(t-t_p)^{3/2} \to 0$$

$$\omega^3(t) = (t-t_p)^{3/2}\left[\frac{d}{dt}\omega^2(t_p)\right]^{3/2} = \frac{3}{2}(\theta-\theta_p)\frac{d}{dt}\omega^2(t_p) \to 0$$

Для оценки ширины резонанса запишем стандартные уравнения первого приближения асимптотической теории вблизи резонанса /8/ в канонических переменных действие-фаза I, ψ:

$$\dot{I} = I\Gamma_n\sin\psi_n; \quad \dot{\psi}_n = 2(\langle\omega\rangle - n) + \Gamma_n\cos\psi_n \qquad (3.8)$$

Эти уравнения получаются из "резонансного гамильтониана"

$$H_n = 2I(\langle\omega\rangle - n) + I\Gamma_n \cos\psi_n \tag{3.9}$$

в котором отброшены нерезонансные гармоники возмущения (асимптотический метод усреднения). В зоне неустойчивости решение уравнений (3.8) имеет вид:

$$I = I_0 e^{\gamma_n t}; \quad \gamma_n = \Gamma_n \cdot \sin\psi_n^0$$

$$\Delta_n = \langle\omega\rangle - n = \frac{\Gamma_n}{2}\cos\psi_n^0 \tag{3.10}$$

Исключая постоянную фазу ψ_n^0, приходим к обычному соотношению между инкрементом γ_n и расстройкой Δ_n:

$$\gamma_n^2 + (2\Delta_n)^2 = \Gamma_n^2 = \left(\frac{\xi}{\pi}\right)^2 \tag{3.11}$$

Отметим, что это соотношение определяется линейной поправкой к частоте в (3.8), которая отброшена в задаче о нелинейных адиабатических колебаниях (см. (2.23)). В последнем случае это допустимо, поскольку малым параметром асимптотического разложения служит величина $\sqrt{\Gamma_n} \sim \sqrt{\xi}$, а не ξ как для линейного осциллятора. Действительно, если бы в (3.8) расстройка $\Delta_n(I)$ зависела от I (нелинейные колебания), то $\Delta_n \sim (d\Delta_n/dI)\Delta I \sim (d\Delta_n/dI) I\Gamma_n/\Delta_n$ и $\Delta_n \sim \sqrt{\Gamma_n} \gg \Gamma_n$

Из (3.11) полная ширина параметрического резонанса

$$\Delta a = \frac{2n}{\pi}\left(\frac{a}{n^2}\right)\xi \tag{3.12}$$

где (a/n^2) дается выражением (3.4) с $\langle\omega\rangle = n$ (резонанс). При $g \to 1$ отношение $a/n^2 \approx \pi^2/8$, а

$$\xi \approx \frac{2\pi}{3} e^{-\frac{\pi^2}{8}(1-g)n} \ll 1 \tag{3.13}$$

Последнее неравенство необходимо для справедливости асимптотического разложения, т.е. необходимо, чтобы $1-g \gtrsim \frac{1}{n} = \varepsilon$.

В обратном предельном случае $g \to 0$

$$\xi \approx \frac{2\pi}{3}\left(\frac{e^2 g}{8}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{ng^2}{16}\right) \tag{3.14}$$

где $e = 2.71\ldots$ и

$$\frac{a}{n^2} \approx 1 + \frac{g^2}{8} \tag{3.15}$$

Используя это соотношение и переходя в (3.14) к $q = ng/2$, получим из (3.12)

$$\Delta a \approx \frac{4n}{3}\left(\frac{e^2 q}{4n^2}\right)^n \left(1 - \frac{q^2}{4n^3}\right) \tag{3.16}$$

Это выражение отличается при $n \gg 1$ от результата в работе /6/ множителем $\pi/3$. Причина этого небольшого расхождения неясна.

Как видно из (3.14,16) формальным параметром разложения при $g \to 0$ является величина $ng^2 \ll 1$ или $q^2/n^3 \ll 1$ /6/. Интересно, однако, отметить, что в простейшем виде оценка (3.14) дает неплохое приближение во всем интервале $0 < g \leq 1$ для не слишком больших n:

$$\xi \approx \frac{2\pi}{3}\left(\frac{e^2 g}{8}\right)^n \tag{3.17}$$

Это видно уже из того, что даже при $g = 1$ величина $e^2/8 \approx 0.92$ и существенное отличие от (3.13) возникает только для $n > n_c(g) \approx 10$. Для $g = 0.7$ граница применимости (3.17) повышается до $n_c(0.7) \approx 30$; $n_c(0.4) \approx 100$ и т.д. Оценка для максимального инкремента неустойчивости и полной ширины резонанса принимает в этом случае совсем простой вид (см. (15.1) в /12/, где $\Delta\Omega$ – полуширина резонанса):

$$\left(\frac{\Delta a}{\sqrt{a}}\right)_n \approx 2\Gamma_n \approx \frac{4}{3}\left(\frac{e^2 g}{8}\right)^n \tag{3.18}$$

Сравнение этой оценки с точными значениями ширины резонансов и инкремента неустойчивости иллюстрируется данными в таблице и на рисунке. Численные (точные) значения ширины $(\Delta a)_T$ взяты из таблиц /20/ периодических решений уравнения Матье, которые лежат на границах между устойчивыми и неустойчивыми зонами на плоскости параметров (a , q) или (a, g). Значения $(\Delta a)_T$ брались при фиксированном q , а в качестве a принималось среднее двух значений на краях неустойчивой зоны.

На рисунке показана зависимость максимального инкремента неустойчивости $\mu_{max}=\Gamma_n/2$ от номера зоны n для нескольких значений g . Численные значения μ_{max} взяты из таблиц /2I/ . Оценка (3.I8) естественно объясняет изменение знака производной $d\mu_{max}(n)/dn$ /2I/ при $g \simeq 1$. Однако удивительный факт почти линейной зависимости $\mu_{max}(n)$ при $g \gtrsim 1$, отмеченный в /2I/ , остается непонятным. Возможно, что эта особенность дает ключ к получению простых оценок и в области $g > 1$. На рисунке ясно виден асимптотический ($n \gg 1$) характер оценки (3.I8) и область ее применимости ($g \lesssim 1$).

Таким же методом можно исследовать и уравнение Хилла:

$$\ddot{y} + a\left[1 - g\cdot f(t)\right]y = 0 \qquad (3.19)$$

где период функции $f(t)$ мы примем равным π для удобства сравнения с уравнением Матье. Рассмотрим, например, асимптотику ширины резонансов при $g \to 0$ в частном случае, когда $f(t)$ есть тригонометрический полином степени p /I9/. Тогда $f(t)$ представляется <u>конечным</u> рядом Фурье:

$$f(t) = \sum_{m=1}^{p} f_m \cdot \cos(2mt + \varphi_m) \qquad (3.20)$$

Как и для уравнения Матье параметрические резонансы соответствуют всем целым значениям $\sqrt{a} = n$. Однако теперь ширина (и инкремент) резонансов $n = mr$, где $m \leq p$, а целое $r < n$, значительно возрастает при $g \to 0$, поскольку она определяется гармоникой возмущения $m > 1$. В таком случае в оценке (3.I8) нужно заменить $g \to g f_m$; $n \to r = n/m$ с максимальным $m \leq p$. Это совпадает с результатом Арнольда /I9/ . В частности, для $n \leq p$ всегда работает гармоника

$m = n$, т.е. $r = 1$ и $(\Delta a/\sqrt{a})_n \sim \Gamma_n \sim g f_n$. Этот результат сохраняется для любого n в случае периодической функции $f(t)$ общего вида, содержащей <u>все</u> гармоники основной частоты $(p \to \infty)$ /I9/.

ЛИТЕРАТУРА:

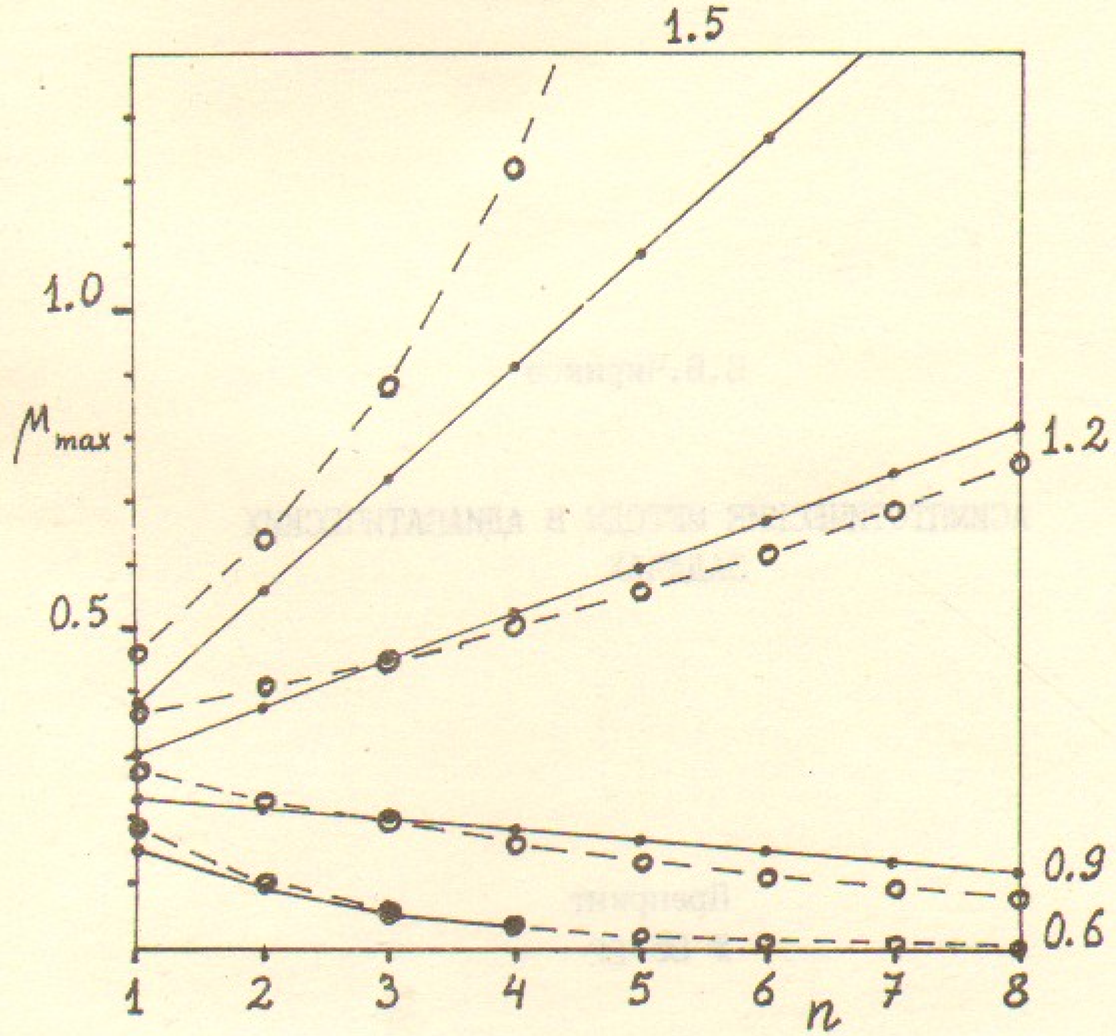
1. Г.И.Будкер. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. – В кн.: Г.И.Будкер. Собрание трудов. М.: Наука, 1982, с.72.
2. А.С.Бакай, Ю.П.Степановский. Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981.
3. Б.В.Чириков. ДАН СССР 125 (1959) 1015.
4. А.А.Андронов, М.А.Леонтович, Л.И.Мандельштам. Ж. русского физ.-хим.общества 60 (1928) 413; Л.И.Мандельштам. Полное собрание трудов. т.I, М.: Изд-во АН СССР, 1948, с.297.
5. Н.Мак-Лахлан. Теория и приложения функций Матье. М.: ИИЛ, 1953.
6. В.М.Фролов. Дифф. уравнения 18 (1982) 1363.
7. А.Лихтенберг, М.Либерман. Регулярная и стохастическая динамика, М.: Мир, 1984.
8. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
9. Б.В.Чириков. Атомная энергия 6 (1959) 630.
10. Б.В.Чириков. Физика плазмы 4 (1978) 521.
11. B.V.Chirikov. Phys. Reports 52 (1979) 263.
12. Б.В.Чириков. Динамика частиц в магнитных ловушках. – В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.13, ред. Б.Б.Кадомцев. М.: Энергоатомиздат, 1984, с.3.
13. M.Born, R.Oppenheimer. Ann. der Physik, IV, 84(1927) 457.
14. K.Stefański and H.S.Taylor. A New Approach to Studying Quasiperiodicity and the Onset of Chaos in Non-Integrable Hamiltonian Systems, 1984 (unpublished).
15. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 267, Новосибирск, 1969.
16. М.Крускал. Адиабатические инварианты. М.: ИИЛ, 1962.
17. В.И.Арнольд. УМН 18:6 (1963) 91.

18. В.И.Арнольд. ДАН СССР 156 (1964) 9.
19. В.И.Арнольд. УМН 38:4 (1983) 189.
20. Таблицы для вычисления функций Матье. М.: ВЦ АН СССР, 1967.
21. Т.Д.Кузнецова, Ю.Н.Смирнов. Таблицы характеристических показателей для уравнений Матье. М.: ВЦ АН СССР, 1969.

Таблица. Ширина параметрических резонансов для уравнения Матье (3.I)

$g=2q/a$	0.20	0.23	0.29	0.40	0.59	0.72	0.89	I.00	I.I0	I.47
n	5	8	I3	II	9	8	7	5	6	5
$\sqrt{a}$	5.0I	8.03	I3.07	II.I2	9.22	8.32	7.50	5.47	6.74	5.84
$(\Delta a)_T$ числ.	I.30-3	4.64-5	7.I-7	2.99-4	5.36-2	0.466	2.53	3.99	7.I8	I2.0
Δa (3.I8)	I.40-3	4.88-5	7.I5-7	2.93-4	5.04-2	0.432	2.5I	4.94	9.97	35.7
$\frac{(\Delta a)_T}{\Delta a}$	0.93	0.95	0.99	I.02	I.06	I.08	I.0I	0.8I	0.72	0.34

I.30-3 ≡ I.30 x 10^{-3}



Зависимость максимального инкремента неустойчивости μ_{max} от номера зоны n для уравнения Матье. Цифры на кривых – значения $g = 2q/a$. Сплошные линии соединяют численные данные (точки), взятые из /2I/ . Кружки, соединенные пунктирными линиями, получены из оценки (3.I8).

Б.В.Чириков

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АДИАБАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Препринт
№ 85-22

Работа поступила - 28 ноября I985 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 23.0I-I986 г. МН II638
Формат бумаги 60х90 I/I6 Усл.I,8 печ.л., I,5 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 22.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90