ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР 41

В.И. Ерофеев, Д.Д. Рютов

УДЕРЖАНИЕ ИОНОВ В ПРОБКОТРОНЕ С МАЛЫМ ПРОБОЧНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

ПРЕПРИНТ 85-131

НОВОСИБИРСК

В настоящем сообщении рассмотрена задача об удержании ионов в пробкотроне с пробочным отношением R , близким к единице. Хотя задача о продольных потерях ионов из открытой ловушки рассмотрена достаточно подробно (см.обзор [1] и библиографию в нем), оказалось, что случай $R-1 \ll 1$ обладает двумя интересными и, по-видимому, не отмечавшимися ранее особенностями: во-первых, при $R-1 \ll 1$ время жизни плазмы оказывается аномально малым по сравнению с тем, которое можно было бы получить из стандартных формул (см., напр., формулы (I) и (5) в работе [2]); во-вторых, выясняется, что в случае $R-1 \ll 1$ задача допускает простое аналитическое решение, самосогласованным образом учитывающее амбиполярное электрическое поле.

Задача будет решаться в следующих предположениях:

1) длина пробок $l_{пр}$ мала по сравнению с длиной участка однородного магнитного поля l (обозначения см. на рис.I);
2) инжекция ведется на участке однородного поля под углом 90^o к силовым линиям;
3) длина свободного пробега ионов относительно рассеяния на угол $\sim \sqrt{R-1}$ велика по сравнению с расстоянием между пробками l ;
4) электроны имеют больцмановское распределение с температурой T_e ;
5) температура T_e достаточно велика для того, чтобы можно было пренебречь торможением ионов за время их жизни в ловушке.

Перейдем к решению задачи. Ввиду близости пробочного отношения к единице, в интеграле столкновений Ландау, записанном в переменных ($v_{\parallel}$, $v_{\perp}$), достаточно удержать только члены, содержащие вторую производную по $v_{\parallel}$. Учитывая одновременно условия I-3 и 5, можно утверждать, что кинетическое уравнение, определяющее функцию распределения ионов на однородном участке, имеет вид:

$$D\frac{\partial^2 f}{\partial v_{\parallel}^2} + \frac{S}{2\pi v_o}\,\delta(v_{\perp}-v_o)\,\delta(v_{\parallel}) = 0 \qquad (I)$$

Здесь

$$D=\frac{4\pi\Lambda e^4}{m^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel'\int\limits_0^\infty f(v_\parallel', v_\perp')v_\perp' dv_\perp' \cdot \tag{2}$$

$$\cdot\int\limits_0^\pi d\varphi\frac{v_\perp^2+v_\perp'^2-2v_\perp v_\perp'\cos\varphi}{\left[(v_\parallel-v_\parallel')^2+v_\perp^2+v_\perp'^2-2v_\perp v_\perp'\cos\varphi\right]^{3/2}},$$

S – число быстрых протонов, захватываемых в единице объема плазмы в единицу времени, v_o e и m – их скорость, заряд и масса, Λ – кулоновский логарифм.

Так как при $R-1\ll 1$ скорость иона за время его жизни в ловушке меняется незначительно, "коэффициент диффузии" D достаточно вычислить при $|v_\perp-v_o|\ll v_o$, $|v_\parallel|\ll v_o$. Если просто пренебречь разбросом частиц по скоростям, т.е. положить $v_\perp'=v_o$, $v_\parallel'=0$, $v_\perp=v_o$, $v_\parallel=0$, то получим, что

$$D=\frac{\sqrt{2}\Lambda e^4 n_o}{m^2 v_o}\int\limits_0^\pi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}}. \tag{3}$$

Этот интеграл логарифмически расходится при $\varphi\to 0$. "Обрезание" его надлежит, очевидно, делать при значениях $\varphi\sim\Delta v/v_o$, соответствующих приобретаемому частицами разбросу по скоростям $\Delta v\sim v_o\sqrt{R-1}$. Результат имеет вид:

$$D\simeq\frac{2\Lambda e^4 n_o}{m^2 v_o}\ln\frac{v_o}{\Delta v} \tag{4}$$

Наличие большого логарифмического множителя $\ln(v_o/\Delta v)\sim\ln(R-1)^{-1/2}$ в выражении для D показывает, что при $R-1\to 0$ время жизни будет существенно (в $\ln(R-1)^{-1}$ раз) меньше, чем оцененное по стандартным формулам.

В Приложении коэффициент D вычислен с большей точностью

(удержан еще один член асимптотического разложения при $\Delta v\to 0$). Там же показано, что относительное изменение D в той области пространства скоростей, которая занята ионами, мало. Уточненное выражение для D имеет вид:

$$D=\frac{2\Lambda e^4 n_o}{m^2 v_o}\ln\frac{8v_o}{\Delta v}. \tag{4'}$$

Решая уравнение (I) с $D=const$, находим, что

$$f=\frac{S v_{\parallel o}}{4\pi D v_o}\delta(v_\perp-v_o)\begin{cases}1-\dfrac{|v_\parallel|}{v_{\parallel o}}, & |v_\parallel|<v\\ 0, & |v_\parallel|>v_{\parallel o},\end{cases} \tag{5}$$

где $v_{\parallel o}$ – не определенная пока граница области удержания. Через $v_{\parallel o}$ выражаются плотность n_o плазмы на однородном участке:

$$n_o=\frac{S v_{\parallel o}^2}{2D} \tag{6}$$

и "время жизни" плазмы

$$\tau\equiv\frac{n_o}{S}=\frac{v_{\parallel o}^2}{2D} \tag{7}$$

В области нарастающего магнитного поля в пробках плотность плазмы убывает, и здесь появляется амбиполярное электрическое поле. Амбиполярный потенциал φ связан с плотностью плазмы n соотношением

$$\varphi=\frac{T_e}{e}\ln\frac{n}{n_o} \tag{8}$$

(за нуль потенциала принято его значение на однородном участке).

Из условия сохранения адиабатического инварианта $\mu=mv_\perp^2/2H$ и полной энергии ионов легко найти выражение для функции распределения в точке с произвольными значениями φ и H:

$$f = \frac{S v_{\parallel 0}}{4\pi D v_0} \delta(v_\perp - v_0)\left(1 - \frac{1}{v_{\parallel 0}} \sqrt{v_\parallel^2 + \frac{2U}{m}}\right), \qquad (9)$$

где

$$U = \frac{m v_0^2}{2}\left(\frac{H}{H_0} - 1\right) + e\varphi \qquad (10)$$

– эффективная потенциальная энергия продольного движения; примерная зависимость U от координат показана на рис.1. Через максимальное значение U выражается $v_{\parallel 0}$:

$$v_{\parallel 0} = \sqrt{2U_{max}/m} \qquad (11)$$

Функция распределения дается выражением (9) в области, где

$$v_\parallel^2 < 2\left(U_{max} - U\right)/m, \qquad (12)$$

а вне этой области $f = 0$. Заметим еще, что в множителе $\delta(v_\perp - v_0)$ в формуле (8) мы пренебрегаем изменением поперечной скорости частицы (возникающим вследствие сохранения μ), поскольку при $R-1 \ll 1$ это изменение мало.

Из выражения (9) легко находится плотность плазмы:

$$n = n(U) = n_0 F\left(\frac{U}{U_{max}}\right) \qquad (13)$$

$$F\left(\frac{U}{U_{max}}\right) = \sqrt{1 - \frac{U}{U_{max}}} - \frac{U}{U_{max}} \ln\left(\sqrt{\frac{U_{max}}{U} - 1} + \sqrt{\frac{U_{max}}{U}}\right) \qquad (14)$$

Формально n обращается в нуль в точке, где $U = U_{max}$. Фактически же здесь имеется конечная (хотя и малая) концентрация частиц, вылетающих из ловушки (или частиц специально

создаваемой запробочной плазмы). Поскольку окончательные результаты зависят от этой величины лишь логарифмически, мы учтем наличие плазмы в пробке и за пробкой тем, что добавим к выражению (13) постоянную (не зависящую от координат) добавку εn_0 (с $\varepsilon \ll 1$). В соответствии с этим замечанием, запишем уравнение квазинейтральности в виде:

$$\exp\frac{e\varphi}{T_e} = \begin{cases} (1-\varepsilon) F\left(\frac{U}{U_{max}}\right) + \varepsilon, & U < U_{max}, \\ \varepsilon, & U > U_{max}. \end{cases} \qquad (15)$$

Получающиеся из уравнения (15) графики зависимости φ от U при $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ показаны на рис.2. С помощью соотношения (10) из них можно найти зависимости $\varphi(H)$ и $U(H)$ на участке от центра ловушки до пробки. Соответствующие графики приведены на рис.3. Видно, что основное падение амбиполярного потенциала приходится на участок вблизи максимума магнитного поля.

Из соотношений (10) и (15) легко усмотреть, что максимум U совпадает с максимумом магнитного поля, т.е.

$$U_{max} = W_0(R-1) - T_e \ln\frac{1}{\varepsilon} \qquad (16)$$

($W_0 \equiv m v_0^2/2$ – энергия инжекции ионов). При возрастании T_e величина U_{max} убывает и при

$$T_e = T_{e\,crit} \equiv \frac{W_0(R-1)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}$$

обращается в нуль. При $T_e > T_{e\,crit}$ удержание ионов в ловушке невозможно.

Для нахождения величины $n_0\tau$, характеризующей качество удержания плазмы в пробкотроне, воспользуемся формулами (4), (7), (11) и (16). Результат имеет вид:

$$n_o \tau = \frac{(m/2)^{1/2} W_o^{3/2}}{\Lambda e^4} \frac{R_{eff} - 1}{\ln \frac{8}{\sqrt{R_{eff} - 1}}} \qquad (17)$$

где

$$R_{eff} = R - \frac{T_e}{W_o} \ln \frac{1}{\varepsilon} \qquad (18)$$

Сравнение полученного нами выражения для $n_o \tau$ (ниже оно обозначается индексом "I") со "стандартным", вычисленным по формуле (5) из обзора [2] (обозначается индексом "2"), проведем для случая малых T_e, когда последним слагаемым в формуле (18) можно пренебречь. Результаты сравнения приведены в таблице.

$R - 1$	0.05	0,1	0,2	0.3
$\frac{(n_o \tau)_1}{(n_o \tau)_2}$	0.69	0.78	0.92	1.0

Из таблицы видно, что при $\sqrt{R-1} \ll 1$ время жизни плазмы в пробкотроне оказывается меньше, чем вычисленное по "стандартным" формулам. Влияние этого отрицательного фактора можно до некоторой степени уменьшить, инжектируя в систему ионы с энергетическим разбросом $\Delta W \gg W_o (R_{eff} - 1)$.

Еще одна особенность случая малых пробочных отношений состоит в том, что эффекты амбиполярного потенциала могут быть количественно учтены в рамках простого аналитического выражения (18). Из выражения (18) следует, в частности, что существует некоторое предельное значение температуры электронов, выше которого удержание плазмы в пробкотроне невозможно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициент диффузии ионов по продольной скорости описывается выражением (2) и зависит от вида функции распределения. Разброс ионов по $V_\parallel$ определяется границей конуса потерь и составляет $\Delta V_\parallel \simeq V_o \sqrt{R-1}$. За время рассеяния в конус потерь происходит также рассеяние по поперечной скорости на величину $\Delta V_\perp \sim \Delta V_\parallel \sim V_o \sqrt{R-1}$. Основываясь на этих соображениях, при вычислении коэффициента D примем модель, в которой функция распределения f считается однородной в тороидальной области $V_\parallel^2 + (V_\perp - V_o)^2 < \Delta V^2$ и равной нулю вне этой области:

$$f = \begin{cases} \dfrac{n_o}{2\pi^2 V_o \Delta V^2}, & V_\parallel^2 + (V_\perp - V_o)^2 < \Delta V^2, \\ 0, & V_\parallel^2 + (V_\perp - V_o)^2 > \Delta V^2. \end{cases}$$

В случае малого разброса ионов по скорости $\Delta V \ll V_o$ коэффициент диффузии ионов со скоростью $V_\parallel = 0$, $V_\perp = V_o$ удается вычислить аналитически. Это можно сделать следующим образом.

Положив в интеграле (2) $V_\parallel = 0$, $V_\perp = V_o$, перейдем в нем от переменных $V_\parallel'$, $V_\perp'$, φ к тороидальным координатам w, θ, φ, смысл которых ясен из рис.4. Имеем (пока точно):

$$V_\parallel' = -w \sin\theta, \quad V_\perp' = V_o + w\cos\theta,$$

$$D = \frac{2\Lambda e^4 n_o}{\pi m^2 V_o \Delta V^2} \int_0^{\Delta V} w\,dw \int_0^{2\pi} d\theta (V_o + w\cos\theta) \cdot \int_0^{\pi} d\varphi \left(\frac{1}{u} - \frac{w^2 \sin^2\theta}{u^3} \right), \qquad (П.1)$$

$$u^2 = w^2 + 4 V_o \sin^2\frac{\varphi}{2} (V_o + w\cos\theta).$$

Основной вклад в интеграл по $d\varphi$ вносит область углов $\varphi \lesssim w/V_o < \Delta V / V_o$. Имея в виду это обстоятельство, можно с достаточной точностью положить

$$u^2 = w^2 + 4v_0^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (П.2)$$

В этом приближении u не зависит от θ, и интегрирование по $d\theta$ в (П.I) выполняется элементарно. Выражение для D приводится к виду:

$$D = \frac{2\Lambda e^4 n_0}{m^2 v_0 \Delta v^2}\int\limits_0^{\Delta v} w\,dw\left[\frac{1}{w}\frac{d}{dw}w^2\int\limits_0^{\pi}\frac{d\varphi}{u}\right] =$$

$$= \frac{2\Lambda e^4 n_0}{m^2 v_0}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta v^2 + 4v_0^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}} =$$

$$= \frac{2\Lambda e^4 n_0}{m^2 v_0^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Delta v^2}{4v_0^2}}}\,K\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Delta v^2}{4v_0^2}}}\right),$$

где $K(x)$ - полный эллиптический интеграл (см. [3], стр.96). Используя известное асимптотическое разложение $K(x)$ при $x\to 1$ (см. [3], стр.II4) и удерживая члены порядка $\ln v_0/\Delta v$ и порядка единицы*), получаем формулу (4′).

Чтобы оценить точность формулы (4′), мы произвели ее сравнение с коэффициентом диффузии, вычисленным в четырех различных точках численным методом. Положение этих точек в сечении тора показано на рисунке 4.

В результате сравнения мы убедились, что даже при $\Delta v/v_0 \simeq 0{,}4$ величина коэффициента диффузии меняется от точки к точке не более чем на 20% от величины, рассчитанной по формуле (4′).

---

*) Удерживать более высокие члены разложения (порядка $(\Delta v/v_0)^2 \ln(v_0/\Delta v)$ и выше) было бы превышением точности, ввиду использованного ранее приближения (П.2).

Литература

I. В.П.Пастухов. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.I3, М., Энергоатомиздат, I984 г., стр.I60.

2. Д.В.Сивухин. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.5, М., Атомиздат, I967 г., стр.439.

3. Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Лёш. "Специальные функции", М., изд. "Наука", I964 г.

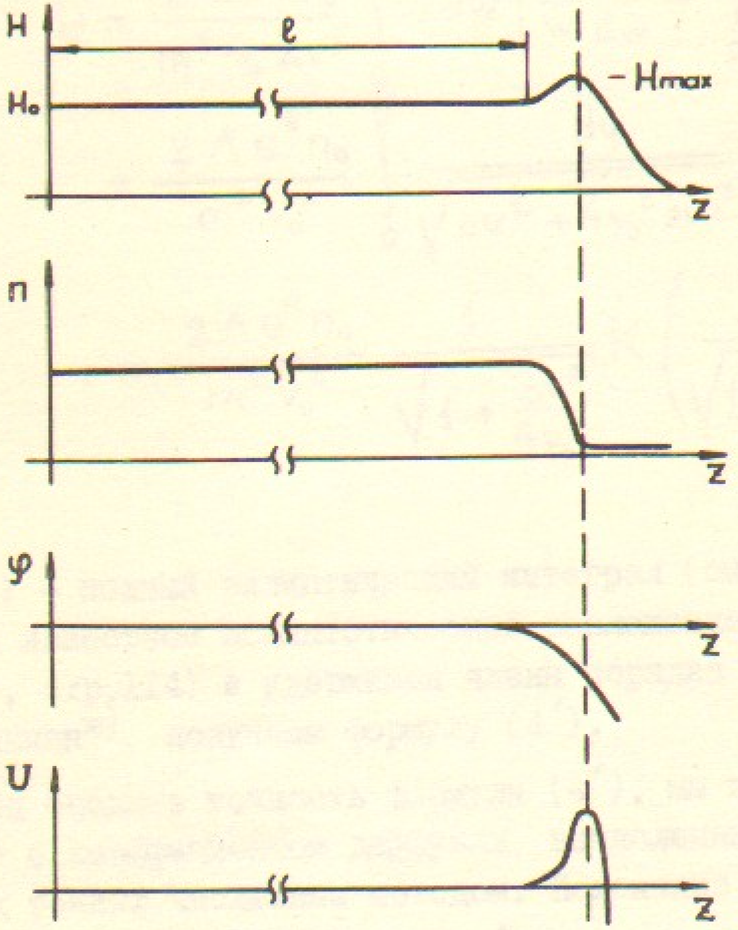

Рис.I. Величина магнитного поля H, плотности электронов n , электрического потенциала φ и кинетической энергии U в зависимости от расстояния до центра ловушки.

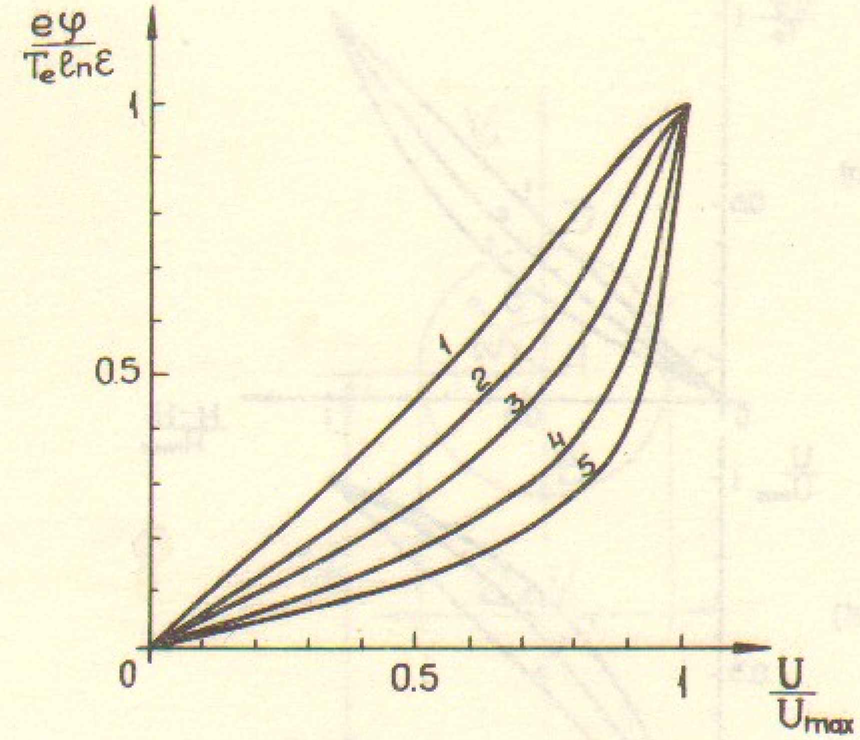

Рис.2. Зависимость электрического потенциала φ от кинетической энергии U при различных ε .
I - ε = IO^{-I}, 2 - ε = $3.IO^{-2}$,
3 - ε = IO^{-2}, 4 - ε = IO^{-3},
5 - ε = IO^{-4}

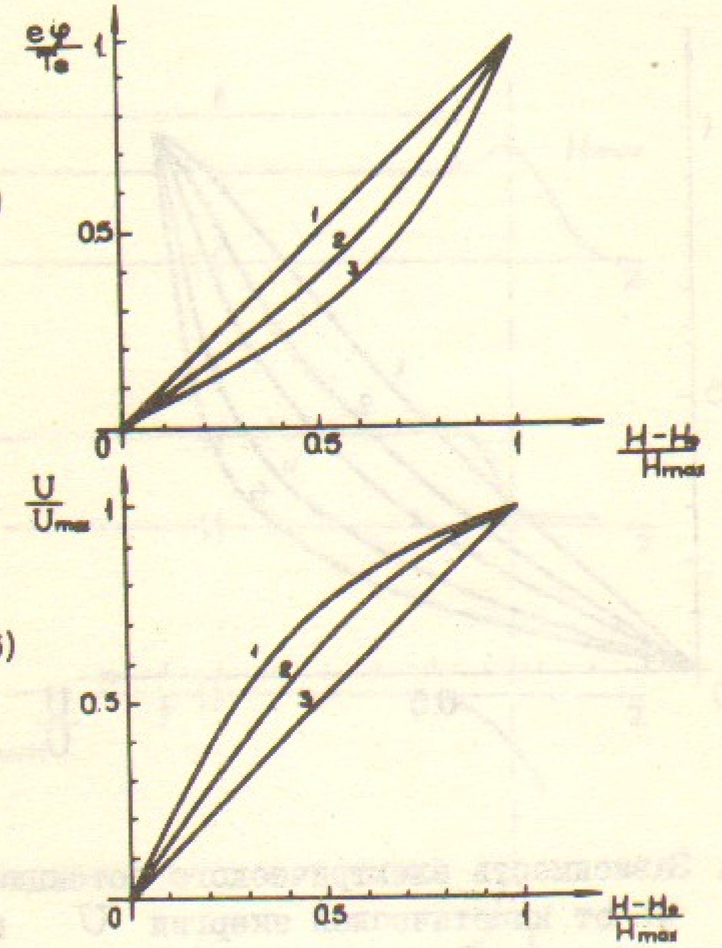

Рис.3. Зависимости электрического потенциала φ (а) и кинетической энергии U (б) от магнитного поля. Зависимости приведены при ε =I0^{-2} и различных β . Параметр $\beta = T_e \ln(1/\varepsilon)/(W_0(R-1))$ характеризует отношение электрического потенциала в пробке к максимальной энергии продольного движения ионов, захваченных в ловушке.
I - $\beta \to$ I, 2 - β = 0,5 3 - β = 0,I

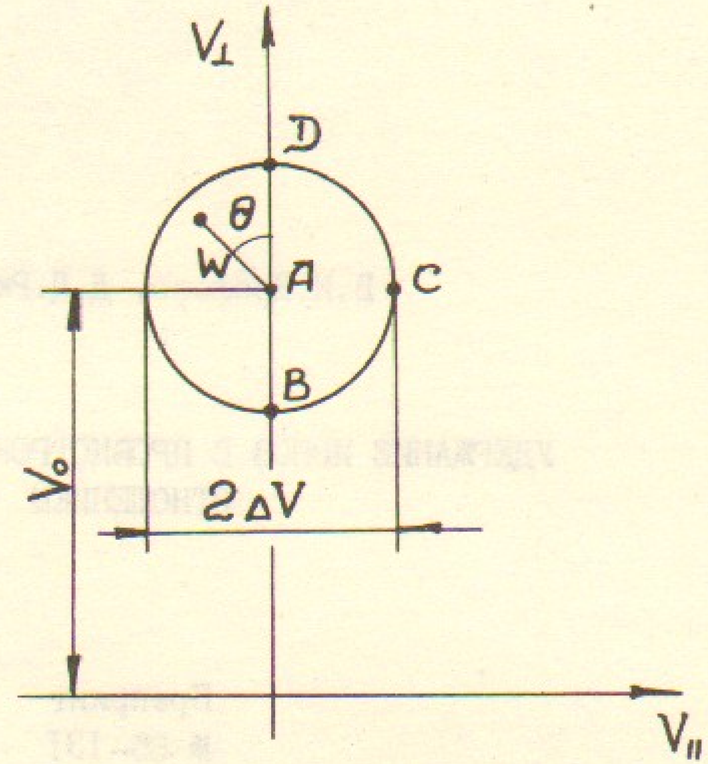

Рис.4. Область в пространстве скоростей, в которой функция распределения ионов считается отличной от нуля. Величины W и θ - тороидальные координаты - определяют положение иона в плоскости ($V_\parallel, V_\perp$); A, B, C и D - точки, в которых производился численный счет коэффициента диффузии.

В.И.Ерофеев, Д.Д.Рютов

УДЕРЖАНИЕ ИОНОВ В ПРОБКОТРОНЕ С МАЛЫМ ПРОБОЧНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

Препринт
№ 85-131

Работа поступила - 9 июля 1985 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 25.X-1985 г. МН 06782
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,3 печ.л., 1,0 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 131.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90