



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

30

Б. Н. Брейзман

**РЕАБСОРБЦИЯ ВОЛН ПРИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ
РЕЛАКСАЦИИ
БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ**

ПРЕПРИНТ 85-119



НОВОСИБИРСК

Аннотация

Найдено решение двумерной задачи о квазилинейной релаксации быстрых электронов, возбуждающих в плазме ленгмюровские волны. Показано, что на протяжении всего процесса релаксации энергия волн остается малой по сравнению с начальной энергией частиц; параметром малости является обратный кулоновский логарифм. Полученные результаты приложимы к решавшейся ранее численно задаче о релаксации ионов, образующихся в магнитной ловушке при поперечной инжекции быстрых атомов.

Наиболее известный пример квазилинейной релаксации быстрых частиц—это релаксация электронов, возбуждающих в плазме ленгмюровские волны. Соответствующая система уравнений для функции распределения электронов $f(\mathbf{v})$ и спектральной плотности энергии $W(\mathbf{k})$ имеет вид (см., например, [1])

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \int \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} W \delta(\omega_p - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial v_\beta}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = W \cdot \omega_p \frac{4\pi^2 e^2}{mk^2} \cdot \int k_\alpha \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} \delta(\omega_p - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (2)$$

При решении этих уравнений важную роль играет большой параметр Λ , равный логарифму отношения плотности энергии волн к плотности энергии тепловых шумов. Использование этого параметра позволило, в частности, дать простое описание динамики релаксации в одномерном случае, когда квазилинейная диффузия создает на функции распределения постепенно расширяющееся плато [2]. В случае двух и трех измерений ситуация пока остается менее ясной, поскольку здесь имеется существенная дополнительная трудность: каждая частица взаимодействует не с одной, а со многими волнами, а каждая волна—со многими частицами. В настоящей работе будет показано, что при $\Lambda \gg 1$ упомянутая особенность двумерной и трехмерной задач может приводить к сильной реабсорбции волн, из-за чего энергия волн, участвующих в процессе релаксации, оказывается малой по сравнению с энергией частиц.

Все необходимые рассуждения мы проведем на примере двумерной модели, в которой векторы \mathbf{v} и \mathbf{k} имеют лишь x - и y -компоненты, причем функции f и W зависят только от модулей соот-

ветствующих двумерных векторов. В этом случае уравнения (1), (2) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} D \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 2\gamma W, \quad (4)$$

где

$$D(v;t) \equiv \omega_p \cdot \frac{8\pi^2 e^2}{m^2} \int_0^v (v^2 - u^2)^{-1/2} \cdot W(u;t) du, \quad (5)$$

$$\gamma(u;t) \equiv \frac{4\pi^2 e^2}{m\omega_p} \cdot u^3 \cdot \int_u^\infty (v^2 - u^2)^{-1/2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} dv. \quad (6)$$

Здесь вместо волнового числа k введена новая независимая переменная $u = \omega_p/k$ (фазовая скорость волны).

Уравнения (3), (4) естественным образом возникают в трехмерной задаче, если функция распределения частиц такова, что инкремент неустойчивости максимален для волн с нулевой z -компонентой вектора \mathbf{k} . Этим свойством может обладать, в частности, функция распределения надтепловых электронов, удерживаемых в открытой магнитной ловушке. К уравнениям вида (3), (4) сводится также задача о релаксации быстрых ионов, инжектированных в магнитную ловушку поперек поля [3]. При численном решении этой задачи было обнаружено, что энергия волн, возбуждаемых в ходе релаксации, оказывается необычно малой (см. [3]), однако численный подход не позволил выявить тот факт, что малость энергии не случайна, а связана с параметром Λ . Ниже мы проведем оценки, позволяющие найти зависимость энергии волн от Λ , а затем, используя условие $\Lambda \gg 1$, построим решение уравнений (3), (4), согласующееся с этими оценками.

Предположим, что в начальный момент уровень колебаний близок к тепловому, а функция распределения частиц сосредоточена в узкой окрестности Δv некоторой скорости v_0 , и оценим с помощью уравнения (3) и (4) время удвоения разброса частиц по скоростям. Ясно что искомое время t во всяком случае не меньше времени нарастания волн до уровня, существенно превышающего тепловой. Максимальный инкремент неустойчивости, возбуждаемой

частицами с концентрацией n' оценочно равен $\omega_p (n'/n) (v_0/\Delta v)^{3/2}$, где n — концентрация плазмы. Поэтому

$$t \gtrsim \Lambda \omega_p^{-1} (n/n') (\Delta v/v_0)^{3/2}$$

С другой стороны, согласно уравнению (3),

$$t \sim (1/U) (m^2/e^2) \omega_p (\Delta v)^2 \cdot (\Delta v/v_0)^{1/2},$$

где U — характерное значение плотности энергии волн. Из этих двух оценок следует, что

$$U \lesssim n' m v_0 \Delta v / \Lambda. \quad (7)$$

Сравним теперь величину U с энергией, которую теряют частицы, замедляющиеся в ходе релаксации (уменьшение энергии этих частиц ΔQ можно оценить как $n' m v_0 \Delta v$). При $\Lambda \gg 1$ энергия волн U , пропорциональная $1/\Lambda$, оказывается малой по сравнению с ΔQ . Поэтому для соблюдения энергетического баланса необходимо, чтобы высвобождаемая энергия ΔQ почти целиком поглощалась ускоряющимися частицами. Иными словами, размытие функции распределения должно происходить без существенного изменения полной энергии частиц. Здесь уместно еще раз обратить внимание на отличие рассматриваемой ситуации от одномерной, где, как известно, передаваемая волнам энергия не содержит малого параметра $1/\Lambda$. В одномерной задаче согласованность оценок времени возбуждения волн и времени перестройки функции распределения частиц обеспечивается тем, что в области, где коэффициент квазилинейной диффузии отличен от нуля, функция распределения принимает вид плато. В рассматриваемом нами двумерном случае это невозможно, так как при любом спектре волн область квазилинейной диффузии простирается до сколь угодно больших скоростей.

Проделанные оценки помогают найти автомодельное решение системы (3), (4) для первоначально моноэнергетического распределения частиц по скоростям

$$f(v;0) = \frac{n'}{2\pi v_0} \delta(v - v_0). \quad (8)$$

Чтобы построить это решение, рассмотрим предварительно характер зависимости инкремента γ от фазовой скорости волны u для функции распределения, отличной от нуля при $v \sim v_0$ и достаточно быстро стремящейся к нулю при $v \rightarrow 0$ и $v \rightarrow \infty$. При малых фазовых скоростях ($u \ll v_0$) инкремент положителен и растет с увеличе-

нием u как u^3 . Далее инкремент проходит через максимум, а затем спадает до отрицательных значений; при $u \rightarrow \infty$ он, оставаясь отрицательным, стремится к нулю. Напомним теперь, что в квазилинейной задаче область фазовых скоростей, занятая волнами, определяется из условия максимальности интеграла

$$\int_0^t \gamma(u; \tau) d\tau$$

как функции u , причем для всех возбужденных в ходе релаксации волн должно выполняться соотношение

$$2 \cdot \int_0^t \gamma(u; \tau) d\tau = \Lambda. \quad (9)$$

Из вида функции $\gamma(u)$ следует, что это соотношение может иметь место только при не слишком малых и не слишком больших фазовых скоростях. Иными словами, спектральная плотность энергии волн может отличаться от нуля лишь в конечном интервале значений u . Границы этого интервала u_- и u_+ , вообще говоря, зависят от времени. Если исходное распределение частиц моноэнергетично, то на начальной стадии релаксации величины u_- и u_+ , очевидно, близки к v_0 , так как соответствующий инкремент имеет острый максимум при $u \approx v_0$. Заметим далее, что нижняя граница спектра u_- одновременно является и границей области квазилинейной диффузии, поскольку при каждом значении v вклад в диффузию вносят только те волны, у которых $u \leq v$. Отсутствие диффузии при $0 < v < u_-$ означает, что в этом интервале скоростей распределение частиц остается неизменным. Для начального распределения (8) функция f здесь равна нулю, так что величина u_- в данном случае совпадает с нижней границей распределения частиц по скоростям.

Отыскивая автомодельное решение системы (3) — (4), удобно с самого начала предположить, что распределение частиц $f(v; t)$ имеет вид

$$f(v; t) = \begin{cases} 0; & 0 < v < u_-(t) \\ \frac{1}{v_0^2 \Delta^2(t)} F(s); & v > u_-(t) \end{cases} \quad (10)$$

где $s = (v^2 - u_-^2)^{1/2} / (v_0 \cdot \Delta)$, а F , u_- и Δ — некоторые подлежащие определению функции. Это предположение, как мы увидим,

оправдывается получающимся результатом. Предлагаемая автомодельная подстановка представляет собой обобщение более привычной подстановки, использовавшейся в работе [4] применительно к задаче о затухании интенсивного двумерного пакета ленгмюровских волн.

Концентрация частиц n' и плотность их энергии Q связаны с функцией F соотношениями

$$n' = 2\pi \int_0^\infty F(s) s ds,$$

$$Q = n' m u_-^2 / 2 + \pi m v_0^2 \Delta^2 \cdot \int_0^\infty F(s) s^3 ds. \quad (11)$$

Первое из этих соотношений является условием нормировки функции распределения, а второе позволяет найти связь между u_- и Δ . Действительно, согласно изложенным выше оценкам, при $\Lambda \rightarrow \infty$ полная энергия частиц должна сохраняться. Учитывая, что для распределения (8) $Q = n' m v_0^2 / 2$, имеем отсюда

$$u_-^2 = v_0^2 (1 - \alpha^2 \Delta^2),$$

где

$$\alpha^2 = \int_0^\infty F s^3 ds / \int_0^\infty F s ds.$$

Константу α в этой формуле можно без ограничения общности считать равной единице, что эквивалентно введению вместо Δ новой неизвестной функции $\Delta_1 = \alpha \Delta$. Подстановка функции (10) в уравнение (3) показывает, что автомодельное выражение для коэффициента диффузии должно иметь вид

$$D(v; t) = \begin{cases} 0; & v < u_-(t) \\ \Delta \Delta^3 \cdot v_0^4 \cdot G(s); & v > u_-(t) \end{cases} \quad (12)$$

где G — некоторая функция, зависящая только от s . При таком коэффициенте диффузии уравнение (3) легко интегрируется:

$$F(s) = F(0) \cdot \exp \left[\int_0^s s_1 (1 - s_1^2) / G(s_1) ds_1 \right]. \quad (13)$$

Входящая сюда константа $F(0)$ определяется соотношением (11).

Из соотношений (5) и (12) следует, что в интересующей нас задаче спектр волн $W(u;t)$ надлежит искать в виде

$$W(u;t) = \begin{cases} 0; & 0 < u < u_-(t) \\ \frac{m^2 v_0^3}{8\pi^2 e^2 \omega_p} \cdot \frac{u}{z} \Delta \Delta^2 \cdot w(z); & u > u_-(t) \end{cases} \quad (14)$$

где w — некоторая функция переменной $z = (u^2 - u_-^2)^{1/2} / (v_0 \Delta)$. При этом, согласно формуле (5),

$$G(s) = \int_0^s (s^2 - z^2)^{-1/2} \cdot w(z) dz. \quad (15)$$

Обратимся теперь к инкременту неустойчивости $\gamma(u; t)$ и, воспользовавшись формулами (6), (10), (13), выделим в нем зависимость от автомодельной переменной z :

$$\gamma(u;t) = \frac{4\pi^2 e^2 u^3}{m \omega_p v_0^3 \Delta^3} F(0) \cdot \begin{cases} \tilde{\Gamma}(\sqrt{(u^2 - u_-^2)/(v_0^2 \Delta^2)}); & 0 < u < u_- \\ \Gamma(z); & u > u_- \end{cases} \quad (16)$$

Здесь

$$\tilde{\Gamma}(x) = \int_0^\infty (s^2 + x^2)^{-3/2} [F(s)/F(0)] s ds,$$

$$\Gamma(z) = \int_z^\infty (s^2 - z^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial s} [F(s)/F(0)] ds.$$

Наличие в задаче большого параметра Λ позволяет считать, что при всех тех значениях u , где спектральная плотность энергии волн велика по сравнению с тепловой, функция $\gamma(u;t)$ равна нулю. Формально этот результат можно получить путем дифференцирования соотношения (9) по времени. Поскольку в каждый заданный момент времени фазовые скорости надтепловых волн ограничены снизу величиной u_- , условие $\gamma=0$ не нарушает рассматриваемой нами автомодельности и записывается в виде

$$\Gamma(z) = \int_z^\infty (s^2 - z^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial s} [F(s)/F(0)] ds = 0, \quad w(z) \neq 0. \quad (17)$$

Область нулевых значений Γ примыкает к точке $z=0$ и ограничена со стороны больших z некоторой величиной z_+ . При $z > z_+$ плотность энергии волн равна нулю, а величина Γ должна быть отрицательной, что диктуется требованием устойчивости решения относительно малых возмущений. С учетом последнего обстоятельства соотношения (13), (15), (17) образуют замкнутую систему уравнений для отыскания функций $F(s)$, $G(s)$ и $w(z)$. Найдя вид функции F , можно затем выразить инкремент (16) через неизвестную пока функцию $\Delta(t)$ и, подставив $\gamma(u; t)$ в уравнение (9), получить в итоге следующее интегральное уравнение для Δ :

$$[1 - \Delta^2(\tau)]^{-3/2} = \int_0^\tau d\tau_1 \int_0^\infty [(s^2 - 1)\Delta^2(\tau_1) + \Delta^2(\tau)]^{-3/2} \cdot \frac{F(s)}{F(0)} s ds. \quad (18)$$

Здесь вместо времени t введена безразмерная переменная τ , связанная с t соотношением

$$\tau = \frac{8\pi^2 e^2 F(0)}{m \omega_p \Lambda} t.$$

Систему уравнений (13), (15), (17) удастся решить только численно. Для ее решения использовалась следующая итерационная процедура. На первом шаге задавалась функция

$$w_1(z) = \begin{cases} 1; & 0 < z < 0,6 \\ 0; & z > 0,6 \end{cases}$$

по которой с помощью выражений (13), (15), (17) вычислялись функции $G_1(s)$, $F_1(s)$ и $\Gamma_1(z)$. Вычисление $W(z)$ на втором и последующих шагах велось по рекуррентной формуле

$$w_n(z) = \frac{1}{2} [w_{n-1} + (w_{n-1} + 10^{-4}) \exp(R_n \Gamma_{n-1})],$$

где $R_n \equiv 1,5 + (n/25) \cdot (3z)^6$. После 40—50 шагов различие между функциями W_n становилось пренебрежимо малым по сравнению с характерными значениями этих функций. Так, в частности, результаты последних пяти итераций совпадали с точностью до $5 \cdot 10^{-3}$. Полученные в итоге функции $F(s)/F(0)$ и $W(z)$ представлены на рис. 1, 2. Заметим, что для функции $W(z)$ с хорошей точностью справедлива простая аппроксимация

$$w(z) = 0,73 \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{z_+} \right)^2 \right], \quad z_+ = 0,48$$

Интеграл от найденной функции $F/F(0)$ с весом s оказывается равным 1,33. Поэтому, согласно формуле (11),

$$F(0) = n' / (2,66\pi).$$

Чтобы построить решение уравнения (18), удобно выбрать в качестве независимой переменной величину Δ , а в качестве неизвестной функции производную $d\tau/d\Delta$. Выделив в этой производной множитель $\Delta^2/(1-\Delta^2)^2$, характеризующий ее поведение при $\Delta \rightarrow 0$ и $\Delta \rightarrow 1$, получим

$$\frac{d\tau}{d\Delta} = \varphi(\Delta) \cdot \frac{\Delta^2}{(1-\Delta^2)^2}, \quad (19)$$

где $\varphi(\Delta)$ — новая неизвестная функция, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$(1-\Delta^2)^{-3/2} = \int_0^1 \frac{\varphi(x\Delta) dx}{(1-x^2\Delta^2)^2} \int_0^\infty \frac{s ds}{[(s^2-1)x^2+1]^{3/2}} \cdot \frac{F(s)}{F(0)}. \quad (20)$$

Уравнение (20) решалось численно путем разложения обеих его частей в ряд Тейлора по Δ . Подсчет первых двадцати коэффициентов ряда для функции φ показывает, что эту функцию можно заменить константой, равной 1,3, так как при изменении Δ от нуля до единицы $\varphi(\Delta)$ изменяется не более чем на 5%.

Постоянство функции $\varphi(\Delta)$ дает возможность получить из уравнения (19) приближенное аналитическое выражение для τ :

$$\tau = 0,32 \cdot \left[2\Delta/(1-\Delta^2) + \ln \frac{1-\Delta}{1+\Delta} \right]$$

и тем самым найти зависимость распределений частиц и волн от времени.

По известным функциям $w(z)$ и $\tau(\Delta)$ нетрудно, наконец, вычислить плотность энергии волн

$$U = 2\pi\omega_p^2 \int_0^\infty W(u;t) \frac{du}{u^3} = \frac{n' m v_0^2}{2\Lambda} q(\Delta).$$

Входящая сюда безразмерная функция $q(\Delta)$ имеет следующий вид:

$$q(\Delta) = \frac{4\pi F(0)\Delta^2(1-\Delta^2)^2}{n'\varphi(\Delta)} \cdot \int_0^{z_+} [1+\Delta^2(z^2-1)]^{-3/2} w(z) dz.$$

График этой функции изображен на рис. 3. Как видно из рисунка, максимальное значение q равно примерно 0,1. Таким образом, отношение энергии волн к начальной энергии частиц содержит не только «буквенный» малый параметр $1/\Lambda$, соответствующий оценке (7), но и дополнительный малый численный коэффициент. Обе эти малости следует иметь в виду при обсуждении роли нелинейных эффектов в рассматриваемой задаче, так как они существенно смягчают критерий применимости квазилинейного приближения по сравнению с грубой оценкой, подразумевающей, что энергия волн сопоставима с полной энергией быстрых частиц.

Автор благодарен В.Т. Астрелину за помощь в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ведынов А.А., Рютов Д.Д. - В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.6. Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1972, с.3.
2. Иванов А.А., Рудаков Л.И. ЖЭТФ, 1966, т.51, с.1522.
3. Kulygin V.M., Mikhailovskii A.V., Tsapelkin E.S. Plasma Phys., 1971, v.13., p.1111.
4. Галеев А.А., Сагдеев Р.З. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.7. Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973, с.3.

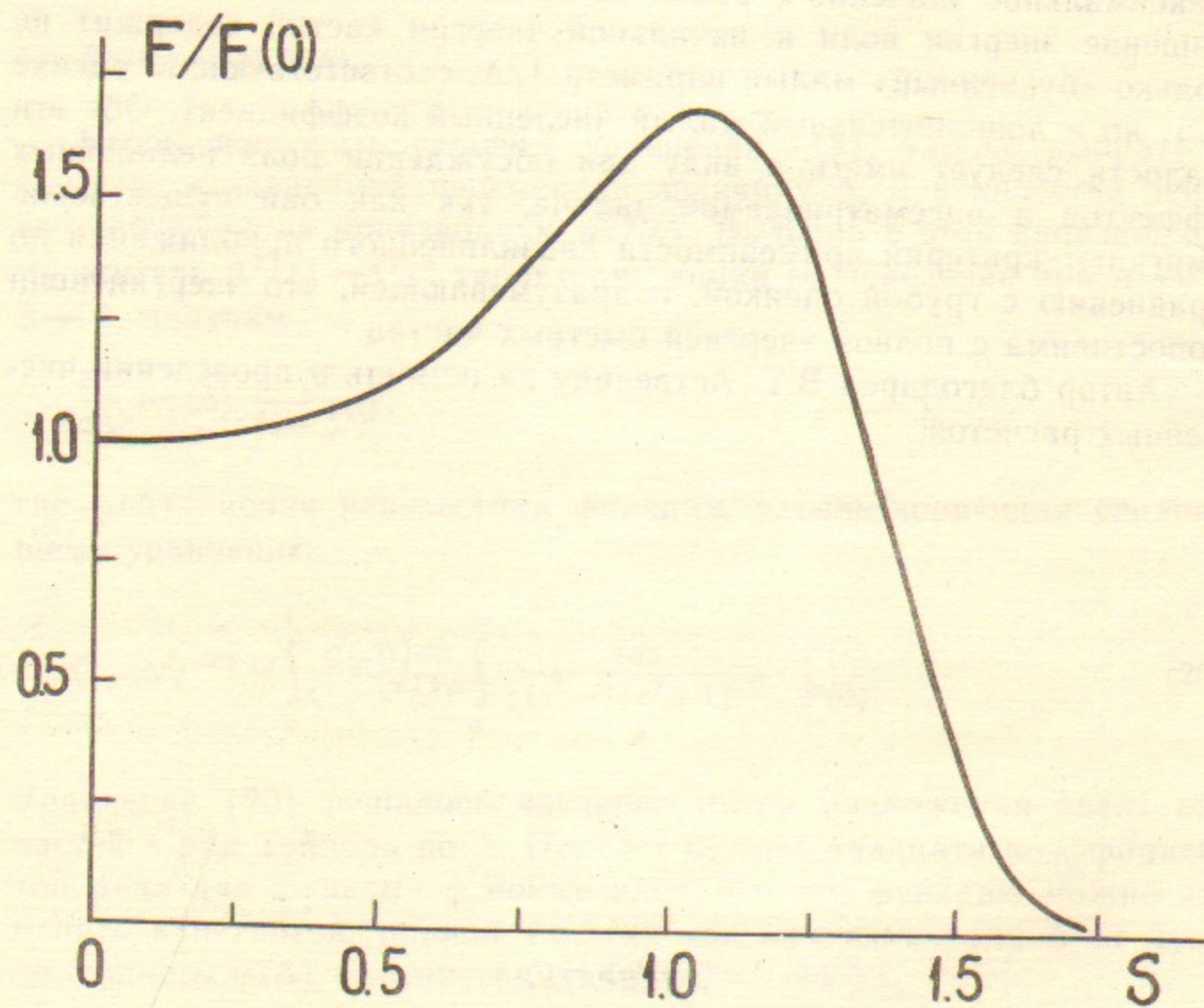


Рис.1 Автомоделная функция распределения частиц

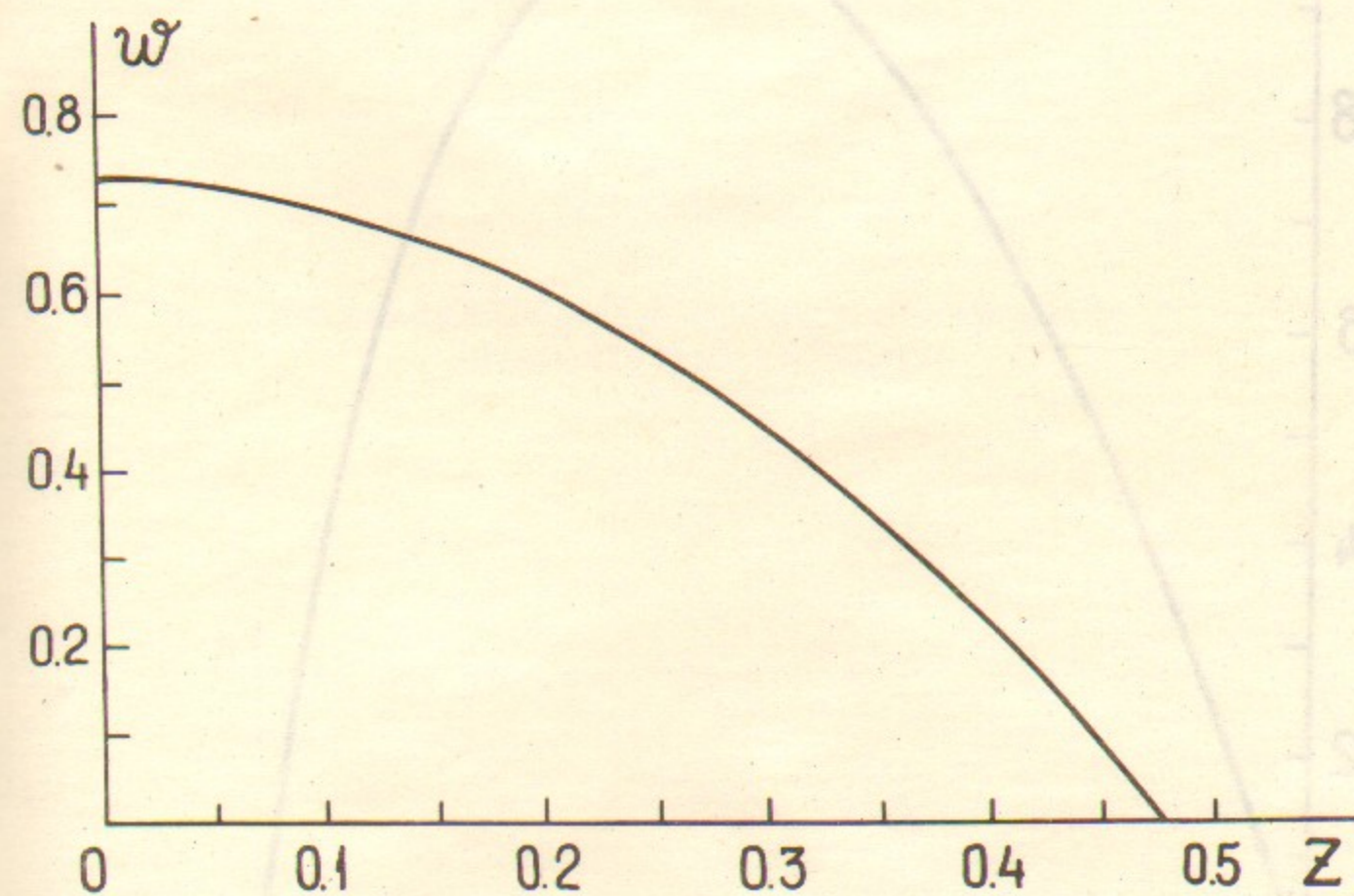


Рис.2 Автомоделное распределение волн

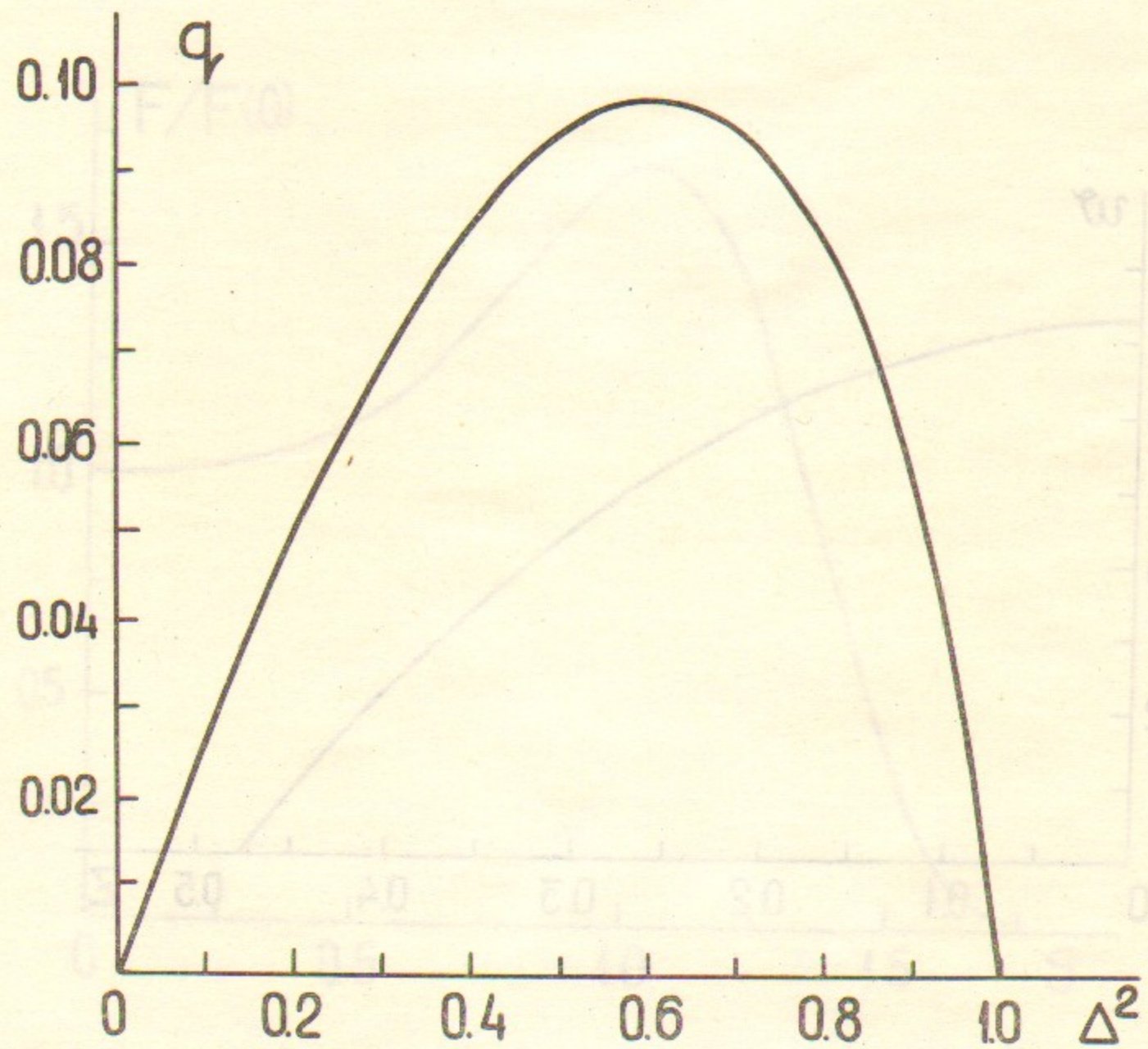
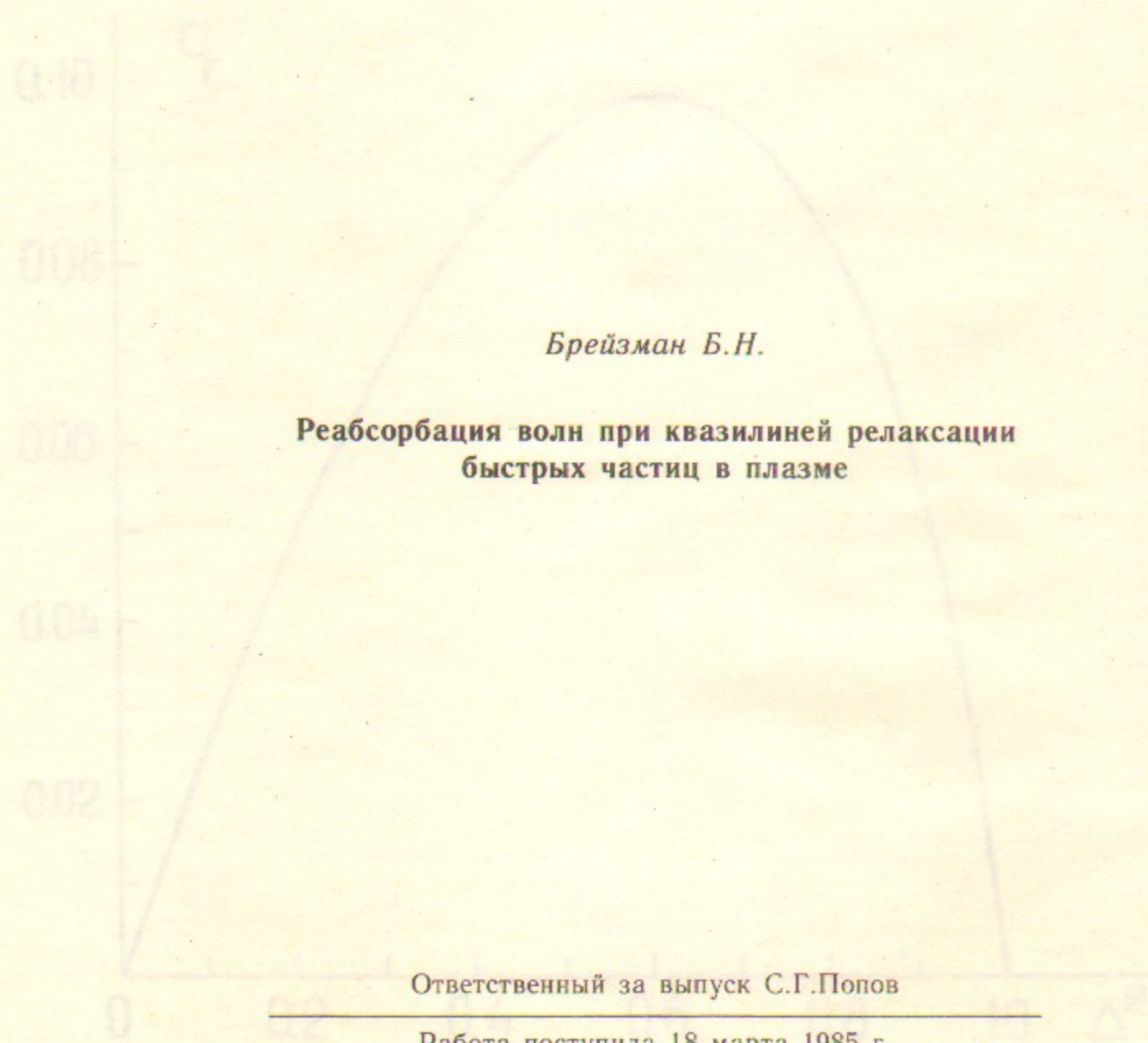


Рис.3 Изменение полной энергии волн в процессе релаксации



Брейзман Б.Н.

**Реабсорбация волн при квазилиней релаксации
быстрых частиц в плазме**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 18 марта 1985 г.
Подписано в печать 9 сентября 1985 г. МН 06729
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,3 печ.л., 1,0 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 119

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*