ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

19

Д.В. Пестриков

# БЫСТРЫЕ ОДНООБОРОТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ СГРУППИРОВАННЫХ ПУЧКОВ.

ПРЕПРИНТ 85-105

НОВОСИБИРСК

## АННОТАЦИЯ

В работе изучаются особенности развития поперечных однооборотных неустойчивостей с временами нарастания, превышающими период синхротронных колебаний частиц в накопителе. Обсуждаются факторы, влияющие на устойчивость колебаний и методы демпфирования быстрых поперечных когерентных неустойчивостей.



1. Широкий класс когерентных неустойчивостей пучка в накопителе обусловлен взаимодействием частиц с низкодобротными элементами вакуумной камеры, наведенные поля в которых исчезают за время, меньшее периода обращения. Такие неустойчивости принято называть однооборотными. В отсутствие специальных мер однооборотные неустойчивости могут быть одной из причин, ограничивающих величину накопленного тока. Сейчас хорошо известны как основные методы расчетов такого рода ограничений, так и классификация возможных типов неустойчивостей пучков в накопителях [1, 2]. Вместе с тем ряд частных вопросов в теории недостаточно исследован.

Обычный путь изучения когерентной устойчивости пучка связан с вычислением спектра собственных частот линеаризованной системы уравнений Власова и установлением условий неотрицательности декрементов когерентных колебаний. Сама возможность существования такого спектра налагает определенные условия на характер взаимодействия частиц, а именно, взаимодествие должно быть таким, чтобы возмущение любой части пучка вызывало бы отклик остальных частиц, действующих на это возмущение. Другими словами, взаимодействие должно замыкать обратную связь частиц по пучку и тем обеспечивать самосогласованность наведенных полей. Нарушение условия самосогласованности приводит к отсутствию у пучка нормальных когерентных колебаний и, соответственно, к отсутствию корней у формально выписанных дисперсионных уравнений.

В настоящей работе мы рассмотрим один из примеров такого нарушения—задачу об однооборотных быстрых неустойчивостях поперечных когерентных колебаний сгруппированного пучка. В отличие от синхробетатронных неустойчивостей сгруппированного пучка, время развития которых $\tau_k$ должно заметно превышать периоды синхротронных колебаний частиц $(2\pi/\omega_c)$, мы будем считать неустойчивость быстрой, если выполнено обратное условие:

$$\tau_k\omega_c \ll 1. \tag{1}$$

Такой случай широко известен в теории когерентной устойчивости как модель «жесткого сгустка» и часто применяется для оценки. декрементов когерентных колебаний сгруппированных пучков (см. например, [1, 3]).

Специфической чертой однооборотных неустойчивостей является то, что они вызываются действием на частицы запаздывающих наведенных полей, исчезающих за время оборота в машине $(2\pi/\omega_s)$. В этих условиях выполнение неравенства (1) приводит к тому, что развитие колебаний в хвостовой части пучка никак не сказывается на движении головных частиц. Поэтому действующие на пучок поля не являются самосогласованными. Развитие колебаний в таком пучке обусловлено резонансной раскачкой задних частиц передними и обладает рядом особенностей, отличных от развития в пучке самосогласованных когерентных колебаний.

Следует заметить, что круг задач, в которых выполнено условие (1), достаточно широк. Помимо действительно быстрых неустойчивостей пучка в синхротроне, сюда же относится, например, задача обеспечения когерентной устойчивости релятивистского пучка в линейном ускорителе. К сожалению, публикации по этому поводу в [4, 5] носят скорее рекомендательный характер.

2. Основные особенности развития в пучке быстрых однооборотных неустойчивостей можно продемонстрировать на простой задаче о взаимодействии пучка с согласованной пластиной. Как известно [1, 6], участок вакуумной камеры, содержащий такую пластину, представляет собой отрезок двусвязного волновода, в котором возможно распространение ТЕМ волн с частотами $0<\omega<c/l_\perp$ ($l_\perp$ — поперечный размер камеры).

Мы ограничимся исследованием устойчивости аксиальных колебаний пучка. Тогда можно считать, что колебания частиц относительно равновесной траектории описывается формулами:

$$z=a\cos\psi,\quad p_z=\gamma m\omega_s dz/d\theta,\quad \Delta p=p-p_s,$$

$$\dot\psi=\omega_z=\omega_0(\Delta p)\,\nu_z(\Delta p),\quad \theta=\theta_s+\varphi,\quad \theta_s=\omega_s t, \tag{2}$$

$$I_z=\frac{p_s\nu_z a^2}{2R_0}$$



Здесь использованы обозначения работы [1]. Формулы (2) осуществляют каноническое преобразование от переменных $(p_z, z)$ к переменным действие-фаза бетатронных колебаний $(I, \psi)$. Интегралами продольного движения при выполнении (1) являются $\varphi$ и $\Delta p$.

В соответствии с общими методами линейной теории когерентных колебаний [1, 6] полагаем, что состояние пучка в отсутствие когерентных колебаний описывается функцией распределения

$$f_0=F(I)\,f(\Delta p)\,\varrho(\varphi),\quad \int d\Gamma f_0=1, \tag{3}$$

а когерентным колебаниям отвечает добавление к $f_0$ малой нестационарной части

$$f=f_0+\tilde f=f_0+\sum_m \tilde f_m(I,\Delta p,\varphi,t)\,e^{im\psi}. \tag{4}$$

Целые числа $m$ определяют мультипольность колебания.

Как показано в [1], линеаризация и применение метода усреднения к уравнениям Власова приводят к интегральному уравнению для Фурье-амплитуд

$$\tilde f_{m\omega}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_s}{2\pi}\int_0^{\infty} dt\,\tilde f_m(\dots,t)\,e^{i\omega t}. \tag{5}$$

Для аксиальных колебаний $(\omega=m_z\omega_z)$ это уравнение может быть записано в виде [1]

$$f_{m\omega}=\frac{i\tilde f_{m0}}{\omega-\omega_m}+N\bar L_{m,\omega}(I,\varphi)\frac{m\partial f_0/\partial I}{\omega-\omega_m}, \tag{6}$$

где $\omega_m=m\omega_z$, а $\bar L$ — среднее по периоду обращения значение лагранжиана взаимодействия частиц с наведенными полями:

$$\bar L_{m\omega}=\frac{e}{c}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_s}{2\pi}(\vec v\vec A(\vec r,t))_{m\omega}.$$

При получении уравнения (6) было опущено слагаемое

$$\omega_0'\Delta p\frac{\partial\tilde f}{\partial\varphi}=\omega_c\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi},$$

описывающее продольную подвижность частиц сгустка. Ниже будет видно, что при выполнении условия (1), вклад этого слагаемого в $\tilde{f}_m(t)$ несуществен.

Учитывая в (6) только ту часть поля, которая отвечает излучению частиц в двусвязный волновод, перепишем $\bar{L}_{m\omega}$ в виде (см. [6])

$$\bar{L}_{m\omega}=e^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dn\frac{(kv_s-\omega_{mn})^2U_m(I)}{k^2c^2-(\omega_{mn}+i\Delta)^2}|b_{kn}|^2\times$$

$$\times\int d\Gamma'\tilde{f}_{m\omega}U_m^*(I)e^{in(\varphi-\varphi')}. \qquad (7)$$

Здесь

$$b_{kn}=\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta_s}{2\pi}e^{i(kR_0-n)\theta},$$

а

$$U_m=\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{2\pi}U(\vec{r}_\perp)e^{-im\psi}.$$

Фурье-гармоника потенциала поля главной ТЕМ волны, $\theta_0=l/R_0$ — азимутальная протяженность пластины. Поскольку в интересующем нас случае однородная часть уравнения (6) не имеет решений, в (6) удержано слагаемое с начальным условием $\tilde{f}_{m0}=\tilde{f}_m(I,\Delta p,\varphi,t=0)$.

Для дальнейшего удобно сразу провести в (7) интегрирование по $k$ и $n$. Интеграл по $k$ определяется вычетом в полюсе $kc=-\omega_{mn}$, отвечающим излучению назад. Вклад излучения вперед $(kc=\omega_{mn})$ подавлен в $1/\gamma^2$ раз. Поэтому с ультрарелятивистской точностью $(\gamma\gg1)$ из (7) получим

$$\bar{L}_{m\omega}=\frac{iNe^2U_m(I)}{2\Pi}\int d\Gamma_\perp d\Delta p\,U_m\int_{\varphi}^{\varphi+2\theta_0}d\varphi'\tilde{f}_{m\omega}(I,\Delta p,\varphi)\times$$

$$\times\left[mv\left(\theta_0-\frac{\varphi'-\varphi}{2}\right)-i\right]\exp\left[\frac{mv}{2}(\varphi'-\varphi)\right], \qquad (8)$$

где $\Pi=2\pi R_0$ — периметр орбиты.



Переходя в уравнении (6) к моментам

$$\chi_{m\omega}(\varphi)=\int d\Gamma_\perp d\Delta p\,U_m^*(I)\exp\left(\frac{imv\varphi}{2}\right)\tilde{f}_{m\omega}(I,\Delta p,\varphi),$$

перепишем его в виде

$$\chi_m(\varphi)=C_{m\omega}(\varphi)+i\Lambda\varrho(\varphi)\int_{\varphi}^{\varphi+2\theta_0}d\varphi'\chi_m(\varphi')\left[mv\left(\theta_0-\frac{\varphi'-\varphi}{2}\right)-i\right]. \qquad (9)$$

Здесь

$$C_{m\omega}(\varphi)=ie^{imv\varphi/2}\int\frac{d\Gamma_\perp d\Delta p\,U_m(I)\tilde{f}_m(I,\Delta p,\varphi)}{\omega-\omega_m} \qquad (10)$$

$$\Lambda=\frac{Ne^2}{\Pi}\int d\Gamma_\perp d\Delta p|U_m|^2\frac{m\partial F/\partial I\cdot f_0(\Delta p)}{\omega-\omega_m}. \qquad (11)$$

3. Уравнение (9) описывает раскачку частиц, находящихся в точке $\varphi$, впередиидущими частицами интервала

$$\varphi\leqslant\varphi'\leqslant\varphi+2\theta_0.$$

Такое уравнение имеет собственные значения лишь в том случае, когда длина пучка $\varphi_b$ удовлетворяет условию

$$\varphi_b>2\pi-2\theta_0.$$

Физический смысл такого условия очевиден. Частицы головы пучка должны успеть провзаимодействовать с полем, наведенным частицами хвоста. В частности, этому условию удовлетворяет $\varrho(\varphi)=\mathrm{const}$, когда спектр уравнения (9) дает спектр когерентных колебаний однородного пучка.

Если выполнено противоположное условие

$$\varphi_b<2\pi-2\theta_0, \qquad (12)$$

уравнение (9) является уравнением Вольтерра. Относительно интегральных уравнений этого класса известно [7], что они вовсе не имеют, ни собственных решений, ни собственных чисел $\Lambda$. В соответствии с этим отсутствует и спектр коллективных колебаний. В формальном отношении отсутствие спектра собственных значений у уравнения (9) означает, что функция Грина (резольвента) этого уравнения является целой функцией $\Lambda$ (см. [7]).

Аналитическое решение уравнения (9) может быть найдено лишь при определенных предположениях о функции $\varrho(\varphi)$. Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда $\varphi_b \ll 2\theta_0$, а $\varrho(\varphi)$ определяется формулой

$$\varrho(\varphi)=\begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_b}, & 0<\varphi<\varphi_b \\ 0, & \varphi>\varphi_b \end{cases}. \tag{13}$$

Полагая, что $f_{m0}(\varphi)\sim\varrho(\varphi)$, подстановками

$$w(\varphi)\,\varrho(\varphi)=\chi_m(\varphi), \quad \bar{C}_m(\varphi)\,\varrho(\varphi)=C_m(\varphi)$$

преобразуем уравнение (9) к виду

$$w(\varphi)=\bar{C}_m(\varphi)+\frac{i\Lambda}{\varphi_b}\int\limits_{\varphi}^{\varphi_b} d\varphi'\, w(\varphi')\left[m\nu\left(\theta_0-\frac{\varphi'-\varphi}{2}\right)-i\right], \tag{14}$$

или с точностью до членов порядка $\varphi_b/2\theta_0 \ll 1$,

$$w(\varphi)=\bar{C}_m(\varphi)+i\bar{\Lambda}\int\limits_{\varphi}^{\varphi_b} d\varphi'\, w(\varphi'), \tag{15}$$

где

$$\bar{\Lambda}=\frac{\Lambda}{\varphi_b}(m\nu\theta_0-i). \tag{16}$$

Уравнение (15) решается элементарно—преобразованием к дифференциальному уравнению, решение которого имеет вид

$$w(\varphi)=\bar{C}_m(\varphi)+i\bar{\Lambda}\int\limits_{\varphi}^{\varphi_b} d\varphi'\,\bar{C}_m(\varphi')\exp\left[i\bar{\Lambda}(\varphi'-\varphi)\right]. \tag{17}$$

Как и должно быть, ядро этого решения $\exp\left[i\bar{\Lambda}(\varphi'-\varphi)\right]$ является целой функцией $\Lambda$. Обратим внимание на еще одно свойство решения (17). Отличие $w(\varphi)$ от начального значения $\bar{C}_{m\omega}(\varphi)$ нарастает при удалении от головной части пучка $\varphi=\varphi_b$. Это отражает то обстоятельство, что формула (17) описывает раскачку задних частиц головными.



Перейдем теперь к выяснению зависимости полученного решения от времени. Для этого следует вычислить интеграл

$$w_m(\varphi,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,w_{m\omega}(\varphi)e^{-i\omega t}, \quad \mathrm{Im}\,\omega>0. \tag{18}$$

Вычислим сначала $w_m(\varphi,t)$ в отсутствие разброса частот. При этом

$$i\bar{\Lambda}=\frac{\Omega_m}{\varphi_b(\omega-\omega_m)}, \tag{19}$$

где

$$\Omega_m=-\frac{Ne^2}{2\Pi}\left\langle\frac{\partial}{\partial I}|U_m|^2\right\rangle(1+im\nu\theta_0)m \tag{20}$$

комплексный когерентный сдвиг частоты точечного пучка. Подстановка (19) в (17), а (17) в (18) дает

$$w_m(\varphi,t)=\bar{C}_m(\varphi)\,e^{-i\omega_m t}+$$

$$+\frac{\Omega_m}{\varphi_b}e^{-i\omega_m t}\int\limits_{\varphi}^{\varphi_b} d\varphi'\,\bar{C}_m(\varphi')\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{1}{\omega^2}\exp\left(-i\omega t+\frac{\Omega_m}{\varphi_b\omega}[\varphi'-\varphi]\right), \quad \mathrm{Im}\,\omega>0 \tag{21}$$

Значение интеграла по частотам в формуле (21) определяется вычетом подынтегрального выражения в существенно особой точке $\omega=0$. Это обстоятельство является специфическим для быстрых неустойчивостей и связано с отсутствием спектра коллективных колебаний (в противном случае ядро в формуле (17) имело бы простые полюсы). Замена простых полюсов существенно особой точкой отражает то, что частицу в точке $\varphi$ раскачивают все частицы интервала $\varphi\leqslant\varphi'\leqslant\varphi_b$. В свою очередь раскачивающие частицы испытывают действие впередиидущих. На каждом шаге кратность полюса $\omega=0$ увеличивается, а число участвующих в раскачке частиц велико.

Вычисление интеграла по $\omega$ в (21) дает

$$w_m(\varphi,t)e^{i\omega_m t}=\bar{C}_m(\varphi)-\int\limits_{\varphi}^{\varphi_b} d\varphi'\,\bar{C}_m(\varphi')\times$$

$$\times\sqrt{-\frac{i\Omega_m t}{\varphi_b(\varphi'-\varphi)}}\,J_1\left(\sqrt{\frac{i\,\Omega_m t(\varphi'-\varphi)}{\varphi_b}}\right), \tag{22}$$

где $J_m(x)$ — функция Бесселя [8].

Из этого выражения видно, что зависимость $w_m$ от времени, в общем случае, не является экспоненциальной. На малых временах $|\Omega_m|t \ll 1$ (22) дает

$$w_m(\varphi,t)=\bar{C}_m(\varphi)e^{-i\omega_m t}-\frac{\Omega_m t}{2\varphi_b}e^{-i\omega_m t}\int\limits_{\varphi}^{\varphi_b} d\varphi' \bar{C}_m(\varphi') \tag{23}$$

линейно нарастающее с $t$ решение.

На больших временах $|\Omega_m|t \gg 1$ поведение решения определяется асимптотикой функции Бесселя $J_1(\chi)$. Для упрощения вычислений рассмотрим специальный случай, когда

$$\bar{C}_m(\varphi)=C_m\delta(\varphi-\varphi_1), \quad 0<\varphi_1\leqslant\varphi_b. \tag{24}$$

При этом

$$w_m(\varphi,t)=0, \quad \varphi>\varphi_1$$

и

$$w_m(\varphi,t)=-C_m\sqrt{-\frac{i\Omega_m t}{\varphi_b(\varphi_1-\varphi)}}J_1\left(\sqrt{\frac{i\,\Omega_m t(\varphi_1-\varphi)}{\varphi_b}}\right), \quad \varphi<\varphi_1. \tag{25}$$

Характер поведения этого решения на больших временах $|\Omega_m|t \gg 1$ зависит от соотношения величин действительной и мнимой частей когерентного сдвига $\Omega_m=\Omega_m'-i\delta_m$. Пусть сначала $|\Omega_m'| \ll \delta_m$ (или $|m|\nu\theta_0 \gg 1$). Для согласованных пластин $\delta_m$ положительно (20). При этом

$$w_m(\varphi,t)\simeq -iC_m e^{-i\omega_m t}(\varphi_1-\varphi)^{-3/4}\left(\frac{\delta_m t}{\varphi_b}\right)^{1/4} \tag{26}$$

медленно нарастает со временем. Для других низкодобротных элементов $\delta_m$ может быть отрицательно (см. например, [2]). В этом случае решение (25) быстро нарастает:

$$w_m\simeq -C_m e^{-i\omega_m t}(\varphi_1-\varphi)^{-3/4}\left(\frac{|\delta_m|t}{\varphi_b}\right)^{1/4}\exp\left(\sqrt{\frac{|\delta_m|t(\varphi_1-\varphi)}{\varphi_b}}\right), \tag{27}$$

с «инкрементом», зависящим от расстояния до точки возбуждения:

$$\tau_k^{-1}\simeq|\delta_m|\frac{\varphi_1-\varphi}{\varphi_b}. \tag{28}$$



Заметим, что хотя нарастание в формуле (27) экспоненциальное, показатель экспоненты как $\sqrt{t}$ зависит от времени. В отличие от (23), формулы (25÷27) учитывают реакцию частиц, расположенных между $\varphi_1$ и $\varphi$. Через время $\sim 1/|\delta_m|$ поле, действующее на частицу в точке $\varphi$, становится комбинацией полей, наведенных всеми частицами этого интервала. Как видно из (17), фазы вынужденных колебаний промежуточных частиц сдвинуты относительно колебания в $\varphi_1$ на

$$\Delta\Phi_\omega=\frac{\delta_m}{\omega}\left(1-\frac{\varphi'}{\varphi_b}\right). \tag{29}$$

В отсутствие таких сдвигов фаз нарастание в точке $\varphi$ было бы экспоненциальным. Интерференция же колебаний с фазами (29) приводит к уменьшению инкремента раскачки со временем, как $1/\sqrt{t}$.

Наконец, в случае $|\Omega_m'| \gg |\delta_m|$ независимо от знаков $\Omega_m'$ и $\delta_m$ аргумент функции Бесселя в (25) является комплексной величиной. При этом асимптотика $w_m$ определяется формулой (27) с заменой $|\delta_m| \to |\Omega_m'|$ и, соответственно, инкремент нарастания колебаний будет определяться величиной когерентного сдвига частоты

$$\tau_k^{-1}=|\Omega_m'|\frac{\varphi_1-\varphi}{\varphi_b}. \tag{30}$$

Указанные асимптотические свойства решений вообще характерны для быстрых однооборотных неустойчивостей и обусловлены резонансностью взаимодействия частиц. При демпфировании таких неустойчивостей необходимо заботиться не только о знаке вносимого декремента, но и о компенсации величины когерентного сдвига частоты. Отметим еще, что найденное асимптотическое поведение решений $w_m$ сравнительно слабо зависит от формы начального возмущения $\bar{C}_m(\varphi)$.

Выбор плотности $\varrho(\varphi)$ в форме ступеньки не является, конечно, принципиальным. Замена (13) произвольной гладкой функцией ведет лишь к тому, что $\bar{\Lambda}$ в (15) заменяется на $\Lambda\varrho(\varphi')$. При этом, например, формула (17) переходит в

$$w_m(\varphi)=\bar{C}_m(\varphi)+i\Lambda\int\limits_{\varphi}^{\infty} d\varphi'\bar{C}_m(\varphi')\varrho(\varphi')\exp\left[i\Lambda\int\limits_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi''\varrho(\varphi'')\right]. \tag{17a}$$

Асимптотические свойства решений фактически не меняются.

4. Обсудим некоторые пути стабилизации указанной неустойчивости. На линейной стадии развития (а только она и обсуждается в этой статье) могут быть два стабилизирующих фактора — охлаждение пучка и наличие в пучке разброса частот.

Обсудим сначала действие охлаждения. Для простоты считаем, что декременты охлаждения частиц $\lambda$ постоянны (например, радиационное охлаждение электронов или позитронов). В этом случае величина $i\Lambda$ в формуле (19) заменяется на

$$i\Lambda=\frac{\Omega_m}{\varphi_b}\frac{1}{\omega-\omega_m+im\lambda/2}. \tag{31}$$

Мы считаем, что $\lambda\gg|m\Delta\omega|$ ($\Delta\omega$ — разброс частот в пучке) — только в этом случае трение может быть существенным. При такой замене особенность в интеграле по $\omega$ в формуле (21) смещается в точку $\omega=-i|m|\lambda/2$. В результате, например, формула (22) принимает вид

$$w_m e^{i\omega_m t}=\bar{C}_m(\varphi)+e^{-|m|\lambda t/2}\times$$
$$\times\int_{\varphi}^{\varphi_b}d\varphi'\,\bar{C}_m(\varphi')\sqrt{\frac{-i\Omega_m t}{\varphi_b(\varphi'-\varphi)}}\;J_1\left(\sqrt{\frac{i\Omega_m t(\varphi'-\varphi)}{\varphi_b}}\right). \tag{32}$$

Поскольку интеграл в (32) нарастает не быстрее $\exp(\sqrt{t/\tau_k})$, видно, что начиная с

$$t_0=\frac{4}{m^2\lambda^2\tau_k}, \tag{33}$$

колебания будут затухать. При этом, конечно, должно выполняться условие

$$t_0\omega_c\ll 1,$$

или

$$m\lambda\gg 2\sqrt{\frac{\omega_c}{\tau_k}}=\frac{2}{\tau_k}\sqrt{\omega_c\tau_k}.$$

Видно, что при выполнении условия (1), стабилизация колебаний трением вообще не требует превышения декрементами охлаждения инкрементов нарастания. Отметим также, что охлаждение особенно эффективно для подавления колебаний высокой мультипольности. При увеличении номера $m$ инкременты неустойчивости падают, а вносимые трением декременты растут, как $m\lambda$. Это замечание относится, конечно, только к тем случаям, когда разброс частот в пучке мал, настолько, что и для обсуждаемых высоких $m$ выполнено условие $\lambda\gg|m|\Delta\omega$.



Перейдем к обсуждению действия разброса частот. Для быстрых неустойчивостей разброс частот в пучке $\Delta\omega$ может быть обусловлен двумя факторами: нелинейностью фокусирующих полей $\nu=\nu(a)$ и хроматизмом фокусировки $\omega_z=\omega_z(\Delta p)$. В общем случае действие этих факторов зависит от вида стационарного распределения. Для оценки рассмотрим простейший случай, когда $\Delta\omega=(d\omega/dp)\Delta p$, а распределение по импульсам в пучке лоренцево. При этом

$$i\Lambda=\frac{\Omega_m}{\varphi_b}\frac{1}{\omega-\omega_m+i|m\Delta\omega|},$$

а стабилизация колебаний будет обеспечиваться множителем $\exp(-|m\Delta\omega|t)$ перед интегралом в (32). «Критерий устойчивости» (33) при этом переходит в

$$t>t_0=\frac{1}{(m\Delta\omega)^2\tau_k}. \tag{34}$$

К аналогичному условию приводит анализ с распределениями весьма общего вида. На больших временах значение интеграла по $\omega$ в (21) определяется окрестностью точки, в которой фаза выражения

$$\exp\left[-i\omega t+\Omega_m\frac{\varphi'-\varphi}{\varphi_b}\int\frac{d\varepsilon f(\varepsilon)}{\omega-\varepsilon}\right]=e^{-i\Phi(\omega)}$$

стационарна ($f(\varepsilon)$ — распределение частот в пучке). Условие стационарности $d\Phi/d\omega=0$ приводит к «дисперсионному уравнению»

$$1=-\frac{i\Omega_m}{t}\frac{\varphi'-\varphi}{\varphi_b}\frac{d}{d\omega}\int\frac{d\varepsilon f(\varepsilon)}{\omega-\varepsilon}. \tag{35}$$

Для гладких распределений $f(\varepsilon)$, в области

$$\frac{|\Omega_m|}{t}\frac{\varphi'-\varphi}{\varphi_b}\gg(m\Delta\omega)^2$$

решение такого уравнения имеет вид

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{i\Omega_m}{t}\frac{\varphi'-\varphi}{\varphi_b}}$$

Отсюда видно, что при нарушении (34) колебания нарастают. При выполнении условия (34) решение (35) близко к $\omega \simeq -i|m\Delta\omega|$ (см. например, [6]), чему отвечает затухание колебаний.

Еще один метод подавления был предложен в работе [4], где похожая неустойчивость анализировалась в связи с динамикой пучка во ВЛЭПП. Этот метод состоит в ведении вдоль пучка такого градиента частот бетатронных колебаний, чтобы задние частицы выходили из резонанса с передними. Практически это может быть реализовано, например, раскладкой энергии вдоль пучка и использованием хроматизма фокусировки.

Получим $w_m(\varphi, t)$ для наиболее простого случая, когда частота $\omega_z(\varphi) = \omega_z + \varkappa\varphi$ является линейной функцией $\varphi$. Разброс импульсов в пучке считаем равным нулю. Поскольку $\Lambda$ теперь является функцией $\varphi$, формула (17) должна быть переписана в виде:

$$w_{m\omega}(\varphi) = \bar{C}_{m\omega}(\varphi) + i\bar{\Lambda}_{m\omega}(\varphi)\int_{\varphi}^{\varphi_b} d\varphi' \bar{C}_{m\omega}(\varphi)\exp[i\int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' \bar{\Lambda}_{m\omega}(\varphi'')] \tag{36}$$

и, соответственно, вместо (21) имеем:

$$w_m(\varphi,t) = \bar{C}_m(\varphi)\exp(-i\omega_m(\varphi)t) +$$
$$+ e^{-i\omega_m(\varphi)t}\int_c \frac{d\omega}{2\pi}\frac{\Omega_m}{\varphi_b\omega}\int_{\varphi}^{\varphi_b}\frac{\bar{C}_m(\varphi')}{\omega-\varkappa m(\varphi'-\varphi)}\exp\left[-i\omega t + \int_{\varphi}^{\varphi''}\frac{d\varphi''\,\Omega_m/\varphi_b}{\omega - m\varkappa(\varphi''-\varphi)}\right]d\varphi', \tag{37}$$

а контур интегрирования по $\omega$ проходит от $-\infty$ до $+\infty$ выше особенностей подынтегрального выражения.

Изучим сначала поведение функции Грина решения (37). Для этого подставим в (37) начальное возмущение (24)

$$w = 0 \qquad \varphi > \varphi_1$$

$$w(\varphi,t) = C_m \exp(-i\omega_m(\varphi)t)\frac{d}{du}I(\varkappa ut), \tag{38}$$

где

$$I(\varkappa ut) = \int_c \frac{dz}{2\pi z}\exp\left[\alpha_m \int_0^1 \frac{d\xi}{z-\xi} - iz\varkappa ut\right], \tag{39}$$



$u = \varphi_1 - \varphi$, $\alpha_m = \Omega_m/m\Delta\omega$, $\Delta\omega$—разница частот колебаний частиц головы и хвоста сгустка $\Delta\omega = \varkappa\varphi_b$. В отличие от (21) подынтегральное выражение в (39) является аналитической функцией в плоскости $z$ с разрезом, идущим из точки $z=0$ в точку $z=1$. Поэтому интеграл (39) может быть вычислен стягиванием контура интегрирования к разрезу[1]. Результат интегрирования записывается в виде

$$I = -ie^{-im\varkappa ut}F(1-\alpha_m,\ 1,\ im\varkappa ut), \tag{40}$$

где $F(\alpha,\ j,\ x)$—вырожденная гипергеометрическая функция [8]. Подставив это выражение в (38), после вычисления производной получим

$$w_m(\varphi,t) = -C_m\frac{\Omega_m t}{\varphi_b}e^{-im\varkappa ut}F\left(1-\frac{\Omega_m}{m\Delta\omega}, 2, im\varkappa ut\right)e^{-i\omega_m(\varphi)t}. \tag{41}$$

Пользуясь представлением $F(\alpha,\ j,\ x)$ степенным рядом, легко проверить, что при $\varkappa\to 0$ формула (41) переходит в формулу (25).

Для определения условий устойчивости при произвольном $\Delta\omega$ воспользуемся асимптотическим представлением $F\left(1-\frac{\Omega_m}{m\Delta\omega}, 2, im\varkappa ut\right)$ [8]:

$$F \sim \frac{(e^{i\pi}m\varkappa ut)^{\frac{\Omega_m}{m\Delta\omega}-1}}{\Gamma(1+\Omega_m/m\Delta\omega)} + e^{im\varkappa ut}\frac{(im\varkappa ut)^{-\frac{\Omega_m}{m\Delta\omega}-1}}{\Gamma(1+\Omega_m/m\Delta\omega)}.$$

В результате, для $w(\varphi,\ t)$ получим

$$w \sim -\frac{\Omega_m}{\xi\varkappa u\varphi_b}\left\{A\cdot(\varkappa mut)^{\frac{\Omega_m}{m\Delta\omega}} + B\cdot(m\varkappa ut)^{-\frac{\Omega_m}{m\Delta\omega}}\right\}, \tag{42}$$

где $A$ и $B$—ненарастающие функции времени. Из (42) видно, что решения могут быть устойчивы лишь при $\mathrm{Re}\,\omega_m = 0$. Если же вели-

---

[1] Другой способ вычисления $I$ сводится к преобразованию подынтегрального выражения в (39) с помощью формулы:

$$x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty d\xi\,\xi^{\alpha-1}e^{-\xi/x},$$

после чего интеграл по $z$ переходит в одно из представлений функции Бесселя $J_0(2\sqrt{i\xi\varkappa ut})$.

чина когерентного сдвига частоты $\mathrm{Re}\,\omega_m$ отлична от нуля, то при произвольных величине и знаке отношения $(\Omega_m/m\Delta\omega)$ одно из слагаемых в (42) будет отвечать раскачке колебаний. Вместе с тем видно, что уменьшение $(\Omega_m/m\Delta\omega)\ll 1$ может существенно замедлить развитие неустойчивости.

Вообще же, следует отметить, что стабилизирующее действие раскладки частот зависит от распределения начального возмущения вдоль пучка. При произвольном $C_m(\varphi)$ решение $w_m$ определяется формулой (37):

$$w_m(\varphi,t)=C_m(\varphi)e^{-i\omega_m(\varphi)t}-e^{-i\omega(\varphi)t}\Delta w\,,$$

где

$$\Delta w=\int\limits_0^{\varphi_b-\varphi} du\,C_m(u+\varphi)\frac{\Omega_m t}{\varphi_b}e^{-im\varkappa ut}F\left(1-\frac{\Omega_m}{m\Delta\omega},2,im\varkappa ut\right). \tag{43}$$

Из этого выражения видно, что асимптотическое поведение $\Delta w$ определяется формулой (42), если $C(\varphi)$ сосредоточено на достаточно коротком интервале $\Delta\varphi$:

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_b}\ll\frac{1}{|m\Delta\omega|t}\,. \tag{44}$$

В обратном предельном случае $C(u+\varphi)$ в (43) можно считать медленной функцией и вынести ее за знак интеграла. Интегрирование оставшегося выражения дает

$$\Delta w=C[F(\alpha_m,1,im\varkappa ut)-1]_{u=\varphi_b-\varphi}\,. \tag{45}$$

На больших временах $|m\varkappa u|t\gg 1$ это выражение имеет вид

$$\Delta w\sim\left\{\frac{(-im\varkappa ut)^{-\alpha_m}}{\Gamma(1-\alpha_m)}+\frac{e^{im\varkappa ut}}{\Gamma(\alpha_m)}(im\varkappa ut)^{\alpha_m-1}-1\right\}.$$

Отсюда получаем условие устойчивости пучка относительно протяженных возмущений $(\Delta\varphi/\varphi_b\gg 1/(|m\Delta\omega|t))$:

$$0<\frac{\mathrm{Re}\,\Omega_m}{m\Delta\omega}\leqslant 1\,. \tag{46}$$

Мелкомасштабные возмущения (44) при выполнении этого условия, вообще говоря, не стабилизируются. Причиной их появления



может быть, например, тепловое движение частиц пучка.

5. Устойчивость колебаний длинных пучков $\varphi_b\gg 2\theta_0$ можно исследовать следующим образом. Интервал $\varphi_b$ разбивается на отрезки длиной $2\theta_0$. Решение $w_{m\omega}$ представляется суммой

$$w_{m\omega}=\sum_{l=1} w_{m\omega}^{(l)}(\varphi)\,,$$

в которой слагаемые $w^{(l)}$ определены на отрезках

$$\varphi_b-l2\theta_0\leqslant\varphi'\leqslant\varphi_b-(l-1)2\theta_0,\quad l=1,\,2,\ldots$$

При этом, если выполнено условие (12), уравнение для $w^{(1)}$ содержит только $w^{(1)}$ и $C$, а на остальных участках, помимо начального возмущения $C(\varphi)$, действует возмущение от предыдущего участка. Решение $w^{(1)}$ определяется формулой (17*а*), а остальные $w^{(l)}$ могут быть получены с помощью рекуррентных формул, следующих из уравнения (14). Эти формулы имеют весьма громоздкий вид и потому здесь не приводятся.

6. Описание быстрых неустойчивостей из-за взаимодействия пучка с другими низкодобротными элементами отличается от рассмотренных лишь связью когерентного сдвига $\Omega_m$ с функцией Грина полей, возбуждаемых в этом элементе. При этом, из-за резонансности взаимодействия частиц, времена нарастания колебаний определяются числом впередиидущих частиц

$$\tau_k^{-1}\sim\Omega_m\int\limits_{\varphi}^{\varphi_b} d\varphi'\varrho(\varphi')\,,$$

а устойчивость колебаний определяется свойствами когерентного сдвига, вычисленного для пучка нулевой длины $\Omega_m$.

Перечислим некоторые следствия полученных здесь результатов. Видно, что при демпфировании когерентных колебаний сгруппированного пучка (пассивными, либо активными низкодобротными системами) величины вносимых декрементов в общем не должны превышать частоту синхротронных колебаний. В противном случае колебания могут оказаться неустойчивыми из-за больших вносимых системой величин когерентного сдвига частоты. Поэтому при столь быстром демпфировании необходимо заботиться не только о величине вносимого декремента, но и о компенсации когерентного сдвига.

В последнее время все более интенсивно обсуждаются неустойчивости поперечных когерентных колебаний из-за связи синхротронных мод (см. например, [9]). Проведенный анализ показывает, что вычисление спектра когерентных колебаний в таких задачах имеет смысл лишь тогда, когда взаимодействие связывает сравнительно небольшое число мод (скажем две, три). Поскольку число мод определяется отношением $|\Omega_m|/\omega_c$, при большем числе связанных мод оказывается выполненным условие (1). В этом случае характер развития колебаний будет близок к рассмотренному выше.

Автор благодарен Н.С. Диканскому за многочисленные советы и интерес к работе, а также Б.Н. Брейзману, А.В. Бурову, А.В. Новохатскому и В.В. Пархомчуку за обсуждение затронутых в работе вопросов.

### *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Дербенев Я.С., Диканский Н.С.* Препринт ИЯФ № 315, СО АН СССР, Новосибирск, 1969.
2. *Диканский Н.С.* Кандидатская диссертация. ИЯФ СО АН СССР Новосибирск, 1969.
3. *Ruth R.D., Wang J.M.* IEEE Trans. on Nucl. Science, NS-28, № 3, 2405, 1981.
4. *Балакин В.Е., Будкер Г.И., Скринский А.Н.* В кн.: Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 1978) Дубна, 1979, т.1; *Балакин В.Е., Кооп И.А., и др.* там же с.142—146.
5. *Balakin V.E., Novokhatsky A.V., Smirnov V.P.* Proc. of the XII Intern. Conf. on High-Energy Accelerators (Fermilab August 11—16, 1983) FNAL, Batavia (Ill.) 1983, p.119—120
6. *Дербенев Я.С., Диканский Н.С., Пестриков Д.В.* Препринт ИЯФ 7-72. Новосибирск 1972; CERN Transl. № 72-16. Geneva, 1972.
7. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.:Физматгиз, 1958. с.812.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.:Физматгиз, 1962. с.1100.
9. *Kohaupt R.D.* DESY Report 80/22, 1980.




*Д.В. Пестриков*

**Быстрые однооборотные неустойчивости поперечных когерентных колебаний сгруппированных пучков.**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 13 июня 1985 г.
Подписано в печать 9 августа 1985 г. МН 06697
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,4 печ.л., 1,1 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 105

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР,*
*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*