



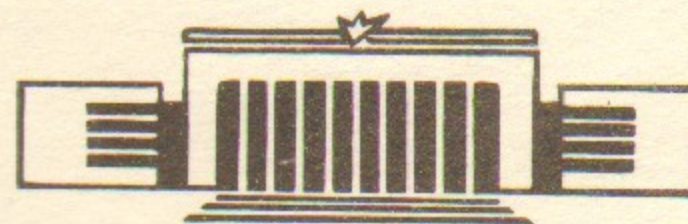
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

18

**В. В. Вечеславов**

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ ИНВАРИАНТЫ ДВУМЕРНЫХ  
КАНОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ**

**ПРЕПРИНТ 85-104**



**НОВОСИБИРСК**

## АННОТАЦИЯ

При исследовании двумерных канонических отображений широко используется их эквивалентность гамильтоновым системам специального вида [1, 2]. Траектории движения таких систем оказываются разрывными функциями времени, и это обстоятельство препятствует применению многих известных методов теории возмущений, ориентированных на достаточно гладкие функции.

В работе описывается способ построения приближенных интегралов движения, учитывающий скачкообразный характер изменения динамических переменных и любых функций от них. Предлагаемая схема в сочетании с методом ДЛТ используется для отыскания инвариантов первых трех порядков и получения глобального фазового портрета стандартного отображения. Знание этих инвариантов позволяет восстановить производящую функцию Ли соответствующего канонического преобразования переменных и построить приближенные гамильтонианы, дающие детальное описание отдельных резонансов.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Многие интересные и важные проблемы нелинейной динамики приводят к необходимости исследования канонических отображений фазового пространства [1, 2]. В случае двух степеней свободы наиболее часто встречается так называемое явное отображение поворота [1]

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= -\varepsilon \frac{dV}{d\theta}(\theta_n), \\ \theta_{n+1} - \theta_n &= 2\pi\omega_0(J_{n+1}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $J, \theta$  — переменные действие — угол невозмущенного движения;  $\varepsilon$  — параметр возмущения;  $V(\theta) = V(\theta + 2\pi)$  и  $\omega_0(J)$  — заданные функции.

Отображения поворота появляются, например, при изучении механизма ускорения Ферми, динамики заряженных частиц в магнитных ловушках и ускорителях со встречными пучками, движения вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса и др. (ряд примеров такого рода содержится в книге [1] и обзоре [2]). Отметим, что выбор  $V = \cos\theta$  отвечает известному стандартному отображению Чирикова — Тейлора [2].

Построение приближенных инвариантов канонических отображений по своему значению равноценно построению приближенных интегралов движения непрерывных гамильтоновых систем и является актуальной задачей. Для решения этой задачи в случае аналитических степенных отображений Драгт и Финн привлекли технику преобразований Ли [3], которая до того уже успешно приме-

нялась при анализе непрерывных систем [1, 4]. Их подход связан с возможностью представления изучаемого отображения в виде произведения конечного числа преобразований Ли и заменой этого произведения одним результирующим преобразованием, производящая функция которого является искомым инвариантом.

Можно действовать иначе, используя известную эквивалентность канонических отображений дифференциальным уравнениям Гамильтона специального вида [1, 2], что позволяет исследовать отображения в рамках общей теории гамильтоновых систем. В случае отображения поворота следует от разностных уравнений (1) перейти к дифференциальным

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J} = \omega_0(J),$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\varepsilon \delta_{2\pi}(t) \frac{dV}{d\theta}, \quad (2)$$

которые описывают динамику интегрируемой гамильтоновой системы  $H_0(J)$ , периодически возмущаемой внешними толчками [2]:

$$H(J, \theta, t) = H_0(J) + \varepsilon H_1(\theta, t) = \frac{J^2}{2} + \varepsilon \delta_{2\pi}(t) V(\theta). \quad (3)$$

В этих выражениях  $\omega_0(J) = dH_0/dJ$  — частота невозмущенного движения;  $\delta_{2\pi}(t) = [1 + 2 \sum_{k>1} \cos(kt)]/2\pi$  — периодическая дельта-функция;

$$V(\theta) = \sum_{n>1} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]. \quad (4)$$

Отметим, что гамильтониан (3) оказывается разрывной функцией времени, хотя эквивалентное ему отображение (1) может быть аналитическим.

На рис. 1 представлено характерное поведение динамических переменных  $\theta(t)$ ,  $J(t)$  системы (3). Видно, что внутри любого интервала свободного движения  $t_n < t < t_{n+1}$  импульс сохраняется, а фаза линейно зависит от местного времени  $\tau = t \pmod{2\pi}$

$$\begin{aligned} J(0 < \tau < 2\pi) &= J_{n+1}, \\ \theta(0 < \tau < 2\pi) &= \theta_n + \tau \omega_0(J_{n+1}). \end{aligned} \quad (5)$$

На границах интервалов импульс  $J$  и частота  $\omega_0(J)$  изменяются скачком и траектория движения оказывается разрывной функцией времени, что является прямым следствием разрывности гамильто-

ниана (3). Это обстоятельство делает невозможным или необоснованным применение многих известных методов теории возмущений, ориентированных, как правило, на достаточно гладкие гамильтонианы [1, 4, 5]. При построении интегралов движения системы (3)

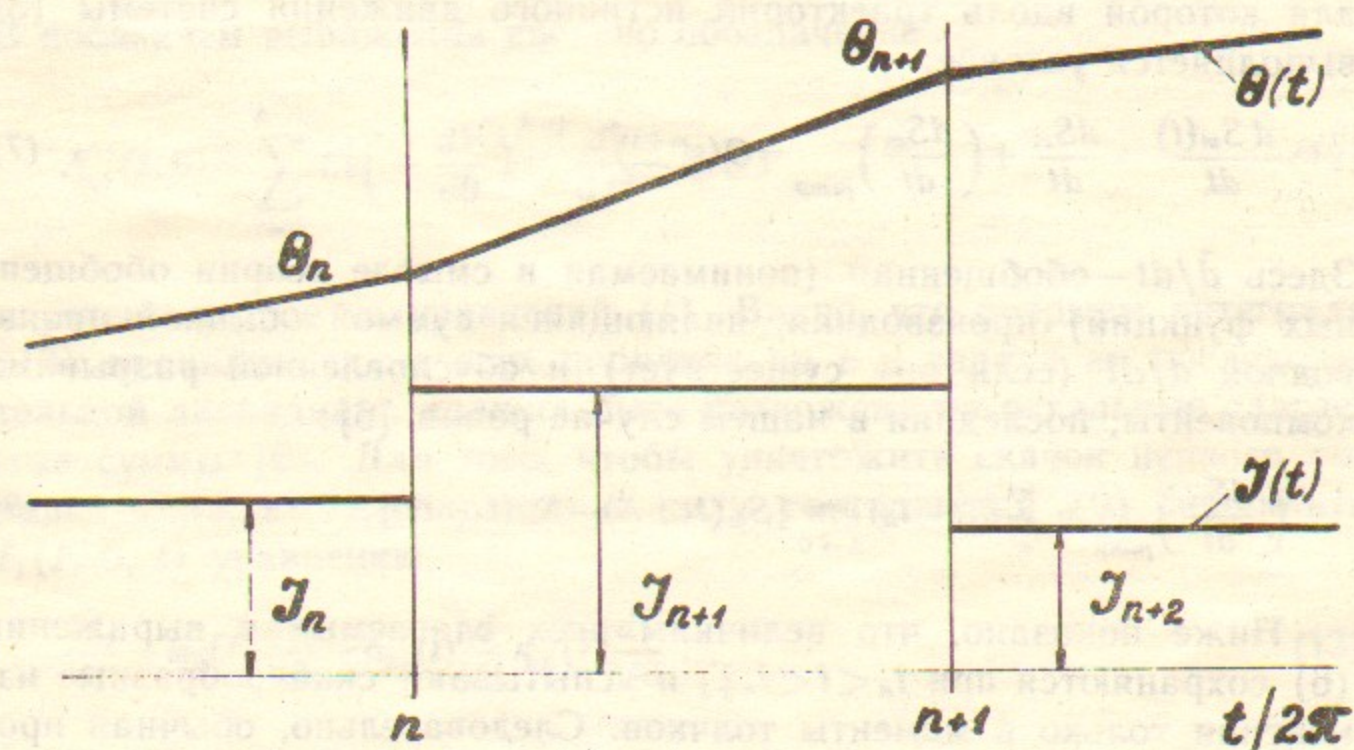


Рис. 1. Характерное поведение динамических переменных  $\theta(t)$  и  $J(t)$  системы (3).

необходимо с самого начала учитывать скачкообразный характер изменения динамических переменных (и любых функций от них) вдоль траекторий истинного движения; соответствующий подход представлен в п.2 настоящей работы. Предлагаемая схема в сочетании с методом ДЛТ используется для построения первых трех инвариантов стандартного отображения (п.3). С помощью этих инвариантов можно нарисовать фазовую картину взаимного расположения резонансов и оценить их размеры, но нельзя найти, например, частоты движений. В п.4 показано, как восстановить производящую функцию Ли соответствующего канонического преобразования переменных и построить приближенные гамильтонианы, дающие детальное описание отдельных резонансов.

## 2. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ (3)

Будем называть интегралом движения порядка  $m$  функцию динамических переменных и времени вида

$$S_m[J(t), \theta(t), t] = S_0(J; \varepsilon) + \sum_{n=1}^m \frac{\varepsilon^n}{n!} I_n(J, \theta, t), \quad (6)$$

для которой вдоль траекторий истинного движения системы (3) выполняется условие:

$$\frac{\tilde{d}S_m(t)}{dt} = \frac{dS_m}{dt} + \left( \frac{dS_m}{dt} \right)_{jump} = O(\varepsilon^{m+1}). \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{d}/dt$  — обобщенная (понимаемая в смысле теории обобщенных функций) производная, являющаяся суммой обычной производной  $d/dt$  (если она существует) и обусловленной разрывами компоненты; последняя в нашем случае равна [6]:

$$\left( \frac{dS_m}{dt} \right)_{jump} = \sum_n \delta(t-t_n) \lim_{\Delta \rightarrow 0} [S_m(t_n + \Delta) - S_m(t_n - \Delta)]. \quad (8)$$

Ниже показано, что величины всех слагаемых в выражении (6) сохраняются при  $t_n < t < t_{n+1}$  и испытывают скачкообразные изменения только в моменты толчков. Следовательно, обычная производная  $S_m(t)$  всюду равна нулю и условие (7) надо понимать как ограничение на величину разрыва первого рода ступенчатой функции.

Внутри любого интервала непрерывности  $t_n < t < t_{n+1}$  для вычисления полной производной по времени можно использовать обычное выражение

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + [\dots, H] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0(J) \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (9)$$

где  $[\dots, \dots]$  — скобка Пуассона и учтены зависимости (5).

Прежде всего заметим, что интегралом нулевого порядка является любая аналитическая функция  $S_0(J; \varepsilon)$  одного лишь действия  $J$  (этот факт отражен в формуле (6))

$$S_0(J; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} S_{0,k}(J), \quad (10)$$

для которой по критерию (7) в общем случае имеем

$$\frac{\tilde{d}S_0}{dt} = \sum_n \delta(t-t_n) [S_0(J_{n+1}; \varepsilon) - S_0(J_n; \varepsilon)] =$$

$$= \delta_{2\pi}(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} A_{1,k}(J_n, \theta) = O(\varepsilon). \quad (11)$$

В последнем выражении введено обозначение

$$A_{1,k}(J, \theta) = \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \left( -\frac{dV}{d\theta} \right)^{k-j} \frac{d^{k-j}}{dJ^{k-j}} S_{0,j}(J) \quad (12)$$

и учтено первое из уравнений (1). Видно, что разрывы интеграла (10) проявляются во всех порядках по  $\varepsilon$  и задача их последовательной ликвидации должна быть возложена на остальные слагаемые суммы (6). Для того, чтобы уничтожить скачок первого порядка  $S_0(J; \varepsilon)$ , необходимо в силу соотношения (9) подчинить  $I_1(J, \theta, t)$  уравнению

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} + \omega_0(J) \frac{\partial I_1}{\partial \theta} = \delta_{2\pi}(t) \frac{d}{dJ} S_{0,0}(J) \frac{dV}{d\theta}. \quad (13)$$

Интересующее нас частное решение этого уравнения с учетом представления (4) имеет вид

$$I_1(J, \theta, t) = \frac{S'_{0,0}(J)}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{n}{n\omega_0(J) - k} \times \\ \times [b_n \sin(n\theta - kt) + a_n \cos(n\theta - kt)]. \quad (14)$$

На любом интервале  $0 < \tau = t \pmod{2\pi} < 2\pi$  вдоль истинных траекторий движения системы (3) ряд (14) сходится к постоянной (см. Приложение I)

$$I_1(J, \theta, 0 < \tau < 2\pi) = \frac{S'_{0,0}(J)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sin[\pi n \omega_0(J)]} \times \\ \times \{ b_n \sin[n\theta + (\pi - \tau)n\omega_0(J)] + a_n \cos[n\theta + (\pi - \tau)n\omega_0(J)] \} = \text{const.} \quad (15)$$

Из выражения для обобщенной производной этой ступенчатой функции следует (см. Приложение I), что она действительно компенсирует скачок первого порядка  $S_0(J; \varepsilon)$ , но одновременно вносит свой вклад в разрывы всех порядков выше первого. Это явление оказывается типичным, и при отыскании  $I_k(J, \theta, t)$  приходится

интегрировать уравнение вида (13) с правой частью, равной сумме обобщенных производных  $k$ -го порядка всех стоящих перед  $I_k$  в соотношении (6) членов (см. Приложение II). Именно здесь обнаруживается отличие нашей схемы от обычно применяемой для гладких гамильтонианов вида  $H_0 + \varepsilon H_1$ , где каждый очередной член суммы (6) определяется только одним своим предшественником из уравнения  $[I_k, H_0] = [I_{k-1}, H_1]$ ,  $k \geq 1$  (см., например, [5]).

По описанной схеме можно, в принципе, построить приближенный интеграл любого порядка  $m$ . Важно подчеркнуть, что при фиксированном  $m$  конкретное выражение  $S_m(J, \theta, t)$  этого интеграла, его функциональные свойства и область применимости будут целиком определяться заданием нулевого приближения  $S_0(J; \varepsilon)$  (см. формулы (6) и (10)). Возникает, таким образом, интересная задача оптимального выбора  $S_0(J; \varepsilon)$ . Поскольку решение этой задачи пока не найдено, приходится руководствоваться простым желанием избежать определенных сингулярностей или упростить формулы.

Одним из непосредственных применений приближенных интегралов является построение глобального фазового портрета системы, дающего представление о взаимном расположении и размерах всех обнаруживаемых в рассматриваемом порядке резонансов. Относящиеся сюда вопросы удобно обсудить на конкретном примере, в качестве которого выбрано стандартное отображение.

### 3. ДЛТ-ИНВАРИАНТЫ СТАНДАРТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Гамильтониан стандартного отображения в обозначениях работы [2] имеет вид (16)

$$H(J, \theta, t) = \frac{J^2}{2} + \frac{K}{2\pi} \delta_{2\pi}(t) \cos \theta, \quad (16)$$

где  $K = 2\pi\varepsilon$  — параметр стохастичности; при  $K = K_0 \simeq 1$  наступает перекрытие всей системы резонансов и стохастичность становится глобальной.

К обычной записи стандартного отображения

$$J_{n+1} - J_n = \frac{K}{2\pi} \sin \theta_n, \quad \theta_{n+1} - \theta_n = 2\pi J_{n+1},$$

приходят, фиксируя значения переменных в моменты времени

$\tau = 2\pi$ , непосредственно перед очередным толчком. При этом из-за наличия сдвига по фазе  $(\pi - \tau)\omega_0$  (см., например, формулу (15)) возникает несимметрия по переменной  $\theta$ , что хорошо видно на фазовых картинках [2]. Можно ввести симметрию и заодно упростить запись всех последующих выражений, если перенести моменты наблюдения за системой (16) в середины интервалов между толчками  $\tau = \pi$ . Получающееся при этом отображение  $J_1, \theta_1 \Rightarrow J_2, \theta_2$  (его можно назвать, по-видимому, симметризованным стандартным отображением) таково:

$$\begin{aligned} J_2 - J_1 &= \frac{K}{2\pi} \sin(\theta_1 + \pi J_1), \\ \theta_2 - \theta_1 &= \pi(J_1 + J_2). \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что соотношения (17) можно получить с помощью производящей функции

$$\begin{aligned} \Phi(J_1, J_2) &= (J_2 - J_1) \arcsin \left[ \frac{2\pi}{K} (J_2 - J_1) \right] + \\ &+ \sqrt{(K/2\pi)^2 - (J_2 - J_1)^2} + \frac{\pi}{2} (J_2^2 + J_1^2). \end{aligned}$$

Интегралы системы (16) представлены в общем виде в Приложении II, и для получения конкретных выражений необходимо назначить функцию  $S_0(J; \varepsilon)$  по формуле (10). Если принять

$$S_0(J; \varepsilon) \equiv s_{0,0}(J), \quad s_{0,j} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (18)$$

то первые три интеграла примут вид  $(\Omega = \theta + (\pi - \tau)J)$ :

$$S_1(J, \theta, t) = s_{0,0}(J) + \frac{K}{4\pi} \frac{s'_{0,0}(J)}{\sin(\pi J)} \cos \Omega, \quad (19)$$

$$S_2(J, \theta, t) = S_1(J, \theta, t) + \frac{1}{16} \left( \frac{K}{2\pi} \right)^2 \frac{s''_{0,0} \sin(\pi J) - 2\pi s'_{0,0}}{\sin^2(\pi J) \sin(2\pi J)} \cos 2\Omega, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} S_3(J, \theta, t) &= S_2(J, \theta, t) + \frac{1}{32} \left( \frac{K}{2\pi} \right)^3 \frac{1}{\sin^3(\pi J)} \times \\ &\times \left\{ \left[ \frac{s'''_{0,0}}{6} - \frac{\pi s''_{0,0}}{\sin(2\pi J)} \right] \cos(3\Omega) - \left[ \frac{s'''_{0,0}}{2} - \pi s''_{0,0} \frac{1 + 2 \cos(2\pi J)}{\sin(2\pi J)} \right] \cos \Omega + \right. \\ &\left. + 2\pi^2 s'_{0,0} \frac{1 + \cos(2\pi J) + \cos^2(2\pi J)}{\sin^2(2\pi J)} \left[ \frac{\sin(\pi J)}{\sin(3\pi J)} \cos(3\Omega) - \cos \Omega \right] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

При использовании этих формул для отображения (17) в них следует заменить  $\Omega$  на  $\theta$ , что соответствует моменту наблюдения  $\tau = \pi$ ,  $\tau = t \pmod{2\pi}$ .

В системе (16) возможны резонансы на частотах гармоник колебаний и внешней силы, поэтому в соотношениях (19) — (21) присутствуют резонансные знаменатели и связанные с ними сингулярности.  $S_3(J, \theta, t)$ , например, имеет полюс пятого порядка при  $J = p$  ( $p$  — целое число), второго порядка при  $J = p + 1/2$  и первого при  $J = p \pm 1/3$ . Для устранения этих сингулярностей вблизи одного конкретного резонанса обычно используют каноническое преобразование к специальным (резонансным) переменным [1, 2]. Дуннетом, Лейнгом и Тейлором был предложен другой метод (метод ДЛТ), позволяющий в ряде случаев устранять знаменатели сразу всех резонансов в рассматриваемом порядке теории возмущений [8]. Отметим, что сами авторы ограничились первым порядком, т. е. учетом всех первичных резонансов и не обсуждали другие возможности своего подхода. Позднее Мак-Намара, анализируя задачу взаимодействия заряженной частицы с электростатической волной в однородном магнитном поле, соединил метод ДЛТ с техникой преобразований Ли и получил инварианты первых двух порядков [5].

Для построения ДЛТ-инварианта следует так распорядиться неизвестной пока функцией  $s'_{0,0}(J)$  (она называется определяющей функцией [5]), чтобы устранить все резонансные особенности в каждом из выражений (19) — (21). Число и порядок нулей  $s'_{0,0}(J)$  должны при этом совпадать с наибольшим числом и наибольшим порядком полюсов, порожденных резонансными знаменателями. В нашем случае естественным является выбор определяющих функций в формуле (19) в виде

$$s'_{0,0}(J) = \pi \sin(\pi J), \quad (22)$$

в формуле (20) в виде

$$s'_{0,0}(J) = \pi \sin^2(\pi J) \operatorname{sig}(2\pi J) \quad (23)$$

и в формуле (21) в виде

$$s'_{0,0}(J) = \pi \sin^2(\pi J) \sin^2(2\pi J) \sin(3\pi J). \quad (24)$$

Заметим, что зависимости (22) и (23) точно совпадают с использованными в работе [5].

ДЛТ-инвариант любого порядка  $m$  с аналитической точки зрения является вполне благополучной функцией на всей фазовой

плоскости. Оказывается, однако, что он правильно передает топологию только тех резонансов, которые впервые проявляются именно в  $m$ -ом порядке. Это важное и не получившее пока надежного объяснения обстоятельство было обнаружено в работе [5], где ДЛТ-инвариант первого порядка хорошо описывал все целые резонансы, а ДЛТ-инвариант второго порядка сильно их искажал, но обеспечивал хорошее описание всех полуцелых резонансов. Для получения глобальной фазовой картины в  $m$ -ом порядке теории возмущений необходимо, таким образом, иметь и использовать полный набор  $S_1, S_2, \dots, S_m$  ДЛТ-инвариантов, каждый из которых отвечает за «свои» резонансы и описывает «свою» часть фазового пространства.

На рис. 2 дано сопоставление результатов численного счета и использования ДЛТ-инвариантов для отображения (17) при  $K = 0,9$ ; в силу симметрии достаточно рассмотреть фазовый квадрат  $\{0 \leq J \leq 1; 0 \leq \theta \leq \pi\}$ . Видно, что размеры и взаимное расположение резонансных областей первых трех уровней воспроизведены удовлетворительно, хотя величина параметра возмущения близка к порогу возникновения глобальной неустойчивости  $K_0 \simeq 1$ . Это обстоятельство оправдывает применение метода ДЛТ при анализе нелинейных систем, например, с помощью известного критерия перекрытия резонансов [2, 5]. Вместе с тем, качество описания третьего резонанса заметно хуже, чем первых двух. Возможно, существует нулевое приближение  $S_0(J; \epsilon)$ , отличное от заданного формулами (18) и (24), позволяющее исправить ситуацию, но пока совершенно не ясен способ его отыскания.

ДЛТ-инварианты не позволяют определить такие важные динамические характеристики движения, как частоты колебаний или вращений. Это можно сделать с помощью приближенных гамильтонианов, дающих детальное описание отдельных резонансов.

#### 4. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ЛИ И РЕЗОНАНСНЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ СТАНДАРТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В предыдущем разделе при построении интеграла  $m$ -го порядка  $S_m(J, \theta, t)$  использовались исходные динамические переменные. Ясно, однако, что существует близкое к тождественному каноническое преобразование переменных  $J, \theta \Rightarrow \bar{J}, \bar{\theta}$ , при котором  $S_m(J, \theta, t)$  оказывается функцией  $F_m(\bar{J})$  только нового действия  $\bar{J}(J, \theta, t)$  и выполняется равенство

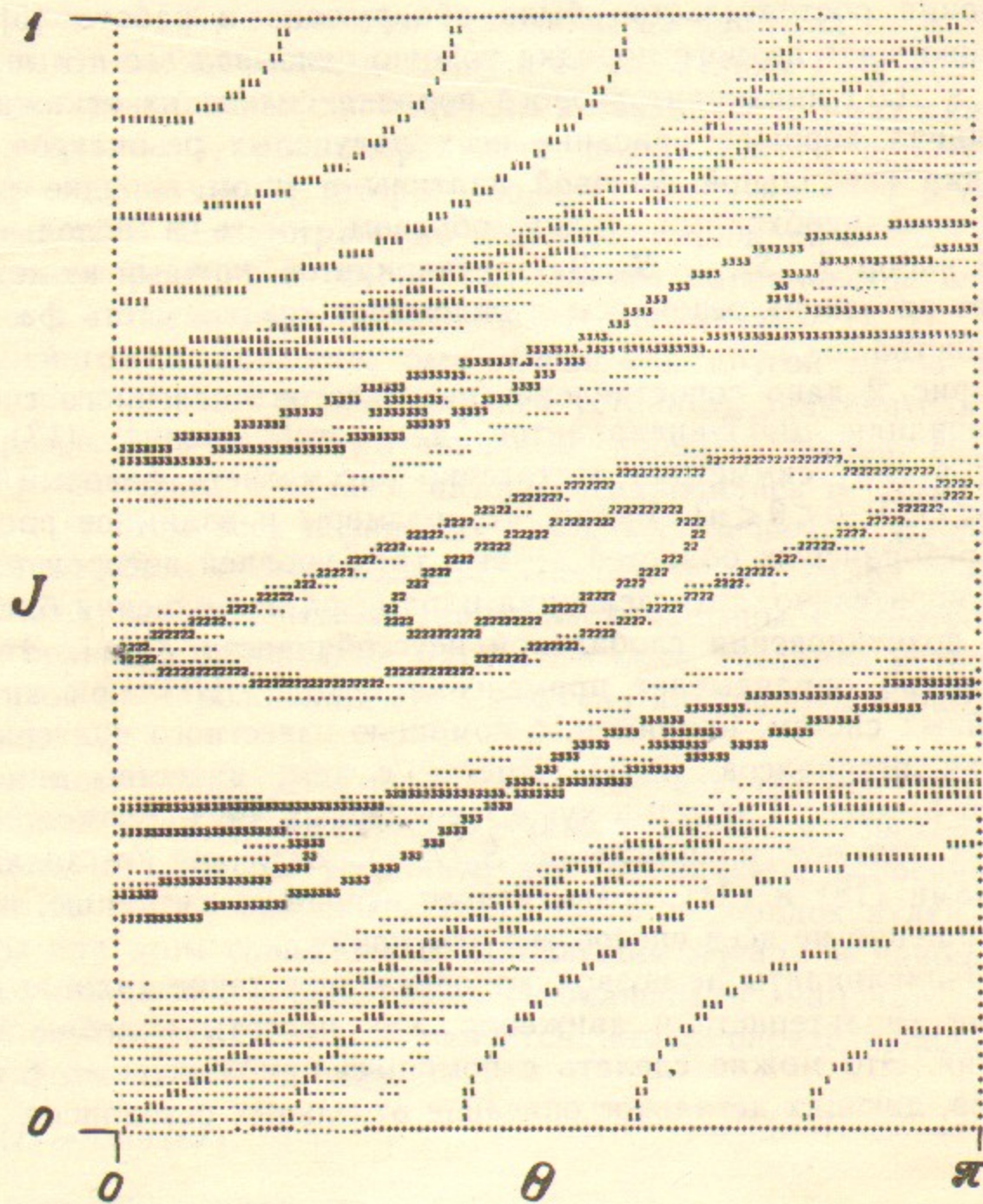


Рис. 2. Сопоставление результатов численного счета (точки) и применения ДЛТ-инвариантов (цифры) для симметризованного стандартного отображения (17) при  $K=0,9$ . Точками представлены стохастические слои резонансов. Цифры, которыми изображены линии, означают порядок использованных при построении этих линий инвариантов.

$$F_m(\bar{J}) = \sum_{k=0}^m \frac{\varepsilon^k}{k!} f_k(\bar{J}) = S_m(J, \theta, t). \quad (25)$$

Предположим, что искомое преобразование  $J, \theta \Rightarrow \bar{J}, \bar{\theta}$  порождается представленной в виде ряда производящей функцией Ли [4, 5]

$$W(J, \theta, t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} W_{k+1}(J, \theta, t), \quad (26)$$

и попытаемся найти явный вид нескольких первых членов этого ряда. Напомним, что в теории преобразований Ли всякая функция новых переменных превращается в функцию старых переменных под действием оператора

$$\hat{E}_W = \exp \left\{ \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + [\dots, W] \right) \Big|_{\varepsilon=0, J=\bar{J}, \bar{\theta}=\theta} \right\}.$$

Подробная запись равенства (25) выглядит при этом так [4, 5]:

$$\begin{aligned} F_m[\bar{J}(J, \theta, t)] = \hat{E}_W F_m(\bar{J}) = & f_0 + \varepsilon \{ f_1 + [f_0, W_1] \} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{ f_2 + 2[f_1, W_1] + \\ & + [[f_0, W_1], W_1] + [f_0, W_2] \} + \frac{\varepsilon^3}{6} \{ f_3 + 3[f_2, W_1] + 3[[f_1, W_1], W_1] + \\ & + 3[f_1, W_2] + [f_0, W_3] + [[f_0, W_1], W_2] + [[[f_0, W_1], W_1], W_1] + \\ & + 2[[f_0, W_2], W_1] \} + O(\varepsilon^4) = S_m(J, \theta, t). \end{aligned} \quad (27)$$

Подстановка в это выражение  $S_3(J, \theta, t)$  по формуле (21) сразу дает  $f_0(J) = s_{0,0}(J)$  и позволяет найти все неизвестные функции последовательно в каждом порядке с помощью простого правила:  $f_k(J)$  не может зависеть от фазы  $\theta$ , а  $W_k(J, \theta, t)$  не может зависеть от произвольной функции  $s_{0,0}(J)$  и ее производных. Для первых трех членов ряда (26) находим ( $\Omega = \theta + (\pi - \tau)J$ ):

$$W_1 = - \frac{\sin \Omega}{2 \sin(\pi J)}, \quad (28a)$$

$$W_2 = \frac{\pi \sin 2\Omega}{8 \sin^2(\pi J) \sin(2\pi J)}, \quad (28b)$$

$$W_3 = -\frac{\pi^2}{16} \frac{1}{\sin^2(\pi J) \sin^2(2\pi J)} \left[ \frac{2 + \cos(2\pi J)}{\sin(3\pi J)} \sin 3\Omega + \frac{\cos(2\pi J)[3 + 2 \cos(2\pi J)]}{\sin(\pi J)} \sin \Omega \right]. \quad (28b)$$

Знание производящей функции Ли позволяет, в частности, приступить к построению резонансных гамильтонианов.

Преобразованный с точностью  $\sim \varepsilon^3$  гамильтониан (16) должен быть функцией только нового действия  $\bar{J}$  и иметь вид суммы

$$\bar{H}(\bar{J}) = \frac{\bar{J}^2}{2} + \sum_{k=1}^3 \frac{\varepsilon^k}{k!} h_k(\bar{J}), \quad (29)$$

первый член которой определен вследствие близости преобразования к тождественному. Для отыскания выражения  $\bar{H}$  в старых переменных можно снова обратиться к соотношению (27), заменив в нем  $f_k$  на  $h_k$ . Единственными неизвестными теперь оказываются функции  $h_k(J)$   $k=1, 2, 3$ , которые мы попытаемся угадать, исходя из желания избежать сингулярностей вблизи целого резонанса  $J=J_r=0$ . Это можно сделать многими способами например, так:

$$h_1(\bar{J}), h_3(\bar{J}) \equiv 0, \quad h_2(\bar{J}) = \frac{1}{8 \sin^2(\pi J)}. \quad (30)$$

Для нового гамильтониана с помощью формул (27), (28) и (30) находим ( $K=2\pi\varepsilon$ ):

$$\begin{aligned} \bar{H} = & \frac{\bar{J}^2}{2} + \frac{K^2}{64\pi^2} \frac{1}{\sin^2(\pi J)} = \frac{J^2}{2} + \frac{K^2}{32\pi^2} \frac{\sin(\pi J) - \pi J \cos(\pi J)}{\sin^3(\pi J)} + \frac{K}{4\pi^2} \frac{\pi J}{\sin(\pi J)} \cos \Omega + \\ & + \frac{K^2}{64\pi^2} \frac{\sin(2\pi J) - 2\pi J}{\sin^2(\pi J) \sin(2\pi J)} \cos 2\Omega + \frac{K^3}{256\pi^2} \left\{ \left( \frac{\cos 3\Omega}{\sin(3\pi J)} - \frac{\cos \Omega}{\sin(\pi J)} \right) \times \right. \\ & \times \frac{2\pi J [1 + \cos(2\pi J) + \cos^2(2\pi J)] - \sin(2\pi J) - \sin(4\pi J)}{\sin^2(\pi J) \sin^2(2\pi J)} + \\ & \left. + \frac{2\pi J [2 + \cos(2\pi J)] - 3 \sin(2\pi J)}{\sin^5(\pi J)} \cos \Omega \right\} + O(K^4). \quad (31) \end{aligned}$$

Этот гамильтониан является интегралом движения системы (16) и поэтому может быть получен прямо из общей формулы (П2-4) приложения II, если для нулевого приближения  $S_0(J; \varepsilon)$  принять (см. формулу (10)):

$$s_{0,0} = \frac{J^2}{2}; \quad s_{0,2} = \frac{\sin(\pi J) - \pi J \cos(\pi J)}{4 \sin^3(\pi J)}; \quad s_{0,1}, s_{0,j} \equiv 0, \quad j=3,4,\dots$$

Отметим, что гамильтонианы первого и второго порядков, входящие в выражение (31), точно совпадают с полученными недавно Соколовым [7].

Нетрудно проверить, что формула (31) не содержит особенностей вблизи целого резонанса  $J_r=0$  и поэтому пригодна для его описания. Чтобы получить аналогичные соотношения для другого целого  $J_r=p$  или дробного  $J_r=p+1/2$ ;  $p \pm 1/3$  резонанса, нужно в исходном гамильтониане (16) выполнить замену переменных  $J, \theta \Rightarrow I, \psi$  с помощью производящей функции

$$\Phi(I, \theta, t) = (I + J_r) [\theta + (\pi - \tau) J_r]$$

и вновь проделать все вычисления настоящего раздела [2, 7]. В результате в формулах (28) и (31) аргументы тригонометрических функций  $\pi J$  и  $\theta + (\pi - \tau) J$  заменятся на  $\pi(I + J_r)$  и  $\psi + (\pi - \tau) I$  соответственно, а вместо свободно входящего действия  $J$  встанет  $I$ . Учитывая это замечание, можно сразу написать правильные резонансные гамильтонианы третьего порядка системы (16) при  $J_r=p$ ;  $p+1/2$ ;  $p \pm 1/3$  и с их помощью провести детальное исследование движения. Всегда возникающий в подобных случаях вопрос о точности и области применимости полученных приближенных выражений надежно может быть решен только сравнением с результатами численного счета [1]. Такое сравнение в отношении инвариантов первого и второго порядков стандартного отображения, содержащихся в формуле (31), проведено в работах [7].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Гамильтоновы системы, эквивалентные каноническим отображениям, имеют специфические черты, которые необходимо учитывать при разработке соответствующей теории возмущений. Описанный в п.2 подход позволяет, в принципе, строить приближенные интегралы движения  $S_m(J, \theta, t)$  таких систем в любом порядке  $m$  по параметру возмущения  $\varepsilon$ . При фиксированном  $m$  конкретное выражение  $S_m(J, \theta, t)$ , его функциональные свойства и область применимости полностью определяются заданием функции  $S_0(J; \varepsilon)$  нулевого приближения (см. формулы (6), (10)) и возникает ждущая своего решения задача оптимального выбора этой функции.



Инвариантам младших порядков  $m=1; 2; 3; \dots$  часто удается придать форму ДЛТ, наиболее удобную для получения фазового портрета системы и применения эффективного критерия перекрытия резонансов [2, 5]. Однако, асимптотические свойства метода ДЛТ неясны: при  $m \rightarrow \infty$  определяющая функция  $s'_{0,0}(J)$  (см. формулы (22) — (24)) должна обращаться в нуль при всех рациональных значениях своего аргумента, что превращает ее в тождественный нуль [5].

Знание инвариантов позволяет восстановить функцию Ли соответствующего канонического преобразования переменных и построить гамильтонианы, дающие описание отдельных резонансов. Этот путь представляется достаточно перспективным для продвижения в высокие порядки теории возмущений, поскольку он связан с устранением не всех, а лишь части особенностей [7].

Предложенный в работе метод может быть обобщен на системы вида

$$H(J, \theta, t) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta) \delta_{2\pi}(t),$$

эквивалентные так называемым неявным отображениям поворота [1].

Автор благодарен Б.В. Чирикову, Ф.М. Израйлеву, Д.Л. Шепелянскому и особенно В.В. Соколову за обсуждения и советы.

#### Приложение I

#### ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

При интегрировании уравнения (13) возникают ряды вида

$$I_C(J, \theta, t) = \frac{A(J)}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(m\theta - kt)}{m\omega(J) - k},$$

$$I_S(J, \theta, t) = \frac{A(J)}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(m\theta - kt)}{m\omega(J) - k},$$

которые внутри любого интервала  $0 < \tau < 2\pi$ ,  $\tau = t \pmod{2\pi}$  сходятся к функциям [9]

$$I_C(J, \theta, \tau) = \frac{A(J)}{\sin[\pi m \omega(J)]} \cos[m\theta(\tau) + m(\pi - \tau)\omega(J)],$$

$$I_S(J, \theta, t) = \frac{A(J)}{\sin[\pi m \omega(J)]} \sin[m\theta(\tau) + m(\pi - \tau)\omega(J)].$$

Вдоль траекторий истинного движения системы (3) с учетом зависимостей (5) имеем (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} I_C(0 < \tau < 2\pi) &= \frac{A(J_{n+1})}{\sin[\pi m \omega(J_{n+1})]} \cos[m\theta_n + \pi m \omega(J_{n+1})] = \\ &= \frac{A(J_{n+1})}{\sin[\pi m \omega(J_{n+1})]} \cos[m\theta_{n+1} - \pi m \omega(J_{n+1})] = \text{const}. \end{aligned}$$

Функция  $I_C(t)$  оказывается, таким образом, ступенчатой и величина совершаемого ею в момент  $t = t_n$  скачка равна

$$\begin{aligned} \text{jump } I_C(t_n) &= \frac{A(J_{n+1})}{\sin[\pi m \omega(J_{n+1})]} \cos[m\theta_n + \pi m \omega(J_{n+1})] - \\ &- \frac{A(J_n)}{\sin[\pi m \omega(J_n)]} \cos[m\theta_n - \pi m \omega(J_n)]. \end{aligned}$$

Поскольку обычная производная ступенчатой функции всюду равна нулю, то обобщенная производная обусловлена только скачками и может быть найдена по формуле [6]

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}I_C}{dt} &= \sum_n \delta(t - t_n) \text{jump } I_C(t_n) = \delta_{2\pi}(t) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( -\varepsilon \frac{dV}{d\theta} \right)^k \times \right. \\ &\times \left. [\cos(m\theta) B^{(k)}(J_n) - \sin(m\theta) A^{(k)}(J_n)] - 2A(J_n) \sin(m\theta) \right\}, \end{aligned}$$

где обозначено  $B(J) = A(J) \text{ctg}[\pi m \omega(J)]$  и учтено первое из уравнений (1).

Аналогичное соотношение имеет место и для  $I_S(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}I_S}{dt} &= \delta_{2\pi}(t) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( -\varepsilon \frac{dV}{d\theta} \right)^k [\sin(m\theta) B^{(k)}(J_n) + \right. \\ &+ \left. \cos(m\theta) A^{(k)}(J_n)] + 2A(J_n) \cos(m\theta) \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что в двух последних выражениях фигурирует функция  $\theta(t)$ , а не ее значения  $\theta_n = \theta(t_n)$  в дискретные моменты времени  $t_n$ , как это должно быть. Такая запись допустима в силу известного «фильтрующего» свойства дельта-функции:  $f(t)\delta(t) \equiv f(0)\delta(t)$  для любой непрерывной в нуле функции  $f(t)$  [6].

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ПЕРВЫХ ТРЕХ ПОРЯДКОВ СИСТЕМЫ (16)

Интегралом нулевого порядка системы (16), как отмечалось выше, является любая аналитическая функция  $S_0(J; \varepsilon) = \sum_{k>0} (\varepsilon^k/k!) s_{0,k}(J)$ , обобщенная производная которой равна (см. формулы (10) — (12))

$$\frac{\tilde{d}S_0}{dt} = \delta_{2\pi}(t) \left\{ \varepsilon s'_{0,0} \sin \theta + \frac{\varepsilon^2}{2} [s''_{0,0} \sin^2 \theta + 2s'_{0,1} \sin \theta] + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^3}{6} [s'''_{0,0} \sin^3 \theta + 3s''_{0,1} \sin^2 \theta + 3s'_{0,2} \sin \theta] + O(\varepsilon^4) \right\},$$

здесь  $\varepsilon = K/2\pi$  и штрих означает производную по  $J$ .

Применяя описанную в п.2 схему и приложение I, в первом порядке по  $\varepsilon$  имеем

$$\frac{\partial I_1}{dt} + J \frac{\partial I_1}{\partial \theta} = -\delta_{2\pi} s'_{0,0} \sin \theta,$$

$$I_1(J, \theta, t) = \frac{s'_{0,0}(J)}{2 \sin(\pi J)} \cos \Omega, \quad (\text{П2-1})$$

где введено сокращенное обозначение фазы  $\Omega = \theta + (\pi - \tau)J$ ,  $\tau = t \pmod{2\pi}$ . Для обобщенной производной  $I_1$  находим

$$\varepsilon \frac{\tilde{d}I_1}{dt} = \varepsilon \delta_{2\pi} \left\{ -s'_{0,0} \sin \theta - \frac{\varepsilon}{2} s''_{0,0} \sin^2 \theta - \frac{\varepsilon^2}{4} s'''_{0,0} \sin^3 \theta + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{4} a'_{1,0} \sin 2\theta + \frac{\varepsilon^2}{8} a''_{1,0} \sin \theta \sin 2\theta + O(\varepsilon^3) \right\}.$$

В последнем выражении и ниже встречаются функции вида

$$a_{0,q}(J) \equiv s'_{0,q}(J), \quad q=0, 1, 2, \dots$$

$$a_{p,q}(J) = a_{p-1,q}(J) \operatorname{ctg}(\pi p J), \quad p=1, 2, 3, \dots$$

Во втором порядке

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} + J \frac{\partial I_2}{\partial \theta} = -\delta_{2\pi} \left[ 2s'_{0,1} \sin \theta + \frac{a'_{1,0}}{2} \sin 2\theta \right].$$

$$I_2(J, \theta, t) = \frac{s'_{0,1}(J)}{\sin(\pi J)} \cos \Omega + \frac{a'_{1,0}(J)}{4 \sin(2\pi J)} \cos 2\Omega, \quad (\text{П2-2})$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\tilde{d}I_2}{dt} = \frac{\varepsilon^2}{2} \delta_{2\pi} \left\{ -2s'_{0,1} \sin \theta - \varepsilon s''_{0,1} \sin^2 \theta + \frac{\varepsilon}{4} a'_{1,1} \sin 2\theta - \right. \\ \left. - \frac{a'_{1,0}}{2} \sin 2\theta + \frac{\varepsilon}{4} a'_{2,0} \sin \theta \cos 2\theta - \frac{\varepsilon}{4} a''_{1,0} \sin \theta \sin 2\theta + O(\varepsilon^2) \right\}.$$

В третьем порядке

$$\frac{\partial I_3}{\partial t} + J \frac{\partial I_3}{\partial \theta} = -\delta_{2\pi} \left\{ -\frac{s'''_{0,0}}{2} \sin^3 \theta + 3s'_{0,2} \sin \theta + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} a'_{1,1} \sin 2\theta + \frac{3}{4} a'_{2,0} \sin \theta \cos 2\theta \right\},$$

$$I_3(J, \theta, t) = \frac{24s'_{0,2}(J) - 3a'_{2,0}(J) - 3s'''_{0,0}(J)}{16 \sin(\pi J)} \cos \Omega + \\ + \frac{3}{8} \frac{a'_{1,1}(J)}{\sin(2\pi J)} \cos 2\Omega + \frac{3a'_{2,0}(J) + s'''_{0,0}(J)}{16 \sin(3\pi J)} \cos 3\Omega, \quad (\text{П2-3})$$

$$\frac{\varepsilon^3}{6} \frac{\tilde{d}I_3}{dt} = \frac{\varepsilon^3}{6} \delta_{2\pi} \left\{ -3s'_{0,2} \sin \theta - \frac{3}{4} a'_{1,1} \sin 2\theta - \right. \\ \left. - \frac{1}{8} (3a'_{2,0} + s'''_{0,0}) \sin 3\theta + \frac{3}{8} (a'_{2,0} + s'''_{0,0}) \sin \theta + O(\varepsilon) \right\}.$$

С помощью формул (П2-1) — (П2-3) для функций  $I_1, I_2, I_3$  и формулы (6) можно в общем виде записать интегралы первых трех порядков  $S_1, S_2, S_3$  системы (16). Для  $S_3$ , например, имеем

$$S_3(J, \theta, t) = s_{0,0}(J) + \varepsilon [s_{0,1}(J) + I_1(J, \theta, t)] + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} [s_{0,2}(J) + I_2(J, \theta, t)] + \frac{\varepsilon^3}{6} [s_{0,3}(J) + I_3(J, \theta, t)]. \quad (\text{П2-4})$$

Конкретные выражения, как отмечалось выше, полностью определяются заданием интеграла нулевого порядка  $S_0(J; \varepsilon)$ .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Лихтенберг, М. Либерман. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984, 528 с.
2. B.V. Chirikov. Phys. Rep., 1979, vol.52, p.265.
3. A.Z. Dragt, J.M. Finn. J. Math. Phys., 1976, vol.17, N 12, p.2215.
4. Г.Е.О. Джакалья. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979, 319 с.
5. B. McNamara. J. Math. Phys., vol.19, N 10, 1978, p.2154.

6. И.М. Гельфонд, Г.Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. М. ГИФМЛ, 1958, 439 с.
7. В.В. Соколов. Интеграл квазиэнергии канонических отображений. Препринт ИЯФ 85-31. Новосибирск, 1985.  
Ф.М. Израйлев, В.В. Соколов. Приближенные интегралы квазиэнергии для двумерных канонических отображений. Препринт 85-63. Новосибирск, 1985.
8. D.A. Dunnet, E.W. Laing, J.V. Taylor. J. Math. Phys., vol.9, N 11, 1968, p.1819.
9. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1984, 798 с.

*В.В.Вечеславов*

**Приближенные инварианты  
двумерных канонических отображений**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 19 июля 1985 г.  
Подписано в печать 9 сентября 1985 г. МН 06696  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,5 печ.л., 1,2 уч.-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 104

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*