



Б.94

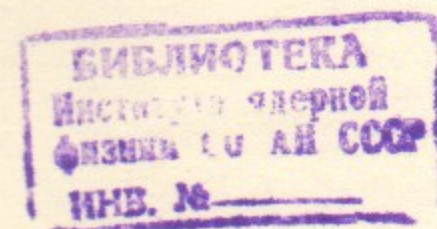
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

17

О.А. Бушкова, В.В. Мирнов

ВЛИЯНИЕ КОНФИГУРАЦИИ
МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА МГД УСТОЙЧИВОСТЬ
ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЛОВУШКИ

ПРЕПРИНТ 85-103



НОВОСИБИРСК

THE EFFECT OF THE MAGNETIC FIELD
PROFILE ON MHD PLASMA STABILITY
IN GASDYNAMIC TRAP

O.A. Bushkova, V.V. Mirnov
Abstract

Gasdynamic trap (GDT) is an axisymmetric mirror machine with a high mirror ratio k , in which the effective mean free path λ/k is smaller than the length of the system. An important feature of GDT is its ability to stabilize flute perturbations using the favorable magnetic field curvature in the expanding regions outside of the throats.

It is known that the section of force lines located between the throats always give unfavorable contribution to the Rothenbluth-Longmire stability criterion. In the present paper:

a) an optimal magnetic force lines profile is found that minimizes this unfavorable contribution;

b) the expander parameters required for the compensation of this unfavorable contribution and the establishment of stability are presented. The optimal expanding force lines configuration is discussed;

c) MHD stability of the ballooning modes is analyzed. The effect of the expander is taken into account with the boundary condition of zero plasma displacement in the throats. Numerical calculations of the critical values of β are carried out for various magnetic field profiles. Examples of profiles are found that corresponds to value of β_{cr} up to 0.7–0.8.

©Институт ядерной физики СО АН СССР

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, при удержании плазмы в аксиально-симметричных открытых ловушках существует опасность возникновения неустойчивостей желобкового типа, приводящих к быстрому (за время порядка пролетного времени ионов) разрушению плазменного шнура. В настоящее время разработано большое количество предложений по стабилизации таких неустойчивостей в рамках аксиально-симметричной геометрии магнитного поля. К числу их относятся, например, якоря с антипробочной геометрией поля, якоря со знакопеременной кривизной силовых линий, горячие электронные и ионные кольца и т.д. По сравнению с перечисленными способами стабилизации схема газодинамического удержания [1, 2] обладает определенными преимуществами. Она позволяет добиться устойчивости в рамках геометрии обычного пробкотрона без каких-либо сложных дополнительных конструкций.

Термин «газодинамическое удержание» означает удержание плазмы в пробкотроне в режиме сильных столкновений, когда эффективная длина свободного пробега ионов по отношению к рассеянию на угол порядка угла конуса потерь мала по сравнению с длиной системы. Ловушки такого типа получили в литературе название газодинамических ловушек (ГДЛ). Хотя плотность потока плазмы через пробки в ГДЛ велика ($\sim nv_T$), за счет перехода к большим пробочным отношениям ($k \simeq 100$) можно уменьшить потери частиц и энергии настолько, чтобы получить времена удержания, приемлемые с точки зрения проблемы УТС.

Одна из основных особенностей ГДЛ—возможность стабилизации желобковой неустойчивости—связана с тем, что в отличие от классических пробкотронов, где за пробкой плазмы практически нет, в ГДЛ плазма высокой плотности простирается далеко в зап-

рабочную область. Если силовые линии магнитного поля здесь расширяются (что довольно естественно для открытых ловушек), то эта область вносит благоприятный вклад в критерий устойчивости, который может скомпенсировать дестабилизирующий вклад от пробки и обеспечить устойчивость.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы, исходя из требований МГД-устойчивости плазмы, сформулировать рекомендации по выбору оптимального профиля магнитного поля в пробке и запробочной области. Здесь, в частности, найдена форма силовых линий, при которой неблагоприятный вклад в критерий устойчивости желобковых колебаний, вносимый областью пробки, минимален. Оценивается, какой стабилизирующий эффект обеспечивает расширитель, и как величина эффекта зависит от его геометрических характеристик. Помимо желобковых мод рассматривается устойчивость баллонных колебаний. Определены критические значения параметра β , указывается, как следует конструировать пробку для того, чтобы максимально расширить границы устойчивости.

2. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЖЕЛОБКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Особенности в исследовании МГД-устойчивости ГДЛ связаны с наличием течения плазмы в пробке и запробочной области со скоростями порядка скорости звука. Как указывалось в [1, 2], а затем было строго показано в [3], несмотря на большие направленные скорости плазмы, критерий устойчивости ГДЛ по отношению к возмущениям желобкового типа может быть представлен в форме известного критерия Розенблюта—Лонгмайра [4]:

$$\int dt \frac{\pi_{\parallel} + \pi_{\perp}}{RB^2} > 0 \quad (1)$$

Здесь π_{\parallel} и π_{\perp} — продольная и поперечная по отношению к магнитному полю компоненты тензора потока импульса, $r(l)$ — расстояние от оси системы до силовой линии, $R(l)$ — радиус кривизны силовой линии. Наличие течения плазмы проявляется в выражении для π_{\parallel} :

$$\begin{aligned} \pi_{\parallel} &= p_{\parallel} + \rho v^2, \\ \pi_{\perp} &= p_{\perp}, \end{aligned}$$

где p_{\parallel} , p_{\perp} — продольное и поперечное давления плазмы, ρ — плотность, v — скорость течения. Условия применимости критерия устойчивости в форме (1) сводятся к тому, чтобы время пролета плазмы через переходную область и расширитель было мало по

сравнению с характерным временем развития желобковых возмущений.

Строго говоря, выражение (1) относится только к случаю плазмы с резкой границей. Устойчивость локализованных возмущений желобкового типа определяется похожим выражением, но вместо суммы $\pi_{\parallel} + \pi_{\perp}$ в подынтегральное выражение входит производная от этой величины по нормали к силовой линии. В рассмотренных ниже случаях дифференцирование по нормали сводится, результативно, к умножению на величину, постоянную вдоль линии интегрирования, что делает оба этих критерия эквивалентными.

Дальнейшие вычисления проведем в параксиальном приближении, считая в соответствии с постановкой задачи о желобковой неустойчивости, что давление плазмы мало ($\beta \ll 1$). При этом распределение магнитного поля в пространстве однозначно задается значением напряженности вакуумного поля $B_v(z)$ на оси системы, а радиус силовой линии выражается формулой

$$r_v(z) = r_0 \sqrt{\frac{B_{vmin}}{B_v(z)}} \quad (3)$$

Здесь B_{vmin} и r_0 — напряженность вакуумного магнитного поля и радиус силовой линии в центральной части соленоида.

Учитывая параксиальность и используя (2), (3), перепишем (1) в виде:

$$I = \int P r^3 r'' dz > 0, \quad (4)$$

где

$$P = p_{\parallel} + p_{\perp} + \rho v^2. \quad (5)$$

Все параметры плазмы и, соответственно, функция P зависят от координаты z и номера рассматриваемой магнитной поверхности. Конкретный вид этих зависимостей определяется решением задачи о стационарном состоянии плазмы. Придерживаясь схемы, принятой в [1, 2], будем считать, что оно поддерживается в результате баланса инжекции нейтралов, сосредоточенной в центре системы на участке однородного поля, и стока частиц через пробки в расширители и далее на поглощающие поверхности, расположенные в конце расширителей (см. рис. 1).

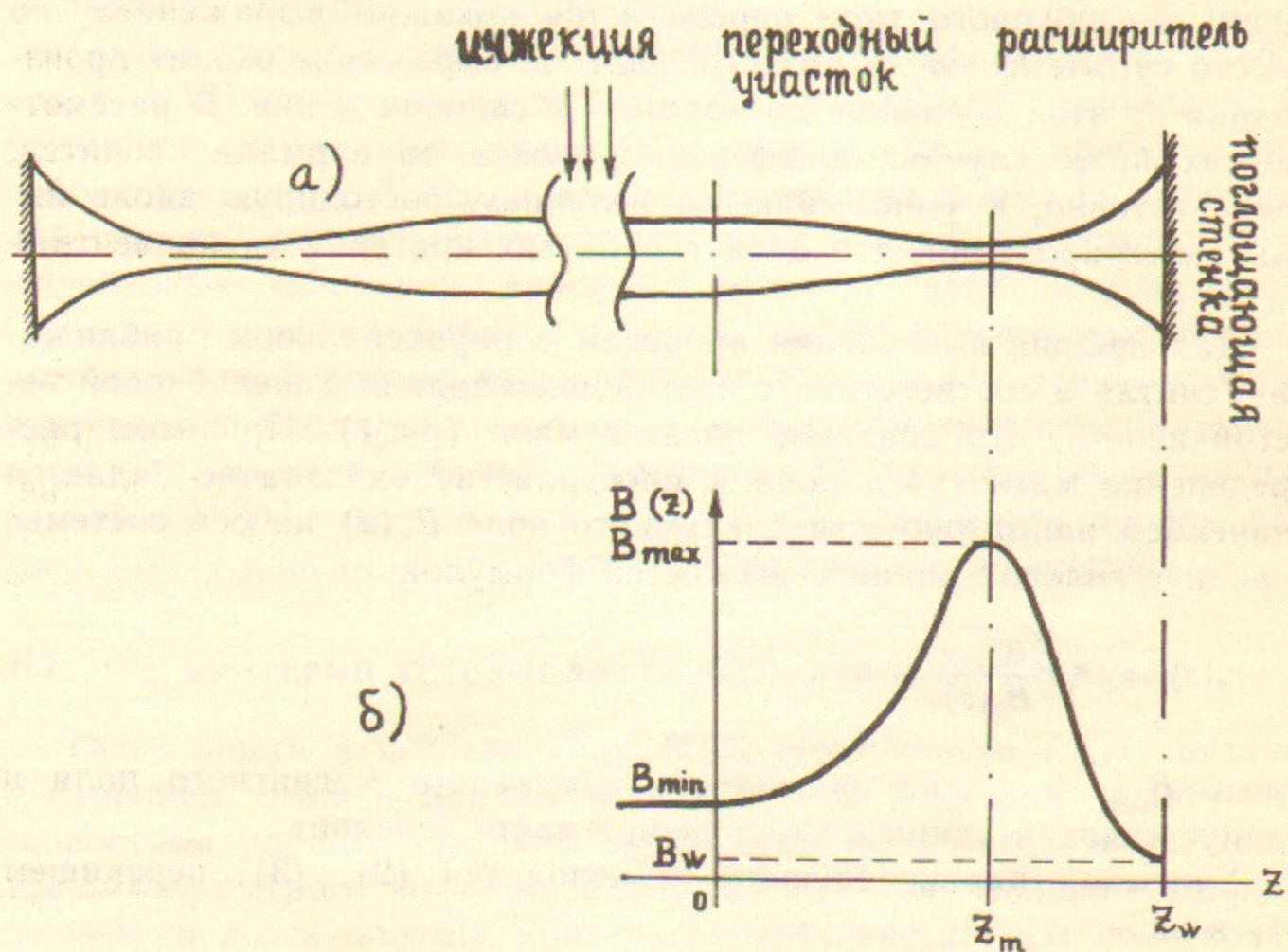


Рис. 1. Схема газодинамической ловушки:

а — форма силовых линий магнитного поля; б — зависимость напряженности магнитного поля от координаты z . Начало системы координат совмещено с началом переходного участка, z_m и, соответственно, z_w — координаты пробки и поглощающей поверхности.

Учитывая, что ловушка симметрична относительно центра, и область с однородным магнитным полем не дает вклада в интеграл (4), поместим начало координат ($z=0$) в точку, где начинается переход от однородного поля к пробке. Разобьем интеграл (4) на две части: по переходной области до среза пробки ($0 \leq z \leq z_m$)

и по области расширителя до поглощающей стенки ($z_m \leq z \leq z_w$). Рассмотрим отдельно соответствующие вклады I_m и I_{ex} :

$$I_m = \int_0^{z_m} P r^3 r'' dz \quad (6)$$

$$I_{ex} = \int_{z_m}^{z_w} P r^3 r'' dz. \quad (7)$$

В классических бесстолкновительных пробкотронах, где весовая функция $P = p_{\parallel} + p_{\perp}$, плазмы в запробочной области практически нет и поэтому знак (4) определяется интегралом по переходной области (6). Интегрируя (6) по частям и учитывая, что $r'(0) = r'(z_m) = 0$, получаем

$$I_m = - \int_0^{z_m} r' \frac{d}{dz} (P r^3) dz \quad (8)$$

Так как $r' < 0$, то знак (8) определяется знаком производной $d(P r^3)/dz$. Если исходить из предположения, что p_{\parallel} и p_{\perp} монотонно уменьшаются по мере приближения к пробке, то $d(P r^3)/dz < 0$. Более того, даже если P растет с координатой z , но не быстрее r^{-3} , интеграл (8) отрицателен независимо от формы силовых линий, что является основанием для хорошо известного утверждения о неустойчивости классического пробкотрона с аксиально-симметричным магнитным полем. Исключение из этого правила составляют хотя теоретически и возможные, но реально трудно осуществимые режимы с сильной немонотонностью функции P . В качестве примера одного из таких режимов упомянем рассмотренную в [5] стабилизацию плазмы с помощью наклонной высокоэнергетичной инъекции нейтралов, обладающих малым угловым разбросом. Если подобрать угол инъекции так, чтобы остановка ионов происходила в области благоприятной кривизны, то за счет локального увеличения давления в окрестности этой точки можно добиться стабилизации желобковой неустойчивости.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОФИЛЯ ПРОБКИ

Переходя к анализу устойчивости плазмы в ГДЛ, мы исключим из рассмотрения упомянутые выше специальные режимы и бу-

дем считать, что всюду на интервале $0 \leq z \leq z_m$ выполняется неравенство:

$$\frac{d}{dz}(Pr^3) < 0 \quad (9)$$

Из (8) видно, что в этом случае переходный участок ГДЛ независимо от формы числовых линий (предполагается только, что $r' < 0$) вносит неблагоприятный вклад в критерий устойчивости желобковых колебаний. Найдем теперь, при какой геометрии поля неблагоприятный вклад минимален. Впервые на существование такой выделенной конфигурации силовых линий обратил внимание Д.Д. Рютов.

Анализ проведем для произвольной зависимости $P(z)$, удовлетворяющей неравенству (9), и кривых $r(z)$, монотонно убывающих на интервале $0 \leq z \leq z_m$. Рассмотрим вариационную задачу об отыскании экстремали $r(z)$ функционала (6), на которой он достигает максимума (минимума по абсолютной величине) при заданных граничных условиях:

$$r(0) = r_0, \quad r(z_m) = r_0 / \sqrt{k}. \quad (10)$$

Искомая экстремаль удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа:

$$2r'' \frac{d}{dr}(Pr^3) + r'^2 \frac{d^2}{dr^2}(Pr^3) = 0 \quad (11)$$

Используя соотношение (3), мы в этой формуле вместо зависимости $P(z)$ ввели зависимость $P[z(r)] \equiv P(r)$, для которой неравенство (9) переписывается следующим образом:

$$\frac{d}{dr}(Pr^3) \geq 0$$

Решение уравнения (11) имеет вид

$$r'^2 \frac{d}{dr}(Pr^3) = \text{const},$$

откуда с учетом (10) приходим к выражению

$$\frac{z}{z_m} = \int_r^{r_0} \sqrt{\frac{d}{dr}(Pr^3)} dr / \int_{r_0/\sqrt{k}}^{r_0} \sqrt{\frac{d}{dr}(Pr^3)} dr, \quad (12)$$

задающему в неявном виде профиль оптимальной силовой линии.

В качестве примера, позволяющего получить явную зависимость $r(z)$, рассмотрим модель столкновительного течения через переходную область. В рамках этой модели изменение параметров плазмы описывается уравнениями одножидкостной гидродинамики с изотропным давлением, вид функции P определяется формулой (5) с $p_{\parallel} = p_{\perp} = p$. Для упрощения вычислений мы рассмотрим ниже частный случай адиабатического течения электронов и ионов с равными температурами $T_e = T_i$.

Поскольку источники частиц и энергии сосредоточены в центре системы, на переходном участке выполняются условия непрерывности потока плазмы $q = \rho v / B = \text{const}$ и постоянства энтропии $p = p_0 (\rho / \rho_0)^{\gamma}$. Интегрируя уравнение движения

$$v \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

и определяя константу q из условия однозначности решения, нетрудно получить соотношение, связывающее ρ с $B(z)$ и $r(z)$. В пределе больших пробочных отношений оно имеет вид

$$\frac{B^2}{B_{\text{max}}^2} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \frac{1}{k^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}\right] \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{2/\gamma-1} \quad (13)$$

Индексом «0» во всех формулах помечены значения параметров плазмы в точке $z=0$.

Весовая функция P выражается через отношение ρ/ρ_0 следующим образом:

$$P = \frac{2p_0}{\gamma-1} \left[\gamma \frac{\rho}{\rho_0} - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \right] \quad (13')$$

Из (13), (13') видно, что при больших пробочных отношениях практически на всем переходном участке $r_0/\sqrt{k} \leq r \leq r_0$ плотность, давление и функция P постоянны и равны своим значениям в точке $z=0$:

$$\rho = \rho_0, \quad p = p_0, \quad P = 2p_0. \quad (14)$$

Изменения этих параметров происходят вблизи пробки при $r \lesssim r_0/\sqrt{k}$, где их значения уменьшаются на величину порядка единицы. Поскольку область $r \sim r_0/\sqrt{k}$ вносит малый вклад в интеграл (12), при его вычислении можно пренебречь отклонением

функции P от постоянного значения (14). Учитывая это, получаем

$$r = r_0 \sqrt{1 - \frac{z}{z_m} \left(1 - \frac{1}{k}\right)} \quad (15)$$

Неблагоприятный для устойчивости вклад в интеграл (6) вносит та область значений z , где $r''(z) < 0$. Вторая производная оптимального профиля (15) отрицательна на всем интервале $0 < z < z_m$. Таким образом, оказывается, что для минимизации неблагоприятного вклада следует не уменьшать интервал, где $r''(z) < 0$, а наоборот, растягивать его на весь промежуток $0 \leq z \leq z_m$. Хотя после такого растяжения весь переходный участок вносит неблагоприятный вклад, значение интеграла I_m по абсолютной величине оказывается минимальным. Его нетрудно найти, подставляя решение (12) в формулу (6):

$$I_m^{(\max)} = -\frac{1}{z_m} \left[\int_{r_0/\sqrt{k}}^{r_0} \sqrt{\frac{d}{dr}(Pr^3)} dr \right]^2 \quad (16)$$

В пределе больших пробочных отношений, когда можно пользоваться упрощенными формулами (14), выражение (16) принимает вид

$$I_m^{(\max)} = -\frac{3}{2} \frac{p_0 r_0^4}{z_m} \quad (17)$$

Формулы (15), (17) соответствуют асимптотике $k \gg 1$. Численные расчеты, выполненные для случая конечных k , показывают, что уже при $k \geq 10$ они обеспечивают точность не хуже 8%.

Следует отметить, что выше для получения явной зависимости $r(z)$ использовалась далекая от реальности модель столкновительного течения плазмы с изотропным давлением. Примечательной особенностью ГДЛ является то, что при больших пробочных отношениях результаты (15), (17) остаются справедливыми и в других режимах течения через пробку. Например, в режиме чисто бесстолкновительного течения давление плазмы является анизотропным, но, тем не менее, почти на всем переходном участке функция P остается постоянной, что вновь приводит к формулам (15), (17). Разумеется, если функция распределения ионов сильно отличается от максвелловской, что, например, имеет место в схеме двухкомпонентной ГДЛ с «плещущимися» ионами [6], то $P \neq \text{const}$, и для нахождения оптимального профиля пробки следует пользоваться общими выражениями (12), (16).

Точное решение (12), так же как и приближенное выражение (15), имеют на границах интервала в точках $z=0$ и $z=z_m$ отличные от нуля первые производные (см. рис. 2). При сшивке их с однородным полем центральной части и расширяющимся полем в запробочной области возникают изломы силовой линии. Такой профиль с разрывами первой производной формально не удовлетворяет условию параксиальности. Однако, этот недостаток легко устранить. Действительно, сглаживая участки изломов на масштабе δ , величина которого лежит в пределах $r_0^2/z_m \ll \delta \ll z_m$, мы получим кривые, удовлетворяющие условию параксиальности. Одновременно, так как сглаженный профиль лишь на узких участках отличается от кривой с изломами, значение (6) на нем будет близко к $I_m^{(\max)}$.

Для представления о величине выигрыша, который дает оптимизация геометрии пробки, укажем, что с переходом от оптимального профиля к типичной кривой с точкой перегиба в центре переходного участка (см. рис. 2) значение I_m по абсолютной величине возрастает приблизительно в два раза.

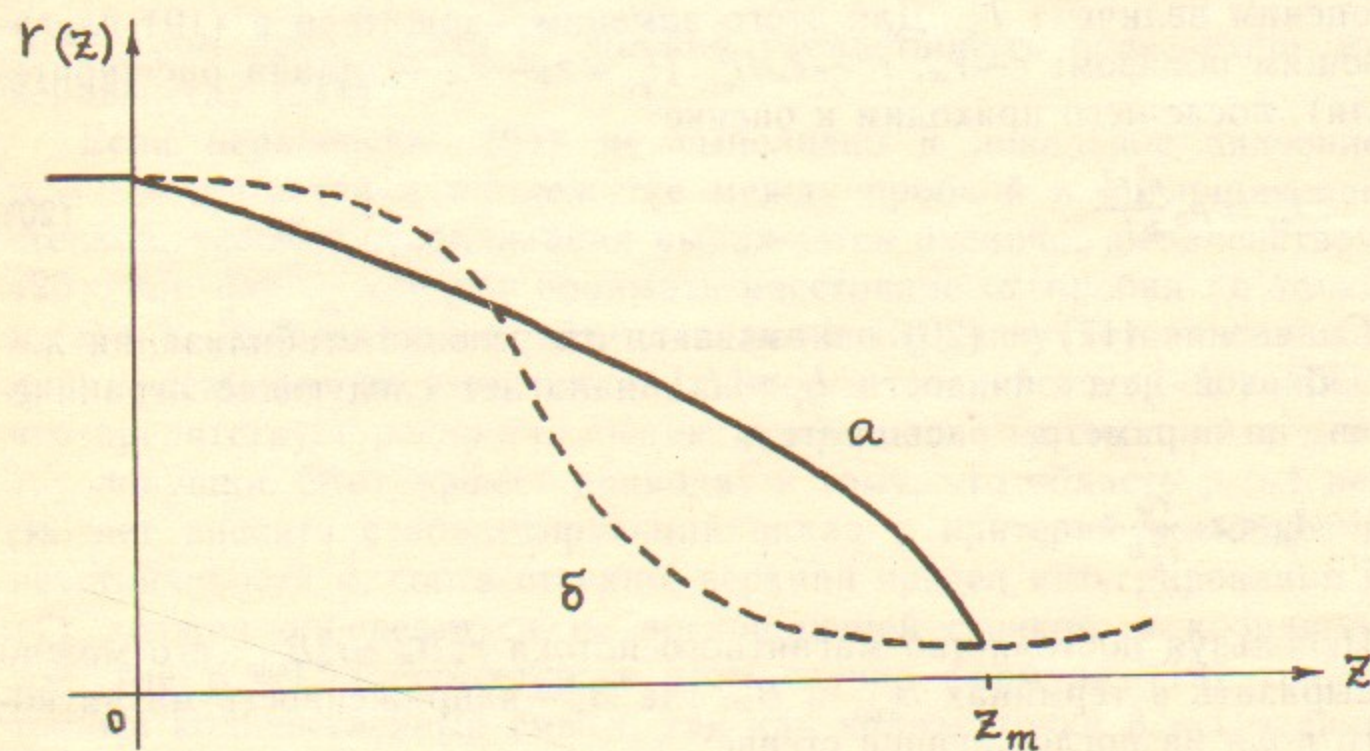


Рис. 2. Различные варианты конфигурации магнитных силовых линий на переходном участке:

а) профиль, оптимальный с точки зрения стабилизации желобковой неустойчивости; б) профиль пробки с точкой перегиба в середине переходного участка.

4. СТАБИЛИЗИРУЮЩИЙ ВКЛАД РАСШИРИТЕЛЯ

Будем предполагать, что в расширителе r растет с z быстрее, чем по линейному закону ($r'' > 0$). Так как по мере продвижения от пробки вглубь расширителя становится справедливой асимптотика (см. (13), (13')):

$$p = \frac{2p_0\gamma}{\gamma-1} \frac{q}{q_0} \simeq \frac{2\gamma p_0}{\gamma-1} \frac{r_0^2}{kr^2}, \quad (18)$$

перепишем (7) в форме

$$I_{\text{ex}} = \frac{2p_0\gamma}{\gamma-1} \frac{r_0^2}{k} \int_{z_m}^{z_w} r'' r dz, \quad (19)$$

откуда видно, что основной вклад в интеграл (19) вносит область больших значений r (порядка радиуса r_w силовой линии на поглощающей стенке).

Чтобы составить представление о том, при каких условиях расширитель может компенсировать дестабилизирующий вклад (17), оценим величину I_{ex} . Для этого заменим множители в (19) следующим образом: $r \sim r_w$, $r'' \sim r_w/l_{\text{ex}}^2$ ($l_{\text{ex}} = z_w - z_m$ — длина расширителя), после чего приходим к оценке

$$I_{\text{ex}} \simeq p_0 \frac{r_0^2 r_w^2}{k l_{\text{ex}}} \quad (20)$$

Сравнение (17) и (20) показывает, что условие стабилизации желобковой неустойчивости $I_{\text{ex}} > |I_m|$ налагает следующее ограничение на параметры расширителя

$$l_{\text{ex}} < z_m \frac{r_w^2}{r_0^2 k} \quad (21)$$

Используя постоянство магнитного потока $r_w^2 B_w = r_0^2 B_{\text{min}}$, его можно выразить в терминах B_{min} и B_w , где B_w — напряженность магнитного поля на поглощающей стенке:

$$l_{\text{ex}} < z_m \frac{B_{\text{min}}}{B_w k} \quad (22)$$

Строгость ограничений, налагаемых этим неравенством, зависит от того, насколько мало значение B_w . Одно из наиболее су-

щественных ограничений снизу на величину B_w возникает в связи с тем, что локальное значение параметра $\beta_v = 4\pi q v^2 / B^2$ увеличивается по мере расширения потока по закону

$$\beta_v \simeq \beta \frac{B_{\text{min}}}{B \cdot k} \quad (23)$$

где значение β относится к центральной части ловушки (в ГДЛ оно равно по порядку величины единице). Если ориентироваться на магнитное удержание плазмы во всем объеме расширителя, условие $\beta_v < 1$ должно быть выполнено во всех точках силовой линии вплоть до поглощающей стенки

$$\frac{B_{\text{min}}}{k B_w} < 1 \quad (24)$$

Из сравнения неравенств (21) и (24) можно сделать вывод о том, что, во всяком случае, длина расширителя должна быть меньше длины переходного участка:

$$l_{\text{ex}} < z_m \quad (25)$$

(на самом деле, длина l_{ex} должна удовлетворять более строгому неравенству (21)).

Если неравенство (24) не выполнено и локальное значение $\beta_v = 1$ достигается в промежутке между пробкой и поглощающей стенкой, условие стабилизации выражается оценочно неравенством (25), где под l_{ex} следует понимать расстояние от пробки до точки $\beta_v(z) = 1$. Действительно, как показано в [3], на участках силовой линии, лежащих за этой точкой, скорость течения $v > c_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$, что препятствует распространению альфеновских колебаний к центру ловушки. Этот эффект приводит к тому, что область $\beta_v > 1$ перестает вносить стабилизирующий вклад в критерий желобковой неустойчивости и, соответственно, верхний предел интегрирования в (7) должен определяться не поглощающей стенкой, а координатой, где $\beta_v = 1$. Разумеется, в этом случае формула (19) теряет точный количественный смысл, так как вблизи точки $\beta_v = 1$ велики возмущения вакуумных характеристик поля $r_v(z)$ и $r_v''(z)$.

Возвращаясь к случаю, когда всюду внутри расширителя $\beta_v < 1$, рассмотрим вопрос об оптимальном профиле силовых линий на промежутке $z_m \leq z \leq z_w$, при котором стабилизирующий вклад (19) максимален. Трудности корректной постановки такой задачи связаны с тем, что интеграл (19) растет с увеличением кривизны

$r''(z)$ и, соответственно этому, по мере перехода к более крутым профилям нарушается условие параксиальности магнитного поля. Поэтому полная оптимизация профиля расширителя может быть проведена только на основе точного критерия устойчивости, выведенного без предположения о параксиальности силовых линий. Ввиду громоздкости такого рода вычислений мы ограничимся ниже рассмотрением примера, указывающего на существование оптимального профиля среди кривых, удовлетворяющих условию параксиальности.

Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых

$$r(z) = \frac{r_0}{\sqrt{k}} + \frac{l_{\text{ex}}}{n} \left(\frac{z - z_m}{l_{\text{ex}}} \right)^n, \quad (26)$$

сопряженных в пробке с силовыми линиями центральной части ловушки и описывающих, в зависимости от значений параметра $n \geq 1$, различные конфигурации магнитного поля в расширителе. Эти кривые подобраны так, что всюду в запробочной области они являются параксиальными и лишь в конце расширителя на поглощающей стенке достигают границы применимости этого приближения

$$\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z=z_w} = 1$$

Интеграл (19), вычисленный по кривым (26), зависит от n следующим образом:

$$I_{\text{ex}} \propto \frac{n-1}{n(2n-1)}$$

Он имеет максимум в точке $n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Этот результат показывает, что среди параксиальных кривых (26) существует оптимальный профиль, обеспечивающий максимальный стабилизирующий эффект.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ БАЛЛОННЫХ МОД.

Даже если устойчивость желобковых возмущений достигнута ($I_{\text{ex}} > |I_m|$), ГДЛ с конечным значением β может быть неустойчива по отношению к раскачке баллонных мод. При рассмотрении МГД-устойчивости возмущенное состояние плазмы характеризуется

смещением $\bar{\xi}(\vec{r}, t)$ точек плазменного шнура из состояния равновесия. В колебаниях желобкового типа эта функция устроена так, что после смещения все точки, принадлежащие некоторой силовой линии, совмещаются с другой, близлежащей силовой линией. В баллонных модах радиальное смещение усилено по сравнению с желобковым в области неблагоприятной кривизны и ослаблено там, где кривизна благоприятна. В результате, вклад в потенциальную энергию возмущения от слагаемых, пропорциональных газокинетическому давлению, становится отрицательным, что является источником неустойчивости. Напротив, возникающее в баллонных колебаниях возмущение магнитной энергии положительно, что оказывает стабилизирующее влияние. Отношение дестабилизирующего фактора к стабилизирующему равно по порядку величины параметру β . Конкуренция их приводит к тому, что при увеличении β выше некоторого порога баллонные колебания становятся неустойчивыми. Ниже мы рассмотрим задачу о нахождении критических значений β .

Известно, что в случае плазмы без течения устойчивость баллонных мод можно исследовать с помощью энергетического принципа [7, 8]. При этом подходе устойчивость или неустойчивость системы определяются знаком потенциальной энергии возмущения $\omega(\bar{\xi})$. Существенным для задачи о баллонной неустойчивости ГДЛ является то, что, несмотря на наличие течения, ее можно исследовать с помощью обычного энергетического принципа без учета направленного движения плазмы. Действительно, на переходном участке это заведомо справедливо, так как из-за большого пробочного отношения почти всюду здесь скорость течения мала по сравнению с тепловой скоростью (см. (14)). Что касается запробочной области, то в практически интересном случае, когда запас устойчивости по желобковым модам велик ($I_{\text{ex}} \gg |I_m|$), критические значения β слабо зависят от характеристик расширителя, наличие которого в этом пределе можно учитывать граничным условием в замороженности в пробке.

Важно отметить, что, как следует из результатов [9], критические значения β в аксиально-симметричном случае по порядку величины равны единице, поэтому при постановке задачи на устойчивость следует учитывать искажения вакуумного магнитного поля. Это означает, что при заданном внешними катушками распределении вакуумного поля $B_0(z)$ реальное значение напряженности поля в плазме $B(\psi, z)$ и, соответственно, профиль силовой линии $r(\psi, z)$ должны определяться из уравнения поперечного

равновесия, которое в параксиальном приближении имеет вид

$$\frac{B^2}{8\pi} + p = \frac{B_v^2}{8\pi} \quad (27)$$

Как отмечалось ранее (см. (14)), в пределе $k \gg 1$ давление плазмы на большей части переходного участка постоянно вдоль силовых линий и зависит только от номера магнитной поверхности, поэтому его можно представить в виде

$$p(\psi) = p(0)f(\psi), \quad (28)$$

где потоковая координата ψ вводится стандартным образом $d\psi = rBdr/B_{vmin}$, $p(0)$ — давление на оси ловушки, функция $f(\psi)$ описывает радиальный профиль давления ($f(0) = 1$).

Используя (27), (28), выразим $B(\psi, z)$ через $B_v(z)$:

$$b(\psi, z) = \sqrt{b_v^2(z) - \beta f(\psi)} \quad (29)$$

Здесь введены безразмерные напряженности поля $b = B/B_{vmin}$ и $b_v = B_v/B_{vmin}$ ($b_v(0) = 1$, $b_v(z_m) = k$), параметр β определен следующим образом:

$$\beta = 8\pi p(0)/B_{vmin}^2$$

Пользуясь определением ψ и формулой (29), найдем радиус силовой линии

$$r^2(\psi, z) = 2 \int_0^\psi \frac{d\psi'}{\sqrt{b_v^2(z) - \beta f(\psi')}} \quad (30)$$

Формулы (28) — (30) описывают равновесную конфигурацию параксиального магнитного поля при конечных значениях параметра β .

Переходя к анализу устойчивости, заметим, что наиболее опасными в МГД приближении являются локализованные мелкомасштабные ($m = \infty$) возмущения, потенциальная энергия которых в параксиальном случае записывается следующим образом [10]:

$$\omega = \frac{\Delta\psi}{8\pi} \int dz \left[\frac{1}{br^2} \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \beta \frac{r''}{rb^2} \left| \frac{df}{d\psi} \right| x^2 \right] \quad (31)$$

Интегрирование в (31) ведется вдоль невозмущенной силовой

линии $\psi = \text{const}$, $x = \xi_n Br$, где ξ_n — нормальная к силовой линии компонента вектора смещения $\xi(r, t)$.

Первый член в подынтегральном выражении описывает возмущение магнитной энергии. Он равен нулю на смещениях желобкового типа ($x = \text{const}$) и положителен во всех других случаях. Второе слагаемое связано с возмущением внутренней энергии плазмы. Знак его зависит от знака кривизны r'' и, поскольку в переходной области этот знак меняется, при достаточно больших β и специально подобранных $x(z)$ может оказаться, что $\omega < 0$. Из сказанного видно, что задача нахождения границы устойчивости сводится к отысканию экстремали функционала (31), на которой он достигает минимума, причем минимальное значение должно равняться нулю. Значение параметра β , при котором впервые по мере его увеличения появляется такая экстремаль, соответствует границе устойчивости баллонных мод.

Варьируя функционал (31), приходим к уравнению для экстремалей

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{br^2} \frac{dx}{dz} \right) - \beta \frac{r''}{rb^2} \left| \frac{df}{d\psi} \right| x = 0 \quad (32)$$

Если рассматривать его на всей длине ловушки, то граничные условия следует ставить на поглощающих стенках. Так, например, в случае идеально проводящих стенок этими условиями являются условия вмороженности

$$x|_{z=z_s} = 0 \quad (33)$$

если же поверхности являются изоляторами, граничные условия имеют вид

$$\frac{dx}{dz} \Big|_{z=z_s} = 0 \quad (34)$$

Ввиду симметрии ловушки относительно центра искомая экстремаль должна быть четной функцией координаты z , отсчитываемой от середины пробкотрона. Это позволяет рассматривать задачу на половине системы с граничным условием в центре $dx/dz = 0$. Удовлетворяющее такому условию решение (32) постоянно на центральном участке однородного магнитного поля

$$x = x_0 = \text{const}. \quad (35)$$

Отсюда следует, что решение на переходном участке, сшивающее

ся с (35) в точке $z=0$, должно удовлетворять здесь граничным условиям:

$$\left. \frac{dx}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad x|_{z=0} = x_0 \quad (36)$$

Если силовая линия вакуумного магнитного поля имеет излом в точке $z=0$, такую же особенность здесь имеет решение $x(z)$. Граничное условие (36) задает значение производной слева от этой точки. Значение производной справа от нее можно найти, проинтегрировав (32) по малой окрестности точки $z=0$:

$$\left. \frac{dx}{dz} \right|_{z=0} = \beta x_0 \frac{r'(+0)r(0)}{b(0)} \left| \frac{df}{d\psi} \right| \quad (37)$$

Обсудим теперь, как форма экстремали зависит от характеристик расширителя. Качественно ясно, что в условиях, когда он обеспечивает большой запас устойчивости по желобковым модам $I_{ex} \gg |I_m|$, смещение $x(z)$, минимизирующее (31), должно быть близко к нулю в области расширителя. Это означает, что влияние расширителя на форму решения на переходном участке может быть учтено в этом пределе граничным условием вмороженности в пробке

$$x|_{z=z_m} = 0 \quad (38)$$

Таким образом, в условиях $I_{ex} \gg |I_m|$ для нахождения границы устойчивости по баллонным модам уравнение (32) можно решать не на всей длине ловушки с расширителем, а только на переходном участке. Поскольку при таком подходе функционал (31) варьируется на ограниченном по сравнению с полной задачей классе кривых $x(z)$, найденные значения β_{cr} определяют, вообще говоря, только необходимые условия устойчивости. Фактически же при $|I_m|/I_{ex} \ll 1$ решение такой усеченной задачи с точностью, определяемой этим малым параметром, дает как необходимые, так и достаточные условия устойчивости.

Чтобы показать это, рассмотрим на уровне оценок поведение решения уравнения (31) в расширителе. Будем исходить из того, что параметр β не слишком велик и для расчетов по порядку величины можно пользоваться вакуумным соотношением (3). Заменим коэффициенты в (31) приближенными формулами $r^2 b \sim \psi$, $df/d\psi \sim 1/\psi$ и будем подразумевать под p значение функции $p + qv^2/2$ (см. II.2). После указанных операций уравнение (31)

принимает вид

$$\frac{d^2x}{dz^2} - V(z)x = 0, \quad (39)$$

где

$$V(z) = \frac{r''}{r} \frac{8\pi(p + qv^2/2)}{B^2}$$

Уравнение (39) имеет форму уравнения Шредингера с потенциалом $V(z)$, пространственное распределение которого определяется знаком r'' и функцией $P = 2p + qv^2$. Напомним, что для последней на каждом из участков существуют простые асимптотики (14) и (18). Если ориентироваться на типичный для пробочной геометрии профиль силовой линии, приведенный на рис. 2, то для него потенциал $V(z)$ в начале переходного участка отрицателен, а затем меняет знак, оставаясь при $0 \leq z \leq z_m$ по порядку величины равным

$$V_m \simeq \beta r'' r^3 / r_0^4 \sim \beta / z_m^2 \quad (40)$$

В области расширителя потенциал положителен и монотонно растет, так что его среднее значение по порядку величины равно максимальному, достигаемому на поглощающей стенке:

$$V_{ex} \simeq \beta r'' r / kr_0^2 \sim \frac{\beta}{l_{ex}^2} \frac{r_w^2}{kr_0^2} \quad (41)$$

Примерный график функции $V(z)$ приведен на рис. 3.

В дальнейших оценках мы будем исходить из предположений, что всюду внутри расширителя $\beta_v < 1$ (см. (24)), а на поглощающей стенке реализуется наиболее неблагоприятное с точки зрения баллонных мод граничное условие (34). Нетрудно видеть, что при этих условиях функция $x(z)$ мало меняется на масштабе расширителя и принимает в пробке практически то же значение x_m , что и на поглощающей стенке. Действительно, дважды интегрируя (37) по z с граничным условием (34) и принимая во внимание, что под знаком интеграла $x(z) \simeq \text{const}$, приходим с учетом (41) к оценке изменения $\Delta x = x(z) - x_m$ на длине расширителя

$$\frac{\Delta x}{x_m} \simeq \int_{z_a}^z dz' \int_{z_a}^{z'} V_{ex} dz'' \sim \beta \frac{B_{vmin}}{B_w k} < 1$$

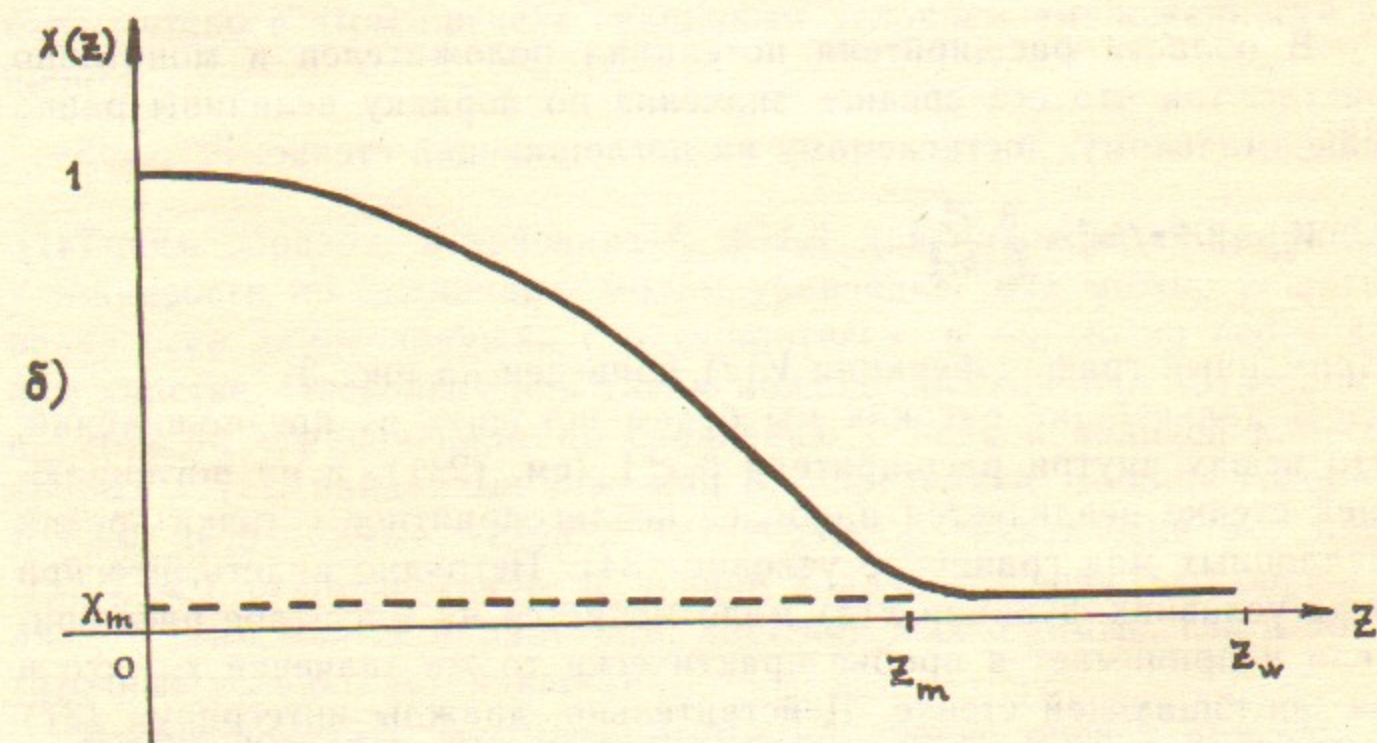
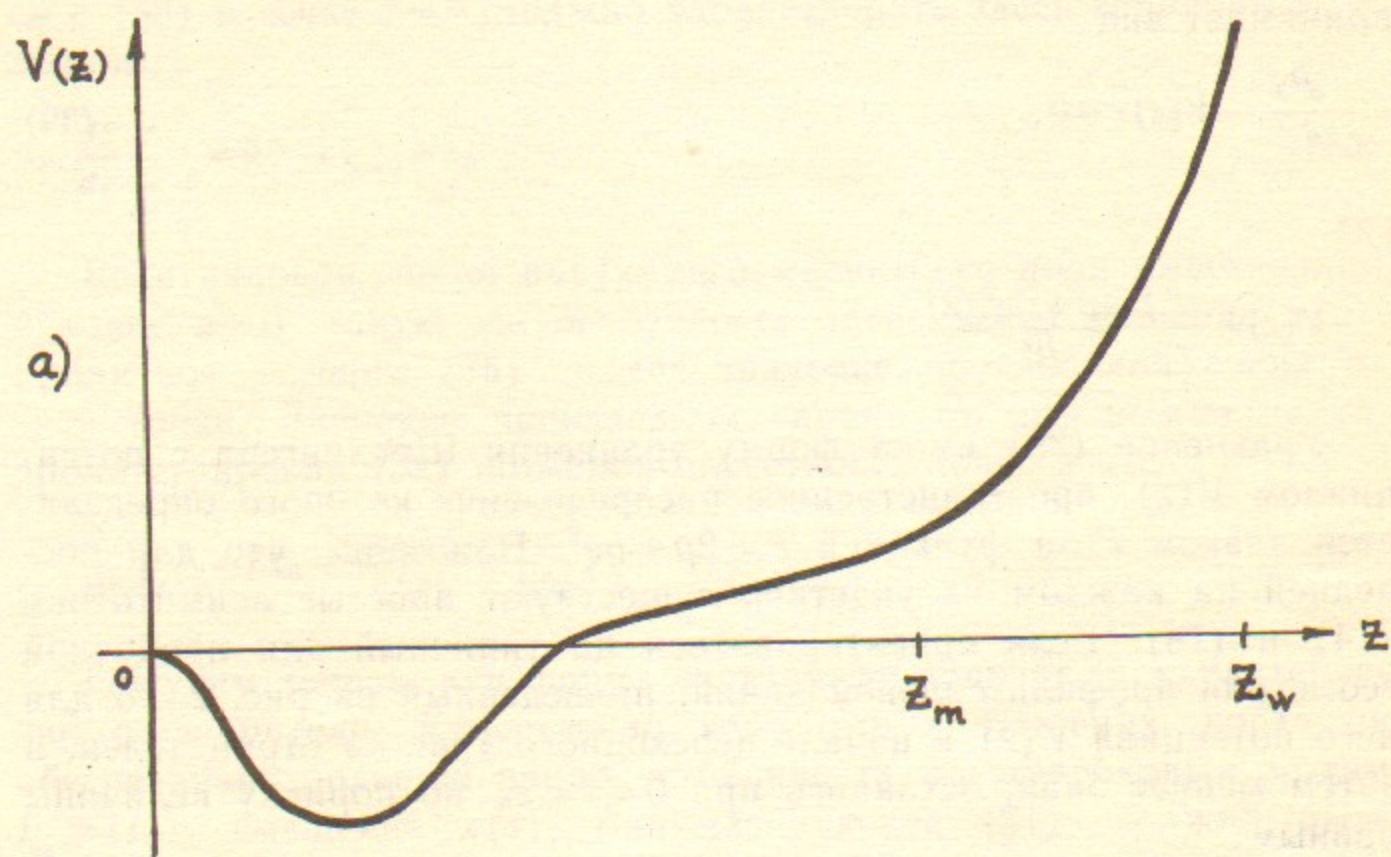


Рис. 3. Примерные зависимости от координаты z потенциала $V(z)$ и соответствующей экстремали $x(z)$ для профиля магнитного поля, изображенного на рис. 26.

Относительное постоянство $x(z)$ позволяет оценить значение производной в пробке

$$x'_m \simeq -x_m \int_{z_m}^{z_w} V_{ex} dz \quad (42)$$

Ту же величину можно вычислить другим способом, интегрируя (39) от левой границы с граничным условием (36)

$$x'_m = \int_0^{z_m} V_m(z) x dz \quad (43)$$

Так как речь идет о решении $x(z)$, минимизирующем функционал энергии (31), то очевидно, что эта функция не имеет нулей на интервале $0 < z < z_m$. Принимая в точке $z=0$ некоторое значение x_0 , которое без ограничения общности можно считать равным единице, она далее монотонно уменьшается, достигая в пробке значения $x_m \ll 1$. Примерный график зависимости $x(z)$ приведен на рис. 3. Оценивая интеграл (43) по среднему значению $x(z)$ на интервале $0 \leq z \leq z_m$ ($\bar{x}(z) \sim 1$), приходим к соотношению

$$x'_m \simeq \int_0^{z_m} V_m dz, \quad (44)$$

откуда, сравнивая (42) и (44), получаем оценку величины x_m :

$$x_m \simeq \left| \int_0^{z_m} V_m dz \right| / \left| \int_{z_m}^{z_w} V_{ex} dz \right| \simeq |I_m| / |I_{ex}| \ll 1 \quad (45)$$

Найденное значение (45) позволяет оценить точность граничного условия замороженности (38). Очевидно, что при выполнении неравенства (45) оно дает хотя и несколько завышенные, но мало отличающиеся от точной границы устойчивости значения β_{cr} . В процентном отношении неточность составляет

$$\Delta\beta_{cr}/\beta_{cr} \simeq |I_m|/|I_{ex}| \simeq \frac{l_{ex} B_w k}{z_m B_{0min}}$$

Уравнение (32) с коэффициентами, определяемыми формулами

(29), (30), и граничными условиями (36), (37) и (38) интегрировалось численно для различных вариантов распределения вакуумного поля $b_v(z)$. Аналогичный подход применялся ранее в [11] при расчетах β_{cr} для некоторой фиксированной функции $b_v(z)$. В нашем анализе центр тяжести переносился на рассмотрение различных профилей силовых линий и нахождение такой конфигурации вакуумного поля, которой соответствует максимально большое значение β_{cr} .

Учитывая связь (3), удобно задавать распределение поля с помощью функции $r_v(z) = b_v^{-1/2}(z)$, описывающей профиль вакуумной силовой линии ($r_v(0) = 1$, $r_v(z_m) = r_m = k^{-1/2}$). Рассматривались двухпараметрические кривые вида:

$$r_v(z) = [1 - (1 - r_m^\alpha)(z/z_m)^\alpha]^{1/\alpha} \quad (46)$$

$$\alpha \geq 1, \quad 0 \leq z \leq z_m$$

Кривые с $\alpha > 1$ имеют в точке $z=0$ нулевую производную, для кривых с $\alpha = 1$ $dr/dz|_{z=0} \neq 0$. Отметим, что найденный в П.2 оптимальный профиль (15) соответствует варианту $\alpha = 1$, $\gamma = 2$.

Уравнение (32) решалось методом пристрелки. Для каждого профиля вида (46) из точки $x(z) = 0$ с граничным условием (36) при $\alpha > 1$ и граничным условием (37) при $\alpha = 1$ выпускалось решение $x(z)$, и далее варьированием параметра β отыскивалось значение β_{cr} , при котором функция $x(z)$ в точке $z = z_m$ удовлетворяла второму граничному условию (38). Найденное таким образом β_{cr} соответствует границе устойчивости баллонных мод. Разумеется, полученные результаты не зависят от значений x_0 и z_m , которые легко устраняются заменами $x \rightarrow x/x_0$, $z \rightarrow z/z_m$. Численные значения β_{cr} в зависимости от величины параметров α , γ приведены в таблице.

Таблица ($k = 100$)

α	1	2	3	4	5	6
0,5	0,19	0,33	0,38	0,41	0,42	0,43
2	0,36	0,49	0,53	0,55	0,56	0,56
6	0,62	0,70	0,72	0,73	0,74	0,74

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проделанные расчеты показывают, что профиль (15), оптимальный с точки зрения желобковых мод, становится неустойчивым относительно баллонных колебаний при $\beta > 0,3$. Для повышения критических значений β следует переходить к более крутым ступенчатым профилям ($\alpha, \gamma \sim 5 \div 6$). Таким способом можно повысить β_{cr} до значений $0,7 \div 0,8$.

Следует отметить, что критические значения β довольно чувствительны к форме радиального распределения давления $f(\psi)$. Данные в таблице 1 относятся к параболической зависимости $f = 1 - (\psi/\psi_0)^2$, где через ψ_0 обозначен номер крайней магнитной поверхности. При таком выборе функции f наиболее неустойчивой оказывается крайняя магнитная поверхность $\psi = \psi_0$.

Рассмотрение других профилей $f(\psi)$, у которых точка максимального градиента лежит на крайней магнитной поверхности, показывает, что с ростом градиента, т.е. с переходом к профилям ступенчатого вида, критические значения β уменьшаются. Границе устойчивости соответствуют локализованные по радиусу возмущения, имеющие длину волны сравнимую с характерным масштабом ступеньки. Последовательный анализ устойчивости таких мелко-масштабных возмущений выходит за границы применимости МГД-приближения. Есть основания полагать, что за счет появляющихся при этом эффектов они окажутся стабилизированными. Принимая во внимание это обстоятельство, можно заключить, что плазма в ГДЛ будет устойчива по отношению к баллонным модам вплоть до значений $\beta \simeq 0,7 \div 0,8$.

Авторы приносят благодарность Д.Д. Рютову за обсуждения и поддержку в процессе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирнов В.В., Рютов Д.Д. Письма в ЖТФ, 5, 678 (1979).
2. Мирнов В.В., Рютов Д.Д. Вопросы атомной науки и техники, серия «Термоядерный синтез» вып.1(5), 57 (1980).
3. Nagorny V.P., Ryutov D.D., Stupakov G.V. Nuclear Fusion, 24 (11), 1421 (1984)
4. Rosenbluth M.N., Longmire C.L. Ann. Phys. 1, 120 (1957).
5. Hinton F.L., Rosenbluth M.N., Nuclear Fusion, 22, 1547 (1982).
6. Kotelnikov I.A., Mirnov V.V., Nagorny V.P., Ryutov D.D. Proceedings of the X Int. Conf. on Plasma Physics and Contr. Nuclear Fusion Research, London, IAEA-CN-44/C-II-1, v.2, 309 (1985).
7. Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud R.M. Proc. Roy. Soc., A244, 17 (1958).
8. Кадомцев Б.Б. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып.2, с.132, М.: Атомиздат, 1963.
9. Ryutov D.D., Stupakov G.V. Proceedings of the VIII Int. Conf. on Plasma Physics and Contr. Nuclear Fusion Research, Bryssels, IAEA, v.1, 119 (1981)
10. Newcomb W.A. J. Plasma Physics, 26 529 (1981)
11. D'Ippolito D.A., Myra J.R. Physics of Fluids, 24 (12), 1265 (1981)

О.А. Бушкова, В.В. Мирнов

Влияние конфигурации магнитного поля на МГД устойчивость газодинамической ловушки

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 18 июля 1985 г.
Подписано в печать 14 августа 1985 г. МН 06701
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,0 печ.л., 1,6 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 103

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.