



M.19

7

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.М.Малкин

КОЛЛАПС НЕЛИНЕЙНЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

ПРЕПРИНТ 85-93

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИНВ. № _____



НОВОСИБИРСК

В.М.Малкин

А Н Н О Т А Ц И Я

Дисперсия достаточно интенсивных ленгмюровских волн определяется их собственной - "электронной"-нелинейностью. В процессе ленгмюровского коллапса необходимая для проявления электронной нелинейности плотность энергии волн достигается, вообще говоря, до развития диссипативных процессов. Влияние электронной нелинейности на динамику коллапса и спектр сильной ленгмюровской турбулентности (которое может быть весьма существенным) до сих пор оставалось малоизученным из-за сложности описания нелинейных ленгмюровских волн. В настоящей работе доказана положительная определенность гамильтониана электронной нелинейности, вычислен инкремент модуляционной неустойчивости локализованного в каверне сгустка нелинейных ленгмюровских волн и найден универсальный закон их коллапса.

COLLAPSE OF NONLINEAR LANGMUIR WAVES

V.M.Malkin

Institute of Nuclear Physics,
630090, Novosibirsk, U S S R

ABSTRACT

The dispersion of sufficiently intensive Langmuir waves is determined by their own - "electron"-nonlinearity. In the process of Langmuir collapse the wave energy density necessary for the manifestation of the electron nonlinearity is reached, generally speaking, before dissipative processes are developed. Although the influence of electron nonlinearity on the collapse dynamics and on the spectrum of strong Langmuir turbulence can be rather important, it has been insufficiently studied up to now due to the difficulties of the description of nonlinear Langmuir waves. In the present work the positivity of the electron nonlinearity hamiltonian has been proved, the growing rate of the modulational instability has been calculated for the case of the nonlinear Langmuir waves localized in the cavity and the universal law of their collapse has been found.

В в е д е н и е

В первой статье о коллапсе ленгмюровских волн [1] и большинстве последующих работ на эту тему электрический потенциал φ описывается линейным уравнением шредингеровского типа, в котором роль потенциала играет возмущение концентрации ионов n . Нелинейность основных уравнений статьи [1] исчерпывается зависимостью n от давления ленгмюровских волн. Такое описание оправдано, если плотность энергии волн W гораздо меньше плотности тепловой энергии электронов $n_0 T$. При $W \gtrsim n_0 T$ осцилляторная скорость электронов превосходит их тепловую скорость и сами по себе ленгмюровские волны являются нелинейными. Нелинейное уравнение для электрического потенциала было получено в статье [2]. Оно оказалось весьма сложным, вследствие чего вопрос о влиянии собственной нелинейности ленгмюровских волн на их коллапс и сильную турбулентность до сих пор не удалось проанализировать удовлетворительным образом. При известных предположениях этот вопрос можно обойти. Например, в "звуковой" модели коллапса [3,4] сплюснутость каверны возрастает по такому закону, что порог модуляционной неустойчивости запертых волн $W_* \sim n_0 T \tau_D^2 / a^2$ (где a - меньший размер каверны, τ_D - дебаевский радиус) все время остается порядка W . При этом затухание Ландау становится существенным раньше, чем W достигает значения $n_0 T$, и электронная нелинейность не успевает проявиться. Численные расчеты не подтверждают "звуковую" модель коллапса, а свидетельствуют в пользу предположения об одинаковой зависимости всех размеров каверны от времени ("сверхзвуковой" режим) [5-7]. В "сверхзвуковом" режиме коллапса плотность энергии запертых волн возрастает пропорционально a^{-3} и (формально) достигает значения $n_0 T$ при $a \gg \tau_D$. Это служит указанием на возможность проявления электронной нелинейности. Имеется, однако, ряд обстоятельств, препятствующих ее развитию. Во-первых, затухание Ландау даже в случае максвелловского распределения электронов становится существенным при размере каверны, в несколько раз большем дебаевского радиуса. Во-вторых, электронная нелинейность обращается в нуль для одномерных колебаний (см., например, [8]), а каверна согласно численным расчетам сплюснута в 3-5 раз - следовательно, для нее электронная нелинейность по-

давлена и может проявиться только при плотности энергии волн, в несколько раз большей $n_0 T$. Эти два обстоятельства позволяют не учитывать электронную нелинейность в условиях, когда начальная плотность энергии запертых в каверне волн порядка порога их модуляционной неустойчивости (см. [9]). В общем случае обойти вопрос о влиянии электронной нелинейности на динамику коллапса не удастся, поскольку при достаточно большой средней плотности энергии ленгмюровской турбулентности плотность энергии запертых в кавернах волн может с самого начала заметно превышать порог модуляционной неустойчивости (см. [10], § 9, а также [11]). В принципе, допустимо любое начальное превышение, но интересуюсь развитием электронной нелинейности в процессе адиабатического коллапса, следует потребовать малости инкремента модуляционной неустойчивости $\gamma \sim \omega_{pi} (W/n_0 T)^{1/2}$ по сравнению с дисперсионной добавкой к частоте запертых в каверне волн $\Delta\omega \sim \omega_{pe} \tau_D^2 / a^2$ (ω_{pe} и ω_{pi} - электронная и ионная плазменные частоты). В частности, размер каверны a_e , при котором W достигает значения $n_0 T$, должен быть ограничен сверху неравенством

$$g(a_e) \equiv \frac{a_e^2}{\tau_D^2} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \leq 1. \quad (1.1)$$

Более аккуратный учет численных факторов практически не меняет условия (1.1). Поскольку определяемая им область значений параметра a_e/τ_D несколько шире области сильного затухания Ландау ленгмюровских волн на максвелловском распределении частиц, электронная нелинейность может играть существенную роль в начальной стадии формирования так называемых "хвостов" ускоренных электронов. Описывающие данный процесс модели сильной ленгмюровской турбулентности [12, 9, 4 (22)] очевидно, пришлось бы усовершенствовать, если бы оказалось, что электронная нелинейность останавливает коллапс или приводит к заметной утечке плазмонов из каверны. Первое предположение исключается с помощью довольно грубых оценок, дающих нижнюю границу скорости уменьшения размера каверны. Более тонкого анализа требует возможность нарушения адиабатичности коллапса. Здесь прежде всего важен вопрос о знакоопределенности гамильтониана электронной нелинейности H_e . В отсутствие знакоопределенности можно ожидать раз-

вития чисто электронного коллапса¹⁾. При положительной определенности H_e время коллапса, по всей видимости, должно зависеть от массы иона, но адиабатичность коллапса остается далеко не очевидной и в этом, более благоприятном для ее поддержания случае. Таким образом, коллапс нелинейных ленгмюровских волн нуждается в тщательном исследовании.

§ 2. Основные уравнения

Электронная нелинейность ленгмюровских волн приводит к появлению нулевой и высших гармоник частоты ω_{pe} в колебаниях электрического потенциала φ :

$$\varphi = \tilde{\varphi} + (\psi e^{-i\omega_{pe}t} + \text{к.с.}) + (\psi_2 e^{-2i\omega_{pe}t} + \text{к.с.}) + \dots \quad (2.1)$$

Огибающие гармоник ψ , $\tilde{\varphi}$, ψ_2 и др. мало меняются за время ω_{pe}^{-1} ; $\tilde{\varphi}$ и ψ_2 являются квадратичными функционалами от ψ , а огибающие остальных гармоник - величинами более высоких порядков малости. Полученное в статье [2] уравнение для основной огибающей ψ весьма громоздко, поэтому целесообразно не выписывать его явно, а воспользоваться вариационной формулировкой:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi = 2\pi i \omega_{pe} \frac{\delta H}{\delta \psi^*} \quad (2.2)$$

Гамильтониан H удобно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых описывает сверхзвуковой коллапс обычных ленгмюровских волн, а второе - учитывает электронную нелинейность:

$$H = H_0 + H_e, \quad H_0 = \int d^3r \left[\frac{n_0 (\nabla\phi)^2}{2m_i} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{n}{n_0} |\nabla\psi|^2 + 3\tau_D^2 |\Delta\psi|^2 \right) \right], \quad (2.3)$$

$$H_e = (32\pi n_0 m_e \omega_{pe}^2)^{-1} \int d^3r \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} = \frac{2}{3} |\nabla\psi_2|^2 - |\nabla\tilde{\psi}|^2 - \frac{1}{2} |\nabla(\nabla\psi)^2|^2 - (\nabla|\nabla\psi|^2)^2. \quad (2.4)$$

Фигурирующие здесь величины $\tilde{\psi}$ и ψ_2 пропорциональны огибающим нулевой и второй гармоник потенциала скорости электронов и являются квадратичными функционалами от ψ :

¹⁾ Это обстоятельство было замечено В.В.Яньковым.

$$\Delta \tilde{\psi} = i \nabla (\Delta \psi \nabla \psi^* - \Delta \psi^* \nabla \psi), \quad (2.5)$$

$$\Delta \psi_2 = \nabla (\nabla \psi \Delta \psi) + \Delta (\nabla \psi)^2. \quad (2.6)$$

Возмущение концентрации ионов n и потенциал их импульса ϕ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \phi}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta n},$$

которые легко сводятся к ^{одному} уравнению

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi m_i} \Delta |\nabla \psi|^2, \quad (2.7)$$

описывающему эволюцию каверны при сверхзвуковом коллапсе. Для учета дисперсии звука достаточно было бы прибавить к гамильтониану слагаемое

$$H_s = \int d^3 \vec{r} \left(\frac{m_i c_s^2 n^2}{2 n_0} - \frac{|\nabla \varrho|^2}{8\pi} \right),$$

где ϱ - решение уравнения Пуассона

$$\Delta \varrho = \nabla \left(\frac{n}{n_0} \nabla \psi \right),$$

$c_s = (\gamma T / m_i)^{1/2}$ - скорость звука²⁾. Ввиду структурного отличия звукового члена от главных, сама по себе малость поправки H_s не является достаточным основанием для пренебрежения ею. В отсутствие электронной нелинейности, т.е. при $W \ll n_0 T$, поправка H_s важна, несмотря на ее малость в сверхзвуковом режиме коллапса, так как коротковолновая граница области модуляционно неустойчивых возмущений определяется именно дисперсией звука (см., например, рисунок в статье [10]). С ростом энергии волн эта граница смещается в область все меньших масштабов K_m^{-1} : $K_m z_D \sim (W/n_0 T)^{1/2}$. При $W \gtrsim n_0 T$ звуковая поправка оказывается малой для модуляционных возмущений всех масштабов, превышающих дебаевский радиус, и может не учитываться. Коротковолновая граница области модуляционной неустойчивости определяется при этом диссипативными процессами. Любопытно, что при $W \gg n_0 T$, в отличие от случая $W \ll n_0 T$, звуковая поправка оказывается дестабилизирующей:

²⁾ Для простоты считается, что ионная температура ниже электронной.

$$H_s < 0.$$

§ 3. Знакоопределенность гамильтониана

Исследование гамильтониана электронной нелинейности H_e осложняется высоким (четвертым) порядком этого функционала от ψ и нелокальностью подынтегрального выражения (2.4). К настоящему времени было установлено лишь то, что функционал H_e обращается в нуль на одномерных³⁾ [8] и положителен на центрально-симметричных [2] полях ψ . Важнейший вопрос о знакоопределенности H_e на множестве всех локализованных полей ψ оставался невыясненным. На первый взгляд может показаться, что данный вопрос нетрудно разрешить контрпримером, построив такое локализованное поле $\psi \neq 0$, на котором было бы $\psi_2 = 0$ и, очевидно, $H_e < 0$. Оказывается, однако, что эта и более изощренные попытки построения контрпримера бесплодны: гамильтониан H_e положительно определен на множестве всех локализованных полей ψ . Доказательство этого факта приведено ниже.

Имеется бесконечное множество эквивалентных представлений плотности \mathcal{U} гамильтониана H_e , получающихся друг из друга путем интегрирований по частям и переопределений нелокально связанных с ψ функций. Желательно отыскать представление плотности \mathcal{U} в виде суммы квадратов модулей нескольких величин. Ясно, что, если такое представление существует, каждое из слагаемых в нем обращается в нуль на одномерных полях ψ . Функция ψ_2 не обладает данным свойством, поэтому ее лучше заменить функцией

$$F = \psi_2 - \frac{3}{2} (\nabla \psi)^2, \quad (3.1)$$

$$\Delta F = \nabla (\nabla \psi \Delta \psi) - \frac{1}{2} \Delta (\nabla \psi)^2.$$

После перехода от ψ_2 к F плотность гамильтониана электронной нелинейности приобретает вид

³⁾ В отсутствие теплового движения электронов и возмущения концентрации ионов задача об эволюции одномерной ленгмюровской волны, как известно, легко решается в лагранжевых координатах. Из решения видно, что огибающие всех гармоник в (2) не зависят от времени. Следовательно, на одномерных полях гамильтониан электронной нелинейности равен нулю точно (а не только в четвертом порядке по амплитуде поля).

$$\mathcal{U} = \frac{2}{3} |\nabla F|^2 + 2 \operatorname{Re} [\nabla F^* \nabla (\nabla \psi)^2] + |\nabla (\nabla \psi)^2|^2 - (\nabla |\nabla \psi|^2)^2 - |\nabla \tilde{\psi}|^2. \quad (3.2)$$

Для вещественных (с точностью до независящего от пространственных координат фазового множителя) полей ψ в (3.2) останутся лишь два первых слагаемых. Их желательно представить в виде суммы квадратов модулей нескольких величин и остатка, обращаемого в нуль на вещественных полях ψ . К цели ведет следующая цепочка преобразований. Сначала уравнение (3.1) переписывается в виде

$$\Delta F = \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} (\Pi_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \Pi_{\gamma\gamma}), \quad \Pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \psi}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial X_\beta}. \quad (3.3)$$

Интегрирование (3.3) дает:

$$\frac{\partial F}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial}{\partial X_\beta} (\Pi_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \Pi_{\gamma\gamma}) + e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial F_\gamma}{\partial X_\beta}. \quad (3.4)$$

Векторная функция F_γ определена с точностью до прибавления к ней градиента произвольной скалярной функции. Подбором последней всегда можно добиться соленоидальности поля F_γ :

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial X_\gamma} = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение для F_γ получается из условия разрешимости уравнения (3.4) относительно F и с учетом (3.5) имеет вид

$$\Delta F_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \Pi_{\gamma\delta}}{\partial X_\beta \partial X_\delta}. \quad (3.6)$$

С помощью соотношений (3.3)-(3.6) нетрудно показать, что

$$\int d^3\vec{x} \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}^*}{\partial X_\beta} \frac{\partial \Pi_{\alpha\gamma}}{\partial X_\gamma} = \int d^3\vec{x} \left\{ |\nabla [F + (\nabla \psi)^2]|^2 + \nabla F_\alpha^* \nabla F_\alpha \right\} \quad (3.7)$$

Интегрирование уравнения (3.6) дает:

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial X_\gamma} = e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \Pi_{\gamma\delta}}{\partial X_\beta} + e_{\sigma\beta\gamma} \frac{\partial F_{\alpha\sigma}}{\partial X_\beta}. \quad (3.8)$$

Тензорная функция $F_{\alpha\gamma}$ без утраты общности может быть подчинена условию

$$\frac{\partial F_{\alpha\gamma}}{\partial X_\gamma} = 0, \quad (3.9)$$

с учетом которого она удовлетворяет уравнению

$$\Delta F_{\alpha\gamma} = e_{\alpha\beta\delta} e_{\gamma\epsilon\delta} \frac{\partial^2 \Pi_{\delta\epsilon}}{\partial X_\beta \partial X_\epsilon}. \quad (3.10)$$

С помощью соотношений (3.8)-(3.10) нетрудно показать, что

$$\int d^3\vec{x} (\nabla F_\alpha^* \nabla F_\alpha + \nabla F_{\alpha\beta}^* \nabla F_{\alpha\beta}) = \int d^3\vec{x} \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}^*}{\partial X_\gamma} \left(\frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial X_\gamma} - \frac{\partial \Pi_{\alpha\gamma}}{\partial X_\beta} \right). \quad (3.11)$$

След тензора $F_{\alpha\beta}$ просто связан с исходной функцией F :

$$F_{\alpha\alpha} = -F \quad (3.12)$$

Выделение бесследной части этого тензора:

$$A_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} F \quad (3.13)$$

позволяет усилить результат предшествующих преобразований, поскольку

$$\int d^3\vec{x} \nabla F_{\alpha\beta}^* \nabla F_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{x} \left(\nabla A_{\alpha\beta}^* \nabla A_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} |\nabla F|^2 \right). \quad (3.14)$$

Объединение формул (3.7), (3.11), (3.14) дает:

$$\int d^3\vec{x} \left\{ \frac{2}{3} |\nabla F|^2 + 2 \operatorname{Re} [\nabla F^* \nabla (\nabla \psi)^2] + |\nabla (\nabla \psi)^2|^2 \right\} = \int d^3\vec{x} \left(\nabla A_{\alpha\beta}^* \nabla A_{\alpha\beta} + 2 \frac{\partial \Pi_{\alpha\gamma}^*}{\partial X_\beta} \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial X_\gamma} - \nabla \Pi_{\alpha\beta}^* \nabla \Pi_{\alpha\beta} \right)$$

Пользуясь этим тождеством, можно получить следующее, эквивалентное (3.2) представление плотности гамильтониана электронной нелинейности:

$$\mathcal{U} = \nabla A_{\alpha\beta}^* \nabla A_{\alpha\beta} + |\vec{f}|^2 - |\nabla \tilde{\psi}|^2, \quad (3.15)$$

$$\vec{f} = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial X_\alpha} \nabla \frac{\partial \psi}{\partial X_\alpha} \right), \quad (3.16)$$

доказывающее положительную определенность функционала H_e на множестве вещественных полей $\vec{\varphi}$. Для распространения доказательства на множество всех комплексных полей достаточно заметить, что уравнение (2.5) представимо в виде

$$\Delta \tilde{\Psi} = -\operatorname{div} \vec{\varphi}.$$

Дальнейшее сводится к разложению поля $\vec{\varphi}$ на потенциальную и соленоидальную части:

$$\vec{\varphi} = -\nabla \tilde{\Psi} + \operatorname{rot} \vec{A} \quad (3.17)$$

и использованию очевидного тождества

$$\int d^3\vec{r} |\vec{\varphi}|^2 = \int d^3\vec{r} (|\nabla \tilde{\Psi}|^2 + |\operatorname{rot} \vec{A}|^2). \quad (3.18)$$

Вытекающее из (3.15), (3.18) представление \mathcal{U} в виде

$$\mathcal{U} = \nabla A_{\alpha\beta}^* \nabla A_{\alpha\beta} + |\operatorname{rot} \vec{A}|^2 \quad (3.19)$$

доказывает положительную определенность гамильтониана электронной нелинейности на множестве всех локализованных комплексных полей. Векторное поле \vec{A} без утраты общности может быть подчинено ограничению

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (3.20)$$

при котором условие разрешимости (3.17) относительно $\tilde{\Psi}$ сводится к уравнению Пуассона для \vec{A} :

$$\Delta \vec{A} = -\operatorname{rot} \vec{\varphi} \quad (3.21)$$

§ 4. Адиабатическое приближение

Положительная определенность гамильтониана электронной нелинейности указывает на невозможность развития коллапса без прогрессирующего вытеснения ионов из области локализации ленгмюровских волн. Ввиду большой инерции ионов можно предположить, что каверна углубляется достаточно медленно и попытаться построить адиабатическое описание запертых в ней нелинейных ленгмюровских волн. По аналогии с хорошо известной линейной тео-

рией для этого следует представить функцию Ψ в виде

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_\lambda(\vec{r}, t) \exp \left\{ i \int \lambda(t_1) dt_1 \right\}, \quad (4.1)$$

где $\Psi_\lambda(\vec{r}, t)$ зависит от времени лишь постольку, поскольку изменяется каверна. Уравнение для $\Psi_\lambda(\vec{r}, t)$ легко получить из (2.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi_\lambda = 2\pi i \omega_{pe} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta \Psi_\lambda^*}, \quad (4.2)$$

$$\tilde{H} = H + \lambda I, \quad I[\Psi_\lambda] = \frac{1}{2\pi\omega_{pe}} \int d^3\vec{r} |\nabla \Psi_\lambda|^2.$$

Функционал $I[\Psi_\lambda]$ имеет смысл полного "числа плазмонов" (волнового действия) и является точным интегралом уравнения (4.2). При заданной и достаточно медленной эволюции каверны функцию Ψ_λ можно искать последовательными приближениями. В нулевом приближении надо пренебречь изменением каверны, т.е. левой частью уравнения (4.2), и найти условную экстремаль $\Psi_\lambda^{(0)}$ функционала $H[\Psi_\lambda]$ при заданном значении функционала $I[\Psi_\lambda]$:

$$\frac{\delta \tilde{H}}{\delta \Psi_\lambda^{(0)*}} = 0, \quad (4.3)$$

$$I[\Psi_\lambda^{(0)}] = I. \quad (4.4)$$

Хотя бы одна такая экстремаль обязательно существует, поскольку при заданном значении волнового действия гамильтониан ограничен снизу. В линейной задаче множитель Лагранжа $\lambda^{(0)}$ определяется из условия разрешимости уравнения (4.3), а соотношение (4.4) служит для нормировки функции $\Psi_\lambda^{(0)}$. В нелинейной задаче $\lambda^{(0)}$ зависит от значения волнового действия и определяется из соотношения (4.4). Пользуясь формулой Эйлера для однородных функционалов, нетрудно получить тождество

$$\lambda^{(0)} I + H_{oe}[\Psi_\lambda^{(0)}] + \lambda H_e[\Psi_\lambda^{(0)}] = 0, \quad (4.5)$$

в котором H_{oe} обозначает электронный вклад в H_o (последние два слагаемых в (2.3)). Как видно из (4.5), величина $\lambda^{(0)}$ является вещественной. При достаточно глубокой каверне эта величина может быть сделана положительной и интерпретироваться как "энергия связи" плазмонов.

В первом приближении следует подставить неявно зависящую от времени функцию $\Psi_\lambda^{(0)}$ в левую часть уравнения (4.2) и разрешить возникшее уравнение относительно $\Psi_\lambda \approx \Psi_\lambda^{(0)} + \Psi_\lambda^{(1)}$. Предполагая поправку $\Psi_\lambda^{(1)}$ достаточно малой, можно ограничиться вычислением $\tilde{H}[\Psi_\lambda]$ с точностью до квадратичных по $\Psi_\lambda^{(1)}$ членов:

$$\tilde{H}[\Psi_\lambda] \approx \tilde{H}[\Psi_\lambda^{(0)}] + \tilde{H}^{(2)}[\Psi_\lambda^{(0)}, \Psi_\lambda^{(1)}] + \lambda^{(1)} I^{(1)}[\Psi_\lambda^{(0)}, \Psi_\lambda^{(1)}],$$

$$I^{(1)}[\Psi_\lambda^{(0)}, \Psi_\lambda^{(1)}] = \frac{1}{2\pi\omega_{pe}} \int d^3z \vec{E} (\Psi_\lambda^{(0)*} \Psi_\lambda^{(1)} + \text{к.с.}), \quad (4.6)$$

$$\tilde{H}^{(2)}[\Psi_\lambda^{(0)}, \Psi_\lambda^{(1)}] = \langle \chi | \hat{L} | \chi \rangle.$$

Здесь $\chi = (\text{Re} \Psi_\lambda^{(1)}, \text{Im} \Psi_\lambda^{(1)})$ - двухкомпонентная функция, \hat{L} - матричный (2x2) самосопряженный оператор, зависящий от $\Psi_\lambda^{(0)}$; угловые скобки означают стандартным образом определенное скалярное произведение. В этих обозначениях уравнение первого приближения имеет вид:

$$2\pi\omega_{pe} \hat{L} \begin{pmatrix} \text{Re} \Psi_\lambda^{(1)} \\ \text{Im} \Psi_\lambda^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \Delta \begin{pmatrix} \text{Im} \Psi_\lambda^{(0)} \\ \text{Re} \Psi_\lambda^{(0)} \end{pmatrix} + \lambda^{(1)} \Delta \begin{pmatrix} \text{Re} \Psi_\lambda^{(0)} \\ \text{Im} \Psi_\lambda^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Условие разрешимости уравнения (4.7) состоит в ортогональности его правой части нулевому пространству (ядру) оператора \hat{L} . В дальнейшем предполагается, что в качестве $\Psi_\lambda^{(0)}$ выбрана экстремаль, на которой достигается наименьшее из всех возможных значений гамильтониана H при заданном числе плазмонов. Такой экстремали $\Psi_\lambda^{(0)}$, очевидно, соответствует неотрицательно определенный оператор \hat{L} . Положительной определенности нет, поскольку инвариантность H, I относительно однопараметрической группы преобразований $\Psi \rightarrow e^{i\alpha} \Psi$, где α - вещественное число, порождает принадлежащую нулевому собственному значению оператора \hat{L} собственную функцию $\chi_0 = (-\text{Im} \Psi_\lambda^{(0)}, \text{Re} \Psi_\lambda^{(0)})$. Эта функция ортогональна правой части уравнения (4.7) при

$$\frac{d}{dt} I[\Psi_\lambda^{(0)}] = 0. \quad (4.8)$$

Смысл условия (4.8) очевиден: равенство (4.4) не должно нарушаться в процессе эволюции. Если нулевое собственное значение оператора \hat{L} не является вырожденным, то условие

(4.8) обеспечивает разрешимость уравнения (4.7). Постоянная $\lambda^{(1)}$ в (4.7) подбирается так, чтобы исключить поправку первого приближения к числу плазмонов:

$$I^{(1)}[\Psi_\lambda^{(0)}, \Psi_\lambda^{(1)}] = 0.$$

Для малости функции $\Psi_\lambda^{(1)}$ по сравнению с $\Psi_\lambda^{(0)}$ достаточно выполнения неравенства

$$\gamma \ll \Delta \lambda, \quad (4.9)$$

где γ - характерное время изменения каверны, $\Delta \lambda$ - ближайшее к нулю собственное значение оператора \hat{L} на множестве функций, ортогональных к χ_0 . Цепочку последовательных приближений нетрудно продолжить. В линейной теории условие (4.9), как известно, обеспечивает малость поправок каждого нового приближения по сравнению с предыдущими. В нелинейной задаче возникает дополнительное ограничение, связанное с наличием в уравнениях высших приближений нелинейных по поправкам предыдущих приближений членов. Например, в уравнении для $\Psi_\lambda^{(1)}$, помимо $i \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi_\lambda^{(1)}$, имеется квадратичная по $\Psi_\lambda^{(0)}$ вынуждающая сила. Если ввести эквивалентный сдвиг частоты $\delta \lambda$ так, чтобы эта сила оценочно равнялась $\delta \lambda \Delta \Psi_\lambda^{(1)}$, то второе условие малости $\Psi_\lambda^{(2)}$ по сравнению с $\Psi_\lambda^{(1)}$ приобретет вид

$$\delta \lambda \ll \Delta \lambda. \quad (4.10)$$

Полученные условия применимости теории возмущений не всегда являются необходимыми. Например, при малой электронной нелинейности условие (4.9) не выполняется, а теорией возмущений можно пользоваться. Действительно, в отсутствие электронной нелинейности оператор \hat{L} равен произведению единичной матрицы 2x2 на скалярный оператор

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{4\pi} \nabla \left(3\tau_D^2 \Delta - \frac{n}{n_0} - \frac{2\lambda^{(0)}}{\omega_{pe}} \right) \nabla$$

Нулевое собственное значение оператора \hat{L}_0 считается далее невырожденным и достаточно удаленным от других собственных значений \hat{L}_0 . При этом к уравнению (4.2) приложима обычная теория адиабатичности возмущений, а функцию $\Psi_\lambda^{(0)}$ можно не теряя общности, считать вещественной. Нулевое собственное значение оператора \hat{L} в отсутствие нелинейнос-

ти двукратно вырождено: помимо $\chi_0 = (0, \psi_2^{(0)})$, ядру принадлежит функция $\tilde{\chi}_0 = (\psi_2^{(0)}, 0)$. Следовательно, $\Delta \lambda = 0$ и условие (4.9) не выполняется. Необходимое для разрешимости (4.7) условие ортогональности $\tilde{\chi}_0$ к правой части этого уравнения дает $\lambda^{(1)} = 0$. Малая нелинейность расщепляет первоначально вырожденное нулевое собственное значение оператора \hat{L} на два собственных значения, одно из которых по-прежнему равно нулю, а другое $(\Delta \lambda)$ пропорционально нелинейности. С учетом нелинейности проекции правых частей (4.7) и уравнений высших приближений на близкую к $\tilde{\chi}_0$ собственную функцию оператора \hat{L} перестают быть равными нулю; но они остаются пропорциональными нелинейности (как и $\Delta \lambda$), что обеспечивает применимость теории возмущений.

Полезно заметить, что первоначально вещественная функция нулевого приближения $\psi_2^{(0)}$ остается в процессе адиабатического коллапса вещественной, несмотря на возможность существования при развитой электронной нелинейности существенно комплексных решений уравнения (4.3). На вещественном поле $\psi_2^{(0)}$ матрица \hat{L} диагональна:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{L}_1 & 0 \\ 0 & \hat{L}_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь \hat{L}_1 и \hat{L}_2 - скалярные самосопряженные операторы. В отсутствие электронной нелинейности они равны \hat{L}_0 . С учетом нелинейности операторы \hat{L}_1 и \hat{L}_2 не совпадают. При сделанных выше предположениях оператор \hat{L}_1 определен положительно, а \hat{L}_2 - неотрицательно, причем нулевому собственному значению \hat{L}_2 соответствует единственная собственная функция $\psi_2^{(0)}$. В силу инвариантности уравнения (4.2) относительно обращения времени и комплексного сопряжения, при вещественном поле $\psi_2^{(0)}$ поправки к вещественной части ψ_2 возникают только в четных, а к мнимой - только в нечетных порядках теории возмущений. В частности, уравнения первых двух приближений имеют вид:

$$2\pi\omega_{pe} \hat{L}_2 \psi_2^{(1)} = i \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi_2^{(0)}, \quad \lambda^{(1)} = 0; \quad (4.11)$$

$$2\pi\omega_{pe} \hat{L}_1 \psi_2^{(2)} = \Delta \left(\frac{\partial}{\partial t} \text{Im} \psi_2^{(1)} + \lambda^{(2)} \psi_2^{(0)} \right) -$$

$$- 2\pi\omega_{pe} \frac{\delta}{\delta \text{Re} \psi_2} H_e^{(2)} [\text{Re} \psi_2, \text{Im} \psi_2] \Big|_{\text{Re} \psi_2 = \psi_2^{(0)}, \text{Im} \psi_2 = -i \psi_2^{(1)}}.$$

Здесь $H_e^{(2)} [\text{Re} \psi_2, \text{Im} \psi_2]$ - квадратичная по $\text{Im} \psi_2$ и $\text{Re} \psi_2$ часть функционала H_e . Величина $\lambda^{(2)}$ определяется условием

$$I^{(2)} \equiv \int d^3z (2\nabla \psi_2^{(0)} \nabla \psi_2^{(2)} + |\nabla \psi_2^{(1)}|^2) = 0$$

При такой структуре цепочки последовательных приближений условие (4.10) является избыточным в двух отношениях. Во-первых, характерное значение ω_1^{-1} оператора $\Delta (\omega_{pe} \hat{L}_1)^{-1}$ на последнем слагаемом в (4.12) может быть гораздо меньше $(\Delta \lambda)^{-1}$. Во-вторых, накладывавшееся выше ограничение $\psi_2^{(2)} \ll \psi_2^{(1)}$ теперь не требуется для оправдания итерационной процедуры и может быть заменено более мягким ограничением $\psi_2^{(2)} \ll \psi_2^{(0)}$. Это позволяет заменить (4.10) условием

$$\omega_1 \gg \delta \lambda_1, \quad (4.13)$$

где $\delta \lambda_1$ - эквивалентный сдвиг частоты, определенный так, что последнее слагаемое в (4.12) оценочно равно $\delta \lambda_1 \Delta \psi_2^{(0)}$.

§ 5. Инкремент мелкомасштабной неустойчивости

Причиной углубления каверны является модуляционная неустойчивость. Как уже отмечалось выше, при "включении" электронной нелинейности $W \sim n_0 T$ и коротковолновая граница области модуляционно неустойчивых возмущений достигает дебаевского радиуса. Этот вывод основан на хорошо известном поведении инкремента модуляционной неустойчивости при $W \ll n_0 T$, когда электронная нелинейность незначительна. При $W \gg n_0 T$ зависимость инкремента от длины волны возмущения недостаточно изучена. Между тем вопрос о характере этой зависимости важен: если короткие по сравнению с размером каверны возмущения развиваются быстрее возмущений основного масштаба, то каверна должна дробиться; в противном случае возможен коллапс каверны как целого. В статье [2] было показано, что электронная нелинейность не влияет на модуляционную неустойчивость однородного поля. Следовательно, вклад электронной нелинейности в коротковолновую неустойчивость неоднородного поля подавлен по параметру "квазиклассичности" возмущения (который равен отношению длины волны возмущения к пространственному масштабу изменения поля). С другой стороны, вклад электронной нели-

нейности велик по параметру $\frac{W}{n_0 \pi} \gg 1$, и потому может быть главным даже для коротковолновых возмущений. Таким образом, инкремент модуляционной неустойчивости локализованного сгустка нелинейных ленгмюровских волн неизвестен и для выяснения динамики коллапса должен быть вычислен.

Пусть λ, n, ψ_λ - некоторое решение уравнений (2.7), (4.2)

$$\delta n = u e^{i\vec{k}\vec{z}} + \text{к.с.}, \quad \delta \psi_\lambda = \chi_+ e^{i\vec{k}\vec{z}} + \chi_- e^{-i\vec{k}\vec{z}} \quad (5.1)$$

малое возмущение этого решения.

Для рассматриваемых ниже мелкомасштабных возмущений экспоненты в (5.1) являются быстроосциллирующими функциями пространственных координат. Линеаризованные уравнения (2.7), (4.2) в главном ВКБ-приближении таковы:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{i k^2}{4\pi m_i} \left[(\vec{k} \nabla \psi_\lambda^*) \chi_+ + (\vec{k} \nabla \psi_\lambda) \chi_-^* \right] \quad (5.2)$$

$$i s (\vec{k} \nabla \psi_\lambda) \frac{u_s}{2 n_0} = k^2 \left(\frac{3}{2} k^2 z^2 + \frac{n}{2 n_0} + \frac{\lambda - i \frac{\partial}{\partial t}}{\omega_{pe}} \right) \chi_s + 2\pi \frac{\delta H_e^{(2)}}{\delta \chi_s^*} \quad (5.3)$$

Здесь $s = \pm$, $u_+ = u$, $u_- = u^*$, $H_e^{(2)}$ - квадратичная по возмущению поправка к H_e . Вычисляя функционал $H_e^{(2)}$, удобно исходить из представления (3.19), так как в других представлениях первоначально имеются пропорциональные высоким степеням k члены, которые затем взаимно сокращаются. Члены, связанные с вещественной и мнимой частями поля ψ_λ , могут иметь разную структуру, в частности, содержать разные степени k . Для учета возможной конкуренции, параметра адиабатичности (по которому мала мнимая часть ψ_λ) с другими параметрами следует вычислить $H_e^{(2)}$ на комплексном поле ψ_λ . Согласно (3.19),

$$H_e^{(2)} = (3Z\pi n_0 m_e \omega_{pe}^2)^{-1} \int d^3 \vec{z} \left[\nabla A_{\alpha\beta}^{(1)*} \nabla A_{\alpha\beta}^{(1)} + 2 \operatorname{Re} (\nabla A_{\alpha\beta}^{(0)*} \nabla A_{\alpha\beta}^{(2)}) + |\operatorname{rot} \vec{A}^{(1)}|^2 + 2 \operatorname{rot} \vec{A}^{(0)} \operatorname{rot} \vec{A}^{(2)} \right] \quad (5.4)$$

Здесь $A_{\alpha\beta}^{(i)}$, $\vec{A}^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2$) - члены i -го порядка малости в разложениях полей $A_{\alpha\beta}$, \vec{A} по амплитуде возмущения $\delta \psi_\lambda$. С помощью формул (3.3), (3.10),

(3.13) и (3.16), (3.21) нетрудно установить, что первые три слагаемых в (5.4) квадратичны, а последнее - кубично по k . С другой стороны, последнее слагаемое обращается в нуль на вещественном поле ψ_λ , следовательно, это слагаемое мало по параметру адиабатичности и может вычисляться без учета квадратичных по k поправок. Третье слагаемое в (5.4), также исчезающее при вещественных ψ_λ и $\delta \psi_\lambda$, структурно отличается от указанных поправок: оно, в частности, не обращается в нуль при мнимом возмущении $\delta \psi_\lambda$ вещественного поля ψ_λ . Таким образом, в (5.4) нужно учесть все четыре слагаемых. Результат вычисления $H_e^{(2)}$ представим в следующем виде:

$$H_e^{(2)} = (8\pi n_0 m_e \omega_{pe}^2)^{-1} k^2 \int d^3 \vec{z} \left\{ (P_1 + P_3) (|\chi_+|^2 + |\chi_-|^2) - 2 \operatorname{Re} [(P_2 + \tilde{P}_3) \chi_+^* \chi_-^*] + P_4 (|\chi_+|^2 - |\chi_-|^2) \right\} \quad (5.5)$$

Индекс у коэффициента P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) означает номер породившего его слагаемого в (5.4). Формулы для коэффициентов P_i оказываются более простыми в системе координат с одной из осей (скажем, z), направленной вдоль волнового вектора \vec{k} :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{3} \left(\left| \frac{\partial^2 \psi_\lambda}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \psi_\lambda}{\partial y^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \psi_\lambda}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_\lambda}{\partial y^2} \right|^2 \right) + 2 \left| \frac{\partial^2 \psi_\lambda}{\partial x \partial y} \right|^2, \\ P_2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ P_3 &= 2 \left(\left| \frac{\partial^2 \psi_\lambda}{\partial x \partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \psi_\lambda}{\partial y \partial z} \right|^2 \right), \\ \tilde{P}_3 &= 2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_\lambda}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi_\lambda}{\partial y \partial z} \right)^2 \right], \\ P_4 &= -\vec{k} \operatorname{rot} \vec{A}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставив (5.5) в (5.3) и опустив малый по параметру адиабатичности член с $\frac{\partial \chi_s}{\partial t}$ можно выразить χ_s через u :

$$\chi_s = \frac{2i s m_e \omega_{pe}^2}{k^2} \frac{(P + P_1 + P_3 - s P_4) \vec{k} \nabla \psi_\lambda + (P_2 + \tilde{P}_3) \vec{k} \nabla \psi_\lambda^*}{(P + P_1 + P_3)^2 - P_4^2 - |P_2 + \tilde{P}_3|^2} u_s \quad (5.7)$$

Здесь введено обозначение

$$P = 4n_0 m_e \omega_{pe}^2 \left(\frac{3}{2} k^2 z_D^2 + \frac{n}{2n_0} + \frac{\lambda}{\omega_{pe}} \right) \quad (5.8)$$

С учетом (5.7) уравнение (5.2) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = R_{\vec{r}}(\vec{r}, t) u, \quad (5.9)$$

$$R_{\vec{r}}(\vec{r}, t) = \frac{\omega_{pi}^2}{\pi} \frac{(P + P_1 + P_3) |\vec{k} \nabla \psi_\lambda|^2 + \text{Re} [(P_2 + \tilde{P}_3) (\vec{k} \nabla \psi_\lambda^*)^2]}{(P + P_1 + P_3)^2 - P_4^2 - |P_2 + \tilde{P}_3|^2} \quad (5.10)$$

Выражение (5.10) заметно упрощается при вещественном поле ψ_λ :

$$R_{\vec{r}}(\vec{r}, t) = \frac{\omega_{pi}^2}{\pi} \frac{(\vec{k} \nabla \psi_\lambda)^2}{P + P_1 - P_2} \quad (5.11)$$

Для законности приближения вещественного поля должно выполняться условие

$$P_4^2 + (\text{Im} \tilde{P}_3)^2 + |P_2 + P_3| |P_3 - \text{Re} \tilde{P}_3| \ll |P + P_1 - P_2| |P + P_1 + P_2 + 2P_3|. \quad (5.12)$$

Формула (5.10) позволяет вычислить инкремент модуляционной неустойчивости во всей области $\alpha^{-1} \ll k \ll z_D^{-1}$, где α - наименьший из характерных размеров каверны. На длинноволновом пределе применимости из этой формулы получается оценка характерного времени углубления каверны γ^{-1} . Необходимым условием устойчивости коллапса каверны как целого является неравенство $\gamma_k \lesssim \gamma$. Несложный анализ зависимости правой части (5.10) от k показывает, что данное неравенство выполняется лишь в том случае, когда линейный дисперсионный член $k^2 z_D^2$ существен уже при $k \sim \alpha^{-1}$. В этом случае электронная нелинейность вообще не влияет на развитие возмущений с $k \gg \alpha^{-1}$, инкремент их неустойчивости не зависит от k и оценочно равен γ :

$$\gamma_k \sim \gamma \sim \omega_{pi} \left(\frac{W}{n_0 \Gamma} \right)^{1/2}. \quad (5.13)$$

В отсутствие буквенного превышения инкремента мелкомасштабной неустойчивости γ_k над γ приходится принимать во внимание конвективный характер неустойчивости. Любая точка \vec{r} , кроме той точки \vec{r}_s , в которую каверна коллапсирует, рано или поздно оказывается за пределами основного

столба энергии, а значит и области сильной неустойчивости. Поэтому при $\gamma_k \sim \gamma$ угрозу для устойчивости каверны представляют лишь те из мелкомасштабных возмущений, которые локализованы в ее центре \vec{r}_s . Для предотвращения роста относительной величины этих возмущений необходимо и достаточно следующее условие:

$$\lim_{t \rightarrow t_s} R_{\vec{r}}^{-1}(\vec{r}_s, t) \bar{n}^{-1}(\vec{r}_s, t) \frac{\partial^2 n(\vec{r}_s, t)}{\partial t^2} \geq 1 \quad (5.14)$$

Здесь t_s - момент образования особенности. В отсутствие электронной нелинейности это условие сводится к полученному в статье [10].

§ 6. Динамика коллапса (оценки)

Простейшее предположение о форме каверны состоит в том, что она характеризуется единственным размером a . При одномасштабной каверне линейный дисперсионный член в уравнении (4.2) и в формуле (5.10) оказывается в $\frac{W}{n_0 \Gamma}$ раз меньше нелинейного. Как было установлено выше, в таком случае коротковолновая неустойчивость развивается гораздо быстрее неустойчивости основного масштаба. Поэтому оценки, относящиеся к одномасштабной каверне (см. [10], § 10), дают лишь нижнюю границу скорости коллапса γ . Развитие коротковолновой неустойчивости должно приводить к появлению у каверны второго характерного размера. Простейшая возможность такого рода состоит в сплющивании каверны вдоль некоторого направления. Пусть a - характерная толщина сплюснутой каверны, $\ell \gg a$ - ее диаметр. Для оценки энергии электронной нелинейности полезно заметить, что функция $A_{\alpha\beta}$, подобно электростатическому потенциалу, удовлетворяет уравнению Пуассона (см. (3.10), (3.13)). "Плотность заряда" в этом уравнении Пуассона оценочно равна W/ℓ^2 и сосредоточена в области каверны. Поле $\nabla A_{\alpha\beta}$ в области каверны оценочно равно $W a / \ell^2$, а плотность энергии электронной нелинейности

$$W_e \sim \frac{W^2 a^2}{n_0 m_e \omega_{pe}^2 \ell^4}. \quad (6.1)$$

Для того, чтобы в уравнении (4.2) были одинаково существенны члены, связанные с понижением концентрации плазмы, линейной и нелинейной дисперсией, должны оценочно совпадать соответст-

вующие плотности энергии. Из этого требования следуют оценки

$$\frac{n}{n_0} \sim \frac{W a^2}{n_0 m_e \omega_{pe}^2 \beta^4} \sim \frac{z_D^2}{a^2}. \quad (6.2)$$

Для замыкания системы оценок необходимо установить связь плотности энергии волн с размерами каверны. Напрашивающееся условие $W a \beta^2 = \text{const}$ оказывается ошибочным. Дело в том, что интеграл вдоль направления сплюснутости каверны (скажем, z) от фигурирующей в уравнении для $A_{\alpha\beta}$ "плотности заряда" не обращается в нуль автоматически: остаются члены типа $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}$, где

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)^2. \quad (6.3)$$

Приняв грубую оценку этих членов, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \sim \frac{W a}{\rho^2}$, пришлось бы заключить, что поле $\nabla A_{\alpha\beta}$ оценочно равно $W a / \beta^2$ не только в каверне, но во всей внутренности шара с радиусом порядка β . Ввиду равенства плотностей различных типов энергии, полная энергия электронной нелинейности H_e оказалась бы в β/a раз больше связанного с понижением концентрации вклада в гамильтониан и не могла бы компенсироваться этим отрицательным вкладом. Сохранение H запрещало бы рост H_e и развитие коллапса.⁴⁾ Следовательно, коллапс может развиваться лишь таким образом, при котором поле $\nabla A_{\alpha\beta}$ не "вываливается" из каверны. Это достижимо, если определяемая формулой (6.3) величина γ не зависит от x, y на расстояниях $z \leq \beta$ от оси каверны. Пусть $c \gg \beta$ - пространственный масштаб, на котором убывает функция $\gamma(x, y)$, а $W(t)$, $n(z)$, $a(z)$ - характерные значения плотности энергии волн, глубины и ширины каверны на расстоянии $z \gg \beta$ от ее оси. Из тех же, что и при выводе (6.2), соображений можно получить оценки

$$\frac{n(z)}{n_0} \sim \frac{W(z) a^2(z)}{n_0 m_e \omega_{pe}^2 z^4} \sim \frac{z_D^2}{a^2(z)}. \quad (6.4)$$

Учитывая независимость от z величины

$$\gamma \sim W(t) a(z), \quad (6.5)$$

⁴⁾ Полезно заметить, что в отсутствие линейной дисперсии постоянство H_e не исключало бы неограниченного роста плотности энергии волн.

нетрудно установить, что

$$a(z) \sim a \left(\frac{z}{\beta} \right)^{4/3}, \quad W(z) \sim W \left(\frac{\beta}{z} \right)^{4/3}, \quad n(z) \sim n \left(\frac{\beta}{z} \right)^{8/3}. \quad (6.6)$$

Запрет на зависимость величины γ от z снимается на таком расстоянии $z \sim c$ от оси, при котором ширина каверны сравнивается с z :

$$c \sim \frac{\beta^4}{a^3}. \quad (6.7)$$

Из условия сохранения в процессе адиабатического коллапса полного числа запертых в каверне волн следует соотношение

$$\gamma c^2 = \text{const}. \quad (6.8)$$

В силу (6.2), (6.5), (6.7),

$$\gamma \sim W a \sim \frac{\beta^4}{a^3} \sim c.$$

Сопоставление этой оценки с (6.8) показывает, что величины γ и c не меняются в процессе коллапса. Зависимость от времени остальных величин находится с помощью приведенных в настоящем разделе оценок и оценки (5.13) инкремента модуляционной неустойчивости:

$$W \sim \tilde{t}^{-2}, \quad a \sim \tilde{t}^2, \quad \beta \sim \tilde{t}^{3/2}, \quad n \sim \tilde{t}^{-4} \\ (\tilde{t} = t_s - t). \quad (6.9)$$

Коэффициенты в формулах (6.9) легко восстанавливаются по известным значениям всех величин в момент "включения" электронной нелинейности. В этот момент $W \sim n_0 T$, $a \sim \beta \sim c \sim a_e$, $n \sim n_0 z_D^2 / a_e^2$. Полезно заметить, что зависимость от времени выпадает из формул (6.6):

$$a(z) \sim a_e \left(\frac{z}{a_e} \right)^{4/3}, \quad W(z) \sim n_0 T \left(\frac{a_e}{z} \right)^{4/3}, \quad n(z) \sim n_0 \frac{z_D^2}{a_e^2} \left(\frac{a_e}{z} \right)^{8/3},$$

так как параметры каверны в области $z \gg \beta$ не успевают заметно измениться за время коллапса центральной части каверны.

Для установления области применимости полученных оценок необходимо выяснить, до каких пор сохраняется при развитии электронной нелинейности адиабатичность коллапса. "Энергия связи" плазмонов \mathcal{L} по своему смыслу не зависит от z и определяется глубиной каверны на периферии ($z \sim a_e$).

Вместе с этой глубиной величина λ оценочно не меняется при развитии электронной нелинейности и остается порядка $\omega_{pe} z_D^2 / a^2$. Инкремент модуляционной неустойчивости на периферии каверны $\gamma(a_e)$ также не меняется (и остается порядка ω_{pi}), но в центре каверны возрастает как $\gamma(a) \propto \omega^{1/2} \propto a^{-1/2}$ и, в принципе, может стать больше λ . При $\gamma(a) \geq \lambda$ имеется опасность перехода первоначально запертых в каверне плазмонов в состояния непрерывного спектра оператора \hat{L}_2 с частотами $\omega \leq \gamma(a)$. Простые оценки показывают, однако, что основной вклад в интеграл перекрытия этих состояний с правой частью уравнения (4.II) дает периферия каверны. Следовательно, в условии (4.9) входит $\gamma(a_e)$ и это условие практически не меняется при развитии электронной нелинейности. Для мнимой поправки $\psi_2^{(1)}$ остается справедливой оценка

$$\psi_2^{(1)} \sim g(a_e) \psi_2^{(0)} \quad (6.I0)$$

Проверка условия (4.I3) требует более подробного рассмотрения центральной части каверны ($z \leq \ell$), так как именно эта область дает основной вклад в гамильтониан и в нелинейную вынуждающую силу, фигурирующую в правой части уравнения (4.I2). Вклады электронной нелинейности в операторы \hat{L}_1 , \hat{L}_2 в центральной части каверны оценочно равны:

$$L_1 \sim \frac{W}{n_0 m_e \omega_{pe}^2 \beta^4}, \quad L_2 \sim \frac{\beta^2}{a^2} L_1. \quad (6.II)$$

Заметное различие "жесткостей" электронной нелинейности относительно вещественных и мнимых возмущений вещественного поля объясняется тем, что второе слагаемое в формуле (3.I9), содержащее наибольшее число дифференцирований в направлении сплюснутости каверны, обращается в нуль на вещественных полях ψ . При развитой электронной нелинейности величина $\omega_{pe} L_2 a^2$ (как, впрочем, и $\omega_{pe} L_1 a^2$) существенно превышает "энергию связи" плазмонов и инкремент модуляционной неустойчивости.

По этой причине функция $\psi_2^{(1)}$ в центральной части каверны пропорциональна $i \psi_2^{(0)}$ с точностью до малой поправки $\delta \psi_2^{(1)}$, оценочно равной $\frac{\gamma(a)}{\omega_{pe} L_2 a^2} \psi_2^{(0)}$. При строгой пропорциональности $\psi_2^{(1)} \propto i \psi_2^{(0)}$ нелинейная вынуждающая сила в (4.I2) равнялась бы нулю. Следовательно, эта сила пропорциональна

$\delta \psi_2^{(1)}$, и для эквивалентного сдвига частоты $\delta \lambda_1$, справедлива оценка

$$\delta \lambda_1 \sim \omega_{pe} L_2 a^2 \frac{\psi_2^{(1)}}{\psi_2^{(0)}} \frac{\delta \psi_2^{(1)}}{\psi_2^{(0)}} \sim \frac{\gamma^2(a)}{\lambda} \quad (6.I2)$$

Величина $\delta \lambda_1 \propto a^{-1}$ возрастает в процессе коллапса медленнее, чем $\omega_1 \sim \omega_{pe} L_1 a^2 \propto a^{-2}$, так что условие (4.I3) выполняется.

Нетрудно показать, что, из-за близости $\psi_2^{(1)}$ к $i g(a_e) \psi_2^{(0)}$ в центральной части каверны, условие применимости приближения вещественного поля ψ_2 для расчета инкремента мелкомасштабной модуляционной неустойчивости также смягчается: можно домножить левую часть (5.I2) на малое число $\delta \psi_2^{(1)} / \psi_2^{(1)}$. Уточненное условие применимости выполняется.

Выше предполагалось, что поле $\psi_2^{(0)}$ хорошо локализовано в направлении сплюснутости каверны, т.е. достаточно быстро убывает на расстояниях $|z| \gg a(z)$ от плоскости $z = 0$. Это предположение нуждается в проверке, поскольку "энергия связи" плазмонов λ мала по сравнению с "глубиной потенциальной ямы" $\omega_{pe} \frac{n}{n_0}$ и, по аналогии с теорией линейного уравнения Шредингера, можно было бы заподозрить плохую локализацию. Выяснению данного вопроса посвящен следующий раздел.

§ 7. Автомодельное решение

Согласно оценкам предыдущего раздела при развитой электронной нелинейности на расстояниях $z \ll a_e$ от оси каверны решение уравнений (4.3), (4.4) следует искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_2^{(0)}(\vec{r}, t) &= (24 n_0 T)^{1/2} a_e \tau \chi(\zeta, \vec{\rho}), \\ n(\vec{r}, t) &= 3(z_D / a_e)^2 n_0 \tau^{-4} u(\zeta, \vec{\rho}), \\ \tau &= (2/\pi)^{1/2} \omega_{pi} (t_s - t), \quad \zeta = \frac{z}{\tau^2 a_e}, \quad \vec{\rho} = \frac{\vec{r}_\perp}{\tau^{3/2} a_e}, \\ \lambda &\approx \text{const} \ll \omega_{pe} n/n_0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Функции $u(\zeta, \vec{\rho})$ и $\chi(\zeta, \vec{\rho})$ удовлетворяют уравнениям

$$(5 + 2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{3}{2} \rho \frac{\partial}{\partial \rho}) (4 + 2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{3}{2} \rho \frac{\partial}{\partial \rho}) u = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial \zeta^4} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(u \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \chi} = 0, \quad (7.3)$$

$$\mathcal{H} = \int d\zeta d^2 \vec{\rho} \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \right)^2 \left[\Delta (\nabla \chi)^2 - 2 \nabla (\nabla \chi \Delta \chi) \right] \right\},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \Delta \chi \right) - \Delta \left(\frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \right)^2. \quad (7.4)$$

Здесь ∇ означает уже дифференцирование по $\vec{\rho}$. С помощью уравнения (7.2) можно явно выразить функцию u через χ . Для этого следует перейти к переменным R, θ :

$$\zeta = R \cos \theta, \quad \rho^{4/3} = R \sin \theta \quad (7.5)$$

и проинтегрировать возникающее уравнение по R . В результате получается формула

$$u = \frac{1}{2R^2} \left\{ \int_0^R dR_1 R_1 G(R_1, \theta) - \frac{1}{R^{1/2}} \int_0^R dR_1 R_1^{3/2} G(R_1, \theta) \right\},$$

$$G(R, \theta) = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \right)^2 \Big|_{\zeta = R \cos \theta, \rho = (R \sin \theta)^{3/4}} \quad (7.6)$$

В области $R \gg 1$ функция $G(R, \theta)$ достаточно быстро убывает (см. § 6, а также ниже), и асимптотика функции u имеет вид

$$u \approx \frac{1}{2R^2} \int_0^\infty dR_1 R_1 G(R_1, \theta) \quad (7.7)$$

Условию применимости формул (7.1) $\tau \ll a_e$ соответствует $R \ll R_m \sim \tau^{-2} \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow 0$.

С учетом соотношений (7.4), (7.6) остается единственная неизвестная функция $\chi(\zeta, \vec{\rho})$, удовлетворяющая нелинейному интегральному уравнению (7.3). Даже при наличии аксиальной симметрии это уравнение является двумерным и слишком сложным для полного исследования. Заметное упрощение происходит в области $\rho \gg 1$, где имеется пространственное подобие:

$$\chi(\zeta, \rho) = \rho^{2/3} \chi_1(\xi), \quad \xi = \frac{\zeta}{\rho^{1/3}},$$

$$u(\zeta, \rho) = \rho^{-8/3} u_1(\xi), \quad F(\zeta, \rho) = \rho^{-2/3} F_1(\xi) \quad (7.8)$$

Согласно (7.7),

$$u_1(\text{ctg } \theta) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \int_0^\infty dR R G(R, \theta). \quad (7.9)$$

Основной вклад в интеграл (7.9) дает область $R \lesssim 1$, поэтому функция $u_1(\xi)$ не связана непосредственно с $\chi_1(\xi)$ и при исследовании области $\rho \gg 1$ может считаться заданной. Уравнение (7.4) в области $\rho \gg 1$ удается один раз проинтегрировать, не нарушая его локальности:

$$\frac{dF_1}{d\xi} = \frac{8}{9} \frac{d\chi_1}{d\xi} \left(\chi_1 - 2\xi \frac{d\chi_1}{d\xi} \right). \quad (7.10)$$

(Это является следствием постоянства интеграла (6.3)). Функция $\chi_1(\xi)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d^4 \chi_1}{d\xi^4} - \frac{d}{d\xi} \left(u_1 \frac{d\chi_1}{d\xi} \right) + \frac{16}{27} \left\{ \frac{4}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\chi_1}{d\xi} \frac{dF_1}{d\xi} \right) - \frac{d^2}{d\xi^2} (\chi_1 F_1) + 3 \left(2\xi \frac{d\chi_1}{d\xi} - \chi_1 \right) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\chi_1}{d\xi} \frac{dF_1}{d\xi} \right) \right\} = 0. \quad (7.11)$$

При $\xi \rightarrow \pm \infty$ функция $\chi_1(\xi)$ должна стремиться к константам, а $F_1(\xi)$ — к нулю⁵⁾. Линеаризовав (7.11) на фоне решения $\chi_1 = C$, $F_1 = 0$, нетрудно установить, что при $\xi \rightarrow \pm \infty$ малое возмущение имеет вид

$$\delta \chi_1 = c_1 + c_2 \xi + c_3 e^{p\xi} + c_4 e^{-p\xi},$$

$$\delta F_1 = \frac{8}{9} c \delta \chi_1 + c_5, \quad p = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{35}{3}} |c|. \quad (7.12)$$

Регулярное при $\xi \rightarrow +\infty$ решение уравнения (7.11)

$$\chi_1 = C + c_4 e^{-p\xi}, \quad F_1 = \frac{8}{9} C c_4 e^{-p\xi} \quad (7.13)$$

зависит от двух параметров: C и c_4 . Ими следует распорядиться так, чтобы обратились в нуль значения функции $\chi_1(\xi)$ и ее второй производной при $\xi = 0$:

$$\chi_1(0) = 0, \quad \frac{d^2 \chi_1}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} = 0. \quad (7.14)$$

При этом функция $\chi_1(\xi)$ окажется нечетной; а $F_1(\xi)$ — четной, и условия регулярности решения при $\xi \rightarrow -\infty$ также будут

⁵⁾ Перепад потенциала на каверне, очевидно, рассасывается в нерассматриваемой здесь области $\tau \gg a_e$. Требование $F_1(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ необходимо для локализации энергии электронной нелинейности в каверне.

выполнены. Не требуя определенной четности $\chi_1(\xi)$, добиться этого невозможно, так как на каждой из бесконечностей имеется по три условия регулярности (например, при $\xi \rightarrow +\infty$ $C_2 = C_3 = C_5 = 0$). Четная функция $\chi_1(\xi)$ неприемлема, поскольку для нее электрическое поле обращается в нуль в центре каверны.

Следует заметить, что при произвольных значениях параметров C и C_4 функция $\chi_1(\xi)$ имеет в некоторой точке ξ_s особенность вида

$$\chi_1(\xi) \Big|_{\xi \approx \xi_s} = \pm \frac{9}{4\xi_s} \sqrt{\frac{3}{14}} \ln |\xi - \xi_s|. \quad (7.15)$$

Условие $\xi_s < 0$ выделяет в плоскости (C, C_4) область значений, при которых решение уравнения (7.11) можно регулярным образом продолжить от асимптотики (7.13) до нуля. Для обхода сингулярного в нуле решения

$$\chi_1(\xi) \Big|_{\xi \approx 0} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\xi} \quad (7.16)$$

также не требуется дополнительных параметров: в пятимерном пространстве малых возмущений решения (7.16) выход на это решение происходит только вдоль четырех направлений и потому может осуществляться лишь на отдельных линиях в плоскости параметров (C, C_4) .

Таким образом, исследование автомоделного решения в области пространственного подобия $\rho \gg 1$ свидетельствует об экспоненциальной локализации этого решения в каверне.

Условие устойчивости каверны относительно мелкомасштабных возмущений (5.14) уже обсуждалось выше на уровне оценок. Учитывая автомоделный закон (7.1), нетрудно получить простую количественную формулировку этого условия: $R_{\kappa}(\xi_s, t) < 20(t_s - t)^{-2}$ или, что тоже самое

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right)^2 \Big|_{\xi = \rho = 0} < 10. \quad (7.17)$$

§ 8. Заключение

Проведенное исследование показывает, что электронная нелинейность не только не останавливает коллапс ленгмюровских волн, но сохраняет взрывной характер этого процесса. Наиболее существенный для теории сильной ленгмюровской турбулентности результат состоит в отыскании универсального закона коллапса в инерционном интервале с учетом электронной нелинейности и, в частности, в установлении того факта, что нелинейность не приводит к утечке плазмонов из каверны. Этот результат позволяет построить спектр сильной ленгмюровской турбулентности в неизученной ранее части инерционного интервала, непосредственно примыкающей к области диссипации. Полученные выше удобные представления гамильтониана электронной нелинейности создают предпосылки для численного моделирования коллапса нелинейных ленгмюровских волн и исследования его динамики с учетом диссипативных процессов.

Автор благодарен В.Е.Захарову и В.В.Яньюкову за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1972, 62, 1745.
2. Кузнецов Е.А. Физика плазмы, 1976, 2, 327.
3. Горев В.В., Кингсеп А.С., Рудаков Л.И.
Изв.ВУЗов. Радиофизика, 1976, 19, 691.
4. Горев В.В., Кингсеп А.С., Яньков В.В. ЖЭТФ, 1976, 70, 921.
5. Дегтярев Л.М., Захаров В.Е. Письма в ЖЭТФ, 1975, 21, 9.
6. Захаров В.Е., Мاستрюков А.С., Сынах В.С. Физика плазмы,
1975, 1, 614.
7. Дегтярев Л.М., Захаров В.Е., Рудаков Л.И. Физика плазмы,
1976, 2, 438.
8. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1966, 51, 688.
9. Галеев А.А., Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д., Шевченко В.И.
ЖЭТФ, 1977, 73, 1352.
10. Малкин В.М. ЖЭТФ, 1984, 87, 433.
11. Малкин В.М., Цицулко Ю.А. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 84-65;
Физика плазмы, 1985, 11, .
12. Галеев А.А., Сагдеев Р.З., Сигов Ю.С., Шапиро В.Д.,
Шевченко В.И. Физика плазмы, 1975, 1, 10.

В.М.Малкин

КОЛЛАПС НЕЛИНЕЙНЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

Препринт
№ 85-93

Работа поступила - 6 июня 1984 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 22.07.85г. МН 05836

Формат бумаги 60x90 1/16 Усл. 2,0 печ.л., 1,6 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ №93

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90