ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Т.А.Всеволожская, Г.И.Сильвестров

КОНУСНЫЕ ЛИТИЕВЫЕ ЛИНЗЫ

ПРЕПРИНТ 85-67

НОВОСИБИРСК

КОНУСНЫЕ ЛИТИЕВЫЕ ЛИНЗЫ

Т.А.Всеволожская, Г.И.Сильвестров

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрены линзы, продольный профиль которых в отличие от цилиндрических линз приближен к профилю пучка частиц – линза с конусной боковой поверхностью и линза, образующая поверхности которой совпадает с огибающей пучка. При большом угле собирания частиц ($\theta \geq 0.1$ рад) и длине линзы, сравнимой с фокусным расстоянием, это дает существенное (в 1.5–2 раза) уменьшение питающего тока. Получены аналитические выражения, определяющие параметры линз в зависимости от параметров пучка и требований к фокусировке. К качестве примера применения этих выражений и демонстрации получаемого выигрыша в токе и энерговыделении в линзе за счет активных потерь проведен расчет линз для собирания позитронов с энергией ~ 10 МэВ в угле $\theta \sim 0.6$ рад и антипротонов с рс=3.5 ГэВ в угле $\theta \sim 0.130$ рад. Приведена краткая оценка аберрационного разброса углов в пучке за счет нелинейности радиального распределения поля, обусловленной конусной формой линзы.

Литиевые линзы /1,2/ являются наиболее эффективными оптическими системами для формирования пучков вторичных частиц в широком диапазоне параметров пучков – от позитронов с энергией в несколько МэВ и углом выхода $\sim$ 1 рад до антипротонов и π-мезонов с энергией, измеряемой десятками ГэВ /3–7/. Распространение области применения этих линз в сторону больших частот повторения ($\sim$ 100 Гц) или увеличения апертуры линзы ($>$ ⌀ 2 см) при сохранении высоких значений поля на поверхности осложняется необходимостью отвода большой средней мощности, выделяющейся как в самой линзе, так и в токоподводах к ней , а во втором случае – необходимостью коммутации больших токов и большими продольными усилиями в системе, пропорциональными при заданном поле квадрату радиуса линзы, или, иными словами, квадрату питающего тока. В этих условиях приобретает большое значение оптимизация параметров линзы с целью уменьшения необходимой величины тока. При большой угловой расходимости фокусируемых частиц и длине линзы, сравнимой с фокусным расстоянием, когда размер пучка заметно меняется в пределах линзы, такая оптимизация может быть достигнута за счет отказа от цилиндрической формы линзы и приближения ее продольного профиля к профилю пучка. Предельным вариантом такой линзы является линза с образующей боковой поверхности, совпадающей с огибающей пучка частиц.

При равенстве радиуса линзы радиусу огибающей пучка $r_\Lambda = \sqrt{\varepsilon\beta}$, произведение параметра жесткости линзы $\kappa = e\frac{dH}{dr}/pc$ на β-функцию пучка имеет постоянное значение $\kappa\beta = const$ на всей длине линзы, определяемое величиной полного тока J , эммитансом пучка ε и импульсом частиц p как $\kappa\beta = 60J(A)/\varepsilon(см)/pc(эВ)$. Из уравнений, описывающих изменение α , β и γ-функций (элементов матрицы Твисса) пучка с расстоянием вдоль оси линзы,

$$\frac{d\alpha}{dz} = \kappa\beta - \frac{1+\alpha^2}{\beta}\ , \quad \frac{d\beta}{dz} = -2\alpha \tag{1}$$

для определения огибающей получаем уравнение

$$\frac{d\beta}{dz} = \sqrt{A + \beta(B - 4\kappa\beta\cdot \ln\beta)} \tag{2}$$

с произвольными постоянными А и В, определяемыми параметрами пучка на входе (выходе) линзы.

Фокусирующее действие собирающей линзы удобно характеризовать изменением γ -функции пучка $\gamma = (1+\alpha^2)/\beta$, сохраняющей постоянное значение на участках без фокусировки, определяемое значением β -функции в кроссовере ($\alpha = 0$, $\beta = \beta_{min}$) как $\gamma = 1/\beta_{min}$. Для изменения γ -функции пучка от значения γ_0 до γ_1 требуется линза с главным фокусным расстоянием $F = 1/\sqrt{\gamma_0\gamma_1}$. Внутри линзы с $\kappa\beta = const$ изменение γ -функции связано с изменением β соотношением $\gamma = \gamma_0 - \kappa\beta \ln\frac{\beta}{\beta_0}$, где γ_0 - значение γ в исходном пучке, определяемое β -функцией эффективного источника частиц $\beta_{0\,min}$, β_0 - значение β на входе в линзу, зависящее от γ_0 и расстояния z_0 от эффективного источника до входа в линзу как $\beta_0 = (1+\gamma_0^2 z_0^2)/\gamma_0$. Выход линзы естественно совместить с минимумом γ -функции (максимумом β) в ней, имеющим место при $\beta\gamma$ = I. При этом необходимое значение $\kappa\beta$ определяется соотношением $\kappa\beta = \frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\ln x_1}$, где x_1 обозначает отношение выходного значения β -функции β_1 ко входному β_0, равное в рассматриваемом случае отношению выходного и входного сечений линзы $x_1 = \frac{\beta_1}{\beta_0} = \frac{r_1^2}{r_0^2}$.

В цилиндрической геометрии γ и β функции в линзе связаны соотношением $\gamma = \gamma_0 - \kappa(\beta - \beta_0)$ с постоянным значением κ. Применяя условие минимума γ к выходным параметрам пучка, $\gamma_1\beta_1 = 1$, значение $\kappa\beta_1$, определяющее в этом случае ток через линзу, получаем равным $\kappa\beta_1 = \frac{x_1(\gamma_0 - \gamma_1)}{x_1 - 1}$, где x_1 по-прежнему обозначает β_1/β_0. Сравнивая это значение с полученным выше для линзы с $\kappa\beta = const$, отношение токов для этих двух случаев при одинаковых ε, γ_0, z_0 и γ_1 получаем равным

$$\frac{J_{(\kappa\beta = const)}}{J_{(\kappa = const)}} = \frac{x_1 - 1}{x_1 \ln x_1}$$

Как видим, оно полностью определяется отношением значений β -функций на входе и выходе линзы x_1.

Значение β_1/β_0 не может быть выбрано как угодно большим. Помимо принципиального при заданных γ_0 и γ_1 ограничения величиной γ_0/γ_1, отвечающей случаю $z_0 = 0$, и возможных конструктивных ограничений минимального значения z_0,

имеется ограничение, связанное с перегревом входного сечения линзы. Действительно, уменьшение тока с ростом x_1, происходит медленнее, чем уменьшение входного сечения линзы (при постоянном выходном), в результате чего плотность тока на нем $j_0 = j_{цил} \cdot \frac{x_1 - 1}{\ln x_1}$ и температура $T_0 \sim j_0^2$ возрастают. Перегрев входной части линзы уменьшает выигрыш в средней по объему линзы температуре $\overline{T}$ от уменьшения полного тока и в пропорциональном $\overline{T}$ давлении за счет нагрева /8/. Как показано в дальнейшем, минимальное значение отношения $\overline{T}/T_{цил}$ составляет $\sim$ 0.4, а при очень больших x_1 $\overline{T}$ становится даже большей $T_{цил}$.

Значение $\overline{T}$ и полное количество тепла Q (в предположении близкого к однородному распределения плотности тока по радиусу во всей линзе), так же как и длина линзы и форма ее образующей $r_\Lambda(z) = \sqrt{\varepsilon\beta(z)}$ определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (I) вместе с уравнениями $\frac{dQ}{dz} = \frac{\int J^2(t)dt}{\pi\varepsilon\beta\sigma}$ и $\frac{dV}{dz} = \pi\varepsilon\beta$, легко разрешимой численно. Здесь σ - проводимость лития, V - объем линзы, отношение Q/V определяет среднюю температуру нагрева $\overline{T}$.

Приближенное аналитическое решение может быть получено для случая $\beta_0\gamma_0 \gg 1$ (размер пучка на входе в линзу много больше размера в эффективном источнике), что при конечном x_1 означает $\gamma_0/\gamma_1 \gg 1$. Уравнение (2), которое с использованием параметров γ_0, β_0 и $\beta_1 = 1/\gamma_1$, приобретает вид

$$\frac{d\beta}{dz} = 2\sqrt{\beta\left[\gamma_0 - (\gamma_0 - \gamma_1)\frac{\ln\beta/\beta_0}{\ln\beta_1/\beta_0}\right] - 1}$$

в этом случае упрощается к виду

$$\frac{d\beta}{dz} = 2\sqrt{\beta\gamma_0\left(1 - \frac{\ln\beta/\beta_0}{\ln\beta_1/\beta_0}\right)},$$

позволяющему выразить решение в известных функциях. В результате, уравнение образующей боковой поверхности линзы (огибающей пучка) получаем в виде (см./5/)

$$Z - z = F\sqrt{\frac{\pi\ln x_1}{2}}\,erf\sqrt{\frac{\ln x_1}{2}} \qquad (3)$$

где z – длина линзы, $F = 1/\sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$ – ее фокусное расстояние. Объем линзы равен

$$V = \pi \varepsilon \beta_1 F \sqrt{\frac{\pi \ln x_1}{6}} \cdot \operatorname{erf} \sqrt{\ln \frac{r_1^3}{r_0^3}}$$

полное количество тепла –

$$Q = \frac{\int_0^t J^2 dt}{\pi \varepsilon \beta_1 \sigma} F \sqrt{2 \ln x_1} \int_0^{\sqrt{\frac{\ln x_1}{2}}} e^{\xi^2} d\xi \tag{4}$$

и средняя температура $\overline{\overline{T}}$ в отношении к температуре нагрева цилиндрической линзы $\overline{\overline{T}}_{цил}$ –

$$\frac{\overline{\overline{T}}}{T_{цил}} = \frac{2(x_1 - 1)^2}{(x_1 \ln x_1)^2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}\ln x_1}} e^{\xi^2} d\xi}{\operatorname{erf} \sqrt{\ln x_1^{3/2}}} \tag{5}$$

Анализ полученных выражений показывает, что существенное уменьшение отношения $\overline{\overline{T}}/T_{цил}$ с ростом x_1 имеет место только в области $1 \leq x_1 \leq 4$. В дальнейшем значение этого отношения стремится к пологому минимуму $(\overline{\overline{T}}/T_{цил})_{min} = 0.385$ при $\ln x_1 \cong 5$, а при $\ln x_1 > 11$ становится большим единицы. С учетом конечного значения отношения γ_0/γ_1 минимум $\overline{\overline{T}}/T_{цил}$ возрастает и смещается в сторону меньших значений x_1, однако в области $x_1 \ll \gamma_0/\gamma_1$ зависимость $\overline{\overline{T}}/T_{цил}$ от x_1 совпадает с (5).

Поскольку увеличение x_1 сопровождается еще и быстрым ростом температуры на входе линзы, выбор рабочего значения разумно ограничить указанной выше областью $x_1 \leq 4$, что при $\gamma_0/\gamma_1 \gg$ I означает $z_0 \leq F/2$. Это указывает на неоптимальность такой линзы для случаев, когда условия рассеяния в линзе и геометрия задачи позволяют приблизить входной торец линзы к эффективному источнику частиц вплоть до $z_0 = 0$ – случая четвертьволновой трансформации пучка в линзе, с тем, чтобы максимально увеличить длину линзы и уменьшить необходимое значение тока.

Бо́льшую свободу оптимизации в случае длинных линз ($\beta_1/\beta_0 > 4$) дает конусная линза, т.е. линза с образующей

боковой поверхности $r = r_0(1 + az)$, где a – свободный параметр. Жесткость такой линзы уменьшается с расстоянием от входного торца как $\kappa(z) = \kappa_0/(1 + az)^2$. Производя замену независимой переменной z в (I) на $u = 1 + az$, уравнения, определяющие $\alpha(z)$ и $\beta(z)$, получаем в виде:

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{1}{a}\left(\frac{\kappa_0 \beta}{u^2} - \frac{1 + \alpha^2}{\beta}\right)$$
$$\frac{d\beta}{du} = -\frac{2\alpha}{a} \tag{6}$$

Исключив β-функцию посредством двукратного дифференцирования первого из уравнений, получаем дифференциальное уравнение третьего порядка для α-функции:

$$\frac{d^3\alpha}{du^3} + \frac{3}{u} \cdot \frac{d^2\alpha}{du^2} + \frac{4\kappa_0}{a^2 u^2} \cdot \frac{d\alpha}{du} = 0$$

Решение имеется в виде степенной функции $\alpha = C u^\nu$. Характеристическое уравнение для ν, $\nu(\nu^2 + \frac{4\kappa_0}{a^2} - 1) = 0$, имеет три корня $\nu_1 = 0$, $\nu_{2,3} = \pm i\omega$, где $\omega = \sqrt{\frac{4\kappa_0}{a^2} - 1}$, т.е. решение имеет вид

$$\alpha = A \sin \omega \ln u + B \cos \omega \ln u + C_0$$

с постоянными A, B и C, из которых только две являются произвольными, а третья определяется соотношением $A^2 + B^2 = (1 + \omega^2)(C_0^2 - \frac{1}{\omega^2})$.
Для β и γ – функций получаем выражения

$$\beta = -\frac{2u}{a}\left\{\frac{(A + \omega B)\sin\varphi - (\omega A - B)\cos\varphi}{1 + \omega^2} + C_0\right\}$$

$$\gamma = -\frac{2\kappa_0}{au}\left\{\frac{(A - \omega B)\sin\varphi + (\omega A + B)\cos\varphi}{1 + \omega^2} + C_0\right\},$$

где $\varphi = \omega \ln u$.
Постоянные A, B и C_0 выражаются через входные параметры пучка α_0, β_0, γ_0 как

$$A = \frac{\kappa_0 \beta_0 - \gamma_0}{\omega a}, \quad B = \frac{\kappa_0 \beta_0 + \gamma_0}{a \omega^2} + \alpha_0 \frac{1 + \omega^2}{\omega^2}, \quad C_0 = \alpha_0 - B$$

В пределе при $a \to 0$ выражения для α, β и γ трансформируются к виду, соответствующему фокусировке с постоянным градиентом $\kappa = const$. Вводя обозначения $\xi = arctg\,\omega$, $\sin\zeta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\zeta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, выражения для α, β и γ получаем в более компактной форме

$$\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin(\varphi+\zeta) + C_0$$

$$\beta = -\frac{2u}{a}\left\{\sqrt{\frac{A^2+B^2}{1+\omega^2}}\cdot\sin(\varphi+\zeta-\xi) + C_0\right\} \qquad (7)$$

$$\gamma = -\frac{2\kappa_0}{au}\left\{\sqrt{\frac{A^2+B^2}{1+\omega^2}}\cdot\sin(\varphi+\zeta+\xi) + C_0\right\}$$

Выходное значение φ_0 аргумента φ определяется из условия $\alpha = 0$, а именно $\sin(\varphi+\zeta) = -\frac{C_0}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Выходное значение β при этом выражается в виде

$$\beta_1 = \frac{2u\omega}{a}\sqrt{\frac{A^2+B^2}{1+\omega^2}}\cdot\cos(\varphi_0+\zeta-\xi), \qquad (8)$$

выходное $\gamma=\gamma_1$ равно $1/\beta_1$. Длина линзы находится как $Z = (e^{\varphi_0/\omega}-1)/a$.

Поперечный размер линзы – начальное значение ее радиуса r_0 – определяется условием касания огибающей пучка к образующей боковой поверхности линзы:

$$\beta\varepsilon = r_0^2 u^2$$
$$\varepsilon \left.\frac{d\beta}{du}\right|_{u=\tilde u} = 2 r_0^2 u \qquad (9)$$

Для определения координаты точки касания из (9) получается уравнение $\alpha u + a\beta = 0$, откуда после подстановки α и β из (7) и соответствующего преобразования тригонометрических функций получаем

$$\sin(\tilde\varphi+\zeta-2\xi) = -\frac{C_0}{\sqrt{A^2+B^2}}, \text{ т.е. } \sin(\tilde\varphi+\zeta-2\xi) = \sin(\varphi_0+\zeta)$$

Из двух возможных решений последнего уравнения

$$\tilde\varphi_1+\zeta-2\xi = 2n\pi+\varphi_0+\zeta \quad \text{и} \quad \tilde\varphi_2+\zeta-2\xi = (2n+1)\pi-(\varphi_0+\zeta)$$

(n – некоторое целое число), отвечающих очевидным условиям $\tilde\varphi \geq 0$ и $\tilde\varphi \leq \varphi_0$ должно быть выбрано то, которое удовлетворяет условию касания изнутри $\varepsilon\frac{d^2\beta}{du^2} < 2r_0^2$. При $\beta_1 > u_1\beta_0$ этому условию удовлетворяет $\tilde\varphi_2$. Значение $\tilde\beta = -\frac{2\tilde u\omega}{a}\sqrt{\frac{A^2+B^2}{1+\omega^2}}\cdot\cos(\tilde\varphi+\zeta-\xi)$, при этом, оказывается связанным с β_1 простым соотношением $\tilde\beta = \beta_1\frac{\tilde u}{u_1}$.

Проанализируем сравнительные характеристики конусной и цилиндрической линз на примере линзы для четвертьволновой трансформации пучка, т.е. при $z_0 = 0$ ($\alpha_0 = 0$). Решение в этом случае существенно упрощается. Уравнения для определения $\tilde\varphi$ и φ_0 приобретают вид $\sin(\tilde\varphi+\zeta-2\xi) = \sin\zeta$ и $\sin(\varphi_0+\zeta) = \sin\zeta$, что дает $\tilde\varphi = 2\xi$ и $\varphi_0 = 3\pi - 2\zeta$. При этом выражения для $\tilde\beta$ и β_1 упрощаются к виду $\tilde\beta = \tilde u\frac{\gamma_0}{\kappa_0}$ и $\beta_1 = u_1\frac{\gamma_0}{\kappa_0}$. Значение $\widetilde{\beta\kappa}$, определяющее ток через линзу $J = \widetilde{\beta\kappa}\,\frac{\varepsilon pc}{6O}$ и входной радиус линзы $r_0^2 = \varepsilon\widetilde{\beta\kappa}/\kappa_0$, составляет $\widetilde{\kappa\beta} = \gamma_0/\tilde u$. При четвертьволновой трансформации пучка в цилиндрической линзе параметр ее жесткости κ равен $\kappa = 1/F^2$, т.е. $\kappa = \gamma_0\gamma_1$, и произведение $\kappa\beta_1$, определяющее ток в этом случае, составляет $\kappa\beta_1 = \gamma_0$. Таким образом, выигрыш в токе в конусной линзе по сравнению с цилиндрической при одинаковых значениях β-функции пучка на выходе составляет $\tilde u$ раз. Значение $\tilde u$, очевидно, ограничено условием $\tilde u < u_1$ – отношения выходного и входного радиусов линзы, $u_1 = r_1/r_0$. Удельная мощность энерговыделения $w = j^2/\sigma$ в конусной линзе зависит от u как $w = const\cdot\kappa_0^2/u^4$ с $const = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{pc}{6O\pi}\right)^2$. Ее среднее по объему линзы значение $\overline{w(u)} = \int_1^{u_1} w(u)u^2du / \int_1^{u_1} u^2du$ составляет $\overline{w} = const\cdot\frac{3(u_1-1)\kappa_0^2}{u_1(u_1^3-1)}$. В цилиндрической линзе с тем же β_1 удельная мощность равна $w_{цил} = const\cdot\kappa^2$, $\kappa = \frac{\kappa_0}{u_1}$, так что отношение $\overline{w}/w_{цил}$, определяющее и отношения средних температур и давлений за счет нагрева, составляет $\overline{w}/w_{цил} = \frac{3u_1(u_1-1)}{u_1^3-1}$. Значения полных мощностей, выделяющихся в линзах, относятся как $W/W_{цил} = \frac{(u_1-1)\sqrt{1+\omega^2}}{\pi\tilde u\sqrt{u_1}}$. Температура нагрева на входе конусной линзы T_0 в u_1^2 раз превышает температуру нагрева цилиндрической линзы.

В качестве примера рассмотрим линзу для четвертьволновой трансформации пучка позитронов с энергией ~ 10 МэВ. Радиус пучка в источнике примем равным 1 мм, угол выхода частиц $\theta \leq 0.6$ рад, т.е. $\varepsilon = 6\cdot 10^{-2}$ рад·см, $\gamma_0 = 6$ см$^{-1}$ при $\alpha_0 = 0$. Возьмем линзу с $a = 1$, $k_0 = 6$, т.е. $\omega = \sqrt{23}$. Значения $\tilde{\varphi}$ и φ_0 получаем равными $\tilde{\varphi} = 2.73$ и $\varphi_0 = 3.71$, откуда $\tilde{u} = 1.77$ и $u_1 = 2.17$. Длина линзы составляет $Z = 1.17$ см, входной радиус $r_0 = 0.18$ см, полный ток при $pc = 10$ МэВ – $J = 34$ кА, максимальное поле 37 кЭ. Выходное значение β-функции пучка составляет $\beta_1 = 2.17$ см, т.е. в 13 раз больше β-функции в источнике. Выигрыш в токе по сравнению с цилиндрической линзой при том же значении β_1 составляет 1.77 раза, однако, выигрыш в средней мощности энерговыделения, а значит и средней температуре нагрева в рабочей части линзы составляет всего ~ 1.2 раза при ~ 1.4 раза выигрыше в полной мощности. Кроме того, длина конусной линзы оказывается большей, чем цилиндрической $Z_{цил} = 0.94$ см, что на 25% увеличивает средний квадрат угла рассеяния в литии. Такую добавку к общей сумме квадратов углов рассеяния в литии и выходном фланце, фазовых и аберрационных углов, можно считать несущественной, тем не менее, удлинение линзы, тем большее, чем больше значение отношения выходного радиуса ко входному, можно считать одним из факторов, ограничивающих величину u_1.

Таким образом, конусная линза с разумным отношением выходного радиуса ко входному ($u_1 \sim 2$) не дает заметного выигрыша в средней мощности энерговыделения в рабочей части линзы. и пропорциональном ей давлении за счет нагрева, несмотря на существенный (в ~ 1.7 раза) выигрыш в токе. Тем не менее, упрощение задачи коммутации тока и квадратичное отношению токов уменьшение энерговыделения в подводящих частях системы составляют несомненное преимущество конусной линзы перед цилиндрической.

Второй пример применимости конусных линз – собирание антипротонов в системе конверсии антипротонных накопителей. Заметим, что четвертьволновая трансформация пучка в этом случае, как правило, не применима, поскольку ядерная мишень имеет большую длину – порядка длины ядерного поглощения, и эффективный источник частиц, находящийся вблизи ее центра /9/, оказывается далеко от входа в линзу, Исключение составляет мишень с сильным продольным током, таким, что на длине мишени укладывается около одной или более полуволн свободных колебаний частиц в магнитном поле тока /9/. В

этом случае эффективный источник частиц смещается к концу мишени и может быть совмещен со входом в линзу. Рассчитаем для этого случая конусную линзу с выходным радиусом в 2 раза большим входного ($u_1 = 2$) для параметров пучка и акцептанса накопителя антипротонов в CERNе /6/, т.е. энергии частиц $pc = 3.5$ ГэВ, акцептанса $\varepsilon = 200$ мм.мрад, угла собирания $\theta = 130$ мрад. (γ_0, см$^{-1}$ $= 0.845$) и углового разброса на выходе линзы $\theta_1 = 10$ мрад (γ_1, см$^{-1}$ $= 5\cdot 10^{-3}$). Цилиндрическая линза для такого преобразования γ-функции пучка при $Z_0 = 0$ имеет длину 24 см, радиус апертуры 2 см и питается током 1 мА. Очевидно, что выигрыш в токе в этом случае является особенно ценным. В конусной линзе при заданных γ_0 и γ_1 входное значение параметра жесткости K_0, в u_1 раз больше, чем K в цилиндрической, при $u_1 = 2$ составляет $K_0 = u_1 \gamma_0 \gamma_1 = 0.845\cdot 10^{-3}$ см$^{-2}$. Значение ω находим из решения трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\frac{\omega \ln u_1}{2} + \omega \frac{\gamma_0^2 - K_0}{\gamma_0^2 + K_0} = 0$, которое получается из соотношений $\operatorname{ctg}\zeta = A/B = \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}$, $\varphi_0 = \omega \ln u_1$. Это дает $\omega = 5.3$. Константа образующей боковой поверхности $a = \sqrt{\frac{4K_0}{1+\omega^2}}$ получается равной $a = 3.41\cdot 10^{-2}$, т.е. длина линзы $Z = 29$ см, на 5 см больше, чем у цилиндрической. Значение $\tilde{\varphi} = 2\zeta = 2\arcsin\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$ получается равным $\tilde{\varphi} = \pi - 0.373$, откуда $\tilde{u} = 1.686$ и, таким образом, необходимое значение тока составляет $J = J_{цил}/\tilde{u} = 0.6$мА. Максимальное поле в линзе – на периметре входного торца, в $\sqrt{\frac{u_1}{\tilde{u}}}$ раз больше, чем поле на поверхности цилиндрической линзы, составляет 109 кЭ. В таком же отношении увеличивается выходной радиус линзы по сравнению с радиусом цилиндрической и выходным радиусом пучка. Поле на выходе линзы в $\sqrt{u_1 \tilde{u}}$ раз меньше, чем у цилиндрической.

При неравном нулю и достаточно большом расстоянии Z_0 между эффективным источником и линзой, а именно $Z_0 \geq F/2$ ($\beta_1/\beta_0 \leq 4$), выгодно применять линзу с образующей боковой поверхности, совпадающей с огибающей пучка, т.е. линзу с $k\beta = const$. При собирании антипротонов с приведенными выше параметрами пучка ($\varepsilon = 200$ мм.мрад, $\gamma_0 = 0.845$ см$^{-1}$, $\beta_1 = 2$ м, $pc = 3.5$ ГэВ), условие $\beta_1/\beta_0 = x_1 \leq 4$ выполняется при $Z_0 \geq 7.6$ см. При $Z_0 = 7.6$ см ($x_1 = 4, r_1/r_0 = 2$) выигрыш в токе по сравнению с цилиндрической линзой составляет 1.85 раза, т.е.

0.7 мА вместо I.3 мА. Длина линзы при этом - I7.3 см - на $\sim$ 3 см больше длины цилиндрической, равной I4.I см. Температура нагрева входной части линзы в 4.5 раза выше температуры нагрева цилиндрической, однако, мощности энерговыделения в рабочей части линзы - средняя удельная $\overline{w}$ и полная W - меньше, чем в цилиндрической в I.56 и I.75 раза, соответственно. При сравнении описанной линзы с цилиндрической той же длины I7.3 см, выигрыш в токе оказывается равным I.6 раза, в средней удельной мощности $\overline{w}$ - в I.I7 раза и в полной мощности W - в I.6 раза.

При промежуточном между двумя рассмотренными выше значением z_0, т.е. при $0 < z_0 < F/2$, линза может быть выполнена в виде комбинации конусной и линзы с $\kappa\beta = const$, сопряженных в точке касания огибающей пучка с образующей поверхности конусной линзы. Координата касания $\tilde{u}$ (см.(9)) определяется из трансцендентного уравнения $\tilde{\gamma} - \gamma_1 = 2\tilde{\kappa}\beta \ln \frac{u_1}{\tilde{u}}$ в зависимости от отношения выходного и входного радиусов линзы $u_1 = r_1/r_0$ и начальных параметров линзы и пучка.

В заключение остановимся кратко на точности формирования линейно-фокусирующего магнитного поля в конусной линзе. Вдали от краев линзы при близкой к однородной зависимости тока от времени ($\delta \gg r_0$) плотность тока $j(r,z)$ в случае конусной геометрии распределена однородно по сечению линзы сферической поверхностью радиуса $R = \sqrt{r^2 + (z+1/a)^2}$, перпендикулярной к линиям тока, и составляет $j(r,z) = J/S(r,z)$, где $S = 2\pi R^2(1-\cos\bar{\theta})$ - площадь сечения, $\bar{\theta} = \mathrm{arctg}\, a r_0$ - угол раствора боковой поверхности линзы. Поле в точке с координатами r, z определяется как $H_\varphi(r,z) = \frac{2j(r,z)}{cr} \cdot S'(r,z)$, где $S'(r,z) = 2\pi R^2(1-\cos\theta')$ - площадь части сферического сечения, охваченной окружностью радиуса r в плоскости $z = const$, $\cos\theta' = (z + \frac{1}{a})/R$. В результате получаем

$$H_\varphi = \frac{2Jr}{cr_0^2} \cdot \frac{1 + a^2 r_0^2 + \sqrt{1+a^2 r_0^2}}{(1+az)^2 + a^2 r^2 + (1+az)\sqrt{(1+az)^2 + a^2 r^2}}$$

Количественную оценку нелинейности радиальной зависимости поля проведем, следуя /2/. Оптимальное значение $\bar{G}$ градиента поля в плоскости $z = const$ получаем равным

$$\bar{G} = \frac{4J\sqrt{1+a^2r_0^2}\,(\sqrt{1+a^2r_0^2}-1)}{cr_0^4 a^2 (1+az)^2} \cong \frac{2J}{cr_0^2(1+az)^2}\left(1 + \frac{a^2r_0^2}{4} + \dots\right)$$

Средний квадрат отклрнения радиальной зависимости поля от линейной с градиентом $\bar{G}$

$$\overline{\Delta H^2} = \frac{2}{r_0^2(1+az)^2}\int_0^{r_0(1+az)} [H(r,z) - r\bar{G}]^2\, r\, dr$$

с точностью до первого члена в разложении по степеням $a^2 r_0^2$ равен $\overline{\Delta H^2} \cong \left[\frac{a^2 r_0^2}{8} H_0(z)\right]^2$, где $H_0(z)$ - поле на поверхности. Аберрационные углы в пучке за счет такой неточности в топографии поля составляют $\sqrt{\overline{\alpha^2_{a\delta}}} \cong \frac{ar_0}{8}\varepsilon\gamma\frac{\ln u_1}{\tilde{u}}$. В рассмотренных выше примерах значения $\sqrt{\overline{\alpha^2_{a\delta}}}$ пренебрежимо малы по сравнению с угловым размером эмитанса пучка на выходе линзы $\sqrt{\varepsilon\gamma_1}$. В линзе с образующей боковой поверхности, совпадающей с огибающей пучка, значение $\frac{dr_A}{dz}$, равное ar_0 в случае конусной линзы, является переменным. Для верхней оценки аберрационных углов можно использовать максимальное из значений dr_A/dz - значение на входе в линзу $\left.\frac{dr_A}{dz}\right|_{z=0} = \gamma_0 z_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta_0}} \cong \sqrt{\varepsilon\gamma_0}$, что дает $\sqrt{\overline{\alpha^2_{a\delta}}} < \frac{1}{8}(\varepsilon\gamma_0)^{3/2}$.

Л и т е р а т у р а

I. Баянов Б.Ф., Сильвестров Г.И. ЖТФ, т.48(I978), в.I, с.I60.

2. Всеволожская Т.А., Любимова М.А., Сильвестров Г.И. ЖТФ, т.45 (I975), в.I2, стр.2494.

3. Баянов Б.Ф., Будкер Г.И. и др. Труды X Международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. Протвино, июнь I977, Серпухов I977, т.П, стр.I03.

4. Гаркуша В.Н. и др. Труды УI Всесоюзного совещания по ускорителям. Дубна II-I3 окт., I978 г., Дубна I979, т.2, с.I62.

5. Баянов Б.Ф., Всеволожская Т.А., Сильвестров Г.И. Там же, т.2, стр.I7I.

6. Design Study of an Antiproton Collector for Antiproton Accumulator (ACOL). CERN 83-10, PSD, 1983.

7. Dugan G. et al. IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. NS-30, 4, 3660 (August 1983).

8. Баянов Б.Ф., Всеволожская Т.А., Сильвестров Г.И. Препринт ИЯФ 84-I68, Новосибирск I984.

9. Vsevolozhskaya T.A. NIM 190 (1984), 479-486.

Т.А.Всеволожская, Г.И.Сильвестров

КОНУСНЫЕ ЛИТИЕВЫЕ ЛИНЗЫ

Препринт
№ 85-67

Работа поступила - I9 апреля I985 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати I9.05.85г. МН 06670
Формат бумаги 60х90 I/I6 Усл.I,I печ.л., I,0 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ №67

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90