

С.В. Кузьмин, П.Б. Лысянский

ВСТРОЕННЫЙ АКСИАЛЬНО-НЕСИММЕТРИЧНЫЙ
МГД-СТАБИЛИЗАТОР
АМБИПОЛЯРНОЙ ЛОВУШКИ

ПРЕПРИНТ 85-65



НОВОСИБИРСК

С.В. Кузьмин, П.Б. Лысянский

АННОТАЦИЯ

Рассмотрен механизм аномальных поперечных потерь плазмы в амбиполярной ловушке с аксиально-несимметричным МГД-стабилизатором, расположенным в центре установки. Выявлены особенности профилей аксиальной и квадрупольной компонент магнитного поля, оптимальных по желобковой и баллонной модам МГД-возмущений с учетом ограничений по поперечному переносу. Получены уравнения для отыскания таких профилей. После проведенной оптимизации магнитной системы МГД-стабилизатора запас устойчивости относительно МГД-возмущений возрос более чем в 4 раза, а удержание плазмы поперек силовых линий улучшилось более чем в 5 раз. В результате получена схема встроенного МГД-стабилизатора, удовлетворяющего основным требованиям, предъявляемым к нему в проекте экспериментальной установки АМБАЛ-М.

Central Quadrupole MHD Anchor
for Ambipolar Trap

S.V. Kuzmin, P.B. Lysyansky

АБСТРАКТ

Anomalous transverse plasma losses are considered in an ambipolar trap with the quadrupole MHD anchor installed in the centre of the device. The quadrupole symmetry magnetic field optimal with respect to stability of the flute and ballooning interchange modes was studied. Optimization procedure includes constraints connected with the plasma radial transport. The equations were derived to determine optimal profiles for both axial and quadrupole components. After optimization MHD stability increases more than factor 4 and plasma transverse lifetime increases about factor 5. As a result, the MHD anchor design is obtained which satisfies the main requirements of the AMBAL-M project.

В одном из вариантов проектируемой в настоящее время амбиполярной экспериментальной установки АМБАЛ-М [1] стабилизация МГД-возмущений достигается с помощью расположенного в центре ловушки небольшого пробкотрона с квадрупольной компонентой магнитного поля. Инжекция атомарных пучков в этот пробкотрон позволяет создавать превышение давления в области с благоприятной кривизной силовых линий так, чтобы обеспечить средний «минимум В» во всей ловушке. Подобный встроенный стабилизатор рассматривался для установки ДРАКОН в работе [2], где отмечены основные достоинства такого способа МГД-стабилизации плазмы. В случае амбиполярной ловушки достоинством является также удобство экспериментального исследования плазмы в аксиально-симметричных концевых пробкотронах, а также возможность испытания альтернативных методов стабилизации МГД-возмущений [1].

Сейчас известно, что при использовании аксиально-несимметричных МГД-стабилизаторов необходимо рассматривать в первую очередь вопросы желобковой и баллонной мод МГД-возмущений, а также поперечные потери в плазме. Для встроенного стабилизатора эти вопросы существенно ограничивают область возможных параметров. Действительно, для уменьшения поперечных потерь плазмы необходимо уменьшать квадрупольную компоненту поля, приближая его к аксиально-симметричному. Это, вообще говоря, противоречит требованию увеличения глубины поперечной магнитной ямы в стабилизаторе, увеличивающей запас устойчивости по желобковой моде. Кроме того, для улучшения устойчивости баллонных мод необходимо создавать специальные профили аксиальной и квадрупольной компонент магнитного поля вдоль оси стабилизатора [3]. Оценки показывают, что для получения практически приемлемого варианта встроенного стабилизатора необходима тщательная оптимизация его магнитной системы.

В данной работе проведено исследование влияния основных параметров магнитного поля встроенного стабилизатора амбиполярной ловушки на запас устойчивости по желобковой и баллонной модам МГД-возмущений с учетом ограничений по поперечному переносу плазмы; найдены оптимальные профили компонент магнитного поля; получена конфигурация катушек магнитной системы, реализующая профили, близкие к оптимальным.

1. ПОПЕРЕЧНАЯ ДИФФУЗИЯ ПЛАЗМЫ

Плазма, захваченная в магнитной яме стабилизатора, может испытывать аномальный неоклассический или резонансный перенос [4]. Поперечные потери горячих инжектируемых ионов при этом не опасны, так как продольные потери превышают поперечные, или сравнимы с ними. Потери ионов основной «теплой» плазмы амбиполярной ловушки связаны со скоростью захвата пролетных ионов в области стабилизатора и последующим выходом их поперек магнитного поля. Оценки показывают, что эти поперечные потери относительно просто можно минимизировать выбором параметров плазмы и длины стабилизатора.

В присутствии радиального электрического поля плазмы возможен дополнительный канал поперечных потерь. Действительно, если в чисто магнитном поле полный радиальный дрейф заряженной частицы при пролете области стабилизатора зануляется в силу симметрии поля, то при наличии азимутальных дрейфов возможно остаточное радиальное смещение частицы. Оценки показывают, что без тщательной оптимизации магнитного поля стабилизатора возможны неприемлемо большие поперечные потери ионов основной плазмы ловушки.

При проведении оценок воспользуемся параксиальным приближением в описании магнитного поля ловушки [5]. В этом приближении компоненты B_x , B_y магнитного поля зависят от двух функций: B_z и b , задаваемых на оси z системы,

$$B_x = \left(-\frac{1}{2} \frac{dB_z}{dz} - 2b \right) x, \quad (1)$$

$$B_y = \left(-\frac{1}{2} \frac{dB_z}{dz} + 2b \right) y,$$

а силовая линия записывается в виде

$$\begin{aligned} x &= x_0 X(z) = x_0 R^{-1/2} E^{-1/2}, \\ y &= y_0 Y(z) = y_0 R^{-1/2} E^{1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$R(z) = B_z(z)/B_z(0), \quad E(z) = 4 \int_0^z \frac{b(z')}{B_z(z')} dz',$$

а (x_0, y_0) — координаты пересечения силовой линией медианной плоскости $z=0$ ловушки.

В работе [5] получены формулы для вычисления остаточного нескомпенсированного радиального смещения заряженной частицы при пролете области квадрупольного МГД-стабилизатора:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta r}{r_s} &= \frac{1}{\omega_s^{ci}} \int_0^{z_0} \frac{v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2}{v_{\parallel}} G(z) \sin \left[2\psi + 2\Omega \int_0^z \frac{dz'}{v_{\parallel}} \right] dz, \\ \Omega &= \frac{c}{r_s B_s} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \omega_s^{ci} = \frac{eB_s}{mc}, \\ G(z) &= X \frac{d^2 X}{dz^2} - Y \frac{d^2 Y}{dz^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь рассматривается частица с массой m и скоростью $\mathbf{v} = (v_{\perp}, v_{\parallel})$, стартующая от точки (r_s, ψ_s) в плоскости $z = \pm z_s$ в области аксиально-симметричного поля центральной части ловушки; магнитная поверхность, имеющая в сечении этой плоскостью окружность, считается эквипотенциальной.

Оценим максимально возможный поперечный перенос пролетных ионов основной плазмы, соответствующий режиму стохастической диффузии (см. обзор [4]). В этом случае последовательные радиальные смещения ионов при пролетах области стабилизатора не скоррелированы и коэффициент радиальной диффузии имеет вид:

$$D_{\perp} \approx \left\langle \frac{\Delta r^2}{t_{\parallel}} \right\rangle = \left\langle v_{\parallel} \frac{\Delta r^2}{L_{\text{уст}}} \right\rangle, \quad (4)$$

где $L_{\text{уст}}$ — длина центральной части амбиполярной ловушки. Скобки означают усреднение по функции распределения ионов, которую в дальнейшем принимаем максвелловской. Соответствующее время жизни плазмы

$$\tau_{\perp}^{-1} \approx \left(\frac{r_{\text{max}}^2}{D_{\perp}} \right)^{-1} \approx \frac{\langle v_{\parallel} \Delta r^2 / L_{\text{уст}} \rangle}{r_{\text{max}}^2}. \quad (5)$$

Для оценок выберем параболический профиль электрического потенциала

$$\varphi(r) = T_e \cdot r^2 / r_s^2, \quad (6)$$

соответствующий амбиполярному радиальному удержанию электронов в плазме с гауссовским распределением плотности

$$n(r) = n_0 \cdot e^{-(r/r_0)^2}, \text{ где } r_{\max} = \sqrt{2} \cdot r_0. \quad (7)$$

Вводя обозначения:

$$V \equiv v \sqrt{\frac{m}{2T_i}}, \quad \mu \equiv \frac{v_{\perp}^2}{v^2}, \quad \varrho \equiv \frac{v}{\omega_s^{ci}}, \quad t_{\parallel} \equiv \frac{L_{\text{уст}}}{v},$$

из (3) для оценки поперечных потерь окончательно получим

$$\frac{t_{\parallel}}{\tau_{\perp}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{\varrho_0}{r_{\max}} \right)^2 \int_0^1 d\mu \Phi(\mu), \quad (8)$$

$$\Phi(\mu) = \int_0^{\infty} dV V^5 e^{-V^2} \left\{ \int_0^{z_0} \frac{2-R\mu}{\sqrt{1-R\mu}} \sin[2\psi_0 + 2\Omega(z)] G(z) dz \right\}^2.$$

В рассматриваемых конструкциях стабилизаторов геодезическая кривизна $G(z)$ имеет экстремум в узкой области максимума поля $R \sim R_m$, где $E(z)$ также достигает максимума (рис.1). Именно в этой области частицы испытывают наибольшее радиальное смещение и, следовательно,

$$\frac{t_{\parallel}}{\tau_{\perp}} \propto \left(\frac{E_m}{R_m} \right)^2, \quad (9)$$

Поэтому при разработке квадрупольных МГД-стабилизаторов необходимо стремиться к уменьшению E_m и увеличению R_m . Это затрудняет поиск конфигураций с большим запасом устойчивости.

Однако, как показано ниже, в данном случае удалось найти оптимальное магнитное поле стабилизатора, которое удовлетворяет как требованию необходимого запаса устойчивости, так и условию минимального поперечного переноса, при котором ионы основной плазмы амбиполярной ловушки уходят, в основном, вдоль силовых линий. В частности, в одной из схем установки АМБАЛ-М для стабилизатора, близкого к оптимальному, параметр поперечного удержания плазмы $n\tau_{\perp} \approx 4.6 \cdot 10^{11}$ для максимальных температур $T_i = 500$ эВ, $T_e = 1$ кэВ, а $n\tau_{\parallel} \approx 3 \cdot 10^{11}$. Несмотря на то, что общее время жизни плазмы уменьшается при таких поперечных потерях в ~ 1.8 раза, возможна не только уверенная демонстрация амбиполярного продольного удержания, без которого $n\tau_{\parallel}$ снижается более чем на порядок, но и изучение поперечного переноса плазмы. Кроме того, как видно из (8), $\tau_{\perp} \propto T_i^{-3/2}$, тогда как $\tau_{\parallel} \propto T_i^{3/2}$. В результате

$$\frac{\tau_{\parallel}}{\tau_{\perp}} \propto T_i^3 \quad (10)$$

и при небольшом снижении температуры плазмы можно значительно уменьшить влияние поперечных потерь.

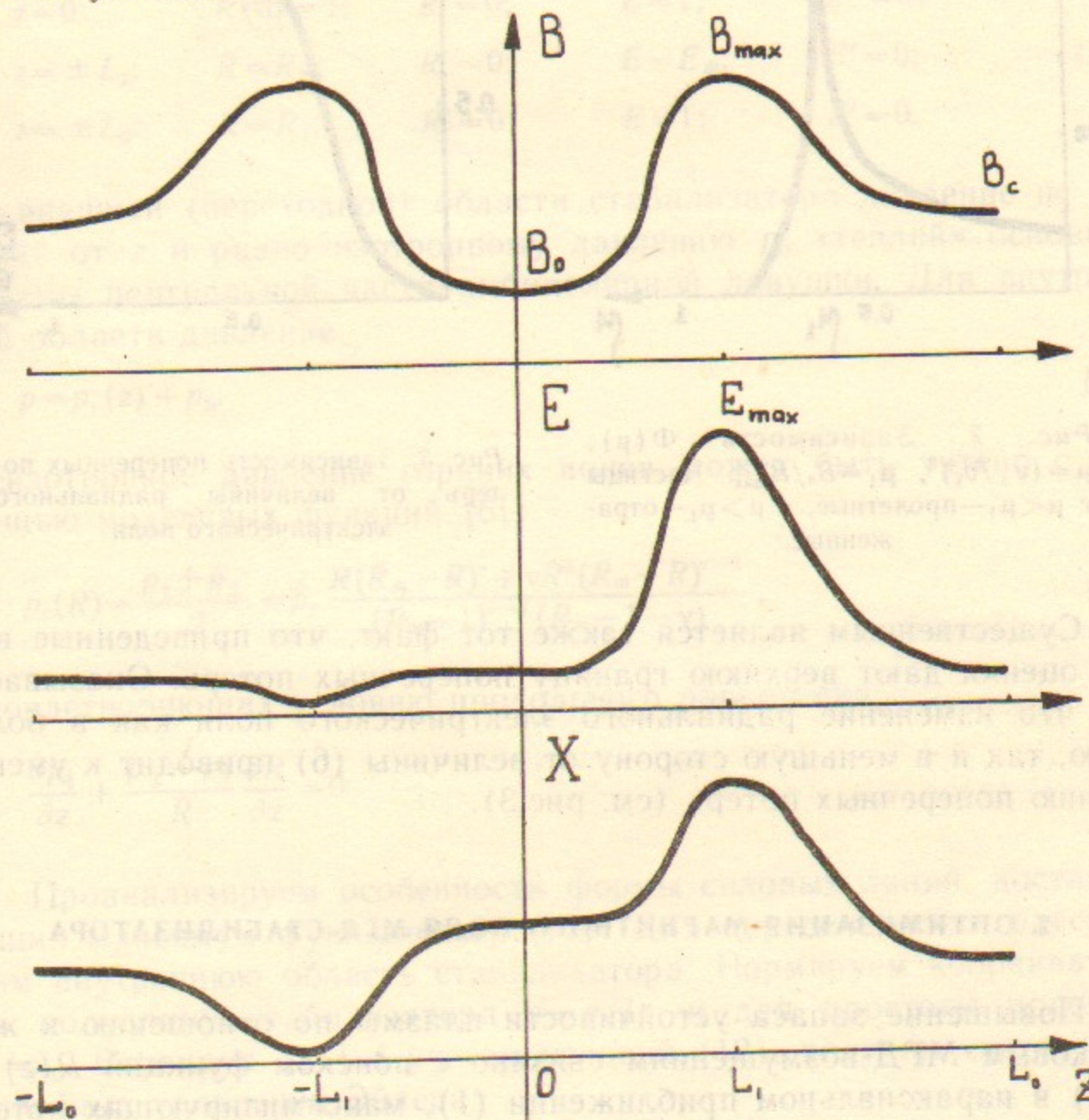


Рис. 1. Магнитное поле МГД-стабилизатора.

Рассмотрим поведение функции $\Phi(\mu)$ (8), пропорциональной локальному по μ коэффициенту поперечной диффузии ионов (см. рис. 2). Довольно острый максимум соответствует частицам, почти отражающимся в области максимума магнитного поля. Обратим внимание, что радиальная диффузия частиц, отражающихся от горбов магнитного поля ($\mu > \mu_1$) вносит малый вклад в поперечный перенос. Это дает возможность создания небольшой вариации магнитного поля в переходной области МГД-стабилизатора.

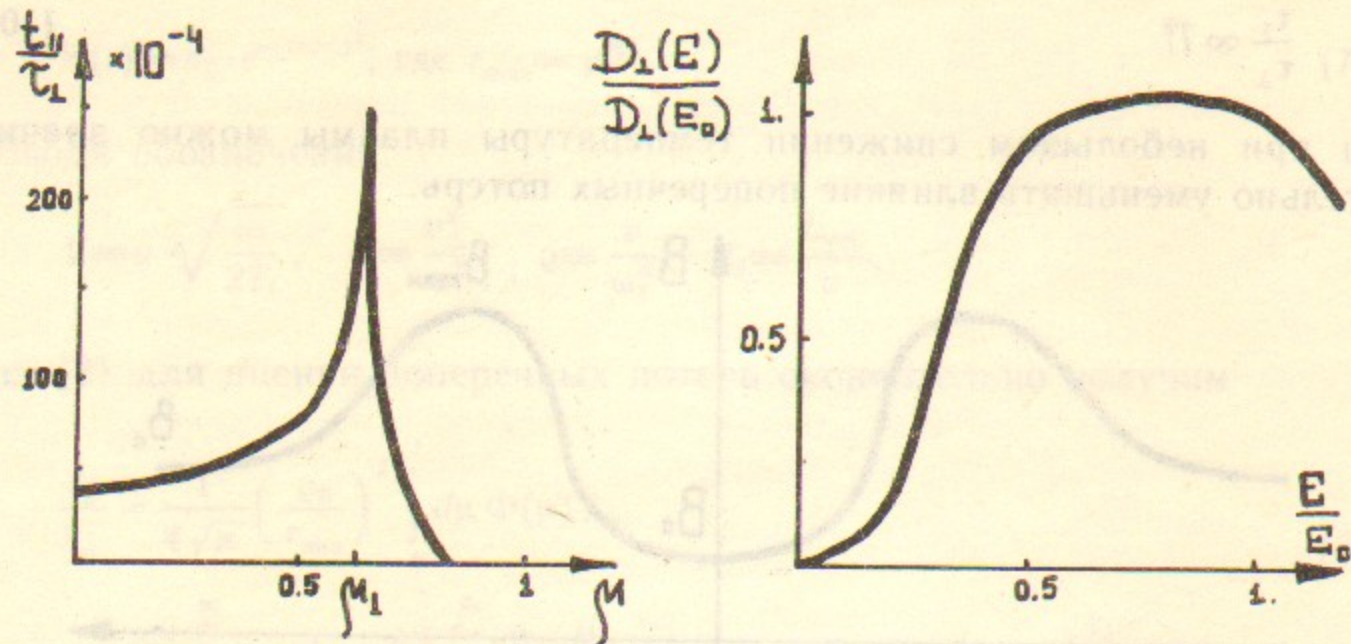


Рис. 2. Зависимость $\Phi(\mu)$; $\mu = (v_{\perp}/v_{\parallel})^2$, $\mu_1 = B_s/B_{\max}$. Частицы с $\mu < \mu_1$ — пролетные, с $\mu > \mu_1$ — отраженные.

Рис. 3. Зависимость поперечных потерь от величины радиального электрического поля.

Существенным является также тот факт, что приведенные выше оценки дают верхнюю границу поперечных потерь. Оказывается, что изменение радиального электрического поля как в большую, так и в меньшую сторону от величины (6) приводит к уменьшению поперечных потерь (см. рис.3).

2. ОПТИМИЗАЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МГД-СТАБИЛИЗАТОРА

Повышение запаса устойчивости плазмы по отношению к желобковым МГД-возмущениям связано с поиском функций $R(z)$ и $E(z)$ в параксиальном приближении (1), максимизирующих потенциальную энергию возмущений:

$$W_p = \int_{-L}^L \rho \frac{XX''}{R(z)} dz. \quad (11)$$

Здесь интеграл берется по всей области с ненулевой квадрупольной компонентой; давление $\rho(z)$, силовая линия $X(z)$ и модуль магнитного поля $R(z)$ нормированы на их значения в центре стабилизатора $z=0$.

Поиск максимума W_p можно независимо вести для внутренней $-L_1 < z < L_1$ и для внешней $-L_0 < z < -L_1$, $L_0 > z > L_1$ с граничными условиями в точках $z=0$; $\pm L_1$; $\pm L_0$ (рис.1)

$$\begin{aligned} z=0: & \quad R(0)=1; & R'(0)=0; & E(0)=1; & E''(0)=0; \\ z=\pm L_1: & \quad R=R_m; & R'=0; & E=E_m; & E'=0; \\ z=\pm L_0: & \quad R=R_1; & R'=0; & E=1; & E'=0. \end{aligned} \quad (12)$$

Во внешней (переходной) области стабилизатора давление не зависит от z и равно изотропному давлению p_0 «теплой» основной плазмы центральной части амбиполярной ловушки. Для внутренней области давление

$$p = p_r(z) + p_0. \quad (13)$$

Неизотропное давление горячих ионов может быть учтено с помощью модельных функций [6]:

$$p_r(R) = \frac{p_{\parallel} + p_{\perp}}{2} = \hat{p}_r \frac{R(R_m - R)^{\nu} + \nu R^2 (R_m - R)^{\nu-1}}{(R_m - 1)^{\nu-1} (R_m - 1 - \nu)}, \quad (14)$$

удовлетворяющих условию продольного равновесия:

$$\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial z} + \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{R} \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \quad (15)$$

Проанализируем особенности формы силовых линий, доставляющих максимум функционалу (11). Для определенности рассмотрим внутреннюю область стабилизатора. Нормируем координату z на полудлину стабилизатора $s = z/L_1$ и для простоты положим $\rho = p_0$. Варьируя (11) с учетом условий (12), получим систему нелинейных уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1-E^2}{1+E^2} \right)^2 - \frac{3}{4} \right] R'' &= F_1(E, R, E', R') \\ \left[\left(\frac{1-E^2}{1+E^2} \right)^2 - \frac{3}{4} \right] E'' &= F_2(E, R, E', R') \end{aligned} \quad (16)$$

(штрих означает дифференцирование по координате s). Выражение в квадратных скобках может обращаться в нуль в точке $s_{кр}$, если эллиптичность достигает значения $E(s_{кр}) = 3.73$. Это соответствует излому силовой линии и отсутствию регулярного решения уравнений (16). Качественно понятно, что форма оптимальной

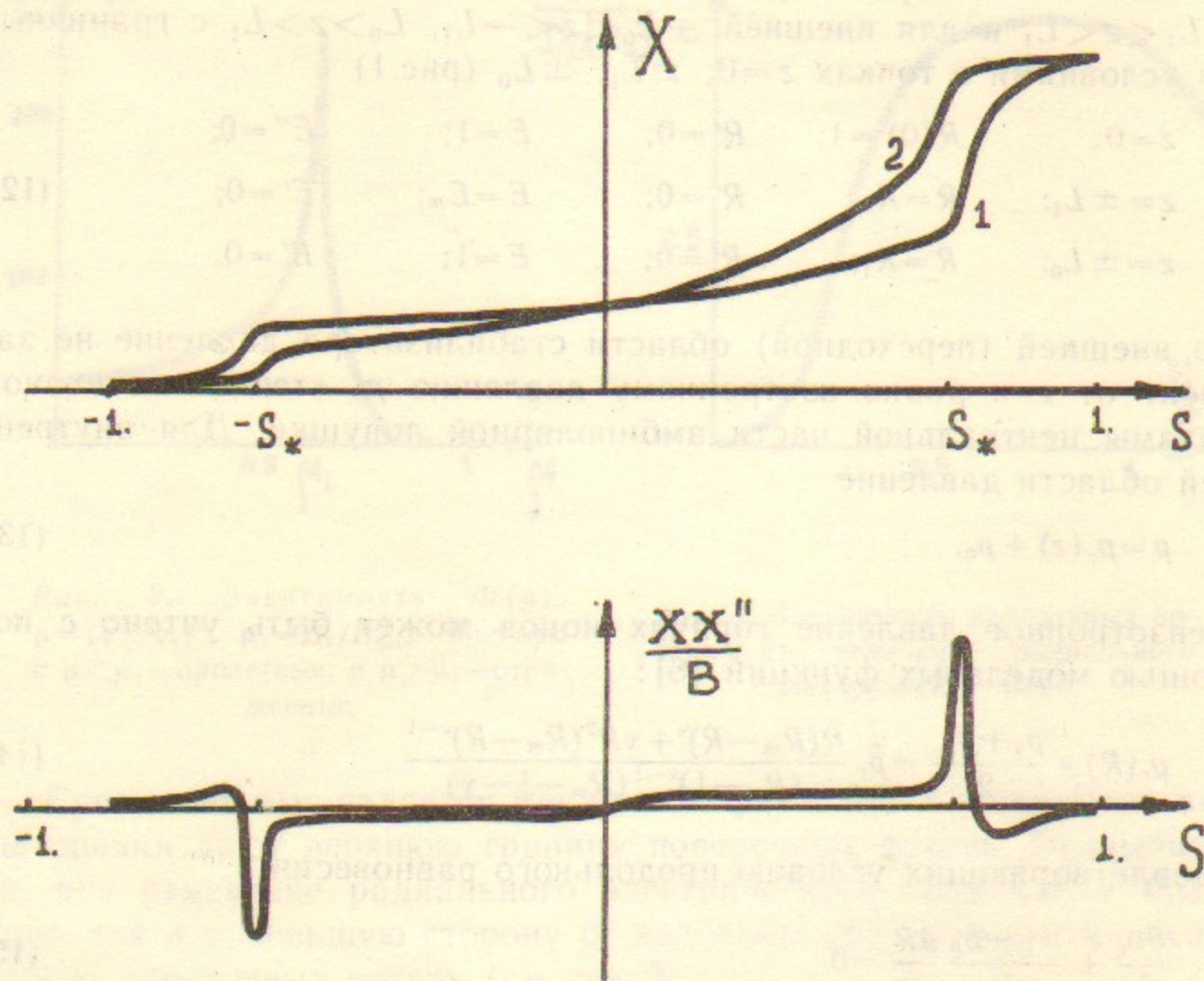


Рис. 4. а—Форма силовой линии: 1— $W \rightarrow +\infty$, 2— $W \rightarrow -\infty$. б—Подынтегральная функция в (11) для силовой линии 1 на рис. 4,а.

силовой линии должна быть близка к изображенной на рис.4,а, а величина $W \rightarrow \pm\infty$.

Из анализа формы близких к оптимальным силовых линий вытекает важное свойство «локальности», означающее, что основной вклад в интеграл (11) вносит небольшая окрестность точки s_* (рис.4,б), причем $s_* \neq 0$. Кроме того, в этой окрестности кривизна силовой линии $X''(s)$, производные E' , R' , E'' , R'' одновременно принимают большие значения.

Таким образом, хотя уравнения (16) и не имеют регулярных решений, их анализ позволяет понять основные закономерности поведения оптимальной силовой линии.

Влияние профилей $R(s)$ и $E(s)$ на величину интеграла W исследовалось с помощью модельных функций, обладающих указанными выше свойствами:

$$R(s) = (R_m - 1) \left[\frac{1}{\pi} \arctg \{a(s - s_*)\} + \frac{1}{2} \right] + 1, \\ E(s) = (E_m - 1) \left[\frac{1}{\pi} \arctg \{a(s - s_*)\} + \frac{1}{2} \right] + 1, \quad (17)$$

Параметры $R_m = R(1)$, $E_m = E(1)$, $a = R'(s_*) / (R_m - 1)$ и s_* позволяют гибко варьировать практически все особенности функций $E(s)$ и $R(s)$, близких к оптимальным. Отметим, что модельные функции, использованные в работах [2] и [7], такими возможностями не обладают. Используя параксиальное представление силовой линии (2) и интегрируя (11) по частям, для желобкового интеграла получим:

$$W = \int_0^1 \frac{E+1/E}{R^2} \varphi(R, E, R', E') (R')^2 dz, \\ \varphi(R, E, R', E') = \frac{(E^2 - 1)}{(E^2 + 1)} \frac{1}{ER} \frac{E'}{R'} - \frac{3}{4} \frac{1}{R^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{E^2} \left(\frac{E'}{R'} \right)^2. \quad (18)$$

Выражение $\varphi(R, E, R', E')$ определяет знак подынтегральной функции. Допустим, что имеется область, где $\varphi > 0$. Учитывая локальность набора интеграла, можно утверждать, что для достижения максимума W необходимо, чтобы точка максимума производной $R'_m(s_*)$ находилась внутри этой области. Для модельных функций (17) $\frac{E'}{R'} = \frac{E_m - 1}{R_m - 1}$ и, в точке s_* , $E(s_*) = \frac{E_m + 1}{2}$, $R(s_*) = \frac{R_m + 1}{2}$. С учетом этого, условие $\varphi > 0$ приводит к неравенству (рис. 5):

$$3 \frac{E_m + 1}{E_m - 1} > \frac{R_m + 1}{R_m - 1} > \frac{E_m + 1}{E_m - 1} \quad (19)$$

с максимумом на линии

$$\frac{R_m + 1}{R_m - 1} = \sqrt{3} \frac{E_m + 1}{E_m - 1}. \quad (20)$$

В общем случае такого точного соответствия E_m и R_m указать нельзя, но следует учитывать, что всегда есть некоторая область, где соотношение этих параметров близко к оптимальному.

Рассмотрим далее изображенную на рис. 6,а зависимость величины W от максимальной производной. Линейность функции $W(R'_m) = -A + C \cdot R'_m$ при $R'_m \gg 1$ можно показать, используя (18) и свойство локальности. Такое поведение желобкового интеграла

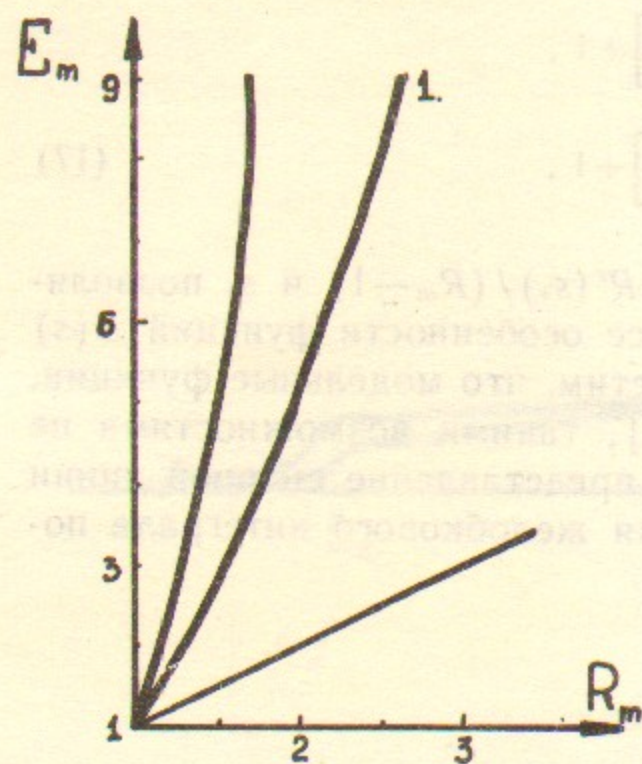


Рис. 5. Область $\varphi(R_m, E_m) \geq 0$. Максимуму φ соответствует кривая 1.

приводит к следующему утверждению: запас устойчивости увеличивается с ростом длины L_1 . Действительно, переходя к координате $z = L_1 s$ и учитывая, что реальная величина $W_p = W/L_1$, для $R'_m \gg 1$ получим:

$$W_p = \frac{1}{L_1} [-A + CR'_m] = -\frac{A}{L_1} + C \frac{dR}{dz} \Big|_{\max} \quad (21)$$

Величина максимального градиента $\frac{dR}{dz} \Big|_{\max}$ зависит только от

формы и поперечных размеров катушек магнитной системы, которые не меняются при изменении L_1 . Функция (21) показана на рис. 6,б. Отметим, что качественно вид зависимости $W_p(L_1)$ сохраняется при неизотропном давлении плазмы в стабилизаторе и, как будет показано ниже, при оптимизации формы силовой линии.

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА W

Качественные рассуждения, приведенные выше, позволяют сделать вывод о том, что величина интеграла (11) чувствительна к форме силовой линии, однако не дают метода поиска оптимальной формы. Использование уравнений второго порядка (16) невозможно не только из-за необходимости удовлетворения четырех граничных условий (12), но и в силу отсутствия регулярных решений.

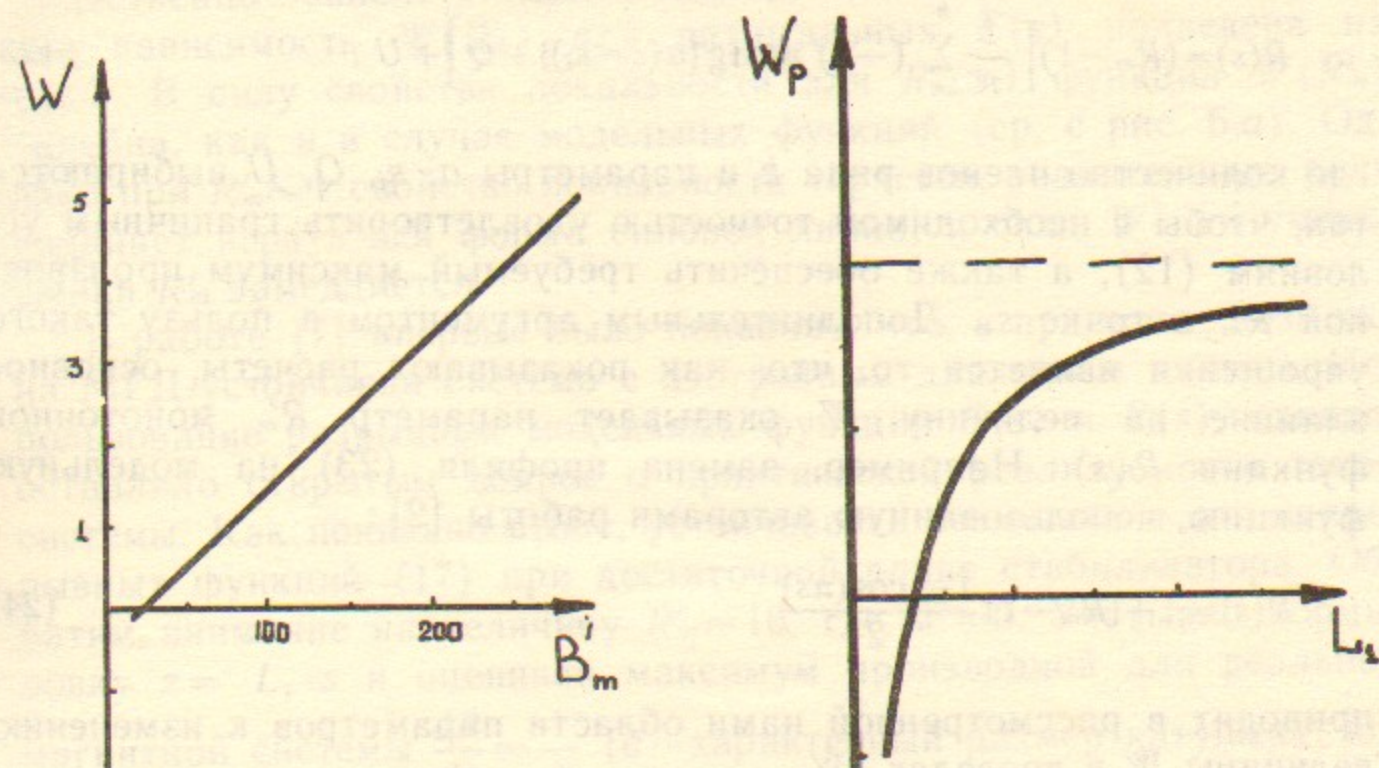


Рис. 6. а—Зависимость $W(R'_m)$ для модельных функций (17): $R_m=2$, $E_m=10$; б—Зависимость W_p от длины стабилизатора L_1 , соответствующая прямой на рис. 6,а.

Для нахождения реальных решений, близких к оптимальному необходимо ограничение класса возможных функций—регуляризация функционала W . Можно, в частности, требовать определенной гладкости решения, степень которой диктуется характерными размерами элементов магнитной системы установки. Поскольку величина поперечных потерь—один из главных критериев качества рассматриваемой системы, естественным является ограничение геодезической кривизны $G(s)$, которая служит причиной аномального радиального переноса в плазме. Вариация функционала W с соответствующей добавкой

$$F = \alpha W + (1 - \alpha) \int_{-1}^1 G^2(s) ds \quad (22)$$

приводит к уравнениям Эйлера четвертого порядка для $E(s)$ и $R(s)$.

Учитывая анализ влияния формы $R(s)$ на величину W , в целях упрощения вычислительной процедуры можно варьировать функционал F только по E , задавая модельный профиль модуля поля:

$$R(s) = (R_m - 1) \left[\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^k (-1)^i \operatorname{arctg} \{a(s - s_i)\} + Q \right] + U, \quad (23)$$

где количество членов ряда k и параметры a , s_i , Q , U выбираются так, чтобы с необходимой точностью удовлетворить граничным условиям (12), а также обеспечить требуемый максимум производной R'_m в точке s_* . Дополнительным аргументом в пользу такого упрощения является то, что, как показывают расчеты, основное влияние на величину W оказывает параметр R'_m монотонной функции $R(s)$. Например, замена профиля (23) на модельную функцию, использованную авторами работы [2]:

$$R(s) = 1 + (R_m - 1) \frac{1 - \cos(\pi s)}{2} \quad (24)$$

приводит в рассмотренной нами области параметров к изменению величины W в пределах 5%.

Уравнение Эйлера для нахождения оптимального $E(s)$ и метод численного решения приведены в Приложении. Давление горячих ионов бралось в виде (14), а параметр ν подбирался так, чтобы профиль $p_r(s)$ был близок к распределению давления, получаемому из кинетических расчетов [8]; ниже всюду принято $\nu = 4$.

Таким образом, задача оптимизации сводится к следующему: необходимо, находя с помощью численного решения уравнения Эйлера функцию $E(s)$, исследовать зависимость величины интеграла W от параметров магнитного поля R , s_* , R'_m , E_m и отношения давлений в центре стабилизатора $\gamma = \hat{p}_r / p_0$. Положение s_* максимальной производной модуля поля слабо влияет на величину W , если оно не расположено слишком близко к концам интервала $0 < s_* < 1$,

Рис. 7. Зависимость $W(R'_m)$ для оптимального профиля $E(s)$ при $p_r = 0$.

поэтому в приведенных ниже расчетах было принято $s_* = 0.7$

Как было показано выше на модельных функциях, величина W

существенно зависит от максимальной производной R'_m . Аналогичная зависимость $W(R'_m)$ для оптимальных $E(s)$ приведена на рис. 7. В силу свойства локальности для $R'_m \gg 1$ функция $W(R'_m)$ линейна, как и в случае модельных функций (ср. с рис. 6, а). Однако при $R'_m \sim 1$ свойство локальности теряется, значительную роль начинает играть вся форма силовой линии, и спад W при уменьшении R'_m замедляется.

В работе [7] впервые было показано, что, в принципе, возможна МГД-устойчивая система с изотропным давлением плазмы. Использование разрывных модельных функций $E(s)$ и $R(s)$, однако, оставляло открытым вопрос о практической реализуемости такой системы. Как показано выше, устойчивость возможна и для непрерывных функций (17) при достаточной длине стабилизатора. Обратим внимание на величину $R'_m \approx 16$, где $W = 0$. Учитывая нормировку $z = L_1 \cdot s$ и оценивая максимум производной для реальной магнитной системы $\frac{dR}{dz} \propto \frac{1}{a}$ (a — характерный размер катушек), получим достаточно умеренную оценку минимальной длины МГД-устойчивой системы:

$$2L_1 = \frac{2R'_m}{dR/dz} \approx 30a. \quad (25)$$

Следуя за авторами работы [2], определим положение границы области устойчивости $W(R_m, s_*, R'_m, E_m, \gamma) = 0$. Прежде всего, рассмотрим необходимое соответствие между максимальным пробочным отношением и максимальной эллиптичностью $E_m(R_m)$ при $p_0 = 0$. Для исключения прямого влияния параметров R_m и E_m на R'_m и параметр регуляризации α , т. е. для сохранения подобия профиля $R(s)$ при изменении R_m и пропорциональности между членами функционала (22) при изменении E_m , постоянными поддерживались не сами R'_m и α , а их комбинации:

$$\begin{aligned} \frac{R'_m}{R_m - 1} &= \text{const}, \\ \frac{\alpha}{\alpha - 1} E_m &= \text{const}. \end{aligned} \quad (26)$$

На рис. 8 для нескольких значений R'_m приведены зависимости $E_m(R_m)$, которые показывают минимально необходимую величину E_m для данного R_m , когда стабилизатор становится устойчивым при отсутствии плазмы в остальной части ловушки. При увеличении эллиптичности запас устойчивости, вообще говоря, возрастает,

но при этом существенно растет средний квадрат геодезической кривизны и, соответственно, поперечные потери в плазме. Поэтому выбор для реальной системы слишком больших E_m нецелесообразен.

Важным параметром, характеризующим стабилизирующие свойства системы, является минимальное γ —отношение неізотропного давления горячих ионов \hat{p}_r и изотропного давления основной

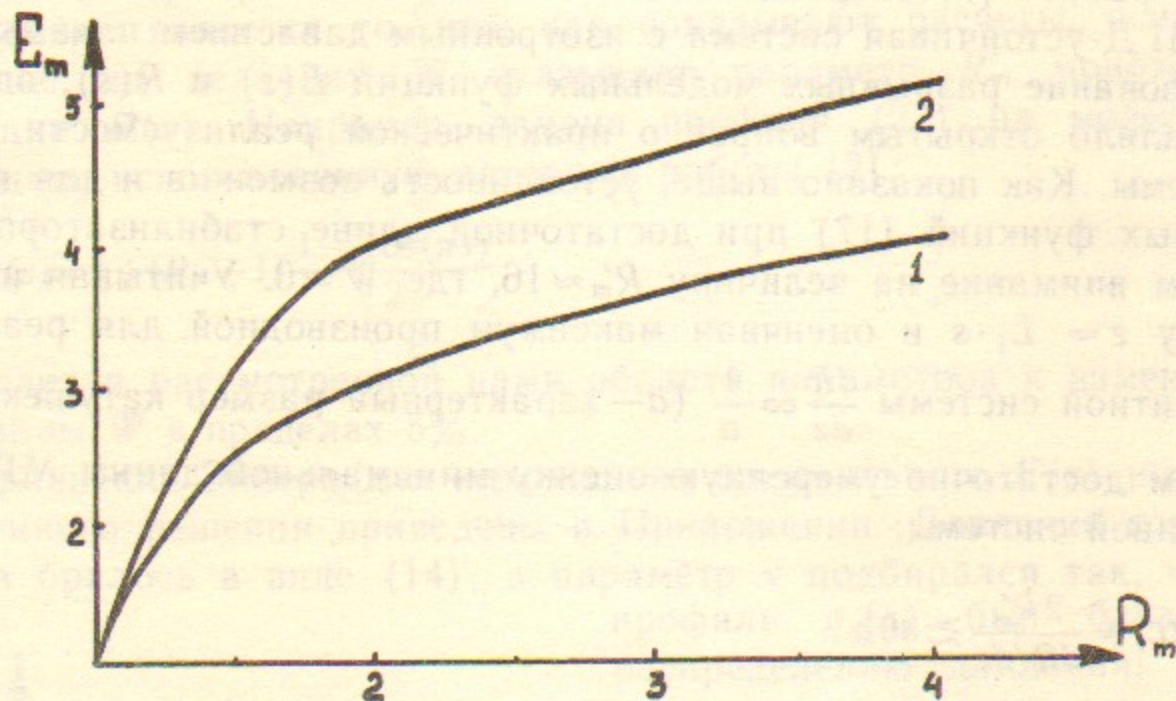


Рис. 8. Граница устойчивости $W(R_m, E_m) = 0$: 1— $R'_m/(R_m-1) = 3$, $\rho_0 = 0$; 2— $R'_m/(R_m-1) = 1.57$, $\rho_0 = 0$.

плазмы ловушки ρ_0 . Это связано со следующими причинами. Во-первых, величина относительного давления плазмы в стабилизаторе

$$\beta_{ст} = \frac{8\pi}{B_0^2} (\rho_0 + \hat{p}_r) = \frac{8\pi\rho_0}{B_0^2} (1 + \gamma) = \beta_0 (1 + \gamma) \quad (27)$$

не может быть слишком большой из-за искажений вакуумного магнитного поля [9] и возможного ухудшения стабилизирующих свойств. Во-вторых, при умеренной температуре горячих ионов, когда их ларморовский радиус в несколько раз меньше радиуса плазмы, достижение больших \hat{p}_r связано с увеличением плотности и, следовательно, с ростом амбиполярного потенциала плазмы в области стабилизатора. Это может привести к разделению ионной компоненты основной плазмы ловушки по обе стороны стабилизатора. Анализ последствий такого разделения достаточно сложен.

На рис.9 приведены зависимости $\gamma(E_m)$ для нескольких значений R'_m и R_m . Как видно из этих графиков, при умеренных величинах

нах $R'_m \sim 1.5 \div 4$ (а, следовательно, и небольших длинах стабилизаторов) возможно создание МГД-устойчивых систем с приемлемыми значениями $\gamma \sim 2 \div 3$.

Отдельного рассмотрения требует оптимизация внешней, переходной области стабилизатора. Дело в том, что на начальном этапе предполагалось, как и в работе [2], что в этой области $B(s) = \text{const}$ и, следовательно, $R_1 = 1$. В этом случае практически все частицы основной плазмы пролетают область МГД-стабильности

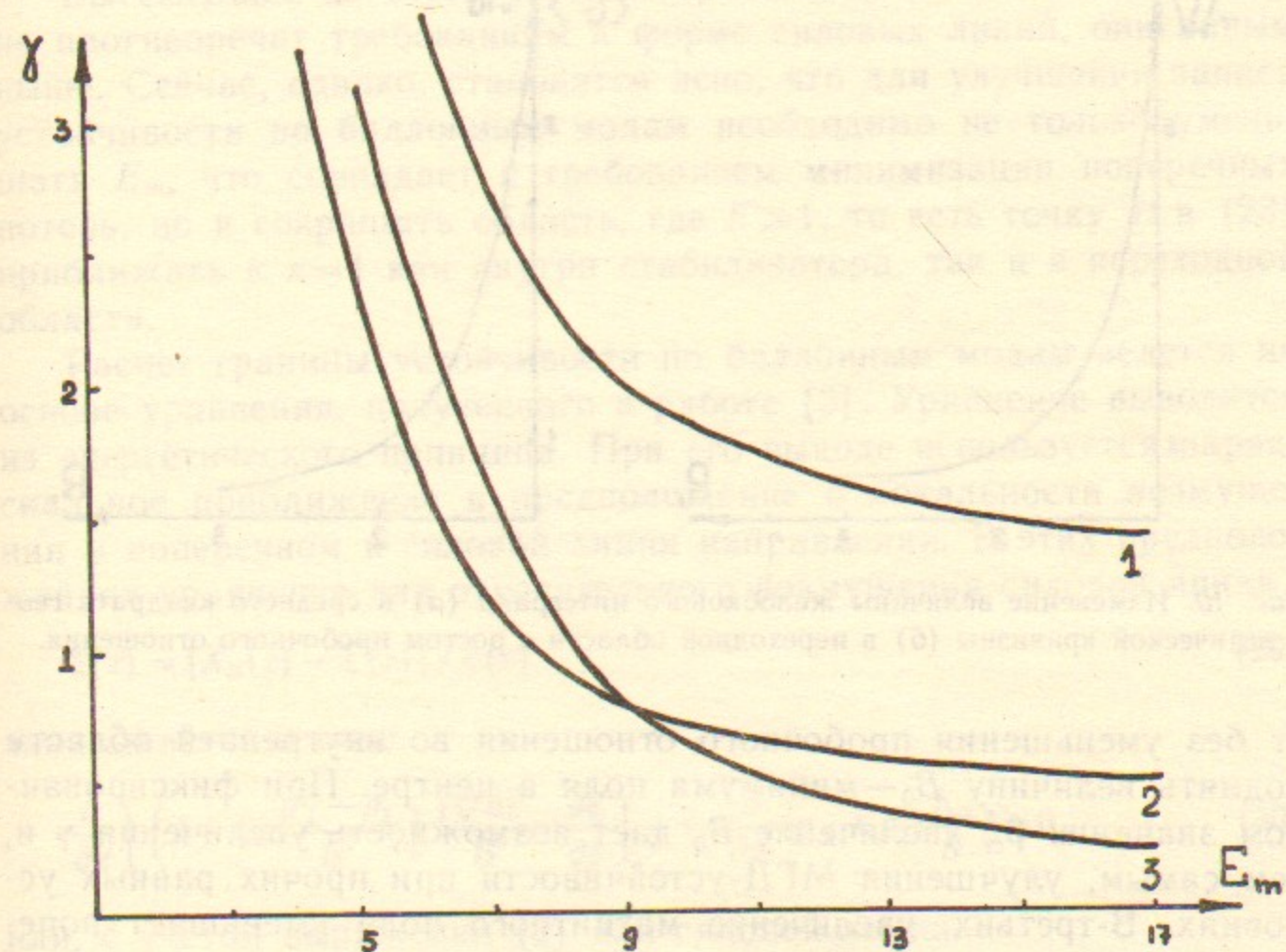


Рис. 9. Граница устойчивости $W(E_m, \gamma) = 0$: 1— $R_m = 2$, $R'_m/(R_m-1) = 1.57$; 2— $R_m = 2$, $R'_m/(R_m-1) = 3$; 3— $R_m = 3$, $R'_m/(R_m-1) = 3$.

тора, не отражаясь. Если величина азимутальной прокрутки $\Delta\psi$ основной массы частиц мала, то, как отмечалось выше, аномальные поперечные потери плазмы пренебрежимо малы. Введение небольшой вариации магнитного поля в переходной области (рис.1) приводит к появлению группы частиц, отражающихся от горбов магнитного поля, для которых, в отличие от пролетных частиц, радиальное смещение за период продольных колебаний не компенсируется. Однако радиальное электрическое поле ведет к появлению усиленных поперечных потерь, в которые, как отмечалось выше,

бóльший вклад вносят не отраженные, а именно пролетные частицы. Поэтому достоинства условия $R_1=1$ в переходной области не кажутся бесспорными. Отказ от этого ограничения дает сразу несколько преимуществ. Во-первых, вариация магнитного поля позволяет резко уменьшить отрицательный вклад переходной области в полный интеграл W и средний квадрат геодезической кривизны (рис.10). Во-вторых, повышение R_1 в переходной области позволя-

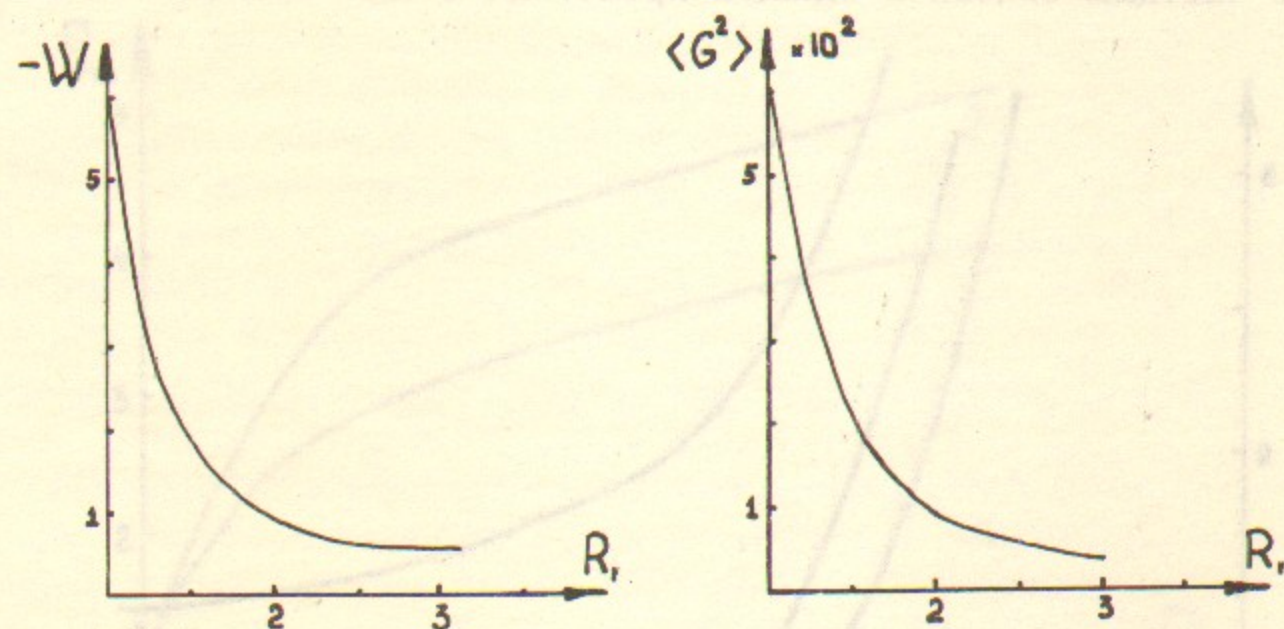


Рис. 10. Изменение величины желобкового интеграла (а) и среднего квадрата геодезической кривизны (б) в переходной области с ростом пробочного отношения.

ет без уменьшения пробочного отношения во внутренней области поднять величину B_0 —минимума поля в центре. При фиксированном значении $\beta_{ст}$ увеличение B_0 дает возможность увеличения γ и, тем самым, улучшения МГД-устойчивости при прочих равных условиях. В-третьих, увеличение магнитного поля уменьшает поперечные размеры плазмы и магнитной системы, что, в свою очередь, приводит к уменьшению длины МГД-стабилизатора и объема горячей плазмы.

4. БАЛЛОННЫЕ МОДЫ

Давление плазмы в центральной части и в концевых пробкотронах амбиполярной ловушки, допустимое по желобковым возмущениям, ограничено только запасом устойчивости МГД-стабилизатора и предельным давлением плазмы в нем. Как показано в работе [3], ограничение давления по баллонным модам оказывается более жестким, так что даже бесконечный запас устойчивости МГД-стабилизатора при определенных давлениях центральной

плазмы и плазмы в концевых пробкотронах не стабилизирует этот тип МГД-возмущений. Здесь существенной оказывается величина средней эллиптичности $\langle E \rangle$ силовой линии, а именно, предельное относительное давление плазмы вне стабилизатора

$$\beta_{кр} \propto \frac{1}{\langle E \rangle} \quad (28)$$

Вытекающее из этого условия требование минимальности $\langle E \rangle$ не противоречит требованиям к форме силовых линий, описанным выше. Сейчас, однако, становится ясно, что для улучшения запаса устойчивости по баллонным модам необходимо не только уменьшать E_m , что совпадает с требованием минимизации поперечных потерь, но и сокращать область, где $E \gg 1$, то есть точку s_* в (23) приближать к $s=1$ как внутри стабилизатора, так и в переходной области.

Расчет границы устойчивости по баллонным модам ведется на основе уравнения, полученного в работе [3]. Уравнение выводится из энергетического принципа. При его выводе используется параксиальное приближение и предположение о локальности возмущения в поперечном к силовой линии направлении. В этих предположениях уравнение для относительного возмущения силовой линии

$$\xi(z) = [X_B(z) - X(z)] / X(z) \quad (29)$$

записывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(1 + 4\pi \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \right) \frac{|\nabla \theta|^2}{B} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \right\} + 4\pi \frac{\partial}{\partial \psi} (p_{\perp} + p_{\parallel}) \frac{K_{\psi}}{B} \xi = 0, \quad (30)$$

или, с учетом выражения (2) для силовой линии,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(1 + 4\pi \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \right) \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \right\} + 8\pi \frac{x_0}{B_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{p_{\perp} + p_{\parallel}}{2} \right\} X X'' E \xi = 0. \quad (31)$$

Граничные условия $\left. \frac{d\xi}{dz} \right|_{\pm L} = 0$ соответствуют отсутствию возмущения магнитного поля на концах установки, где нет плазмы.

Уравнение (31) решалось численно. Граница устойчивости по относительным давлениям плазмы в концевом пробкотроне β_k и в центральной части β_0 показана на рис.11 для оптимизированного варианта магнитной системы установки АМБАЛ-М.

Следует сделать замечание о форме возмущения силовой линии $\xi(z)$. На рис.12 показано типичное решение $\xi(z)$ уравнения (31). Отметим достаточно плавный рост $\xi(z)$ в области магнитной проб-

ки стабилизатора. Предложенные в работе [4] оценки предельных β основаны на близости к нулю слева от пробки и быстром росте $\xi(z)$ в районе пробки. Такая ситуация имеет место при большом запасе устойчивости стабилизатора. В нашем случае эти оценки дают завышение β_0, β_k в 1.5÷2 раза. Результаты такого расчета приведены на рис.11. На этом же рисунке показана граница устойчивости для желобковых мод. Небольшое отличие этих результа-

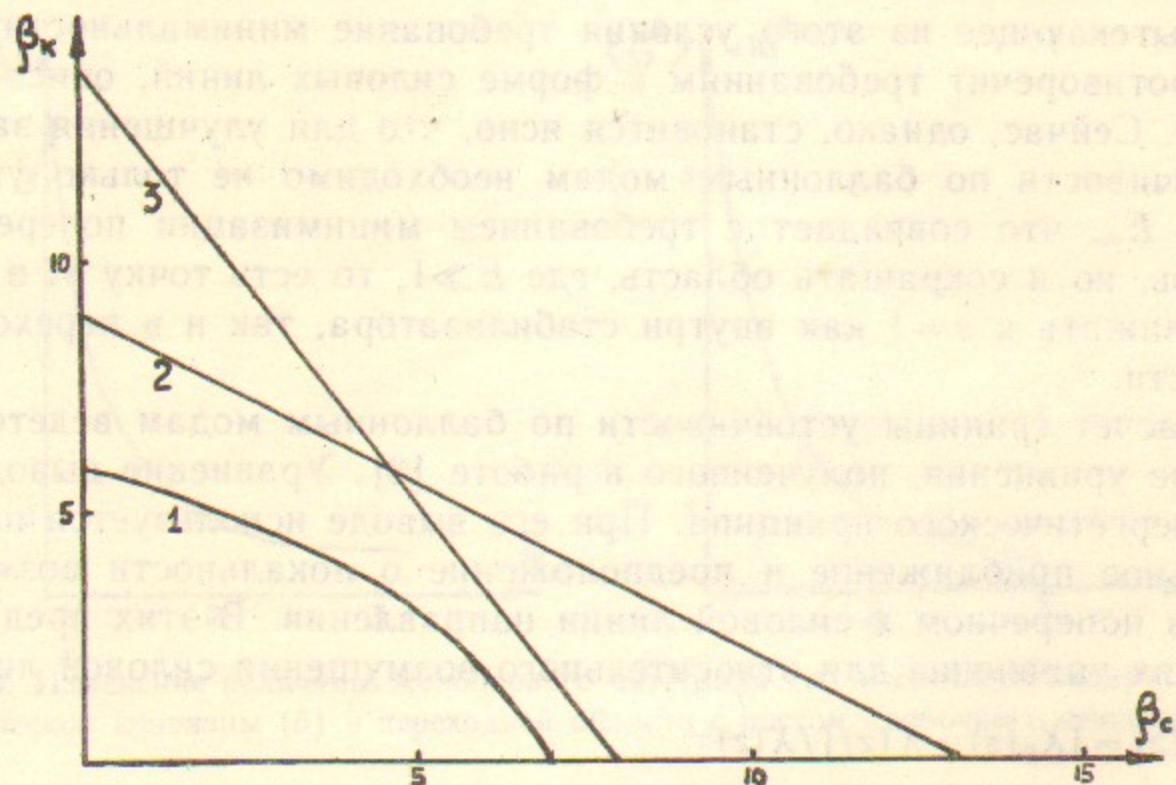


Рис. 11. Граница устойчивости установки АМБАЛ-М: 1—по баллонным модам, $\beta_{ст} = 0.6$, 2—по баллонным модам при $\xi(0) = 0$, 3—по желобковым модам, $\beta_{ст} = 0.6$.

тов означает, что повышение запаса устойчивости по желобковому критерию за счет увеличения глубины магнитной ямы в стабилизаторе и, следовательно, максимальной эллиптичности E_m , не приведет к заметному росту предельных значений β , что также говорит о близости этой системы к оптимальной.

5. МАГНИТНАЯ СИСТЕМА МГД-СТАБИЛИЗАТОРА

Для реализации оптимальных профилей $E(z)$ и $B(z)$ была разработана магнитная система из С-образных катушек (рис.13). Каждая катушка характеризуется пятью параметрами: большим и малым радиусами— $r_б$ и $r_м$, углом δ , током I и положением z_k . Поиск оптимальной конфигурации магнитной системы является нелинейной некорректной обратной задачей, в которой необходимо максимизировать желобковый интеграл W , зависящий в данном

случае от параметров $(r_б, r_м, \delta, I, z_k)_i$. Величина W при заданных параметрах находится численным интегрированием (11) вдоль силовой линии. Решение этой обратной задачи проводилось по схеме, описанной в работе [10].

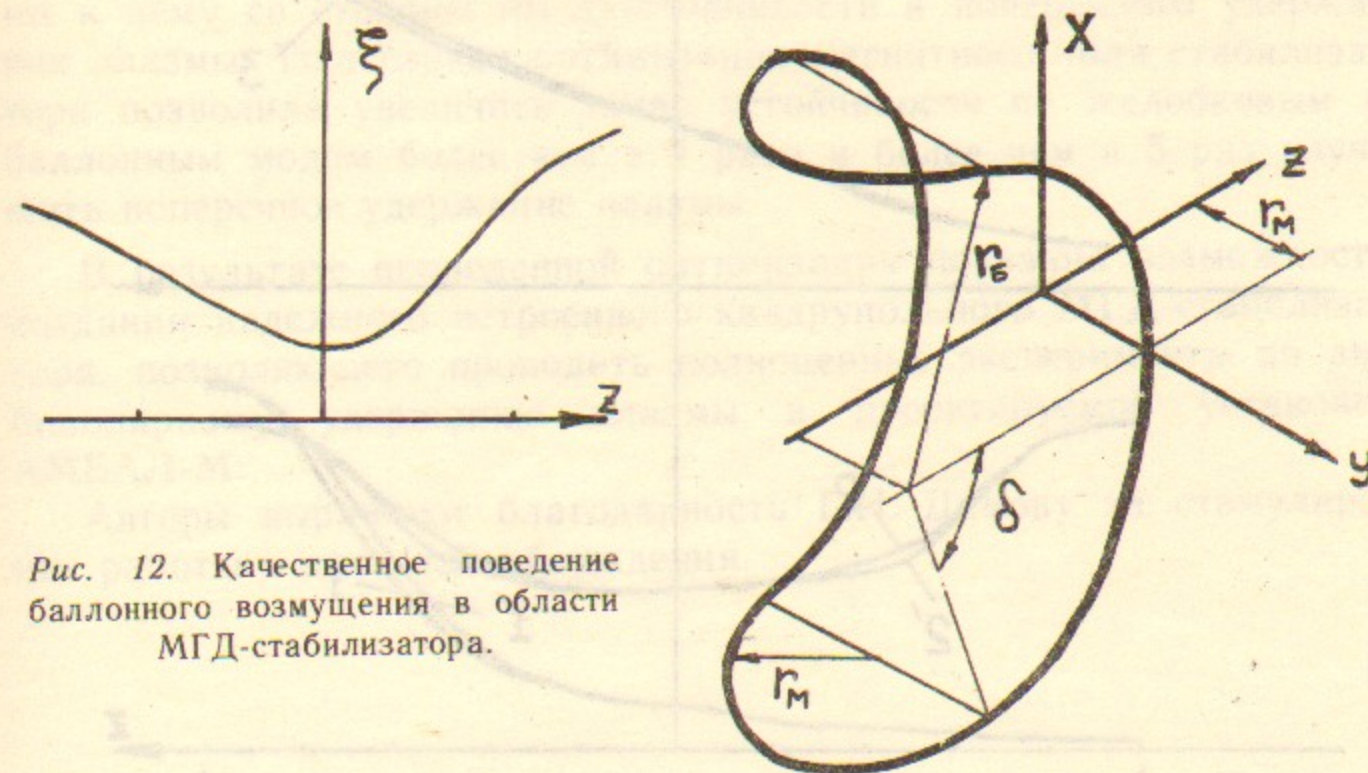


Рис. 12. Качественное поведение баллонного возмущения в области МГД-стабилизатора.

Рис. 13. С-образная катушка—основной элемент магнитной системы МГД-стабилизатора.

На рис.14 приведены полученные в результате оптимизации функции $B(z)$, $E(z)$ и $X(z)$. Для сравнения на рисунке изображены оптимальные профили, найденные в результате решения уравнения Эйлера четвертого порядка. Практически полное совпадение кривых подтверждает предположение о возможности создания реальной магнитной системы с магнитным полем, близким к оптимальному.

Несколько слов следует сказать о пределах применимости параксиального приближения. Дело в том, что для получения нужного запаса МГД-устойчивости при малых размерах стабилизатора необходимо использовать катушки с небольшими поперечными размерами, так что периферийные силовые линии проходят вблизи токовых шин катушек. В этих условиях параксиальное представление вдали от оси z , вообще говоря, неприменимо. Однако, если магнитная система состоит из достаточно большого количества катушек, параметры которых плавно меняются от катушки к катушке,

ке так, чтобы зазоры между шинами соседних катушек на периферии плазмы были малы, можно добиться качественного совпадения профилей магнитного поля во всей области, занимаемой плазмой.

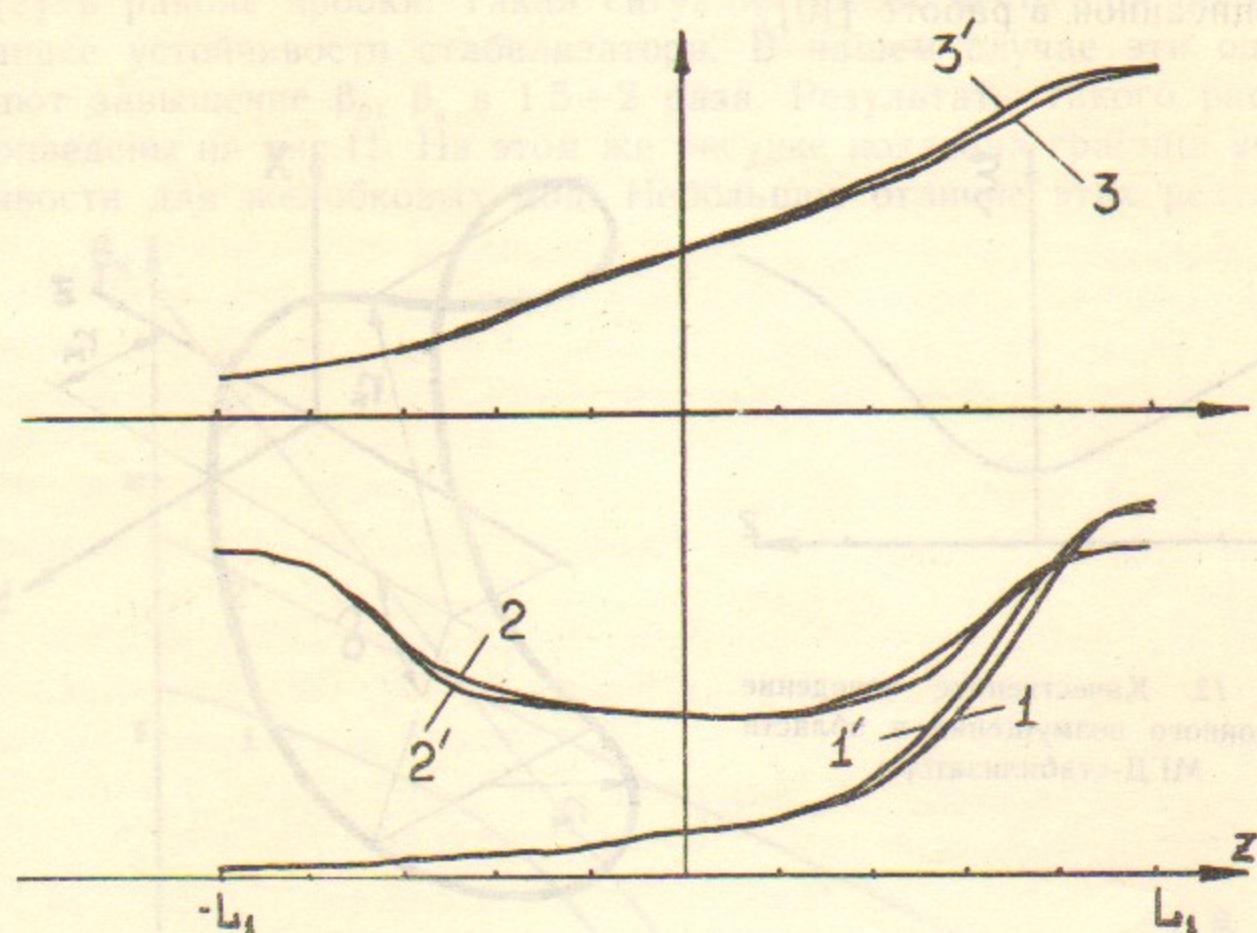


Рис. 14. Профили реальной магнитной системы: 1— $E(z)$, 2— $B(z)$, 3— $X(z)$; 1', 2', 3'—соответствующие оптимальные профили.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучены вопросы, возникающие при использовании в амбиполярной ловушке встроенного аксиально-несимметричного стабилизатора. Рассмотрен механизм возможных аномальных потерь плазмы поперек силовых линий и найдены зависимости величины этих потерь от параметров магнитного поля и поперечного электрического поля плазмы.

Выяснены основные особенности формы силовых линий магнитного поля, оптимальных по желобковым и баллонным модам МГД-возмущений с учетом ограничений по поперечному переносу. Найдена адекватная форма функционала, достигающего минимума на оптимальных силовых линиях и получены уравнения Эйлера для их нахождения.

Разработаны алгоритмы и программы для численных оценок аномальных поперечных потерь, решения нелинейных уравнений

Эйлера четвертого порядка, решения задачи по баллонным модам, а также для расчета магнитных полей в реальных трехмерных системах без железа.

Задача отыскания оптимального МГД-стабилизатора оказалась весьма сложной в связи с взаимно противоположными требованиями к нему со стороны МГД-устойчивости и поперечного удержания плазмы. Тщательная оптимизация магнитного поля стабилизатора позволила увеличить запас устойчивости по желобковым и баллонным модам более чем в 4 раза и более чем в 5 раз улучшить поперечное удержание плазмы.

В результате проведенной оптимизации показана возможность создания надежного встроенного квадрупольного МГД-стабилизатора, позволяющего проводить полноценные эксперименты по амбиполярному удержанию плазмы в проектируемой установке АМБАЛ-М.

Авторы выражают благодарность Г.И. Димову за стимулирующие работы и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.И. Димов, П.Б. Лысянский. Физические параметры концевой системы амбиполярной ловушки АМБАЛ-М.—Доклад на Звенигородской конференции по физике плазмы и УТС, 1985.
2. В.И. Ильгисонис, В.П. Пастухов. Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез, выпуск 3(13), 1983.
3. Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков. Труды VIII Международной конференции по физике плазмы и УТС. Брюссель, 1980.
4. Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков. В сб.: Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1984, вып.13, с.74.
5. И.А. Котельников. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 85-13, 1985.
6. J.V. Taylor. Phys. Fluids, 1963, v.6, p.1529.
7. H.P. Furth, M.N. Rosenbluth. Phys. Fluids, 1964, v.7, p.764.
8. П.Б. Лысянский. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 82-32, 1982.
9. Г.В. Ступаков. Физика плазмы, 1979, т.5, с.871.
10. Г.И. Димов и др. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 84-81, 1984.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сделаем замену переменной $f = \ln E$. В результате вариации функционала

$$F = \alpha \int_0^1 (XX'' - YY'')^2 dz + (1 - \alpha) \int_0^1 \hat{p} \frac{XX'' + YY''}{B} dz$$

по f получим уравнение Эйлера четвертого порядка:

$$T \equiv A_1 f^{(IV)} + A_2 f''' f' + A_3 (f'')^2 + A_4 f''' + A_5 f'' f' + \\ + A_6 (f')^3 + A_7 f'' (f')^2 + A_8 (f')^4 + A_9 f'' + A_{10} (f')^2 + A_{11} f' + A_{12} = 0,$$

где

$$A_1 = \alpha \left(\frac{\text{ch} f}{B} \right)^2; \quad A_2 = 4\alpha \frac{\text{ch} f \text{ sh} f}{B^2}; \quad A_3 = 3\alpha \frac{\text{ch} f \text{ sh} f}{B^2};$$

$$A_4 = -4\alpha \frac{B'}{B} \left(\frac{\text{ch} f}{B} \right)^2; \quad A_5 = -13\alpha \frac{B'}{B} \frac{\text{ch} f \text{ sh} f}{B^2};$$

$$A_6 = \left[-2 \frac{B'}{B} \left(\frac{\text{sh} f}{B} \right)^2 - 3 \frac{B'}{B} \left(\frac{\text{ch} f}{B} \right)^2 \right] \alpha,$$

$$A_7 = \left[4 \left(\frac{\text{ch} f}{B} \right)^2 + 2.5 \left(\frac{\text{sh} f}{B} \right)^2 \right] \alpha; \quad A_8 = 1.25 \alpha \frac{\text{ch} f \text{ sh} f}{B^2};$$

$$A_9 = \alpha \left\{ \left[11 \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - 5 \frac{B''}{B} \right] \left(\frac{\text{ch} f}{B} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[1.5 \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - \frac{B''}{B} \right] \left(\frac{\text{sh} f}{B} \right)^2 \right\} + (1 - \alpha) \frac{\hat{p} \text{ch} f}{B^2};$$

$$A_{10} = \alpha \left[13 \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - 6.5 \frac{B''}{B} \right] \frac{\text{sh} f \text{ sh} f}{B^2} + (1 - \alpha) \frac{\hat{p} \text{sh} f}{2B^2};$$

$$A_{11} = \alpha \left\{ \left[19 \frac{B' B''}{B^2} - 20 \left(\frac{B'}{B} \right)^3 - 3 \frac{B'''}{B} \right] \left(\frac{\text{ch} f}{B} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[6 \frac{B' B''}{B} - 6 \left(\frac{B'}{B} \right)^3 - \frac{B'''}{B} \right] \left(\frac{\text{sh} f}{B} \right)^2 \right\} + (1 - \alpha) \frac{B'}{B} \frac{\text{ch} f}{B^2} \left[B \frac{d\hat{p}}{dB} - 2\hat{p} \right];$$

$$A_{12} = \alpha \frac{\text{sh} f \text{ ch} f}{B^2} \left\{ 6 \left(\frac{B''}{B} \right)^2 + 8 \frac{B' B'''}{B^2} - 36.5 \frac{B'' (B')^2}{B^3} + \right.$$

$$\left. + 24.75 \left(\frac{B'}{B} \right)^4 - \frac{B^{(IV)}}{B} \right\} + (1 - \alpha) \frac{\text{sh} f}{B^2} \left\{ \hat{p} \left[4.5 \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - 2 \frac{B''}{B} \right] + \right.$$

$$+ B \frac{d\hat{p}}{dB} \left[\frac{B''}{B} - 3 \left(\frac{B'}{B} \right)^2 \right] + B^2 \frac{d^2 \hat{p}}{dB^2} \left(\frac{B'}{B} \right)^2 \}.$$

Решение этого уравнения с граничными условиями

$$E''(0) = 0 \text{ или } E'(0) = 0; \quad E'(1) = 0; \quad E(0) = 1; \quad E(1) = E_m$$

проводилось методом релаксации. При этом исходное уравнение $T=0$ подменяется параболическим уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} = T(f^{IV}, f''', f'', f', f, z);$$

которое решается численно методом Кранка-Никольсона и при $t \rightarrow \infty$ находится стационарное решение $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

С.В. Кузьмин, П.Б. Лысянский

**Встроенный аксиально-несимметричный МГД-стабилизатор
амбиполярной ловушки**

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Подписано в печать 13 мая 1985 г. МН 06659
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,5 печ.л., 2,0 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 65

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*