



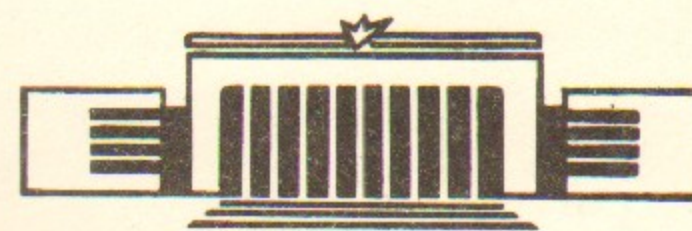
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

39

Ф.М.Израйлев, В.В.Соколов

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ КВАЗИЭНЕРГИИ  
ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

ПРЕПРИНТ 85-63



НОВОСИБИРСК

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ КВАЗИЭНЕРГИИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ  
КАНОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ф.М.Израйлев, В.В.Соколов

Институт ядерной физики, 630090, Новосибирск, СССР

Рассматривается приближенный интеграл движения канонических отображений, соответствующий инвариантности относительно сдвига номера итерации - интеграл квазиэнергии. На примере стандартного отображения Чирикова - Тейлора исследуется с помощью теории возмущений свойства такого интеграла. Этот интеграл можно построить в виде аналитической функции лишь локально, ограничившись окрестностью некоторой периодической траектории (резонанса). Однако, при достаточно слабом возмущении наш метод позволяет с помощью таких локальных интегралов получить приближенный фазовый портрет системы на всей ее фазовой поверхности. Проводится численное сравнение истинных интегральных кривых и кривых, полученных с помощью интеграла квазиэнергии.

Approximate quasienergy integrals for two-dimensional  
area-preserving maps

F.M.Izrailev, V.V.Sokolov

Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk, USSR

An approximate integral of motion for area-preserving maps is considered. This so-called quasienergy integral results from the invariance of the map with respect to a shift of the discrete time (iteration number). The properties of such integrals are investigated for the standard Chirikov-Taylor map using perturbation theory. The quasienergy integral can be derived as an analytic function only in the vicinity of periodic trajectories (resonances). Providing the perturbation is sufficiently small, these local integrals can be pieced together to construct approximate integral curves throughout the entire phase space.

І. В в е д е н и е

Двумерные канонические отображения возникают во многих задачах как теоретического, так и прикладного характера. К ним, в частности, приводят задачи о движении консервативных систем с двумя степенями свободы (см., например, /1/) и о движении частицы вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса /2/, задачи о движении частицы в микротроне /3/, в магнитной ловушке /4/, о взаимодействии встречных пучков в ускорителях /5/ и т.д. Несмотря на кажущуюся простоту таких отображений, описываемое ими движение может иметь весьма сложный и нетривиальный характер. Фазовое пространство двумерных отображений состоит, вообще говоря, из причудливо переплетающихся областей регулярного и стохастического движения /1,2,6,7/, причем размеры этих областей зависят от параметров задачи. Наличие областей стохастического движения означает, что такие отображения относятся к неинтегрируемым системам, у которых отсутствуют аналитические (глобальные) интегралы движения. В то же время в областях регулярного движения должны существовать локальные интегралы. Их отыскание является интересной и важной задачей. Имеются различные приближенные методы построения таких интегралов (см./1/), основанные на тех или иных вариантах теории возмущений. Метод оценки далеких членов разложения по возмущению разработан в работах /8,9/.

В работе одного из авторов /10/ предложен новый метод построения интеграла движения, связанного с инвариантностью отображений по отношению к сдвигу дискретного времени (номера итерации). Такой интеграл естественно назвать интегралом квазиэнергии. В настоящей работе мы демонстрируем эффективность этого метода на конкретном примере широко известного стандартного отображения Чирикова-Тейлора /2/.

ІІ. ІНТЕГРАЛ КВАЗИЭНЕРГИИ

Рассмотрим каноническое отображение фазовой плоскости переменных действие-угол  $(I, \theta)$ :

$$\begin{cases} I_{n+1} - I_n = -g \frac{\partial V(\theta_n)}{\partial \theta_n} \\ \theta_{n+1} - \theta_n = \omega_0(I_{n+1}) \end{cases} \quad V(\theta + 2\pi) = V(\theta) \quad (I)$$

Отличительной чертой таких отображений является отсутствие явной зависимости от номера итерации. По этой причине они инвариантны относительно сдвига дискретного "времени"  $n$ . Подобно тому, как инвариантность дифференциальных уравнений Гамильтона относительно временного сдвига приводит к сохранению энергии, отмеченная инвариантность отображения (I) должна, как можно ожидать, приводить к существованию некоторого интеграла движения  $\tilde{H}(I_n, \theta_n; g)$  - интеграла квазиэнергии.

В отличие от дифференциальных канонических уравнений, для которых вид интеграла энергии ясен непосредственно из уравнений движения, связь интеграла квазиэнергии с отображением (I) далеко не столь очевидна. Причина заключается в том, что отображения задают изменение переменных  $I, \theta$  на конечных, а не на бесконечно малых интервалах времени. В силу канонического характера такого изменения, переход от значений переменных  $I_n, \theta_n$  к новым значениям  $I_{n+1}, \theta_{n+1}$  является унитарным преобразованием, осуществляемым некоторым унитарным оператором  $\hat{U}$ . Этот же оператор описывает и преобразование любой функции  $F(I_n, \theta_n)$  канонических переменных  $I, \theta$ . Эволюция такой функции в дискретном времени  $n$  в зависимости от начального ее значения  $F(I_0, \theta_0)$  описывается поэтому соотношением

$$F(I_n, \theta_n) = \hat{U}^n F(I_0, \theta_0), \quad (2)$$

причем оператор  $\hat{U}$  действует на канонические переменные  $I, \theta$ . Запись отображения в виде (2) аналогична лиувиллевской форме механики /II/.

Легко видеть из (I), что действие оператора  $\hat{U}$  тождественно двум последовательным унитарным преобразованиям

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \hat{U}_2 = \exp\left[-ig \frac{\partial V(\theta_0)}{\partial \theta_0} \hat{q}\right] \exp\left[i\omega_0(I_0) \hat{m}\right], \quad (3)$$

где  $\hat{m} = -i \frac{\partial}{\partial \theta_0}$ ,  $\hat{q} = -i \frac{\partial}{\partial I_0}$ . Первое из них, сдвигая угол на  $\omega_0(I_0)$  осуществляет поворот, а второе смещает на величину  $-g \frac{\partial V(\theta_0)}{\partial \theta_0}$  канонический импульс и называется поэтому оператором толчка. Квазиэнергия  $\tilde{H}(I, \theta; g)$  опре-

деляется условием /IO/

$$\exp\left[-ig \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} \hat{q}\right] \exp\left[i\omega_0(I) \hat{m}\right] = \exp(i \hat{L} \tilde{H}), \quad (4)$$

где  $\hat{L} \tilde{H} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I} \hat{m} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} \hat{q}$  - эрмитовый оператор Лиувилля /II/ (индекс "0" у канонических переменных для краткости опущен).

Эволюция за  $n$  итераций отображения будет тогда задаваться оператором  $\hat{U}^n = \exp(in \hat{L} \tilde{H})$ . Если заменить теперь номер итерации  $n$  непрерывным временем  $t$ , то мы получим оператор  $\hat{U}(t) = \exp(it \hat{L} \tilde{H})$  временной эволюции некоторой консервативной системы с функцией Гамильтона  $\tilde{H}(I, \theta; g)$ , которая является ее интегралом движения. Поскольку, по самому способу построения, канонические переменные  $I(t), \theta(t)$  совпадают при  $t = n$  с переменными отображения (I), функция  $\tilde{H}(I_n, \theta_n; g)$  является одновременно также интегралом этого отображения.

### III. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ СТАНДАРТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В качестве иллюстрации рассмотрим известное стандартное отображение /2/, для которого  $V(\theta) = -\cos \theta$ ,  $\omega_0(I) = I$ . Его фазовое пространство является поверхностью цилиндра, причем переменная  $I$  задает положение фазовой точки на образующей, а  $\theta$  - на окружности поперечного сечения. На рис. I показан фазовый портрет такого отображения при значении  $g = 0.5$  для 52 различных начальных значений  $I_0, \theta_0$ . Каждая точка соответствует паре переменных  $I_n, \theta_n$ , отвечающих определенному номеру итерации  $n$ . Полное число итераций для каждой пары начальных данных составляет  $(8+15) \cdot 10^3$ . Рис. I дает (в единицах  $2\pi$ ) развертку фазового цилиндра в интервале значений действия  $0 \leq I \leq 2\pi$ . Этого достаточно, поскольку структура фазового пространства стандартного отображения периодична по  $I$  с периодом  $2\pi$  /2/.

Для большинства начальных данных фазовые точки заполняют за большое число итераций непрерывные кривые (инвариантные кривые, см., например, /I/). Наряду с инвариантными кривыми имеется бесконечное счетное множество особых периодических траекторий, состоящих из дискретного набора неподвижных точек /I/. При движении по такой траектории фазовая точка воз-

вращается после конечного числа  $N$  итераций (периода) в исходное положение. На рис.1 хорошо видны положения устойчивых неподвижных (резонансных) точек траекторий с периодами  $N = 1, 2, 3$ . Эти точки окружены замкнутыми инвариантными кривыми, вдоль которых фаза  $\theta$  меняется в ограниченных пределах. Кроме того, заметны и резонансы с большими периодами. Наконец, ясно видна небольшая область нерегулярного (стохастического) движения, соответствующая разрушенной сепаратрисе целого резонанса ( $N=1$ ). Наличие областей фазового пространства, заполненных гладкими фазовыми траекториями, свидетельствует о возможности построения для этих областей приближенного интеграла движения.

#### IV. ДВИЖЕНИЕ ВБЛИЗИ ЦЕЛОГО РЕЗОНАНСА

Чтобы найти явный вид интеграла квазиэнергии  $\tilde{H}$  в некоторой точке  $I, \theta$ , подействуем обеими частями (4) на функцию  $\exp(+izI + im\theta)$  с некоторыми свободными параметрами  $z$  и  $m$ . Учитывая их произвольность, нетрудно показать, что для выполнения условия (4) нужно, чтобы  $\tilde{H}$  удовлетворяло уравнениям:

$$\begin{cases} \int_0^1 dt \exp(it \hat{L}(\tilde{H})) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} = g \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \int_0^1 dt \exp(it \hat{L}(\tilde{H})) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I} = \omega \cdot (I - g \frac{\partial V}{\partial I}) \end{cases} \quad (5)$$

В частности, для стандартного отображения правые части в (5) равны  $g \sin \theta$  и  $I - g \sin \theta$  соответственно. Отметим, что слева в (5) стоят проинтегрированные по периоду  $N=1$  обобщенные силы, соответствующие гамильтониану  $\tilde{H}$ . Интегрирование ведется вдоль той траектории движения, которая выходит в момент  $t=0$  из точки  $I, \theta$ . Правые части (5) совпадают с правыми частями исходного отображения (1). Это означает, что интегрально действие сил в консервативной системе с гамильтонианом  $\tilde{H}$  в точности соответствует правым частям в (1).

В случае стандартного отображения функцию  $\tilde{H}$  можно представить в виде

$$\tilde{H}(I, \theta; g) = \frac{1}{2} I^2 + g \tilde{V}(I, \theta; g). \quad (6)$$

Чтобы найти функцию  $\tilde{V}$ , разложим ее в ряд по параметру возмущения  $g$ :

$$\tilde{V}(I, \theta; g) = \tilde{V}_0(I, \theta) + g \tilde{V}_1(I, \theta) + g^2 \tilde{V}_2(I, \theta) + \dots \quad (7)$$

Учитывая периодичность  $\tilde{V}$  по  $\theta$ , получим /10/ с помощью (5):

$$\tilde{V}_0(I, \theta) = -\frac{\frac{1}{2} I}{\sin \frac{1}{2} I} \cos(\theta - \frac{1}{2} I) \quad (8)$$

$$\tilde{V}_1(I, \theta) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} I - \sin \frac{1}{2} I}{\sin^3 \frac{1}{2} I} + \frac{1}{2} \frac{I - \sin I}{\sin I \sin^2 \frac{1}{2} I} \cos 2(\theta - \frac{1}{2} I) \right] \quad (9)$$

Вычисление функции  $\tilde{V}_2$  и последующих членов в разложении (7) производится тем же способом, однако, вычислительные трудности быстро возрастают с увеличением порядка приближения.

Все функции  $\tilde{V}_n$  имеют особенности в точках целых резонансов  $I_\ell = 2\pi\ell$  ( $\ell$  - целое). Исключение составляет лишь точка  $I=0$ . Рассмотрим поэтому сначала движение вблизи этой точки. Ограничимся пока только членом первого порядка (8). На рис.2 (нижняя половина) показаны кривые  $\tilde{H}(I, \theta; g) = \tilde{H}(I, \theta; g) = \text{const}$ , вычисленные в этом приближении для тех же начальных данных, что и на рис.1. Видно довольно хорошее качественное соответствие интегральных кривых всюду за исключением областей резонансов с  $N=2;3$ , а также узкого слоя стохастического движения. Следует все же отметить, что расположение стохастического слоя тоже хорошо описывается сепаратрисой целого резонанса, хотя само стохастическое движение и не может быть передано правильным образом ни в каком конечном порядке. Кроме того, положение неподвижных точек траекторий с периодом  $N \geq 2$  также неплохо передается кривыми рис.2.

С приближением к линии  $I = 2\pi$  отклонение интегральных кривых рассматриваемого приближения от истинных резко нарастает в силу влияния указанной выше особенности, так что это приближение теряет справедливость.

В работе /10/ показано, что правильное выражение для  $\tilde{H}$  вблизи любого целого резонанса с номером  $l \neq 0$  получается заменой  $I \rightarrow I - 2\pi l$ , после чего сингулярность в точке

$I = 2\pi l$  исчезает. В верхней части рис.2 изображены полученные таким образом интегральные кривые движения вблизи резонанса  $l = 1$ . Видно, что верхние и нижние интегральные кривые в области  $I \approx \pi$  достаточно плавно переходят друг в друга. Тем не менее эти кривые не совпадают тождественно, что является одним из проявлений разрыва в интеграле квазиэнергии, который возникает в результате устранения сингулярности в точке  $I = 2\pi$ .

В самом деле, в рассматриваемом порядке по  $g$  гамильтониан, описывающий движение около резонанса  $l = 0$ , около линии  $I = \pi$  имеет, с точностью до несущественного постоянного слагаемого, вид

$$\tilde{H}_{l=0} = -\pi \left[ \eta + \frac{1}{2} g \frac{\sin(\theta + \frac{1}{2}\eta)}{\cos \frac{1}{2}\eta} \right] + \frac{1}{2} \eta^2 + g \frac{\frac{1}{2}\eta}{\cos \frac{1}{2}\eta} \sin(\theta + \frac{1}{2}\eta), \quad (10)$$

где мы положили  $I = \pi - \eta$ . В то же время гамильтониан, отвечающий резонансу  $l = 1$ , равен

$$\tilde{H}_{l=1} = \pi \left[ \eta + \frac{1}{2} g \frac{\sin(\theta + \frac{1}{2}\eta)}{\cos \frac{1}{2}\eta} \right] + \frac{1}{2} \eta^2 + g \frac{\frac{1}{2}\eta}{\cos \frac{1}{2}\eta} \sin(\theta + \frac{1}{2}\eta) \quad (11)$$

и не совпадает с (10). Характерные значения  $\eta$  в (10), (11) определяются размером области лежащего при  $\eta \approx \pi$  полуцелого резонанса, которая имеет порядок  $g/2$  (см. также ниже). Поэтому последние два члена в этих выражениях  $\sim g^2$  и их влияние на форму интегральных кривых в этой области относительно мало. Что касается членов первого порядка, то они отличаются лишь знаком. Мы видим, что различие в форме фазовых кривых, соответствующих двум соседним целым резонансам, имеет в этой области второй порядок малости по  $g$ . При этом, однако, в силу отличия (10) и (11) в знаках, эти кривые в процессе движения проходятся фазовой точкой в противоположных направлениях.

В итоге, мы получаем с линейной точностью по  $g$  описание всего фазового пространства стандартного отображения. Такое описание соответствует учету лишь целых резонансов. Для "разрешения" других резонансов принятой линейной точности недостаточно.

Сравним теперь наши результаты с теми, которые получаются обычно используемым методом усреднения (см., например, /1/). Этот метод вместо (6,8) приводит вблизи целых резонансов к гамильтониану физического маятника.

$$\tilde{H}^{(4\pi)}(I, \theta; g) = \frac{1}{2} I^2 - g \cos \theta. \quad (12)$$

Как и выше, действие  $I$  следует брать по модулю  $2\pi$ . На рис.3 приведены интегральные кривые гамильтониана (12), построенные около резонансов  $l = 0; 1$ . Основное отличие от рис.2 состоит в отсутствии перекоса интегральных кривых, приводящего к асимметрии относительно линии  $\theta = 0$ . Он обусловлен сдвигом в (8) фазы  $\theta$  на величину  $I/2$ . Вблизи линии  $I = \pi$  функции  $|\tilde{H}^{(4\pi)}|$ , относящиеся к соседним резонансам, отличаются уже членами первого порядка по  $g$ . Поэтому соответствующие интегральные кривые пересекаются вблизи этой линии друг с другом.

При  $g = g_{cr} = \frac{\pi^2}{4} \approx 2.47$  происходит касание сепаратрис в точке  $I = \pi$ ,  $\theta = 0$ , а инвариантные кривые с неограниченным изменением фазы исчезают, что служит грубым критерием возникновения глобальной стохастической неустойчивости (критерий Чирикова /2/). Как показывает рис.2, касание сепаратрис в приближении (8) если и происходит, то лишь при очень больших значениях  $g$ , когда это приближение заведомо теряет справедливость. Поэтому в качестве критерия глобальной неустойчивости правильнее принять условие касания сепаратрисами целых резонансов линии  $I = \pi$ , поскольку на ней лежат точки неучтенного полуцелого резонанса, существенно меняющего структуру этой части фазового пространства. Это дает для  $g_{cr}$  значение  $\pi^2/(\pi+2) \approx 1.92$ , что мало отличается от вышеприведенного значения. Отличие обусловлено только амплитудным множителем  $\frac{1}{2} I / \sin \frac{1}{2} I$  в выражении (8).

Рассмотрим теперь влияние поправки второго порядка (9). Фазовый портрет системы с ее учетом приведен на рис.4. На дос-

таточном удалении от линии  $I = \bar{\Gamma}$  согласие с точным численным решением отображения улучшается.

В таблице I приведены данные, иллюстрирующие точность сохранения квазиэнергии  $\tilde{H}$  при движении вдоль истинных траекторий стандартного отображения, полученных численным путем.

Для различных начальных данных  $I_0, \theta_0$  (выраженных в единицах  $2\pi$ ) указано среднеквадратичное отклонение величины  $\tilde{H}$  на истинных траекториях отображения (I), выходящих из этих точек. Усреднение проводилось примерно на  $10^3$  шагах отображения по формуле  $\langle \Delta \tilde{H} \rangle = \sqrt{\langle (\tilde{H} - \langle \tilde{H} \rangle)^2 \rangle}$ . Мы не приводим среднего значения самой величины  $\tilde{H}$ , поскольку она определена лишь с точностью до постоянного слагаемого. Сравнение третьего и четвертого столбцов таблицы I показывает, что первое приближение предлагаемого в этой работе метода дает на порядок лучше результаты, чем обычный метод усреднения. Последний столбец демонстрирует влияние поправки второго приближения. Примечательно, что, несмотря на кажущуюся близость интегральных кривых рис. 2, 4 (за исключением некоторой области вблизи  $I = \bar{\Gamma}$ ) точность сохранения квазиэнергии значительно улучшается.

В то же время из таблицы I видно, что, начиная с некоторых значений  $I$ , достаточно близких к  $\bar{\Gamma}$ , учет поправки  $\sim g^2$  лишь ухудшает результат, так что выражение (9) перестает быть справедливым в этой области. Причина состоит в том, что функция  $\tilde{V}_1$  имеет на линии  $I = \bar{\Gamma}$  сингулярность. Ее появление обусловлено полуцелым резонансом.

#### У. ПОЛУЦЕЛЫЙ РЕЗОНАНС

Для получения интеграла квазиэнергии в окрестности полуцелого резонанса необходимо устранить особенность на линии  $I = \bar{\Gamma}$ . Метод, позволяющий это сделать, описан в работе /10/ и основан на том обстоятельстве, что характер движения около этой линии определяется близостью периодической траектории с периодом  $N = 2$ , инвариантной относительно унитарного преобразования  $\hat{U}^2$  (см. (3)). В результате оказывается, что интеграл квазиэнергии определяется теперь вместо соотношений (5) аналогичными соотношениями:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} dt \exp(it \hat{L}(\tilde{H})) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} = g [\sin \theta - \sin(\theta + \gamma) - g \sin \theta] \\ \int_0^{2\pi} dt \exp(it \hat{L}(\tilde{H})) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I} = 2(\gamma - g \sin \theta) + g \sin(\theta + \gamma) - g \sin \theta. \end{cases} \quad (I3)$$

Правые части (I3) совпадают с правыми частями отображения, полученного двукратным повторением стандартного отображения. Соотношения (5) и (I3) очевидным образом обобщаются на движение в окрестности периодической траектории с любым  $N$ . Уравнения (I3) дают с квадратичной точностью по  $g$  /10/:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\gamma, \theta; g) = & \frac{1}{2} \gamma^2 + g \frac{\frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \gamma} \sin(\theta + \frac{1}{2} \gamma) + \\ & + \frac{1}{8} g^2 \left[ \frac{\frac{1}{2} \gamma \sin \frac{1}{2} \gamma + \cos \frac{1}{2} \gamma}{\cos^3 \frac{1}{2} \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\gamma + \sin \gamma}{\sin \gamma \cos^2 \frac{1}{2} \gamma} \cos 2(\theta + \frac{1}{2} \gamma) \right], \end{aligned} \quad (I4)$$

где, как и в (10), (11), принято:  $\gamma = \bar{\Gamma} - I$ . Новое выражение для поправки второго порядка не имеет уже особенности при  $I = \bar{\Gamma}$  ( $\gamma = 0$ ) и, в отличие от (9), дает правильное описание движения в окрестности полуцелого резонанса. На рис. 5 представлены кривые  $\tilde{H}(I, \theta; g) = \tilde{H}(I, \theta; g)$ , полученные с помощью (I4). Видно хорошее соответствие с точными фазовыми траекториями рис. I во всей области полуцелого резонанса. В свою очередь, сравнение рисунков 4 и 5 показывает, что между целым и полуцелым резонансами имеется область фазовой плоскости, где описание движения с помощью формул (6), (8), (9) с одной стороны и формулы (I4) — с другой согласуются друг с другом. Интегральные кривые  $\tilde{H} = \text{const}$  в этой области с хорошей точностью совпадают на обоих рисунках. Однако, с дальнейшим увеличением расстояния от полуцелого резонанса выражение (I4) теряет справедливость из-за сингулярностей при  $\gamma = \pm \pi$ , т.е. на линиях, где лежат целые резонансы  $l = 0; 1$ . По этой причине на рис. 5 интегральные кривые в окрестности этих резонансов отсутствуют.

Таблица 2 количественно демонстрирует степень совместности обоих описаний в промежуточной области, а также точность сохранения квазиэнергии (I4) вблизи полуцелого резонанса. Как и в таблице I, приводится среднеквадратичное отклоне-

ние  $\tilde{H}$  при движении вдоль истинной траектории стандартного отображения. Из приведенных данных следует, что оба выражения для  $\tilde{H}$  имеют примерно одинаковую точность при  $I_0 \approx 2\pi/3$ . При меньших  $I_0$  более высокую точность дают формулы предыдущего раздела, а при больших — выражение (I4).

На рис.6 показано совмещенное описание целого и полуцелого резонансов с квадратичной точностью по параметру возмущения  $g$ . Переход от интегральных кривых рис.4 к кривым рис.5 производился на траектории с начальными данными  $\theta_0 = -\pi, I_0 = \frac{2\pi}{3}$ .

В верхней части рисунка такое совмещение не производилось, так что интегральные кривые здесь совпадают с кривыми рис.5. Как и в случае двух соседних целых резонансов (см. предыдущий раздел), интегральные кривые, относящиеся к целому и полуцелому резонансам в промежуточной области  $I_0 \approx 2\pi/3$  хотя и подобны, но не тождественны. Их отличие, обусловленное несовпадением аналитических выражений для  $\tilde{H}$ , объясняется влиянием резонанса третьей гармоники с  $N = 3$ . Этот резонанс лежит вблизи траектории с  $\theta_0 = -\pi, I_0 = 2\pi/3$  (см. рис.1) и описывается членами третьего порядка по  $g$ . Строго говоря, неподвижные точки траектории с периодом  $N = 3$  лежат не на прямой  $I = 2\pi/3$ , а на интегральной кривой  $\Omega_2(I, \theta; g) = 2\pi/3$ , расположенной в области перекрытия /10/. Функция  $\Omega_2$  является частотой движения на траекториях рис.6 и зависит от канонических переменных  $I, \theta$  только через  $\tilde{H}$ . Одним из проявлений этого обстоятельства является отталкивание более слабого (в данном случае третьего) резонанса более сильным (первым), замеченное впервые в работе /12/ (см. также /4,13/). Наилучшим выбором для линии разрыва является именно эта траектория, однако с квадратичной точностью по  $g$  включительно для линии разрыва подходит любая траектория, лежащая в области, занимаемой сепаратрисой неучтенного в этом порядке резонанса третьей гармоники.

Сравнение рис.1 и 6 показывает, что уже на первых двух шагах вычислений  $\tilde{H}$  удается достигнуть весьма хорошего совпадения траекторий на всей фазовой поверхности за исключением области третьего резонанса, где остаются заметные различия. Для их устранения следует учесть члены третьего порядка, что позволит ликвидировать разрыв  $\tilde{H}$  и описать движение внутри сепаратрисы этого резонанса. В свою очередь, на

этом шаге возникнут разрывы, обусловленные влиянием следующих резонансов, которые при данном масштабе рисунков неразличимы. Повторяя описанную процедуру вблизи новых резонансов, можно таким образом получить описание фазовых траекторий с любой желаемой степенью точности. При этом вблизи каждого из уже учтенных резонансов имеется свое выражение для  $\tilde{H}$ , а совмещение происходит на тех интегральных кривых, на которых лежат неподвижные точки резонансов следующего приближения. Влияние этих резонансов и является физической причиной появления разрывов  $\tilde{H}$ .

## VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый в этой работе метод дает эффективный способ построения интегралов движения канонических отображений. В отличие от обычно используемого метода усреднения, игнорирующего влияние на данный резонанс всех остальных резонансов, разработанный подход позволяет учесть это влияние с любой наперед заданной точностью. Взаимное влияние резонансов друг на друга оказывается несимметричным. Более слабые резонансы вне их сепаратрис лишь относительно слабо искажают интегральные кривые, относящиеся к более сильным резонансам. С другой стороны, более сильные резонансы определяют положение более слабых на фазовой поверхности в том смысле, что слабые резонансы лежат на интегральных кривых более сильных резонансов предыдущего приближения. Общее доказательство этого утверждения содержится в работе /10/. Качественными проявлениями взаимодействия резонансов являются, в частности, перекос сепаратрис резонансов (см. рис.1) и "отталкивание" центров резонансов различных гармоник.

Существование бесконечной иерархии резонансов исходного отображения приводит к отсутствию глобального интеграла движения типа интеграла энергии консервативной системы. Интеграл квазиэнергии является локальным и его можно построить в виде регулярной функции только в некоторой окрестности заданного резонанса. Поскольку в окрестностях разных резонансов эти функции различны, совместное описание резонансов возможно лишь с помощью разрывной функции квазиэнергии  $\tilde{H}$ . Тем не менее, при достаточно малых значениях константы возмущения  $g$  в любом заданном порядке между соседними ре-

зонансами имеется область, где интегральные кривые, относящиеся к этим резонансам, отличаются друг от друга лишь членами более высокого порядка малости. В этой области лежит интегральная кривая, на которой расположены центры резонанса следующего порядка. Ширина указанной области определяется размером его сепаратрисы. Следовательно, разрыв  $H$  в фиксированном порядке по  $g$  обусловлен влиянием резонанса, структура которого в выбранном порядке еще не "разрешается". Учет членов следующего порядка "разрешает" этот резонанс, устраняя тем самым разрыв. Вместо этого появляются разрывы на линиях, где лежат резонансы еще более высоких гармоник и т.д. "Разрешение" каждого последующего резонанса ликвидирует одну, но зато вносит две другие линии разрыва. Таким образом в любом конечном порядке по  $g$  разрывы  $H$  находятся на линиях, где лежат центры резонансов следующего приближения. Ассоциации, которые вызывает картина вращающихся вблизи резонансов фазовых точек ("вихрей"), разделенных "линиями разрывов", вдоль которых расположены "вихри" более мелкого масштаба, порождают искушение назвать эту картину "турбулентностью фазового потока". Такая аналогия уже ранее отмечалась в работе /17/.

Приведенные здесь соображения отвергают возможность единого аналитического описания всех резонансов вплоть до некоторого заданного порядка. На первый взгляд такую возможность дает метод ДИТ, предложенный в /14/ (см. также /15,1,16/). Следуя оригинальной работе /14/, легко, например построить с линейной точностью по  $g$  аналитический интеграл движения, дающий фазовые кривые с учетом только целых резонансов. Однако вместо характерной для стандартного отображения периодичности по  $I$  с периодом  $2\pi$ , этот интеграл имеет период  $4\pi$ . Можно увидеть (ср. с обсуждением, следующим за формулами (10-11)), что это приводит к тому, что в промежуточной области между сепаратрисами направления движения фазовых точек вдоль траекторий, принадлежащих соседним резонансам, совпадают. Поэтому эти траектории совмещаются без разрывов интеграла движения. Восстановление правильной периодичности меняет направление движения фазовой точки в области каждого резонанса с нечетным  $l$  и, одновременно с этим, вносит разрывы интеграла движения в областях, лежащих между сепаратрисами соседних резонансов. Нетрудно показать после

этого /10/, что такой интеграл является некоторой функцией  $f(H)$  интеграла квазиэнергии (6), (8).

Выбор функции  $f(H)$  зависит в методе ДИТ от числа удерживаемых членов разложения по  $g$ . Кроме интеграла первого порядка В.В.Вечеславовым получены также ДИТ-интегралы с квадратичной и кубичной точностью по  $g$ , которые не имеют особенностей на фазовой плоскости. Однако, каждый из них достаточно хорошо описывает лишь движение около резонанса одной фиксированной гармоники. Так, ДИТ-интеграл второго порядка не обеспечивает даже качественного согласия с рис.1 в области целого резонанса, а интеграл третьего порядка приводит к качественным несоответствиям в окрестностях резонансов первой и второй гармоник. Для совместного описания резонансов всех трех гармоник необходимо поэтому использовать вблизи каждого резонанса свой ДИТ-интеграл и допустить разрывы в областях между их сепаратрисами.

В заключение отметим, что предлагаемый метод легко обобщается /10/ на квантовые отображения, исследовавшиеся, например, /7,18/.

Авторы благодарны В.В.Вечеславову, Б.В.Чирикову и Д.Л.Шепелянскому за полезные обсуждения и Л.Ф.Хайло за помощь в проведении вычислений. Один из нас (В.В.С.) благодарен, кроме того, В.Ф.Дмитриеву и В.Б.Телицину за терпеливое наставничество при общении с ЭВМ.



Л и т е р а т у р а

- I. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. Москва, "Мир", 1984.
2. Chirikov B.V., Phys. Reports, 52 (1979) 265.
3. Мелехин В.Н. ЖЭТФ, 68 (1975) 1601.
4. Чириков Б.В. Динамика частиц в магнитных ловушках. - Вопросы теории плазмы, вып.13, - М.: Энергоиздат, 1983.
5. Izrailev F.M., Physica 1D (1980) 243.
6. Заславский Г.М., Чириков Б.В., УФН, 105 (1971) 3.
7. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем, М. "Наука" 1984.
8. Богомольный Е.Б. ЯФ, 37 (1983) 444.
9. Богомольный Е.Б. ЖЭТФ, 86 (1984) 1569.
10. Соколов В.В. Интеграл квазиэнергии канонических отображений. Препринт № 85-31, ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 1985.
- II. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М. "Мир", 1978.
12. Escande D.F. Primary resonances do not overlap. -In: Intrinsic stochasticity in plasma /Ed. by Laval G. and Gresillon D., Orsay Edition de Physique, 1979.
13. Escande D.F., Doveil F.J., J. Stat. Phys., 26, (1981)257.
14. Dunnet D.A., Laing E.W., Taylor J.B., Journ. Math. Phys. 9 (1968) 1819.
15. McNamara B.J., Math. Phys., 19 (1978) 2154.
16. Taylor J.B., Laing E.W., Phys. Rev. Lett., 35 (1975) 1306.
17. Teng L.C., IEEE Tran. Nucl. Sci. NS-20 (1973) 843.
18. Chirikov B.V., Izrailev F.M., Shepelyansky D.L., Soviet Sci. Rev. v. 2C, p. 209. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 80-210, Новосибирск, 1980.

Таблица I

| $\theta$ . | I.   | (12)                | (6-8)               | (6-9)               |
|------------|------|---------------------|---------------------|---------------------|
| -0.08      | 0.03 | $1.7 \cdot 10^{-2}$ | $1.9 \cdot 10^{-3}$ | $1.6 \cdot 10^{-4}$ |
| -0.33      | 0.03 | $1.4 \cdot 10^{-1}$ | $7.2 \cdot 10^{-3}$ | $1.5 \cdot 10^{-3}$ |
| -0.5       | 0.06 | $1.7 \cdot 10^{-1}$ | $9.3 \cdot 10^{-3}$ | $1.2 \cdot 10^{-3}$ |
| "          | 0.17 | $2.5 \cdot 10^{-1}$ | $1.2 \cdot 10^{-2}$ | $2.6 \cdot 10^{-3}$ |
| "          | 0.25 | $3.3 \cdot 10^{-1}$ | $1.7 \cdot 10^{-2}$ | $5.4 \cdot 10^{-3}$ |
| "          | 0.33 | $4.4 \cdot 10^{-1}$ | $3.0 \cdot 10^{-2}$ | $2.5 \cdot 10^{-2}$ |
| "          | 0.40 | $5.3 \cdot 10^{-1}$ | $4.9 \cdot 10^{-2}$ | $3.9 \cdot 10^{-2}$ |
| "          | 0.45 | $6.6 \cdot 10^{-1}$ | $1.5 \cdot 10^{-1}$ | 1.5                 |

Таблица 2

| $\theta$ . | I.    | $\eta$ . | (6-9)               | (14)                |
|------------|-------|----------|---------------------|---------------------|
| - 0.5      | 0.25  | 0.25     | $5.4 \cdot 10^{-3}$ | $2.6 \cdot 10^{-2}$ |
| "          | 0.33  | 0.17     | $2.5 \cdot 10^{-2}$ | $1.1 \cdot 10^{-2}$ |
| "          | 0.40  | 0.10     | $3.9 \cdot 10^{-2}$ | $3.1 \cdot 10^{-3}$ |
| "          | 0.45  | 0.05     | 1.5                 | $1.1 \cdot 10^{-3}$ |
| "          | 0.475 | 0.025    |                     | $2.7 \cdot 10^{-4}$ |
| "          | 0.492 | 0.008    |                     | $3.2 \cdot 10^{-5}$ |
| "          | 0.495 | 0.005    |                     | $1.2 \cdot 10^{-5}$ |

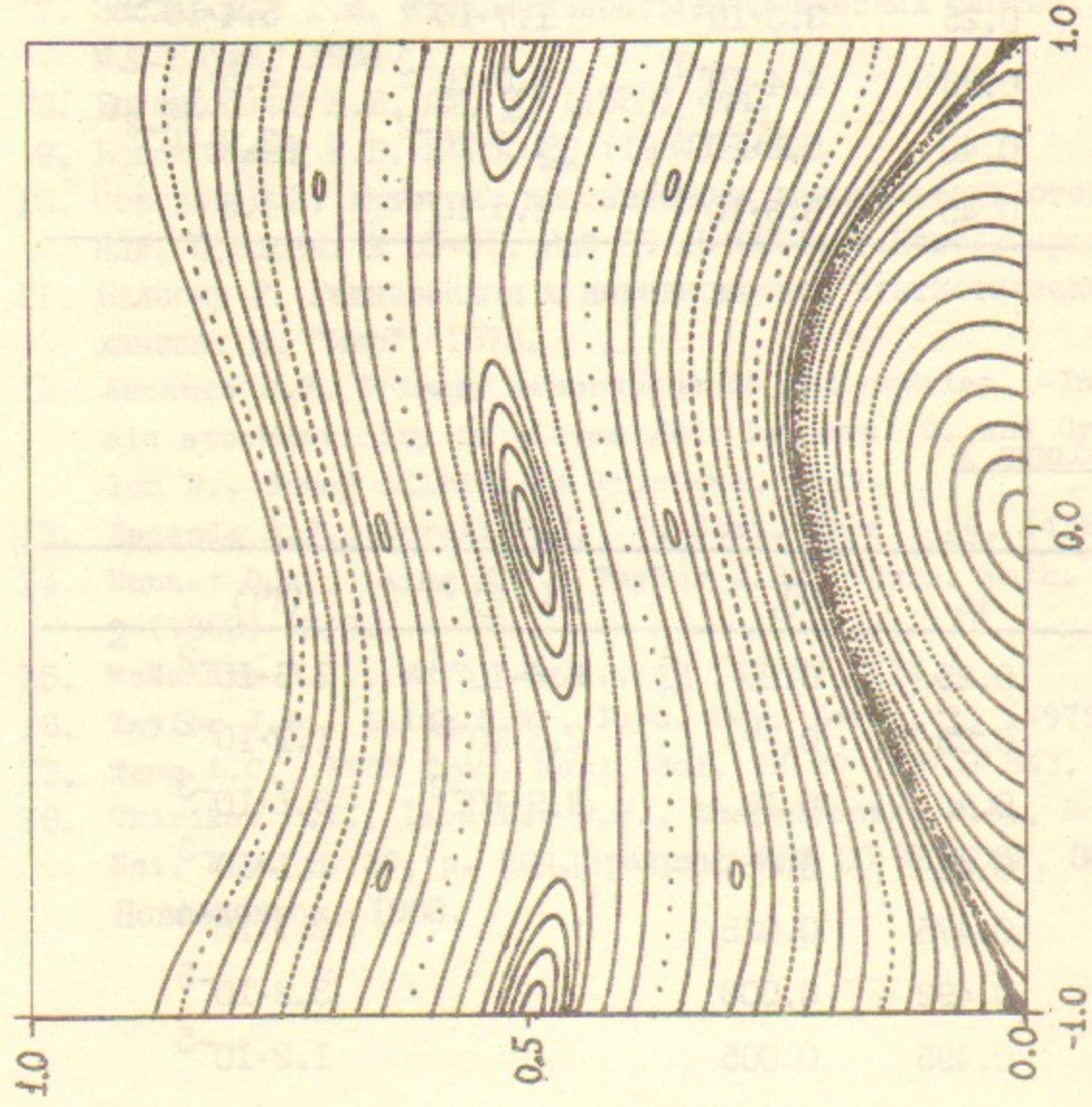


Рис.1. Фазовый портрет стандартного отображения (1) для  $\eta = 0.5$  с различными начальными данными  $\gamma_0, \theta_0$ .

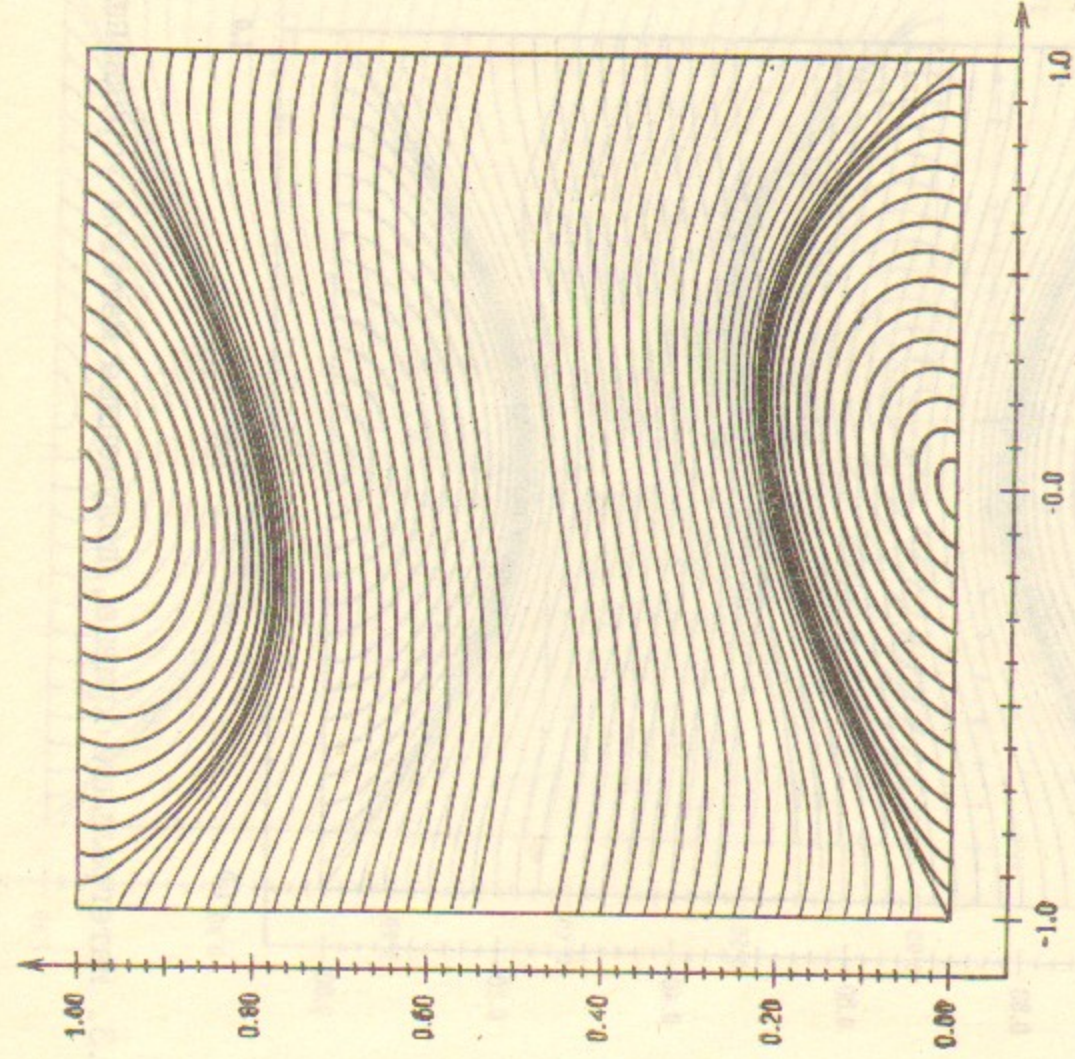


Рис.2. Интегральные кривые первого приближения (6-8) в окрестности целых резонансов  $\ell = 0$  и  $\ell = 1$ .

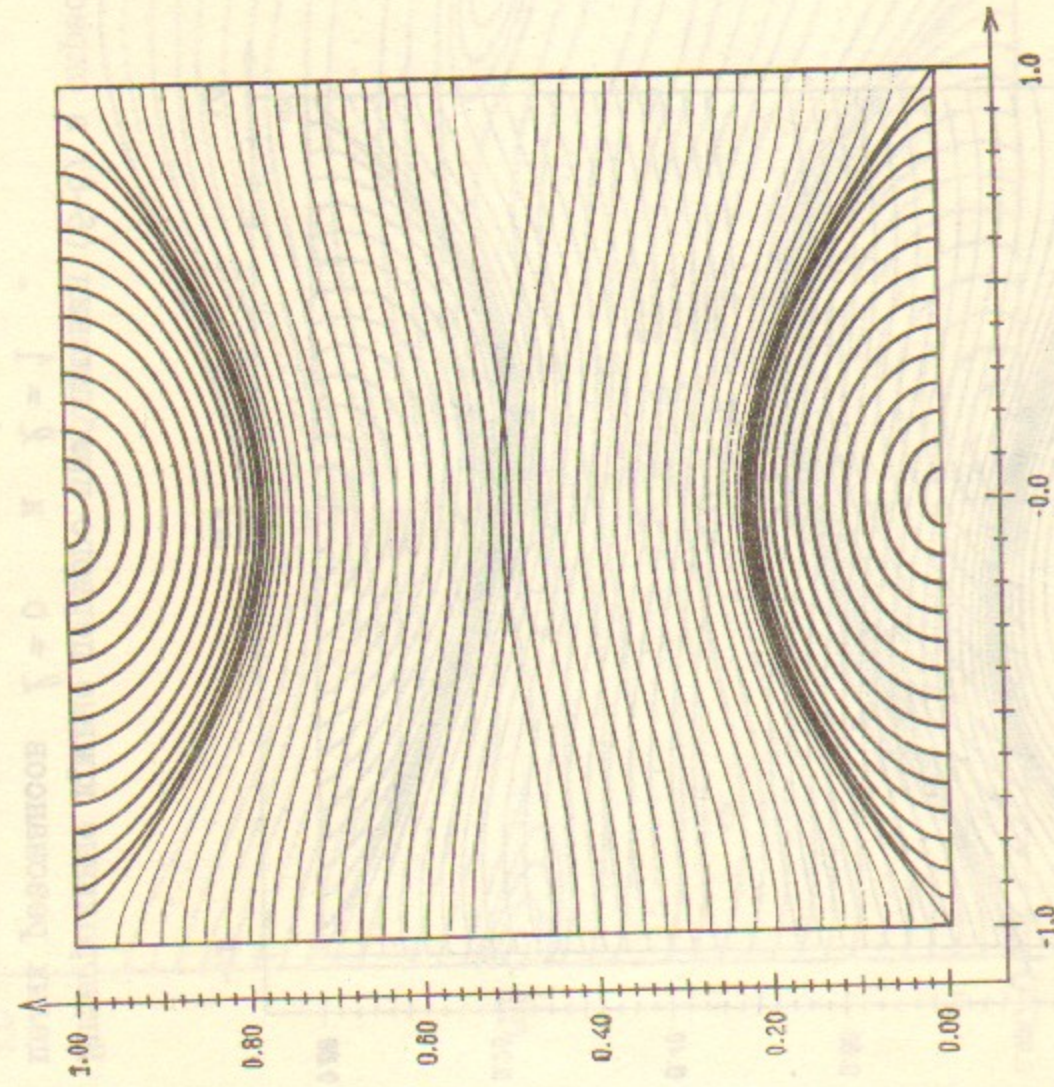


Рис. 3. Интегральные кривые, полученные методом усреднения (12).

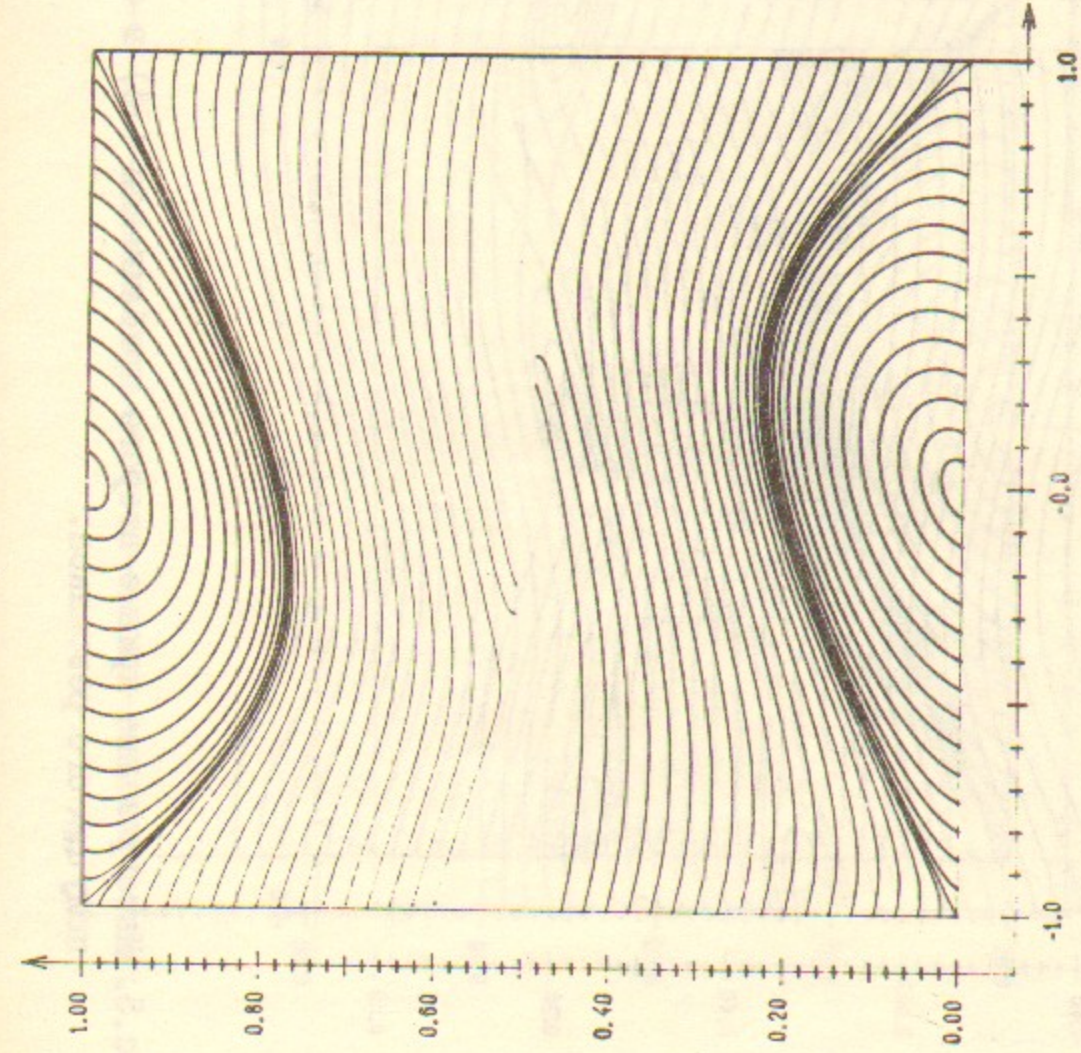


Рис. 4. Интегральные кривые второго приближения (6-9) в окрестности целых резонансов  $\ell = 0$  и  $\ell = 1$ .

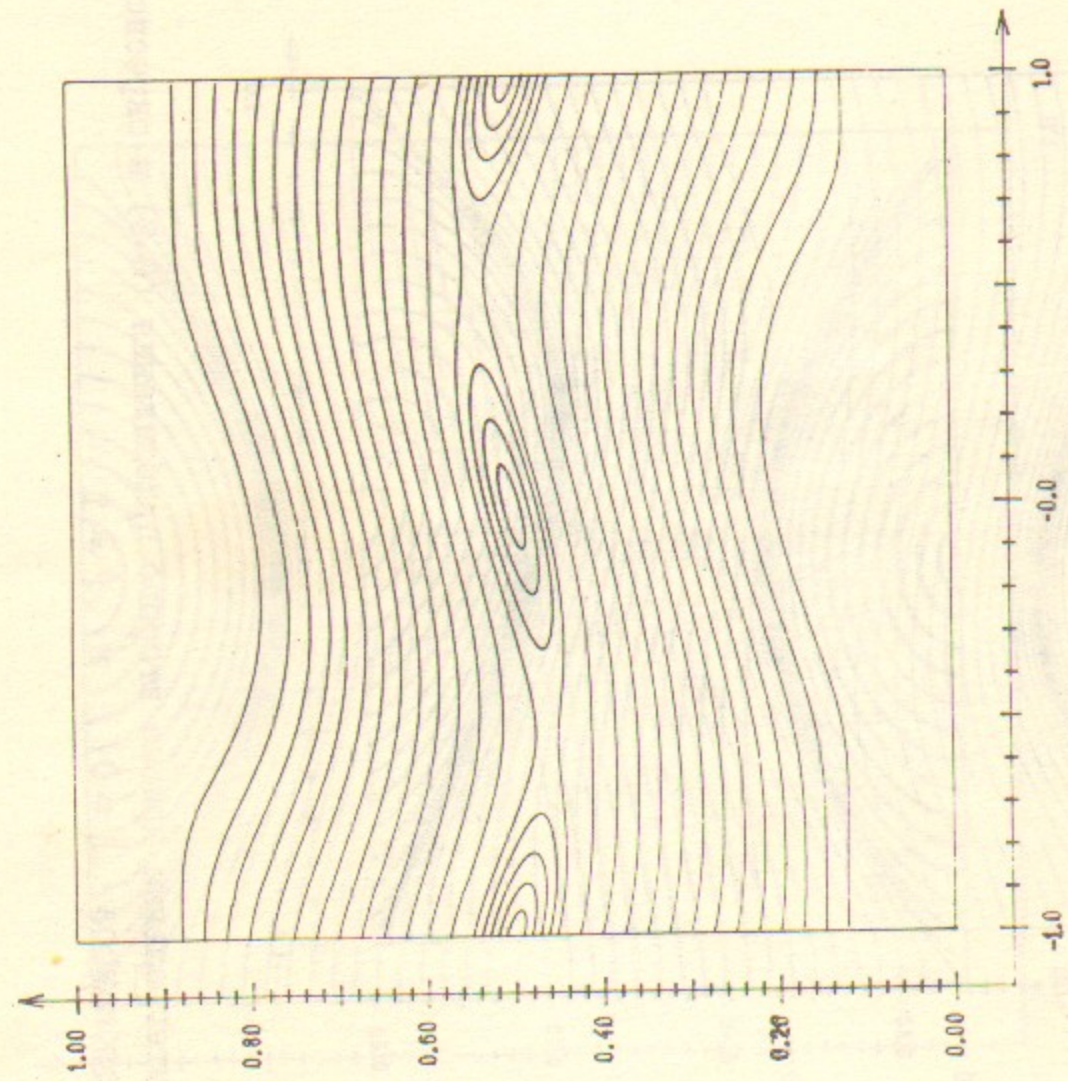


Рис.5. Интегральные кривые второго приближения (I4) в окрестности полуцелого резонанса.

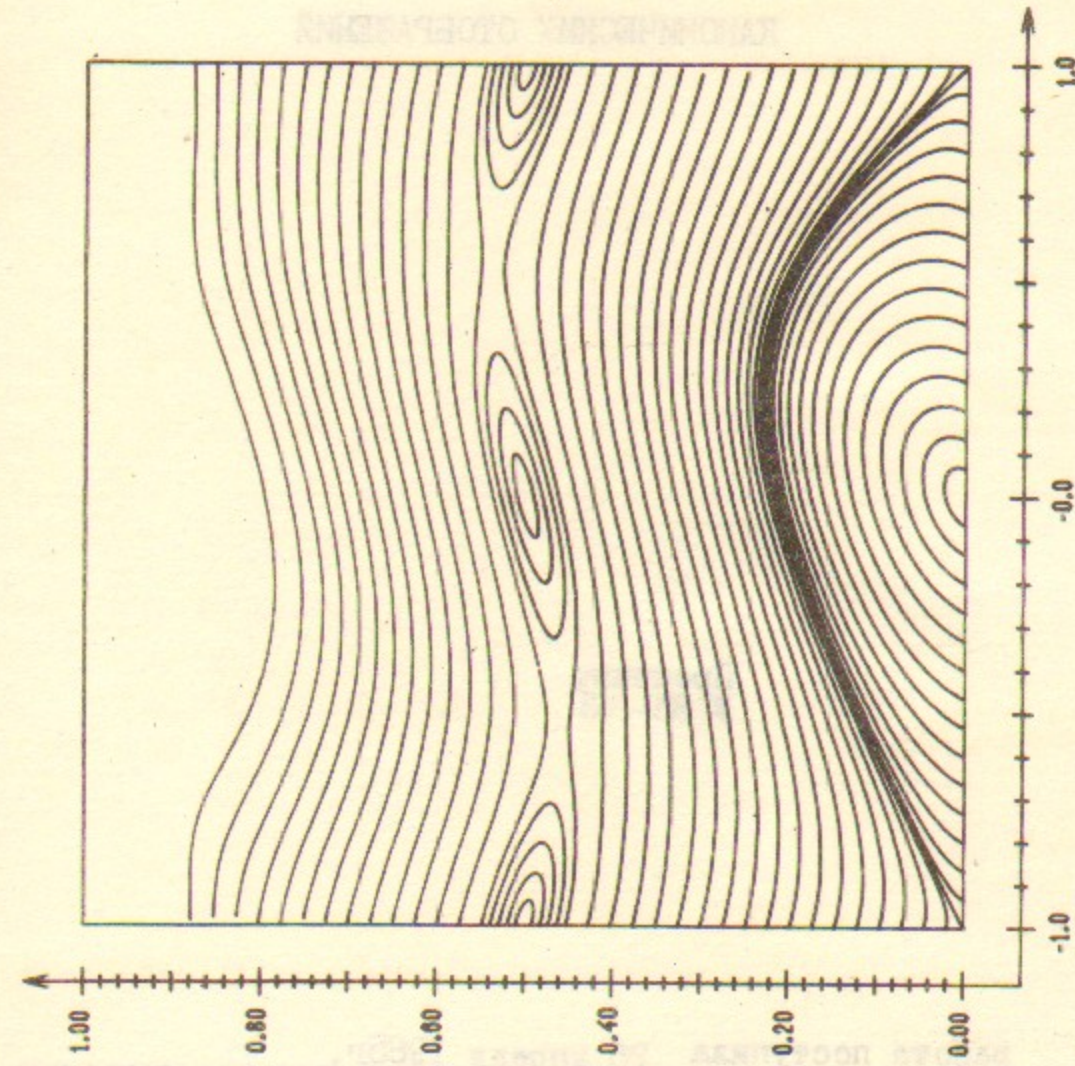


Рис.6. Совмещенные интегральные кривые второго приближения (рис.4-5) в окрестности полуцелого и целого ( $l = 0$ ) резонансов.

Ф.М.Израйлев, В.В.Соколов

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ КВАЗИЭНЕРГИИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ  
КАНОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ



Препринт  
№ 85-63

работа поступила 26 апреля 1985г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 12.05.85г. МН 05146

Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 63

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, '90