

36

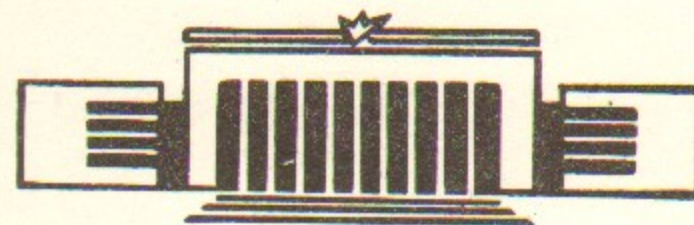


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

И.А. Котельников

О СТРУКТУРЕ СКАЧКОВ ПОТЕНЦИАЛА
В ТЕПЛОВОМ БАРЬЕРЕ
АМБИПОЛЯРНОЙ ЛОВУШКИ

ПРЕПРИНТ 85-58



НОВОСИБИРСК

ВВЕДЕНИЕ

Для улучшения продольного удержания плазмы в амбиполярных ловушках [1, 2] желательно увеличить высоту пиков электростатического потенциала в крайних пробкотронах, повысив там температуру электронов. Необходимые для этого дополнительные энергозатраты можно уменьшить, сформировав с обоих концов центрального пробкотрона «тепловые барьеры» [3]. Тепловой барьер представляет собой локальное понижение электростатического потенциала, которое служит потенциальным (или «тепловым») барьером для относительно холодных электронов центрального пробкотрона и препятствует их проникновению в крайний пробкотрон. В последних модификациях амбиполярной ловушки тепловые барьеры формируются непосредственно в крайних пробкотронах (см., например, [4, 5]). Понижение потенциала создается за счет удаления из крайнего пробкотрона захваченных холодных ионов, в результате чего плотность плазмы в нем оказывается меньше, чем в центральном пробкотроне. Кулоновские столкновения стремятся выравнять плотность плазмы по всей ловушке. Поэтому для стационарного функционирования теплового барьера захваченные ионы необходимо постоянно откачивать, например, с помощью перезарядки на пучке быстрых нейтральных атомов, инжектированных почти параллельно оси ловушки [3]. Чтобы повысить глубину $\Delta\phi_B$ теплового барьера (см. рис. 1) вблизи минимума магнитного поля в крайнем пробкотроне с помощью циклотронного нагрева создается популяция очень горячих анизотропных электронов. Популяция менее горячих («теплых») электронов создается в дальней от центра ловушки точке локального максимума плотности плещущихся ионов. В этой точке формируется пик электростатического потенциала.

Анализируя решение уравнения квазинейтральности, Л.С. Пеккер обнаружил, что распределение потенциала в тепловом барьере может иметь разрыв вблизи горлышка магнитной пробки [6]. Наличие разрыва было интерпретировано как появление скачка потенциала с шириной порядка нескольких дебаевских радиусов. Позднее на примере модельной функции распределения захваченных ионов были проанализированы [7] условия нарушения квазинейтральности в тепловом барьере. Как оказалось, если температуры электронов T_e и ионов T_i примерно равны, скачок потенциала возникает вблизи магнитной пробки, причем соответствующая его возникновению степень обеднения функции распределения захваченных ионов такова, что их плотность n_e в минимуме магнитного

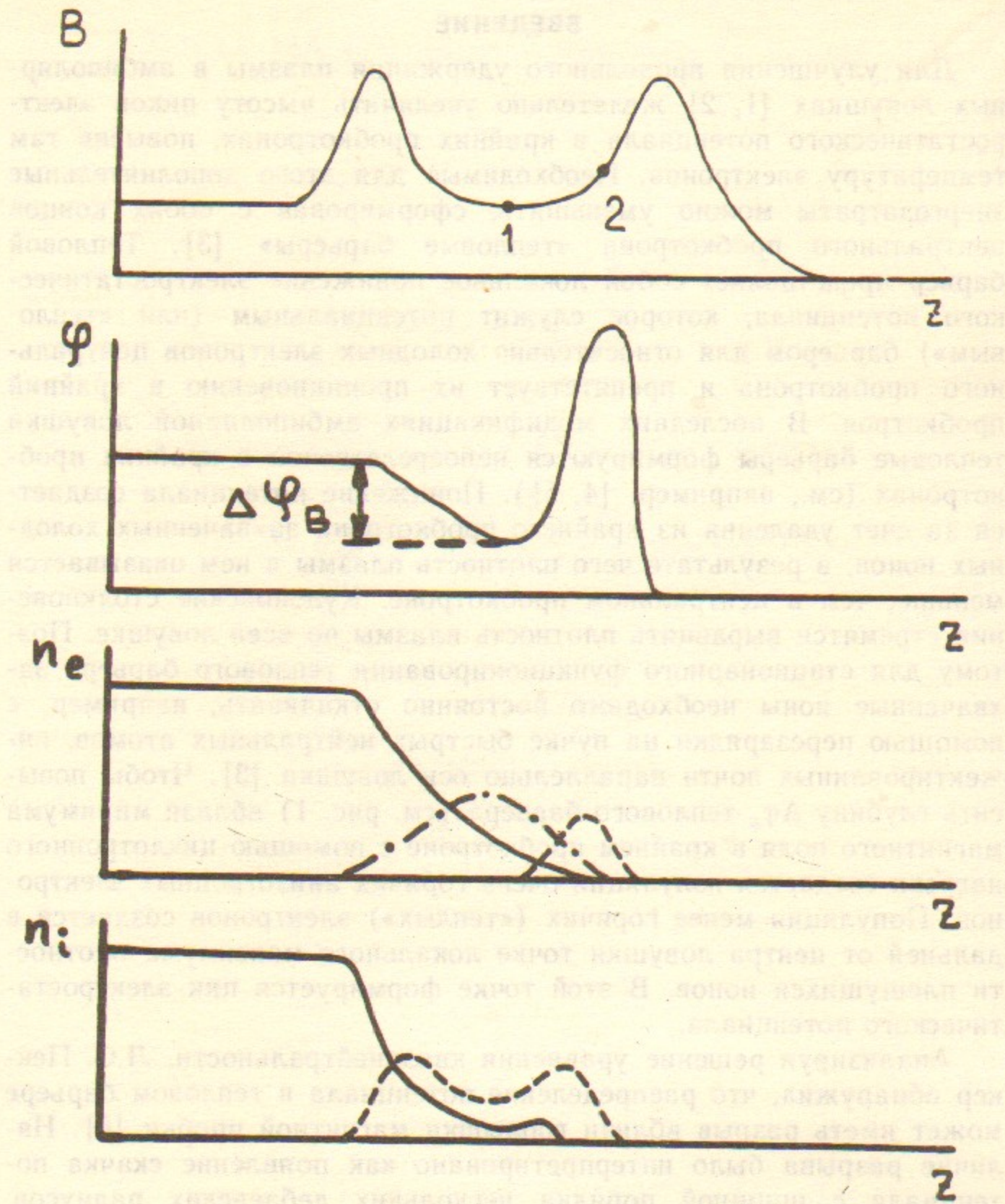


Рис. 1. Амбиполярная ловушка с тепловыми барьерами. Координата $z=0$ соответствует центру ловушки;

a—зависимость $B(z)$; в точках 1, 2 осуществляется циклотронный нагрев электронов; *b*—зависимость $\varphi(z)$; *в*—распределение плотности электронов: сплошная линия—холодных (с температурой T_{ec}), штрихпунктирная—горячих (T_{eh}); пунктирная—«теплых» (T_{ew}); $T_{ec} \ll T_{ew} \ll T_{eh}$; *г*—распределение плотности ионов: сплошная линия—холодных, пунктирная—плещущихся.

поля крайнего пробкотрона для типичных значений пробочного отношения $R \approx 3$ в 5—6 раз меньше плотности плазмы в центральном пробкотроне. При возрастании отношения температур T_e/T_i место возникновения скачка отодвигается от пробки, а критическое значение плотности n , захваченных ионов заметно увеличивается (см. [7]).

Поверхность скачка потенциала, вообще говоря, не ортогональна в каждой своей точке направлению магнитного поля. С другой стороны, в плазме с типичными для амбиполярной ловушки параметрами ширина скачка (составляющая несколько дебаевских длин) значительно меньше ларморовского радиуса ионов. Вследствие этого их магнитный момент μ не сохраняется. Величина изменения μ при однократном пролете иона через скачок зависит от фазы ларморовского вращения в момент пролета. Так как фазы последовательных пролетов нескоррелированы, это означает появление дополнительного механизма рассеяния ионов. На этот эффект было обращено внимание в работе [8].

Оценки скорости дополнительного рассеяния показывают, что при определенных условиях оно приводит к более быстрому, чем за счет только кулоновских столкновений, захвату ионов в тепловой барьер. Если скорость откачки захваченных ионов недостаточно велика, чтобы компенсировать, наряду с кулоновским, еще и дополнительное рассеяние, скачок потенциала должен исчезнуть. Но с его исчезновением выключается дополнительное рассеяние, а кулоновские столкновения при достаточно быстрой откачке не могут воспрепятствовать «вычищению» захваченных ионов. Поэтому следует ожидать, что в широком интервале значений скорости откачки ионов существует предшественник скачка потенциала, или предскачок, который представляет собой узкий квазинейтральный слой плазмы со сравнительно большим электрическим полем. Ширина слоя и электрическое поле устанавливаются такими, чтобы дополнительное рассеяние уравнивало откачку захваченных ионов. В настоящей работе найден профиль предскачка потенциала и получена замкнутая система уравнений, позволяющая найти его параметры и функцию распределения ионов с учетом эффекта дополнительного рассеяния. Получению указанной системы уравнений и ее исследованию посвящены первые три раздела.

Если плотность горячих анизотропных электронов достаточно велика, скачки потенциала могут возникнуть вблизи минимума магнитного поля¹⁾ (в точке 1 на рис.1). В отличие от случая, ког-

¹⁾ На эту возможность автору указали В.В. Мирнов и Д.Д. Рютов.

да они зарождаются вблизи горлышка магнитной пробки, в тепловом барьере с горячими электронами реализуется «жесткий режим» нарушения квазинейтральности, и, как показано в четвертом разделе, скачки потенциала возникают сразу с конечной (и большой) амплитудой. Их особенность заключается в своеобразном явлении гистерезиса: оказывается, что при одних и тех же параметрах плазмы могут существовать распределения потенциала как со скачками, так и без них. Какое из этих распределений реализуется, зависит от предыстории системы. Возможно также, что гистерезис потенциала в тепловом барьере является указанием на возникновение релаксационной неустойчивости при мощности нагрева анизотропных электронов, превышающей некоторое пороговое значение.

1. ПРЕДСКАЧОК ПОТЕНЦИАЛА

Пренебрегая многими осложнениями, которыми обросла идея теплового барьера [3], рассмотрим простейшую ситуацию, когда отсутствует циклотронный нагрев электронов вблизи минимума магнитного поля (в точке 1 на рис.1). Для простоты ограничимся также рассмотрением половины крайнего пробкотрона, противоположной той, в которой формируется пик потенциала.

Распределение потенциала φ в плазме, вообще говоря, следует находить из уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = 4\pi e(n_e - n_i), \quad (1.1)$$

где n_e, n_i — плотности электронов и ионов, соответственно. Однако в рассматриваемой задаче дебаевский радиус r_D примерно в 10^4 раз меньше всех характерных размеров L . Поэтому решение уравнения (1.1) с огромной точностью (порядка r_D^2/L^2) совпадает с решением уравнения квазинейтральности:

$$n_e = n_i. \quad (1.2)$$

Разумеется, это утверждение верно, если существует всюду непрерывная и однозначная ветвь решения уравнения (1.2) (см. ниже).

Так как время максвеллизации электронов очень мало, можно считать, что они распределены по закону Больцмана:

$$n_e = n_c \exp(e(\varphi - \varphi_c)/T_{ec}), \quad (1.3)$$

где T_{ec}, n_c, φ_c — соответственно температура электронов, плотность

и потенциал плазмы в центральном пробкотроне. Функция распределения ионов анизотропна, поэтому их плотность зависит как от φ , так и от напряженности магнитного поля B : $n_i = n_i(\varphi, B; \xi)$. Параметр ξ условно характеризует степень обеднения функции распределения захваченных ионов. Будем считать для определенности, что их число тем меньше, чем больше ξ .

Решение уравнения квазинейтральности $\varphi = \varphi(B; \xi)$ однозначное, если ξ меньше некоторого критического значения ξ_* . При $\xi > \xi_*$ на некотором интервале $B_1 < B < B_2$ функция $\varphi(B; \xi)$ становится трехзначной (см. [7] и рис. 2). Найдем ее вид, считая, что степень обеднения функции распределения захваченных ионов близка к той, при которой возникает скачок потенциала, т.е. $|\xi - \xi_*| \ll \xi_*$.

Пусть B_s есть предел, к которому стремятся B_1 и B_2 при $\xi \rightarrow \xi_* + 0$, а $\varphi_s \equiv \varphi(B_s; \xi_*)$. Возникновение трех корней уравнения (1.2) вместо одного означает, что при $\xi = \xi_*, B = B_s, \varphi = \varphi_s$ выполняются равенства:

$$n_e = n_i, \quad \frac{\partial n_e}{\partial \varphi} = \frac{\partial n_i}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 n_i}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Отсюда следует, что разложение разности $n_e - n_i$ вблизи φ_s, B_s может быть представлено в следующем виде:

$$n_e - n_i = n_s \left[\gamma + \alpha \Psi + \frac{\beta}{2} \Psi^2 + \frac{a}{6} \Psi^3 - bh \right], \quad (1.4)$$

где

$$n_s = n_c \exp(e(\varphi_s - \varphi_c)/T_{ec}), \quad h = B/B_s - 1, \quad \Psi = e(\varphi - \varphi_s)/T_{ec},$$

α, β, γ пропорциональны $\xi - \xi_*$, $a \sim b \sim 1$. Можно показать также, что a, b положительны. Переопределением B_s и φ_s можно при каждом фиксированном ξ добиться обращения в нуль коэффициентов β и γ . Переопределенные параметры φ_s и B_s (которые, как станет

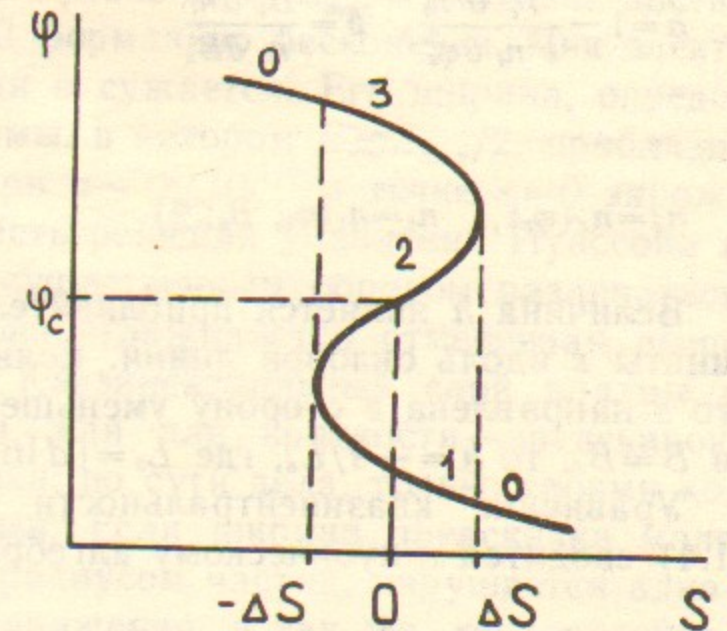


Рис.2. Решение уравнения квазинейтральности (1.7) при $a/a < 0$. Численные обозначения участков графика соответствуют нумерации ветвей Ψ_k решения ($k=0-3$).

ясно позже, являются значениями φ и B в точке максимума электрического поля), а также коэффициенты α , a , b определяются из уравнений:

$$n_e = n_i, \quad \alpha = 1 - \frac{\partial n_i}{\partial \varphi_s} / \frac{\partial n_e}{\partial \varphi_s}, \quad \frac{\partial^2 n_e}{\partial \varphi_s^2} = \frac{\partial^2 n_i}{\partial \varphi_s^2}, \quad (1.5)$$

$$a = 1 - \frac{T_e^3}{e^3 n_i} \frac{\partial^3 n_i}{\partial \varphi_s^3}, \quad b = \frac{B_s}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial B_s}, \quad (1.6)$$

где

$$n_e = n_e(\varphi_s), \quad n_i = n_i(\varphi_s, B_s; \xi).$$

Величина h является приблизительно линейной функцией координаты s вдоль силовой линии. Если принять для определенности, что s направлена в сторону уменьшения B и отсчитывается от точки $B = B_s$, то $h = -s/L_s$, где $L_s = |d \ln B / ds|_{B=B_s}^{-1}$.

Уравнение квазинейтральности (1.2) с учетом разложения (1.4) сводится к кубическому алгебраическому уравнению:

$$\frac{\alpha}{a} \Psi + \frac{1}{6} \Psi^3 + \frac{s}{3l} = 0, \quad (1.7)$$

где $l = aL_s/3b$. Свойства его решения при $\alpha < 0$ и $\alpha > 0$ (напомним, что a и b положительны) совершенно различны. В случае $\alpha < 0$ на интервале $|s| < \Delta s \equiv |2\alpha/a|^{3/2}l$ решение имеет три действительных ветви:

$$\Psi_k(s) = \left| \frac{8\alpha}{a} \right|^{1/2} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{s}{\Delta s} \right) + \frac{2\pi k}{3} \right), \quad (1.8)$$

$$k = 1, 2, 3,$$

а при $|s| > \Delta s$ оно единственно:

$$\Psi_0(s) = A_- - A_+, \quad A_{\pm} = \left\{ \left[\left(\frac{s}{l} \right)^2 + \left(\frac{2\alpha}{a} \right)^3 \right]^{1/2} \pm \frac{s}{l} \right\}^{1/3}. \quad (1.9)$$

Нетрудно видеть, что однозначное распределение потенциала возможно только с перескоком между ветвями Ψ_1 и Ψ_3 решения уравнения (1.7) (см. рис.2). Иными словами, при $\alpha < 0$ возникает дебаевский скачок. Чтобы найти местоположение скачка и профиль потенциала вблизи него, следует вернуться к уравнению Пуассона. Его решение получено в Приложении.

В противоположном случае $\alpha > 0$ решение уравнения (1.7)

единственно и описывается формулой (1.9) на всем интервале s . Плазма квазинейтральна, но электрическое поле

$$E = -\frac{T_{ec}}{e} \frac{\partial \Psi_0}{\partial s} = \frac{T_{ec}(A_+ + A_-)}{3el[(s/l)^2 + (2\alpha/a)^3]^{1/2}} \quad (1.10)$$

может быть очень большим. Его максимум $E_{\max} = T_{ec}a/3eal$ достигается в точке $s=0$ и при $\alpha=0$ формально бесконечен. Пик электрического поля при уменьшении α сужается. Его ширина, определяемая как толщина слоя плазмы, в котором $E \geq E_{\max}/2$, приблизительно равна $\Delta s = |2\alpha/a|^{3/2}l$. При $\alpha \sim (r_D/l)^{1/2}$ в точке $s=0$ зарождается дебаевский скачок, то есть решения уравнения Пуассона и квазинейтральности начинают существенным образом различаться (в решении уравнения Пуассона сглаживается отмеченная выше сингулярность в точке $s=0$). Квазинейтральный слой плазмы с большим электрическим полем, или для краткости—предскачок, отличается от дебаевского скачка, по сути дела, только своими количественными характеристиками. Если ширина предскачка мала по сравнению с ларморовским радиусом частиц, нарушается адиабатическая инвариантность их движения, и так же, как при появлении скачков потенциала, возникает дополнительное рассеяние, рассмотрению которого посвящен следующий раздел.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Ларморовский радиус электронов значительно меньше ионного радиуса, и для них эффект дополнительного рассеяния не столь существен, как для ионов. Поэтому ниже речь пойдет прежде всего о рассеянии ионов. Изменение магнитного момента иона при однократном пролете через предскачок зависит от фазы ларморовского вращения и пропорционально углу θ между направлениями электрического и магнитного полей. Величина θ может быть сравнительно большой, достигая значений порядка единицы на периферии плазмы (см. [9]). Вблизи оси ловушки, где функция распределения частиц, находящихся на разных силовых линиях, приблизительно одинакова, поверхность скачка практически совпадает с поверхностью постоянного пробочного отношения R , т.е. $B_s \simeq RB_{\max}$, где $R = \text{const}$, а B_{\max} —максимальное вдоль силовой линии магнитное поле. Если при этом крайний пробкотрон аксиально-симметричен, нетрудно показать, что $\theta \sim r/L_s$, где r —расстояние от оси ловушки, а масштаб L_s , введенный в предыдущем разделе,

может изменяться от величины порядка длины крайнего пробкотрона L до L^3/r^2 в зависимости от того, насколько далеко от поверхности $\partial B/\partial s=0$ расположен предскачок. Если имеется квадратная составляющая магнитного поля (достаточно большая, чтобы обеспечить МГД-устойчивость плазмы) порядок величины θ не зависит от расстояния до поверхности $\partial B/\partial s=0$, и приведенную выше оценку нужно заменить на следующую [8]: $\theta \sim r/L$.

Значения фазы ларморовского вращения при последовательных пролетах иона над предскачком нескоррелированы (см. [8]), поэтому процесс изменения магнитного момента является случайным и может быть описан с помощью уравнения Фоккера-Планка для функции распределения f_i , усредненной по периоду движения ионов вдоль магнитной силовой линии между точками отражения:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = St[f_i] - \nu f_i + \frac{\partial}{\partial \mu} D \frac{\partial f_i}{\partial \mu}. \quad (2.1)$$

Здесь St — оператор кулоновских столкновений, ν — скорость откачки (обратная ей величина, $1/\nu$, равна времени, за которое захваченный ион удаляется из теплового барьера). Последний член в (2.1) описывает дополнительное рассеяние. Он содержит дифференцирование только по μ , так как энергия частиц ϵ изменяется только в результате кулоновских столкновений. Коэффициент диффузии D определяется соотношением

$$D = \langle (\Delta\mu)^2 \rangle / 2\tau,$$

в котором угловыми скобками обозначено усреднение по фазе ларморовского вращения, а через $\Delta\mu$ — изменение магнитного момента за период τ движения иона вдоль силовой линии. Чтобы найти $\Delta\mu$, нужно проинтегрировать уравнение движения иона

$$\frac{dr}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m_i} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] + \frac{e}{m_i} \mathbf{E},$$

рассматривая как малое возмущение составляющую электрического поля $E_{\perp} \simeq \theta E$, перпендикулярную магнитному полю. В приближении $\theta=0$ магнитный момент сохраняется, а движение ведущего центра ларморовской орбиты вдоль силовой линии подчиняется уравнению

$$\frac{ds}{dt} = v_{\parallel}(s) = (2/m_i)^{1/2} (\mu_s B_s + e\varphi_s - \mu B - e\varphi)^{1/2},$$

где $\mu_s(\epsilon) \equiv (\epsilon - e\varphi_s)/B_s$ — значение магнитного момента, соответствующее остановке иона в точке максимума электрического поля. В следующем приближении по малому параметру θ возмущение E_{\perp}

можно считать заданной функцией времени $t = \int ds/v_{\parallel}$; нетрудно показать, что

$$D(\epsilon, \mu) = \frac{2e^2\theta^2\mu}{m_i B_s \tau} \left\langle \left[\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v_{\parallel}(s)} E(s) \cos \left(\int_{s_1}^s \frac{ds' eB(s')}{m_i c v_{\parallel}(s')} \right) \right]^2 \right\rangle, \quad (2.2)$$

где электрическое поле $E(s)$ найдено в предыдущем разделе (см. (1.10)), а интегрирование осуществляется по силовой линии между точками остановки иона s_1, s_2 . Как следствие нескоррелированности фаз ларморовского вращения в моменты последовательных пролетов через предскачок интеграл в (2.2) быстро осциллирует по переменным ϵ, μ ; угловые скобки означают усреднение по периоду этих осцилляций.

Для ионов, пролетающих через предскачок с большой (и поэтому почти постоянной — $v_{\parallel}(s) = \text{const}$) скоростью, коэффициент диффузии выражается через функцию Мак-Дональда $K_{1/3}$ (см. [10]), формула 3.775):

$$D = \frac{4\alpha}{3a} \cdot \frac{\mu T_{ec} \theta^2}{\tau B_s |q|} K_{1/3}^2 \left(\frac{\Delta s}{|q|^{1/2}} \right). \quad (2.3)$$

Здесь $\varrho \equiv (2m_i T_{ec})^{1/2} c / e B_s$ — ларморовский радиус; $q \equiv (\mu - \mu_s) B_s / T_{ec}$ — безразмерный параметр, пропорциональный при $q < 0$ квадрату продольной скорости v_{\parallel} в точке максимума электрического поля, а при $q > 0$ соответствующий ионам, которые останавливаются, не долетев до этой точки²⁾. Более детальный анализ показывает, что пренебрежение изменением v_{\parallel} оправдано, если

$$-q \gg q_*, \quad q_* \equiv \max \left[(2\alpha/a)^{1/2}, (\varrho/l)^{2/5} \right].$$

Рассмотрим сначала случай $2\alpha/a > (\varrho/l)^{4/5}$. Вычисление интеграла в (2.2) по методу перевала (предварительно удобно сделать замену переменных: $s \rightarrow \sqrt{q - \Psi_0(s)}$) дает следующее выражение для коэффициента диффузии:

²⁾ Заметим, что в справочнике [11] на стр.330 интеграл, аналогичный интегралу 3.775 в справочнике [10], завышен в 2 раза.

$$D = \frac{\pi q \mu T_{ec} \theta^2 \exp(-lQ/\varrho)}{3lB_s \tau (2\alpha/a)^{1/2} (q^2 + 2\alpha/a)^{1/4}},$$

$$Q = \frac{4\sqrt{2}}{5} \left[\left(q^2 + \frac{2\alpha}{a} \right)^{1/2} + q \right]^{1/2} \left\{ \frac{6\alpha}{a} + q \left[\left(q^2 + \frac{2\alpha}{a} \right)^{1/2} + q \right] \right\}. \quad (2.4)$$

Оно справедливо, если $(-q) < (2\alpha/a)^3 (l/\varrho)^2$, и, таким образом, вместе с (2.3) перекрывает весь интервал $(-\infty, \infty)$ значений q . Максимальное значение

$$D_m = 0,656 \frac{\mu T_{ec} \theta^2}{B_s \tau} \left(\frac{a\varrho}{2\alpha l} \right)^2$$

достигается при $q = q_m = -3,26 (2\alpha/a)^3 (l/\varrho)^2$; оно пропорционально E_{\max}^2 . Рассеяние ионов, останавливающихся вдали от точки $s=0$, не чувствительно к деталям профиля электрического поля вблизи этой точки, и вне интервала $q_m < q < q_*$ коэффициент D не зависит от параметра α . Ионы, останавливающиеся вблизи точки $s=0$ и тем более не долетающие до нее, рассеиваются очень слабо: при $q > q_m$ величина D экспоненциально убывает.

В случае, когда α настолько мало, что $2\alpha/a < (\varrho/l)^{4/5}$ (но все-таки $\alpha > (r_D/l)^{1/2}$), при $q < -q_*$ и $q > q_*$ справедливы соответственно уравнения (2.3) и (2.4), а внутри интервала $|q| < q_*$ величина D изменяется незначительно. Ее максимальное значение

$$D_{\max} = 20,69 \frac{\mu T_{ec} \theta^2}{B_s \tau} \left(\frac{\varrho}{l} \right)^{2/5} \quad (2.5)$$

достигается при $q = -0,431 (\varrho/l)^{2/5}$.

Уравнения (1.5), (1.6), (2.1), дополненные соотношением

$$n_i(\varphi, B) = \pi \left(\frac{2}{m_i} \right)^{3/2} B \int \frac{d\varepsilon d\mu f_i}{\sqrt{\varepsilon - \mu B - e\varphi}},$$

составляют замкнутую систему уравнений, решение которой дает возможность самосогласованным образом найти распределение потенциала в тепловом барьере с учетом эффекта дополнительного рассеяния. Осуществление этой программы в полном объеме требует проведения численных расчетов. На качественном уровне некоторые следствия эффекта дополнительного рассеяния обсуждаются в следующем разделе.

3. ПРЕДСКАЧОК ПОТЕНЦИАЛА ВБЛИЗИ МАГНИТНОЙ ПРОБКИ

Отметим прежде всего, что если параметр $2\alpha/a$ становится меньше, чем $(\varrho/l)^{4/5}$, то дальнейшее его уменьшение (т.е. сужение предскачка) не сопровождается существенным усилением дополнительного рассеяния до тех пор, пока не нарушится квазинейтральность. Действительно, если $2\alpha/a \ll (\varrho/l)^{4/5}$, коэффициент D не зависит от α при всех значениях ε , μ . Поэтому, если скорость откачки v такова, что $2\alpha/a \sim (\varrho/l)^{4/5}$, должен возникнуть скачок потенциала³⁾.

Чтобы продемонстрировать, что рассмотренный в предыдущем разделе механизм рассеяния ионов может привести к значительно более быстрому, чем за счет кулоновских столкновений, захвату ионов в тепловой барьер, сравним частоту ν_{ii} ион-ионных столкновений с эффективной частотой ν_{eff} дополнительного рассеяния. В качестве ν_{eff} выберем отношение D_{\max}/μ^2 , оценив его величину для характерных значений энергии и магнитного момента: $\varepsilon \sim T_i$, $\mu \sim T_i/B$. Для параметров плазмы термоядерного диапазона: $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T_i = T_{ec} = 5 \cdot 10^4 \text{ эВ}$, $B = 4 \text{ Тл}$, $l = 100 \text{ см}$, $r = 10 \text{ см}$ — находим, что $\nu_{ii} \simeq 10 \text{ сек}^{-1}$, $\theta \sim 0,1$, $\varrho \sim 1 \text{ см}$ и ν_{eff} оказывается в 10^3 раз больше, чем ν_{ii} . Однако это еще не означает, что дополнительное рассеяние всегда кардинальным образом ухудшает работу теплового барьера. Поскольку ионы, запертые вблизи минимума магнитного поля в области $B < B_s$, очень слабо рассеиваются на предскачке, их можно откачать при умеренной скорости откачки $v \ll \nu_{eff}$. Поэтому дополнительное рассеяние незначительно увеличивает число запертых ионов, если предскачок расположен близко к магнитной пробке. Такая ситуация реализуется, если $T_{ec} \lesssim T_i$ (см. [7]).

При увеличении T_{ec} предскачок удаляется от пробки. Поэтому при $T_{ec} \gg T_i$ дополнительное рассеяние приводит к уменьшению «глубины» теплового барьера $\Delta\varphi_B$. Оценить зависимость $\Delta\varphi_B$ от положения предскачка можно с помощью следующих рассуждений. Так как пролетные ионы большую часть времени проводят в длинном центральном пробкотроне, их функция распределения формируется, главным образом, кулоновскими столкновениями и близка к максвелловской. Дополнительное рассеяние, переводя пролетные ионы в разряд захваченных и обратно, «выполаживает» функцию

³⁾ Это верно, если $(\varrho/l)^{4/5} > (r_D/l)^{1/2}$. В противоположном случае нарушение квазинейтральности происходит при $\alpha \sim (r_D/l)^{1/2}$.

распределения ионов, запертых в тепловом барьере «выше» предскачка (т.е. в области $B > B_s$), также приближая ее к максвелловской. Ионов, запертых в области $B < B_s$, при $v \gg v_{ii}$ очень мало. Полагая функцию распределения таких ионов равной нулю, легко показать, что

$$\Delta\varphi_B \sim \frac{T_{ec}}{e} \ln \frac{B_s}{B_{\min}}. \quad (3.1)$$

Явления, возникающие в тепловом барьере с электронами, нас интересуют только горячими, что $B_s \rightarrow B_{\min}$, рассмотрены в следующем разделе.

Возвращаясь к случаю $T_{ec} \lesssim T_i$, нетрудно установить, что при $v \gg v_{ii}$ функция распределения $f_i(\epsilon, \mu)$ захваченных ионов существенно отлична от нуля только вблизи границы $\mu = (\epsilon - e\varphi_c) / B_{\max}$, отделяющей их от пролетных ионов. Так как при $T_{ec} \lesssim T_i$ $B_s \simeq B_{\max}$ и $\varphi \approx \varphi_s$, точка остановки большинства запертых в тепловом барьере ионов лежит вблизи максимума электрического поля в предскачке, для них очень сильной (экспоненциальной) оказывается зависимость D от параметра α . Вследствие этого зависимость α от v с логарифмической точностью можно найти из соотношения

$$v/D_s \approx \text{const}, \quad (3.2)$$

где в качестве D_s можно выбрать значение D при $q=0$ (см. (2.4)). Отсюда, находим, что

$$\alpha \sim \left[\frac{e}{l} \ln \frac{v_0}{v} \right]^{4/5}, \quad v \ll v_0, \quad (3.3)$$

где величина v_0 в рассматриваемом приближении не может быть найдена. Из оценки (3.3) следует, что ширина предскачка $\Delta s \propto \alpha^{3/2}$ и максимальное электрическое поле $E_{\max} \propto \alpha^{-1}$ очень слабо зависят от скорости откачки v .

4. СКАЧКИ ПОТЕНЦИАЛА В ТЕПЛОМ БАРЬЕРЕ С ГОРЯЧИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

До сих пор предполагалось, что функция распределения электронов максвелловская. Между тем в последних модификациях теплового барьера предусматривается создание с помощью циклотронного нагрева популяции горячих анизотропных электронов вблизи минимума магнитного поля. Для формирования пика по-

тенциала нагрев электронов осуществляется также в дальней от центра ловушки точке локального максимума плотности плещущихся ионов (в точке 2 на рис.1). Для простоты рассмотрим ситуацию, когда нагрев в этой точке не производится, и примем следующие модельные зависимости для плотности ионов и электронов в крайнем пробкотроне:

$$n_i(\varphi, B) = n_c \left(1 - \frac{e\varphi}{T_i} \right)^{-1/2} \frac{B}{B_{\max}}, \quad (4.1)$$

$$n_e(\varphi, B) = n_c \frac{\exp\left(\frac{e\varphi}{T_{ec}}\right) + d \exp\left(\frac{e\varphi}{T_{eh}} - \left(\frac{B - B_{\min}}{\Delta B}\right)^2\right)}{1 + d \exp\left(-\left(\frac{B_{\max} - B_{\min}}{\Delta B}\right)^2\right)}. \quad (4.2)$$

Уравнения (4.1), (4.2) весьма условны, но они учитывают основные особенности распределения частиц в рассматриваемом случае. В частности, (4.1) соответствует функции распределения, пропорциональной $\delta(\mu)\delta(\epsilon - T_i)$, и моделирует, таким образом, отсутствие захваченных ионов. Что касается электронов, то в результате циклотронного нагрева некоторая их доля нагревается до энергии T_{eh} , которая значительно больше температуры T_{ec} , остальных частиц. Горячие электроны с большой продольной скоростью свободно уходят из крайнего пробкотрона. Поэтому распределение оставшихся анизотропно, а их плотность максимальна при $B = B_{\min}$. Коэффициент d в уравнении (4.2) соответствует доле горячих электронов, а нормировка выбрана так, чтобы уравнение квазинейтральности (1.2) имело решение $\varphi=0$ при $B = B_{\max}$.

Анализ уравнения (1.2) удобно провести графически, предварительно помножив его на B_{\max}/Bn_c . Левую и правую части получившегося уравнения обозначим соответственно через $N_e(\varphi, B)$ и $N_i(\varphi)$. Функции N_e, N_i монотонно убывают при уменьшении φ

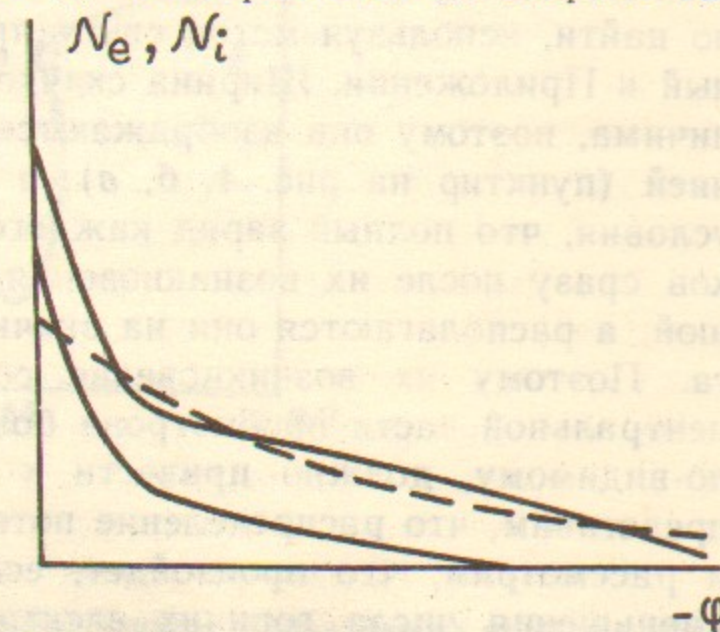


Рис. 3. К решению уравнения квазинейтральности для теплового барьера с горячими анизотропными электронами. Примерный вид функций $N_i(\varphi)$ (пунктирная линия) и $N_e(\varphi, B)$ для двух значений B (сплошная линия).

(см. рис.3), а N_e также монотонно возрастает при уменьшении B (пока $B > B_{\min}$). График $N_e(\varphi, B)$ имеет «подножие», почти параллельное оси φ . Именно из-за этой особенности, обусловленной горячими электронами, графики N_e и N_i при некоторых значениях B пересекаются трижды, т.е. уравнение квазинейтральности может иметь до трех корней. Графики его решения приведены на рисунках 4,а—4,в при последовательно возрастающей доле горячих электронов. Для наглядности потенциал φ изображен в зависимости не от B , а от координаты z вдоль оси пробкотрона, причем выбранный профиль $B(z)$ имеет следующий вид:

$$B(z) = B_{\min} + (B_{\max} - B_{\min}) \sin^2(\pi z/2L).$$

Если доля горячих электронов d не очень велика, решение единственно (рис. 4,а). После того как d превысит некоторое значение d_1 , вблизи минимума магнитного поля появляется дополнительная ветвь решения, изображенная на рис. 4,б замкнутой кривой. С увеличением d , при $d \geq d_2 > d_1$, эта ветвь сливается с первой (рис. 4,в), после чего непрерывное распределение потенциала невозможно без перескока с одной ветви на другую, т.е. без нарушения квазинейтральности. В каждой половине пробкотрона образуется по одному скачку потенциала. Их профиль и положение можно найти, используя метод сингулярных возмущений [12], описанный в Приложении. Ширина скачков в масштабе рисунка 4 неразличима, поэтому они изображаются практически вертикальной линией (пунктир на рис. 4, б, в), а их положение определяется из условия, что полный заряд каждого равен нулю. Амплитуда скачков сразу после их возникновения оказывается конечной и большой, а располагаются они на значительном удалении друг от друга. Поэтому их возникновение сопровождается вытеснением из центральной части пробкотрона большого количества плазмы, что, по-видимому, должно привести к развитию неустойчивости. Но представим, что распределение потенциала со скачками устойчиво, и рассмотрим, что произойдет, если начнется обратный процесс уменьшения числа горячих электронов. Он может быть вызван, например, появлением дополнительного рассеяния на образовавшихся скачках потенциала. После того как d станет меньше, чем d_2 , вновь появляется непрерывное (от одного конца пробкотрона до другого) решение уравнения квазинейтральности (рис. 4,б), однако сохраняется и решение со скачками потенциала. Постепенно сближаясь по мере уменьшения d , скачки исчезают, когда сливаются в экваториальной плоскости $z=0$. Значение $d=d_3$, соответствующее слиянию скачков, лежит между d_1 и d_2 . Иными словами, в

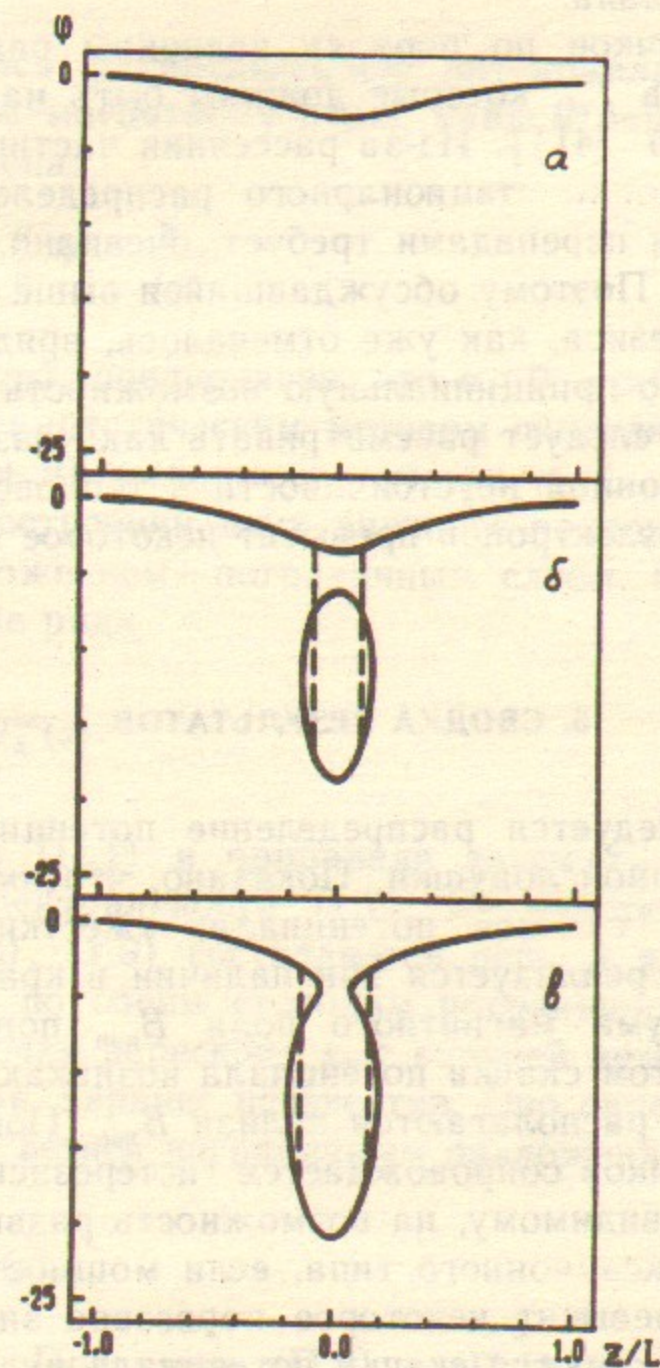


Рис. 4. Распределение потенциала в тепловом барьере в зависимости от количества горячих электронов:

а) $d=0,24$; б) $d=0,26$; в) $d=0,27$. Остальные параметры в уравнениях (4.1), (4.2) во всех трех случаях имеют следующее значения: $B_{\max}=1$, $B_{\min}=\Delta B=0,5$, $T_e=T_i=1$, $T_{eh}=25$, $e=1$. Дополнительная ветвь решения уравнения квазинейтральности появляется при $d=d_1=0,245$. Скачки, потенциала изображены пунктиром. Они возникают при $d=d_2=0,267$ и исчезают, когда $d=d_3=0,253$.

интервале $d_3 < d < d_2$ осуществляется своеобразный гистерезис распределения потенциала.

Амплитуда скачков по порядку величины равна температуре горячих электронов T_{eh} , которые должны быть нагреты до 30—70 кэВ (см., например [4]). Из-за рассеяния частиц на скачках потенциала поддержание стационарного распределения потенциала со столь большими перепадами требует, очевидно, огромных энергетических затрат. Поэтому обсуждавшийся выше квазистационарный режим гистерезиса, как уже отмечалось, вряд ли может быть реализован. Однако принципиальную возможность его осуществления, по-видимому, следует рассматривать как указание на возникновение релаксационной неустойчивости в тепловом барьере, если мощность нагрева электронов превысит некоторое пороговое значение.

5. СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе исследуется распределение потенциала в тепловом барьере амбиполярной ловушки. Показано, что имеется два режима возникновения скачков потенциала: «жесткий» и «мягкий». «Жесткий» режим реализуется при наличии в крайнем пробкотроне вблизи минимума магнитного поля B_{min} популяции горячих электронов. При этом скачки потенциала возникают сразу с конечной амплитудой и располагаются вблизи B_{min} . Появление и исчезновение таких скачков сопровождается гистерезисными явлениями, что указывает, по-видимому, на возможность развития сильной неустойчивости релаксационного типа, если мощность нагрева горячих электронов превысит некоторое пороговое значение. В «мягком» режиме зарождаются скачки потенциала нулевой амплитуды. Их появлению предшествует возникновение предскачков — узких квазинейтральных слоев плазмы с относительно большим электрическим полем. Показано, что рассеяние ионов на предскачке предотвращает появление скачков потенциала при значениях скорости откачки захваченных ионов, представляющих практический интерес. Получена замкнутая система уравнений для определения распределения потенциала в тепловом барьере с учетом рассеяния ионов на предскачке.

В заключение автор выражает благодарность Д.Д. Рютову за постановку задачи и полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Не интересуясь распределением потенциала в направлении, перпендикулярном магнитному полю, найдем решение одномерного уравнения Пуассона:

$$r_D^2 \frac{d^2 \Psi}{ds^2} = \alpha \Psi + \frac{a}{6} \Psi^3 - \frac{b}{L_s} s \quad (\text{П.1})$$

(где $r_D^2 = T_{ec}/4\pi e^2 n_s$), предполагая, что $\alpha < 0$, $a > 0$, $b > 0$. Для этого воспользуемся асимптотическим методом сингулярных возмущений [12], основанным на малости параметра r_D/L_s . Указанный метод заключается в построении двух внешних разложений, сшиваемых внутренним разложением — пограничным слоем. Внешнее разложение ищется в виде ряда

$$\Psi^{BH}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} r_D^{2k} \Psi_k^{BH}(s). \quad (\text{П.2})$$

Подставив его в (П.1) и приравняв затем r_D к нулю, получим уравнение квазинейтральности (1.7). Из участков ветвей Ψ_1 , Ψ_3 его решения (1.8), (1.9) составляется первый член $\Psi_0^{BH}(s)$ внешнего разложения по обеим сторонам пограничного слоя (см. рис. 2). Положение точки перескока s_* с верхней ветви Ψ_3 на нижнюю Ψ_1 , вообще говоря, заранее неизвестно. Оно определится в результате сшивки этих ветвей пограничным разложением

$$\Psi^n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} r_D^k \Psi_k^n(x), \quad (\text{П.3})$$

где $x = (s - s_*)/r_D$. Подставив (П.3) в (П.1), в низшем приближении получим

$$\frac{d^2 \Psi_0^n}{dx^2} = \alpha \Psi_0^n + \frac{a}{6} (\Psi_0^n)^3 - \frac{b}{L_s} s_*. \quad (\text{П.4})$$

Это уравнение, как известно (см., например, [13]), описывает движение частицы в заданном потенциале

$$U(\Psi_0^n; s) = -\frac{\alpha}{2} (\Psi_0^n)^2 - \frac{a}{24} (\Psi_0^n)^4 + \frac{b}{L_s} s_* \Psi_0^n, \quad (\text{П.5})$$

если в качестве координаты частицы рассматривать Ψ_0^n , а в ка-

честве времени переменную x . Скорость «частицы» с заданной энергией W равна

$$\frac{d\Psi_0^n}{dx} = \pm \sqrt{2(W-U)}.$$

Параметры s_* и W нужно подобрать так, чтобы обеспечить сшивку пограничного разложения с внешним. В принятом приближении условие сшивки состоит в том, что электрическое поле $d\Psi_0^n/dx$ становится исчезающе малым как при $d\Psi_0^n = \Psi_1(s_*)$, так и при $d\Psi_0^n = \Psi_3(s_*)$. Это возможно в единственном случае, когда

$$W = U(\Psi_1(s_*); s_*) = U(\Psi_3(s_*); s_*). \quad (\text{П.6})$$

Отсюда следует, что $s_* = 0$, $W = 3\alpha^2/a$. Равенство (П.6) означает, что полный заряд скачка электрического потенциала равен нулю. Попутно полезно отметить, что перескок между ветвями Ψ_1 и Ψ_2 или Ψ_3 и Ψ_2 невозможен, поскольку соответствующие ему равенства типа (П.6) не могут быть выполнены.

Для найденных значений s_* и W уравнение (П.4) интегрируется в элементарных функциях:

$$\Psi_0^n(s) = -\sqrt{-\frac{6\alpha}{a}} \operatorname{th}\left(\sqrt{-\alpha} \frac{s}{r_D}\right). \quad (\text{П.7})$$

При $s/r_D \rightarrow \pm\infty$ пограничное решение (П.7), описывающее профиль скачка при небольшом превышении ξ над ξ_* , экспоненциально приближается соответственно к $\Psi_1(0)$ и $\Psi_3(0)$. Область применимости найденного решения определяется неравенством $(-\alpha) \gg (r_D/L_s)^{1/2}$, гарантирующим, что ширина $|\alpha|^{1/2}r_D$ скачка потенциала значительно меньше длины интервала Δs , на котором уравнение квазинейтральности имеет три корня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Димов Г.И., Закайдаков В.В., Кишиневский М.Е. Физика плазмы, 1976, т.2, стр. 597.
2. Fowler T.K., Logan B.G. Comments on Plasma Phys. and Contr. Fusion, 1977, v.2, p.167.
3. Baldwin D.E., Logan B.G. — Phys. Rev. Lett., 1979, v.43, p.1318.
4. Physics Basic for MFTF-B/Ed. Baldwin D.E., Logan B.G., Simonen T.C. — Lawrence Livermore Laboratory, UCID—18496—Part 1, 1980.
5. Baldwin D.E. and the TMX-U Group, — Plasma Phys. and Contr. Fusion, v.26, 1A, p.227, 1984.
6. Пеккер Л.С. — Препринт ИЯФ СО АН СССР № 80-161, 1980.
7. Cohen R.H. — Nuclear Fusion, 1981, v.21, p.209.
8. Пеккер Л.С. — Физика плазмы, 1984, т.10, с.61.
9. Альвен Х. — Космическая плазма М.: «Мир», 1983, с.45.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. — Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: «Наука», 1971.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. — Интегралы и ряды. М.: «Наука», 1981.
12. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. — Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: «Наука», 1973.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Механика. М.: «Наука», 1973, § 11.

И.А. Котельников

**О структуре скачков потенциала
в тепловом барьере
амбиполярной ловушки**

Ответственный за выпуск *С.Г. Попов*

Подписано в печать 30 апреля 1985 г. МН 06657
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,7 печ.л., 1,4 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 58

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*