Ч-34

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

31

П.З. Чеботаев

К ВОПРОСУ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛАЗМЫ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

ПРЕПРИНТ 85-48

НОВОСИБИРСК

P.Z. Chebotaev

TO THE QUESTION ON PLASMA MODELING BY THE LARGE PARTICLES METHOD

Institute of Nuclear Physics,
630090 Novosibirsk, USSR

ABSTRACT

When solving the Poisson equation by the discrete Fourier transform method the definite requirements are imposed on the shape of the spatial distribution of a partical charge. The technique is given to compute the spatial charge distribution on the mesh for an arbitrary shape of the particle charge, with the total charge exactly conserved. The use of the finite-size particles in computations results in a distortion of the dispersion properties of a plasma. The way to restore these properties is indicated.

АННОТАЦИЯ

При решении уравнения Пуассона методом дискретного преобразования Фурье на форму пространственного распределения заряда частицы накладывались определенные требования. В статье приводится способ подсчета пространственного распределения заряда на сетке для произвольной формы заряда частицы с точным сохранением суммарного заряда. Использование частиц конечного размера приводит к искажению дисперсионных свойств плазмы. Указывается способ восстановления этих свойств.

1. ВВЕДЕНИЕ

При численных расчетах турбулентных течений плазмы, когда нарушаются условия применимости гидродинамического приближения, метод частиц является, по-видимому, основным численным алгоритмом.

Имеются разные варианты метода крупных частиц. Будем рассматривать тот, в котором потенциал, электрическое поле определяются в узлах пространственной сетки, а носителями массы и заряда являются «крупные» частицы, движущиеся по этой сетке. Так как число частиц, используемых при расчетах, много меньше числа частиц моделируемого объема, то флуктуации плотности в расчетах ($\sim 1/\sqrt{N}$, где N—число частиц в расчете) значительно выше физических (дробовой шум). В большинстве задач физики плазмы главные эффекты обусловлены дальними взаимодействиями, что дает возможность ввести частицы конечного размера и, тем самым, сгладить дробовой шум. Если $S(x)$—формфактор плотности заряда «размазанной» частицы, то ток J, плотность зарядов ϱ, сила Лоренца F для зарядов облаков запишутся как [1]

$$\begin{pmatrix} \varrho(\bar{r},t) \\ \bar{J}(\bar{r},t) \end{pmatrix} = \int d\bar{r}_1 S(\bar{r}-\bar{r}_1) \begin{pmatrix} n(\bar{r}_1,t) \\ \bar{j}(\bar{r}_1,t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\bar{F}(\bar{r},t) = q\int d\bar{r}_1 S(\bar{r}-\bar{r}_1)\left(\bar{E}(\bar{r}_1,t) + \frac{1}{c}\bar{v}\times\bar{B}\right) \tag{2}$$

где n, j—плотность и ток для точечных зарядов. В работе [1] показано, что дисперсионные свойства плазмы облаков (1)—(2) могут значительно отличаться от случая точечных частиц. В расчетах часто используют размазку частиц только для сглаживания профиля плотности (1), а силу, действующую на облако, отождествляют с силой в центре частицы

$$\bar{F}(\bar{r},t) = q\bar{E}(\bar{r},t) + \frac{1}{c}\bar{v}\times\bar{B}$$

Однако и во втором случае дисперсионные свойства модельной плазмы будут искажены. Например, для ленгмюровских колебаний плазмы из облаков вместо дисперсионного уравнения $\omega=\omega_e$ имеем

$$\omega^2 = \omega_e^2\left[1 - \frac{k^2}{2}\int x^2 S(x)dx + \frac{k^4}{24}\int x^4 S(x)dx - \ldots\right] \tag{3}$$

Изменения частоты колебаний можно вычислить по этой формуле, и для широких облаков эти изменения будут заметными.

Для определения электрического поля необходимо решать уравнение Пуассона. При численном решении используются как сеточные методы, так и методы преобразования Фурье. В последнем случае, как было показано в работе [2], на форму частицы накладывается определенное ограничение: форма ее должна быть такой, чтобы при движении размазанной частицы по пространственной сетке она воспринималась алгоритмом дискретного преобразования Фурье без искажений. Было найдено «наиболее подходящее» [2] распределение (рис. 1) и вычислены ординаты A_1 и A_2 такие, чтобы заряд «хвоста» A_1 A_2 ... был мал и затем полагалось, что вне интервала L плотность заряда частицы равнялась нулю.

Использование такой формы размазки частицы все же дает суммарное несохранение заряда. Следующая процедура вычисления распределения плотности заряда на пространственной сетке сохраняет суммарный заряд точно.

Для простоты будем рассматривать одномерный случай. Так как пространственная плотность распределения заряда $\varrho(x)$ заряженных облаков есть

$$\varrho(x)=\sum_{i=1}^{N} S(x-x_i), \quad x_i \text{ — центр } i\text{-ой частицы},$$

то ряд Фурье для $\varrho(x)$ будет суммой соответствующих рядов Фурье для каждой частицы $S_i(x)$. Возьмем за базовое положение частицы случай, когда ее центр находится на середине пространственного промежутка (рис. 2, T—период). В силу периодичности задачи, при смещении центра частицы на расстояние ζ от базового, форма частицы $S_1(x)$ будет определяться:

$$\zeta\geqslant 0 \qquad\qquad \zeta<0$$

$$S_1(x)=\begin{cases} S(T-\zeta+x), & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\zeta \\ S(x-\zeta), & \text{при } \zeta<x\leqslant T\end{cases} \qquad S_1(x)=\begin{cases} S(x+\zeta), & \text{при } 0\leqslant x\leqslant T-\zeta \\ S(x+\zeta-T), & \text{при } T-\zeta<x\leqslant T\end{cases}$$

Если

$$a_{ks}=\frac{2}{T}\int_0^T S(x)\cos k\omega x\,dx, \quad b_{ks}=\frac{2}{T}\int_0^T S(x)\sin k\omega x\,dx,$$

то коэффициенты a'_{ks}, b'_{ks} для функции $S_1(x)$ (с учетом знака ζ) определятся как

$$a'_{ks}=a_{ks}\cos k\omega\zeta-b_{ks}\sin k\omega\zeta$$

$$b'_{ks}=a_{ks}\sin k\omega\zeta+b_{ks}\cos k\omega\zeta.$$

Теперь нетрудно выписать ряд Фурье для $\varrho(x)$:

$$\varrho(x)=N\frac{a_0}{2}+\sum_k(A_k\cos k\omega x+B_k\sin k\omega x) \tag{4}$$

где

$$A_k=a_{ks}\sum_{j=1}^{N}\cos k\omega\zeta_j-b_{ks}\sum_{j=1}^{N}\sin k\omega\zeta_j$$

$$B_k=a_{ks}\sum_{j=1}^{N}\sin k\omega\zeta_j+b_{ks}\sum_{j=1}^{N}\cos k\omega\zeta_j.$$

Как видно из формулы (4) при такой процедуре определения коэффициентов ряда Фурье для $\varrho(x)$ суммарный заряд частиц будет сохраняться точно. При этом нет особой необходимости подбирать ординаты A_1 и A_2 так, чтобы суммарный заряд «хвоста» был малым, поскольку уже ничего не отбрасывается от заряда частицы.

При численном моделировании плазмы методом крупных частиц конечного размера в расчетах мы определяем приближенно $\varrho(x)$. Как видно из формулы (1), $\varrho(x)$ является сверткой функций n и S. Полученный ряд Фурье для $\varrho(x)$ «не знает», какой функции $n(x)$ он соответствует. При комплексном представлении ряда Фурье

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{kf}e^{ik\omega x}, \quad C_{kf}=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-ik\omega x}\,dx$$

коэффициенты ряда для ϱ выражаются через коэффициенты рядов для n и S известной формулой

$$C_{k\varrho}=TC_{kn}C_{ks}. \tag{5}$$

В расчетах мы вычисляем значения $\varrho(x)$ в узлах сетки и дискретное преобразование Фурье дает коэффициенты $C_{k\varrho}$. Соотношение (5) позволяет по известным коэффициентам $C_{k\varrho}$ и C_{ks} восстановить функцию $n(x)$ для точечных частиц

$$C_{kn} = \frac{1}{T}\frac{C_{k\varrho}}{C_{ks}} \qquad (6)$$

Так как $C_k = (a_k - ib_k)/2$, $C_{-k} = (a_k + ib_k)/2$ то из формулы (6) получаем

$$a_{kn} = \frac{2}{T}\frac{a_{k\varrho}a_{ks} + b_{k\varrho}b_{ks}}{a_{ks}^2 + b_{ks}^2}, \quad b_{kn} = \frac{2}{T}\frac{a_{ks}b_{k\varrho} - b_{ks}a_{k\varrho}}{a_{ks}^2 + b_{ks}^2}$$

В расчетах удобно сразу определять коэффициенты «восстановленного» электрического поля

$$a_{ke} = \frac{2}{T}\frac{b_{ks}b'_{ke} + a_{ks}a'_{ke}}{a_{ks}^2 + b_{ks}^2}, \quad b_{ke} = \frac{2}{T}\frac{a_{ks}b'_{ke} - a'_{ke}b_{ks}}{a_{ks}^2 + b_{ks}^2}$$

где

$$a'_{ke} = -\frac{b_{k\varrho}}{k\omega}, \quad b'_{ke} = \frac{a_{k\varrho}}{k\omega}.$$

На рис. 3 приведены графики скорости частиц $v(x)$ и электрического поля $E(x)$ для случаев когда частицы двигались в восстановленном поле (рис. 3*а*) и в поле размазанных частиц (рис. 3*б*). Как видно из рис. 3*б* частота колебаний в последнем случае меньше, что соответствует предсказаниям формулы (3).

Очевидно, что соответствующие формулы для восстановления элекрического поля могут быть написаны и для многомерных случаев.

Автор выражает благодарность В.В. Вечеславову и Б.Н. Брейзману за полезные обсуждения вопросов моделирования плазмы методом частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бэрдсол Ч., Ленгдон А., Окуда Х.* Физика системы частиц конечных размеров и ее применение к моделированию плазмы. М : Мир, 1974, с.242-258.
2. *Вечеславов В.В.* Выбор характеристик отдельной макрочастицы в методе макрочастиц. Препринт Института ядерной физики СО АН СССР 76-39. Новосибирск, 1976.

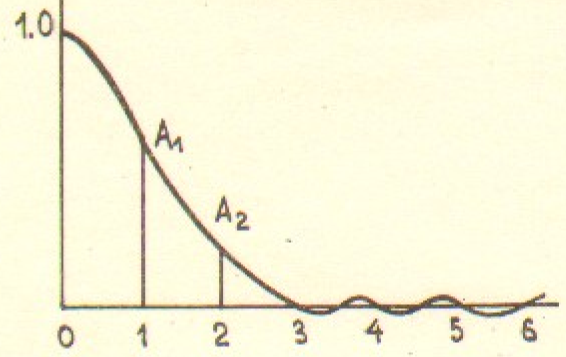

Рис. 1

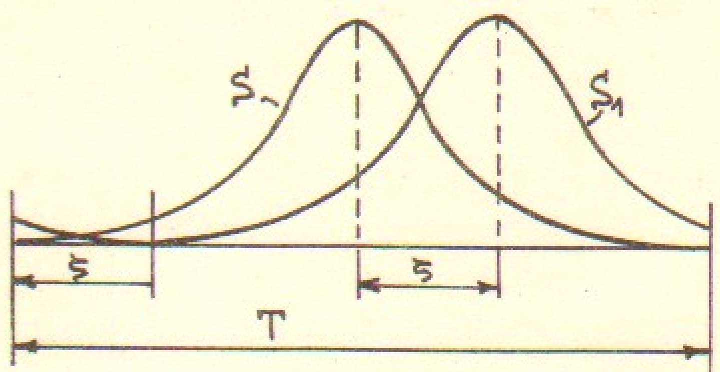

Рис. 2

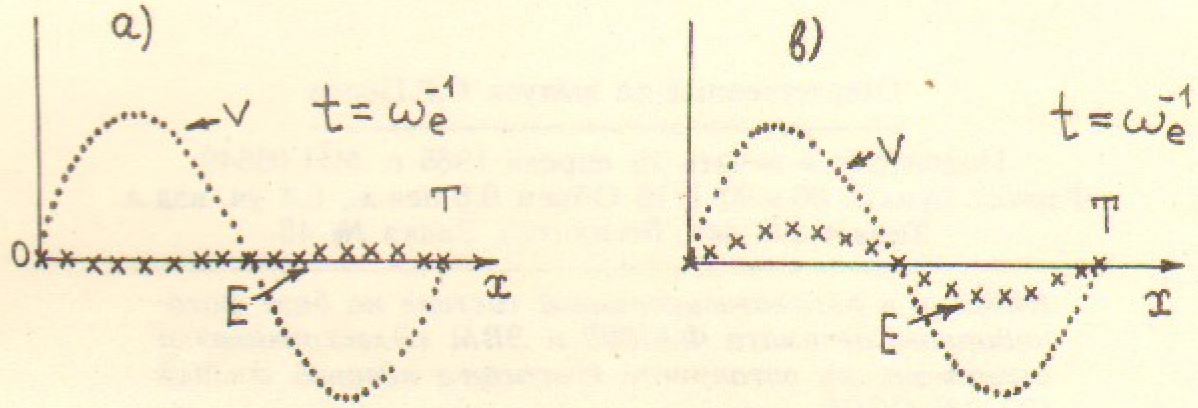

Рис. 3

П.З. Чеботаев

К вопросу моделирования плазмы методом крупных частиц

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Подписано в печать 16 апреля 1985 г. МН 06649
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0,6 печ.л., 0,4 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 48

Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.