



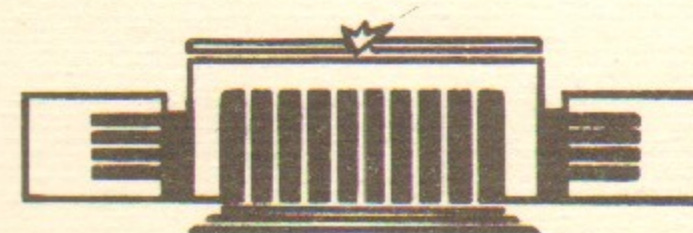
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

39

Г.А. Кузьмин, А.З. Паташинский

ПАРАМЕТРЫ ОРГАНИЗОВАННЫХ СТРУКТУР  
ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

ПРЕПРИНТ 84-155



НОВОСИБИРСК

ПАРАМЕТРЫ ОРГАНИЗОВАННЫХ СТРУКТУР ТУРБУЛЕНТНЫХ  
ТЕЧЕНИЙ

Г.А.Кузьмин <sup>ж)</sup>, А.З.Паташинский

А Н Н О Т А Ц И Я

Изолированные вихри и структурно-турбулентные течения описаны в терминах пространственных моментов плотности импульса Ламба. Показано, что эти моменты содержат информацию об основных свойствах когерентных структур, а их инварианты описывают количественные характеристики упорядоченного движения независимо от его ориентации.

<sup>ж)</sup> Институт теплофизики СО АН СССР.

I. В в е д е н и е

Физическая картина гидродинамической турбулентности до сих пор остается неясной. В турбулентном движении обнаруживаются как элементы хаоса, так и элементы порядка. Для построения картины турбулентности как стохастического сочетания когерентных структур необходимо найти основные типы этих структур.

Задача выявления упорядоченных движений в турбулентном потоке затрудняется тем, что такие движения эволюционируют, а фазы и ориентации структур в пространстве случайны. Главной же трудностью является то обстоятельство, что взаимодействие элементов турбулентности достаточно сильно, так что конкретные реализации структур заметно флуктуируют.

Визуальные способы изучения структур в таких условиях достоверны лишь в особых случаях, когда структуры оказываются изолированными. Если ориентация и фаза структур фиксированы, количественные сведения о структурах получаются условным осреднением термоанемометрического сигнала. В противоположном случае с реализацией этого метода имеются большие трудности (см. книгу [1] и обзоры [2-5]).

В последнее время развиваются методы прямых измерений скорости одновременно во многих точках пространства [6-8]. Развиваются мощные методы численного моделирования турбулентности на ЭВМ. Результаты численных и натуральных экспериментов используются для вычисления средних гидродинамических полей и напряжений Рейнольдса. Ясно, что знание мгновенных гидродинамических полей и их эволюции содержит полную информацию о турбулентном течении, в частности, детальные сведения о когерентных структурах. Между тем, наличие когерентных структур и в этих экспериментах и расчетах определялось визуально, что связано с неразвитостью методов выявления локальной организации потока и распознавания структур.

Распознавание структур в условиях заметных флуктуаций требует статистического подхода. Для статистического изучения необходимо построить систему количественных характеристик структур; количественные характеристики должны описывать структуру в области заданного размера вокруг каждой точки потока.

В настоящей работе конструируются функционалы поля скорости, имеющие смысл таких характеристик структуры потока. Построенные ниже тензорные поля содержат информацию об основных свойствах движения жидкости в окрестности каждой точки, а их инварианты вращения не зависят от ориентации упорядоченного движения и могут использоваться для его количественной характеристики. Подобные поля были введены ранее для описания структуры конденсированного вещества [9,10]. Анализ структурного порядка в турбулентности имеет свою специфику, связанную с соленоидальностью основных гидродинамических полей. Условие соленоидальности связывает значения скорости и завихренности в соседних точках, поэтому они не являются, строго говоря, локальными. Смысл вводимых тензорных характеристик выявляется более отчетливо в терминах плотности импульса Ламба. Определение этой величины приведено ниже, а более подробное обсуждение и вывод динамических уравнений, эквивалентных уравнениям Навье-Стокса см. в [11,12].

Существенно отметить, что предлагаемые нами для описания структуры моменты плотности импульса Ламба содержат в своем определении элемент осреднения. Только полная совокупность всех вводимых ниже тензоров определяет течение полностью. Совокупность тензоров ранга не выше заданного  $n$ , характеризует целый класс течений, отличающихся мелкомасштабными деталями, которые содержатся в тензорах ранга выше  $n$ . Можно надеяться, что использование набора тензоров различных рангов для распознавания структур даст возможность понять, что в турбулентных структурах воспроизводимо и что флуктуирует.

## 2. Параметры изолированной вихревой структуры.

Предлагаемый способ описания локальной организации потока проиллюстрируем вначале на примере изолированных вихревых структур. Скорость несжимаемой жидкости  $\vec{u}$  связана с завихренностью  $\vec{\omega}$  кинематическим соотношением [13].

$$\vec{u} = \vec{v} + \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int \frac{\vec{\omega}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV(\vec{x}') \quad (I)$$

где  $\vec{v}$  - потенциальная составляющая, которая определяется

граничными условиями. Случай изолированной вихревой структуры в неограниченной жидкости, покоящейся на бесконечности, соответствует  $\vec{v} = 0$ . Распределение завихренности внутри структуры может быть очень сложным и нестационарным. Не все детали этого распределения одинаково интересны и важны, и желательно выявить интегральные параметры, которые характеризовали бы основные свойства течения в целом. Скорость (I) может медленно убывать на больших расстояниях от ограниченного вихревого облака, поэтому удобнее рассмотреть интегралы от завихренности.

Известными интегральными характеристиками вихревого облака являются импульс и момент импульса Ламба [13,14].

$$\vec{p} = \frac{1}{2} \int [\vec{x} \times \vec{\omega}] dV(\vec{x}) \quad (2)$$

$$\vec{J} = \frac{1}{3} \int [\vec{x} \times [\vec{x} \times \vec{\omega}]] dV(\vec{x}) \quad (3)$$

Импульс Ламба (2) полностью определяет скорость на больших расстояниях от вихревого облака

$$u_i \approx \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{x} p_j$$

Для описания более тонких деталей течения рассмотрим другие пространственные моменты, линейные по завихренности

$$M_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)} = \int x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \omega_{i_n} dV(\vec{x}) \quad (4)$$

Величины  $\vec{p}$ ,  $\vec{J}$  суть линейные комбинации моментов (4) с  $n = 2, 3$ . Они равны, соответственно, полному силовому импульсу и полному угловому моменту импульса скли, которые требуются для мгновенной генерации данного движения из состояния покоя. Ниже приводятся определения плотности импульса Ламба  $\vec{q}$ . После подстановки зависимости  $\vec{\omega}(\vec{q})$ , тензоры (4) оказываются линейными комбинациями пространственных моментов плотности импульса Ламба, каждый из которых имеет ясный физический смысл.

Плотность импульса Ламба  $\vec{q}$  определяется как плотность

силового импульса, необходимая для мгновенной генерации данного поля скорости из состояния покоя. Подстановка импульсной силы  $\vec{q}(\vec{x}) \delta(t)$  в правую часть уравнения Навье-Стокса и интегрирование обеих частей уравнения по малому промежутку времени  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  дает связь  $\vec{q}$  со скоростью. Поскольку скорости возникающего движения конечны, то в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  вклад вязкого и конвективного членов исчезает и мы получаем

$$\vec{q} = \nabla \varphi + \vec{u}, \quad (5)$$

где  $\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (P/\rho) dt$  — плотность импульса давления. Из (5) видно, что поле скорости можно считать соленоидальной проекцией плотности импульса Ламба:

$$\vec{u} = \hat{Q} \vec{q} \quad (6)$$

Здесь  $\hat{Q}$  — проекционный оператор, вид которого хорошо известен для неограниченной области: он является интегральным оператором с ядром  $Q_{ij}(\vec{x}, \vec{x}') = \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ . Решение обратной задачи — определения поля  $\vec{q}(\vec{x})$  по заданному полю скорости однозначно лишь при наложении на  $\vec{q}(\vec{x})$  дополнительного калибровочного условия. Калибровочную функцию  $\varphi$  в (5) выберем так, чтобы ограниченному вихревому облаку соответствовало ограниченное распределение  $\vec{q}(\vec{x})$ . Другие детали калибровки для дальнейшего несущественны.

Благодаря финитности  $\vec{q}(\vec{x})$ , моменты плотности импульса Ламба столь же хорошо определены, как и моменты завихренности. Характер движения легче представить себе по распределению эквивалентного силового импульса, чем по распределению  $\vec{\omega}(\vec{x})$ . Поэтому полезно выразить моменты (4) через моменты поля  $\vec{q}$ . Из соотношения  $\text{rot } \vec{q} = \text{rot } \vec{u} = \vec{\omega}$  (см. (5)) находим

$$[\vec{x} \times \vec{\omega}]_i = 2q_i + \frac{\partial}{\partial x_m} (\delta_{ij}^{mn} x_j q_n) \quad (7)$$

где  $\delta_{ij}^{mn} = \epsilon_{ijm} \epsilon_{mnn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$ . Подстановка (7) в (2), (3) дает, с учетом, что интегралы от  $\vec{q}$  по удаленным поверхностям обращаются в нуль,

$$\vec{P} = \int \vec{q} dV, \quad \vec{J} = \int [\vec{x} \times \vec{q}] dV \quad (8)$$

Формулы (8) согласуются с известным выводом [13,14], что величины (2), (3) равны полному импульсу и моменту импульса. Момент произвольного порядка (4) можно преобразовать к виду:

$$M_{i_1, \dots, i_n}^{(n)} = \frac{1}{n} \int \frac{\partial}{\partial x_\mu} (x_{i_1} \dots x_{i_n} \omega_\mu) dV + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \int x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_{k+1}} \dots x_{i_{n-1}} A_{i_k i_n} dV, \quad (9)$$

где  $A_{ij} = x_i \omega_j - x_j \omega_i = \epsilon_{ijm} [\vec{x} \times \vec{\omega}]_m$ . Первый интеграл в правой части (9) — есть компонента тензора (9), симметричная по всем перестановкам индексов. С использованием теоремы Гаусса получаем:

$$\int \frac{\partial}{\partial x_\mu} (x_{i_1} \dots x_{i_n} \omega_\mu) dV = \int x_{i_1} \dots x_{i_n} (\vec{\omega} d\vec{S}) \quad (10)$$

Интеграл по удаленной поверхности равен нулю. Согласно (9), нам остается рассмотреть моменты поля  $[\vec{x} \times \vec{\omega}]$ :

$$T_{i_1, \dots, i_n}^{(n)} = \int x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}} [\vec{x} \times \vec{\omega}]_{i_n} dV \quad (11)$$

После интегрирования по частям с учетом (7), мы получаем линейную комбинацию моментов плотности импульса Ламба.

Изучим несколько подробнее моменты низких порядков. Момент первого порядка — есть удвоенный импульс Ламба (2), (8). Момент второго порядка равен

$$T_{ij}^{(2)} = \int x_i [\vec{x} \times \vec{\omega}]_j dV = \int \{3x_i q_j - (\vec{x} \vec{q}) \delta_{ij}\} dV \quad (12)$$

Антисимметричная по перестановкам  $\{ij\}$  часть тензора (12) пропорциональна моменту импульса Ламба  $\vec{J}$ . Симметричная ком-

понента, как следует из (I2), описывает движение, возникающее после силовой деформации объема жидкости, занятого структурой. Иными словами,  $(I/2) (T_{ij}^{(2)} + T_{ji}^{(2)})$  описывает деформацию структуры за счет собственной завихренности. Построим вне структуры сферическую поверхность, состоящую из частиц жидкости. Искажение этой поверхности за малое время  $\delta t$  определяется мгновенным распределением скорости (I). Разложив правую часть (I) в ряд по мультиполям, мы получим, что квадрупольная компонента искажения поверхности определяется симметричной частью тензора  $T_{ij}^{(2)}$ .

След тензора  $T_{ij}^{(2)}$  равен нулю, и его разложение на симметричную и антисимметричную компоненты есть разложение на неприводимые тензоры в смысле теории представлений группы вращений. Аналогичное разложение может быть выполнено для тензоров любого ранга. Используя результаты теории представлений [15], выпишем неприводимые компоненты для тензора третьего ранга

$$T_{ijm}^{(3)} = \int x_i x_j [\vec{x} \times \vec{\omega}]_m dV.$$

Учитывая симметрию тензора  $T_{ijm}^{(3)}$  по перестановкам  $\{i, j\}$ , получаем для него следующее разложение:

$$T_{ijm}^{(3)} = -a_i \delta_{jm} - a_j \delta_{im} + 4a_m \delta_{ij} + b_{ijm} + c_{ijm}$$

где  $b_{ijm}, c_{ijm}$  — тензоры, обладающие нулевыми следами, причем  $c_{ijm}$  симметричен по перестановкам всех индексов. Приведем явные выражения для  $\vec{a}, b, c$

$$\vec{a} = \frac{1}{10} \int x^2 [\vec{x} \times \vec{\omega}] dV \quad (I3)$$

$$c_{ijm} = \frac{1}{3} \int \{x_i x_j [\vec{x} \times \vec{\omega}]_m + x_i x_m [\vec{x} \times \vec{\omega}]_j + x_j x_m [\vec{x} \times \vec{\omega}]_i\} dV -$$

$$-\frac{2}{3} (a_i \delta_{jm} + a_j \delta_{im} + a_m \delta_{ij}) \quad (I4)$$

$$b_{ijm} = \frac{1}{6} (\delta_{im} \delta_{j\sigma} + \delta_{is} \delta_{j\mu}) \epsilon_{\sigma\mu\nu} d_{\mu\nu}$$

где  $d_{\mu\nu}$  — симметричный тензор второго ранга:

$$d_{\mu\nu} = \int \{x_\mu [\vec{x} \times [\vec{x} \times \vec{\omega}]]_\nu + x_\nu [\vec{x} \times [\vec{x} \times \vec{\omega}]]_\mu\} dV \quad (I5)$$

Величины  $\vec{a}, d_{\mu\nu}, c_{ijm}$  реализуют неприводимые представления группы вращений с весами  $\ell = 1, 2, 3$ . Для выяснения их физического смысла выразим (I3) — (I5) через моменты плотности импульса Ламба. Используя (7), получаем:

$$\vec{a} = \frac{1}{5} \int \{2\vec{q} x^2 - \vec{x}(\vec{x} \cdot \vec{q})\} dV \quad (I6)$$

$$c_{ijm} = \frac{4}{15} \int \{5(x_i x_j q_m + x_i x_m q_j + x_j x_m q_i) - 2(\vec{x} \cdot \vec{q})(x_i \delta_{jm} + x_j \delta_{im} + x_m \delta_{ij}) - x^2 (q_i \delta_{jm} + q_j \delta_{im} + q_m \delta_{ij})\} dV \quad (I7)$$

$$d_{\mu\nu} = 4 \int (x_\mu I_\nu + x_\nu I_\mu) dV \quad (I8)$$

где  $\vec{I} = [\vec{x} \times \vec{q}]$  — плотность момента импульса Ламба.

Из (I6) — (I8) следует, что вектор  $\vec{a}$  определяет характерный масштаб структуры  $L \sim \sqrt{a^2/\rho^2}$ , где  $\rho$  определяется выражением (8), тензор  $d_{\mu\nu}$  описывает осредненные деформации, скручивающие структуру вокруг его главных осей. Тензор  $c_{ijm}$  описывает октупольное искажение формы поверхности структуры, что может быть продемонстрировано аналогично рассмотренному выше случаю  $n = 2$ . Более тонкие детали формы структуры и динамики ее искажения содержатся в моментах более высокого порядка. Физический смысл имеют калибровочно инвариантные комбинации моментов плотности импульса Ламба. Именно такие комбинации мы получим, подставив (7) в калибровочно инвариантные моменты (II).

Наиболее удобная форма представления моментов (II) определяется спецификой задачи. Для обработки результатов численных экспериментов необходимо иметь выражение моментов через то поле, в терминах которого ведется расчет эволюции течения. В физических экспериментах и в ряде численных расчетов таким полем служит скорость. Выражения моментов (II) через скорость могут быть получены интегрированием по частям с использованием кинематического соотношения  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$ . Поскольку скорость может медленно убывать на больших расстояниях, поверхностные интегралы при этом не исчезают и их следует учитывать наравне с объемными.

### 3. Выделение отдельных структур.

Поле скорости структурной турбулентности есть суперпозиция полей, индуцируемых многими организованными вихрями. Поля завихренности структур могут накладываться, что иллюстрируется рис. 1. Изображенную на рисунке вихревую нить можно рассматри-

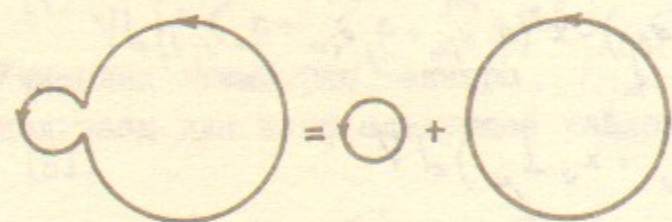


Рис. 1

вать как результат наложения двух вихревых колец. Чтобы понятие организованных структур имело конкретное содержание, необходим способ, позволяющий разделить поле завихренности на изолированные вихри. Приведенный рисунок может служить качественной иллюстрацией производимого ниже пересоединения вихревых линий. Этот способ позволяет выделить из поля завихренности изолированные вихри, а моменты (4) — разделить на две группы, одна из которых описывает структуру выделенных вихрей, а другая — структуру их ближайшего окружения.

Выделим в турбулентной жидкости шаровой объем радиуса  $\lambda$  и поместим начало координат в его центр. Граница области может пересекаться вихревыми линиями, которые невозможно оборвать из-за соленоидальности завихренности. Заменяем поле  $\vec{\omega}$  внутри области градиентом гармонической функции  $\nabla \chi$ . Предполагается, что на границе области задана нормальная производная  $\partial \chi / \partial n|_r$ , которая равна нормальной проекции завихренности

$(\vec{\omega} \cdot \vec{n})$ . Получившееся поле соленоидально в том смысле, что его поток по любой замкнутой поверхности равен нулю. Внутри области оно бесструктурно, поскольку содержит информацию лишь о граничных условиях. Вся информация о структурных свойствах  $\vec{\omega}$  внутри области содержится в поле  $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega} - \nabla \chi$ . Поле  $\vec{\omega}_1$  имеет вид изолированного вихря, поскольку его нормальная проекция на границе равна нулю и силовые линии не пересекают границы области. Структура получившегося вихря описывается неприводимыми моментами поля  $\vec{\omega}_1$ , которые с использованием функции Грина задачи Неймана выражаются ниже через моменты поля  $\vec{\omega}$ . Ниже также показано, что в ряде случаев неприводимые моменты полей  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\omega}_1$  совпадают. Таким образом, найдена группа моментов поля  $\vec{\omega}$ , описывающая структуру выделенного вихря.

Рассмотрим моменты (9), где интегралы берутся по выделенной области турбулентной жидкости. Симметричная компонента тензора  $M^{(n)}$  равна поверхностному интегралу от нормальной компоненты завихренности (см. (10)). Поскольку на границе области  $(\vec{\omega}_1 \cdot d\vec{S}) = 0$ , то поле  $\vec{\omega}_1$  не дает вклада в интеграл (10). Поэтому симметричные компоненты тензоров  $M_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}$  отражают структуру поля  $\vec{\omega}$  лишь вне выделенной области. Информация о структуре поля  $\vec{\omega}$  внутри области содержится в тензорах (II). Выясним, какие неприводимые компоненты тензоров  $T^{(n)}$  не зависят от потенциальной компоненты  $\nabla \chi$  и содержат информацию лишь о структуре выделенного вихря. Подставим  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \nabla \chi$  в (II) и вычислим вклад потенциальной компоненты.

Для момента первого порядка получаем

$$\int e_{ijm} x_j \frac{\partial \chi}{\partial x_m} dV = \int \frac{\partial}{\partial x_m} e_{ijm} (\chi x_j) dV = e_{ijm} \int \chi x_j dS_m$$

Интеграл по сфере обращается в нуль, поскольку  $d\vec{S}$  коллинеарен  $\vec{x}$ . Следовательно, интеграл (2) совпадает с импульсом Ламба из изолированного вихря с распределением завихренности  $\omega_1$ :

$$\frac{1}{2} \int [\vec{x} \times \vec{\omega}] dV = \frac{1}{2} \int [\vec{x} \times \vec{\omega}_1] dV$$

Аналогично можно показать, что симметричные компоненты всех тен-

зоров (II) не зависят от потенциального фона  $\nabla\chi$ . В терминах теории представлений [15] это означает, что неприводимые компоненты тензоров (II) с весом  $\ell = n$  характеризуют изолированный вихрь с завихренностью  $\vec{\omega}_1$ . Эти компоненты описывают мультипольное искажение поверхности структуры за счет завихренности  $\vec{\omega}_1$ . В частности, симметричная компонента тензора (I2) и тензор (I4) дают, соответственно, квадрупольное и октупольное искажение формы структуры. Найдем вклад  $\nabla\chi$  в другие неприводимые компоненты тензоров  $T_{ij}^{(2)}$ ,  $T_{ijm}^{(3)}$ . Вклад  $\nabla\chi$  в вектор (I3) равен

$$e_{ijm} \int x^2 x_j \frac{\partial \chi}{\partial x_m} dV = e_{ijm} \int \frac{\partial}{\partial x_m} (x^2 x_j \chi) dV \quad (I9)$$

По теореме Гаусса интеграл (I9) преобразуется в интеграл по сфере. Для сферической поверхности  $dS_j = (x_j/x) dS$ . Отсюда мы получаем, что интеграл (I9) равен

$$e_{ijm} \int (x^2 x_j x_m / x) dS = 0$$

Следовательно, вектор (I3) также не зависит от потенциального фона.

Остальные неприводимые тензоры - антисимметричная компонента тензора  $T_{ij}^{(2)}$  и тензор (I5) - определяются как полем  $\vec{\omega}_1$  так и фоном  $\nabla\chi$ . Причину зависимости вектора (3) от фона легко понять, рассмотрев изолированный вихрь масштаба  $\lambda$  на фоне вращения всей массы жидкости по закону твердого тела. В реальных условиях этому примеру соответствует вращение структуры масштаба  $\lambda$  движениями больших масштабов. Момент импульса выделенной массы жидкости определяется как завихренностью  $\vec{\omega}_1$  так и движениями более крупных масштабов, которые соответствуют фону. При изучении организованного движения масштаба  $\lambda$  вклад в момент импульса от движений больших масштабов необходимо вычесть. Если фон неоднороден, то зави-

симость от него появляется в  $d_{\mu\nu}$  и в неприводимых компонентах веса  $n-1$  других тензоров  $T^{(n)}$ . Соответствующий вклад определяется сферической гармоникой порядка  $n-1$  в разложении нормальной компоненты завихренности на границе. Этот вклад необходимо также вычесть из неприводимых тензоров.

Вклад фона в  $\vec{J}$ ,  $d_{\mu\nu}$  (см. (3), (I5)) равен:

$$\vec{J}' = \frac{1}{3} \int [\vec{x} \times [\vec{x} \times \nabla\chi]] dV = -\frac{2}{3} \int \vec{x} \chi dV \quad (20)$$

$$d'_{\mu\nu} = \int \{x_\mu [\vec{x} \times [\vec{x} \times \nabla\chi]]_\nu + x_\nu [\vec{x} \times [\vec{x} \times \nabla\chi]]_\mu\} dV = \\ = 2 \int (3x_\mu x_\nu - x^2 \delta_{\mu\nu}) \chi dV \quad (21)$$

Используя запись  $\chi$  через функцию Грина задачи Неймана

$$\chi(\vec{x}) = \int G(\vec{x}, \vec{\xi}) (\vec{\omega} d\vec{S}), \quad (22)$$

можно выразить величины (20) (21) через интегралы от завихренности  $\vec{\omega}$ . Подставим (22) в (20), (21) и вычислим интеграл по  $dV(\vec{x})$ . Вычисления удобно выполнить в сферической системе координат с использованием разложения функции Грина в ряд по полиномам Лежандра [16]

$$G = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{2}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k} P_k(\cos\theta) \frac{x^k}{\lambda^{k+1}} \right]$$

Результат вычислений запишется в виде:

$$\vec{J}' = -\frac{2}{15} \lambda^2 \int \vec{\xi} (\vec{\omega} d\vec{S}) \quad (23)$$

$$d'_{\mu\nu} = -\frac{4}{7} \lambda^2 \int (3\xi_\mu \xi_\nu - \lambda^2 \delta_{\mu\nu}) (\vec{\omega} d\vec{S}) \quad (24)$$

Разности  $\vec{J} - \vec{J}' \equiv \vec{J}^{(\lambda)}$  и  $d_{\mu\nu} - d'_{\mu\nu} \equiv d_{\mu\nu}^{(\lambda)}$  равны, соответственно, моменту импульса Ламба и тензору скручивающих деформаций выделенного вихря масштаба  $\lambda$ . Используя теорему Гаусса, величины (23), (24) можно выразить через объемные интегралы. С учетом (3), (15), получим:

$$\vec{J}^{(\lambda)} = \frac{1}{5} \int (3x_i x_j - x^2 \delta_{ij}) \omega_j dV = \frac{1}{5} \int x^5 \omega_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{x} dV \quad (25)$$

$$d_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \frac{4}{7} \int (5x_\mu x_\nu x_\sigma - x^2 x_\mu \delta_{\nu\sigma} - x^2 x_\nu \delta_{\mu\sigma} - x^2 x_\sigma \delta_{\mu\nu}) \omega_\sigma dV = \\ = -\frac{4}{21} \int x^7 \omega_\sigma \frac{\partial^3}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\sigma} \frac{1}{x} dV \quad (26)$$

Аналогично могут быть выделены компоненты тензоров более высокого ранга, которые не зависят от потенциального фона. Эти компоненты описывают более тонкие детали движения, чем величины  $\vec{p}$ ,  $\vec{J}^{(\lambda)}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ ,  $d_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ ,  $c_{ijm}$  (см. (2), (13), (14), (25), (26)). Как и в случае изолированной структуры, все интегралы интегрированием по частям могут быть выражены через скорость. При этом появятся поверхностные интегралы от скорости, что может оказаться нежелательным. Например, пусть в некотором конечном числе точек измерена скорость. По статистическим причинам на границу области может попасть небольшая их доля, недостаточная для надежного вычисления поверхностного интеграла. Этим трудностей можно избежать, если отказаться от интегрирования по области с заданными границами. Введем под знак интегралов (4) весовую функцию  $W_L(x)$ , а интегрирование распространим на все пространство. Предполагается, что  $W_L$  близка к единице при  $x < L$  и быстро убывает вне этой области. Рассмотренные выше интегралы соответствуют ступенчатой функции  $W = \theta(\lambda - x)$ , равной единице при  $x < \lambda$  и равной нулю при  $x > \lambda$ . Случай произвольной функции  $W_L(x)$  можно свести к рассмотренному, если использовать разложение  $W_L$  в интеграл по ступенчатым функциям.

$$W_L(x) = - \int \frac{dW_L(\lambda)}{d\lambda} \theta(\lambda - x) d\lambda \quad (27)$$

Разложение (27) позволяет выделить изолированный вихрь, соответствующий обрезке  $W_L(x)$ . Его параметры определяются интегралами (2), (13), (14), (25), (26), если в них произвести замену  $dV \rightarrow W_L dV$ . Интегралы по поверхности от скорости превращаются в объемные интегралы по сферическому слою, эффективная толщина которого определяется профилем функции  $dW_L(x)/dx$ .

#### 4. Заключение

Как показано выше, тензорные поля  $M_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}(\vec{r})$ , где  $\vec{r}$  - координаты точки, в окрестности которой производится усреднение, содержат информацию о локальной упорядоченности движения. Инварианты  $\psi^{(n)}(\vec{r})$ ,  $n=1, 2, \dots$  тензоров  $M^{(n)}(\vec{r})$  не зависят от ориентации упорядоченного движения и дают количественную характеристику деталей структуры гидродинамических полей. Фактическое построение тензорных полей  $M^{(n)}(\vec{r})$  для достаточно сложного течения требует большого объема вычислений. Необходимость решения столь сложной задачи связана со спецификой турбулентности, как это указано в начале статьи.

Предположим, что из эксперимента или при численном моделировании получены величины  $M^{(n)}(\vec{r})$  и их инварианты для  $n \leq n_0$ . Возникает вопрос, какую информацию о характере турбулентных структур можно при этом получить и как получить эту информацию.

Зная распределение инвариантов по объему системы, можно выделить части жидкости, занятые соответствующими структурами. Распознавание типа структур по их полям  $\psi^{(n)}(\vec{r})$  возможно путем сравнения этих полей с эталонами, описывающие специально созданные типы вихревых возмущений - вихревых колец и нитей, сдвиговых слоев и т.д. Возникающая при этом возможность своеобразной спектроскопии структур по их инвариантам позволяет получить представление об их характере. Особенно интересным представляется изучение эволюции величин  $\psi^{(n)}(\vec{r}, t)$  во времени в сравнении с эволюцией изолированных структур.

Как уже отмечалось, величины  $M^{(n)}$ ,  $T^{(n)}$  и их инварианты описывают структуру обобщенным образом, и сравнение струк-



тур по их моментам  $M^{(n)}$  при  $n \leq n_0$  есть сравнение классов, к которым принадлежат изучаемые структуры. Можно ожидать, что инварианты  $\psi^{(n)}$  для небольших номеров  $n \leq 4$ , описывающие самые крупномасштабные деформации объема при течении, не слишком чувствительны к флуктуациям внутри структур.

Идентификация вихревой структуры в турбулентной жидкости с эталонной конфигурацией означает, что для этой структуры ее характеристики представлены как наложение флуктуаций на характеристики эталонной структуры. Произвольными при таком сравнении остаются выбор начала отсчета времени, положения и ориентации в пространстве. Возможно, с этими величинами связана, в основном, стохастичность турбулентности, поэтому их исследование в терминах моментов  $M^{(n)}(\vec{r}, t)$  представляется нам важной задачей.

## Л и т е р а т у р а

- I. Townsend A.A. The structure of turbulent shear flow. Cambridge University Press, Cambridge 1976.
2. Cantwell B.J. Ann. Rev. Fluid Mech. vol. 13, p. 457, 1981.
3. Saffman P.G. Lecture Notes in Physics vol. 136, p.1. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
4. Kovasznay L.S.G. Lecture Notes in Physics vol. 75, p. 1. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
5. Hussain A.K.M.F. Physics of Fluids vol. 26, p. 2816, 1983.
6. Johnson R.R. et al Phys. Fluids vol 19, p. 1422, 1976.
7. Орлов В.В., Михайлова Е.С., Хабахпаева Е.М. Метрология № 3 стр. 67, 1970.
8. Новиков Б.Г., Федосенко В.Д. - в сб. Гидродинамика и акустика пристенных турбулентных потоков. ИТФ СО АН СССР, Новосибирск. 1981.
9. Паташинский А.З., Митусь А.С. ЖЭТФ т.80, стр. 1551, 1981.
10. Паташинский А.З. Препринт № 84-64 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1984.
- II. Kuz'min G.A. Phys. Lett. A vol. 96, p. 88, 1983.
12. Кузьмин Г.А. Журнал ПМТФ № 4, стр. 25, 1984.
13. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. Мир, Москва, 1973.
14. Ламб Н. Гидродинамика. Гостехиздат, Москва, 1947.
15. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, Москва, 1958.
16. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Физматгиз, Москва, 1962.

Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

ПАРАМЕТРЫ ОРГАНИЗОВАННЫХ СТРУКТУР ТУРБУЛЕНТНЫХ  
ТЕЧЕНИЙ

Препринт  
№ 84-155

Работа поступила - 4 декабря 1984 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 7.XII-1984 г. МН 06248  
Формат бумаги 60x90 I/16 Усл. I,4 печ.л., I,I учетно-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 155.

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90