

21

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Д.Д.Рютов, Е.М.Сыренин

ТЕОРИЯ
«ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО» УСКОРЕНИЯ ИОНОВ
ОБЛАКОМ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ

ПРЕПРИНТ 84-129



НОВОСИБИРСК

ТЕОРИЯ "ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО" УСКОРЕНИЯ ИОНОВ
ОБЛАКОМ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Д. Д. Рютов, Е. М. Сыресин

АННОТАЦИЯ

В работе построено автомодельное решение, позволяющее самосогласованным образом описать газодинамическое ускорение ионов с учетом рассеяния и поглощения энергии электронов в анодной фольге. Найдены функции распределения осциллирующих электронов и ионов, определен к. п. д. ускорения ионов.

I. ВВЕДЕНИЕ

При инжекции электронного пучка с далеко закритическим током в вакуумное дрейфовое пространство почти все электроны отражаются от виртуального катода, возникающего у внешней поверхности анодной фольги, и начинают осциллировать между реальным и виртуальным катодами, постепенно рассеиваясь и поглощаясь в анодной фольге. Если на внешней поверхности анодной фольги создать достаточно плотную плазму^{*)}, то электрическое поле облака осциллирующих электронов будет вытягивать из нее ионы, которые будут нейтрализовать пространственный заряд облака. Соответственно, граница облака будет отодвигаться от катода, то есть облако вместе с нейтрализующими его ионами будет расширяться в пустоту (рис. I). Работа, совершаемая газом осциллирующих электронов при расширении облака, будет переходить в энергию ионов.

Как было показано в работе /I/, в условиях, когда ток инжектируемого пучка существенно превышает критический, смесь ионов с газом осциллирующих электронов обладает свойством квазинейтральности, то есть может рассматриваться как плазма. Уравнения, описывающие расширение этой (иногда ее называют "синтезированной") плазмы вдоль ведущего магнитного поля, совпадают

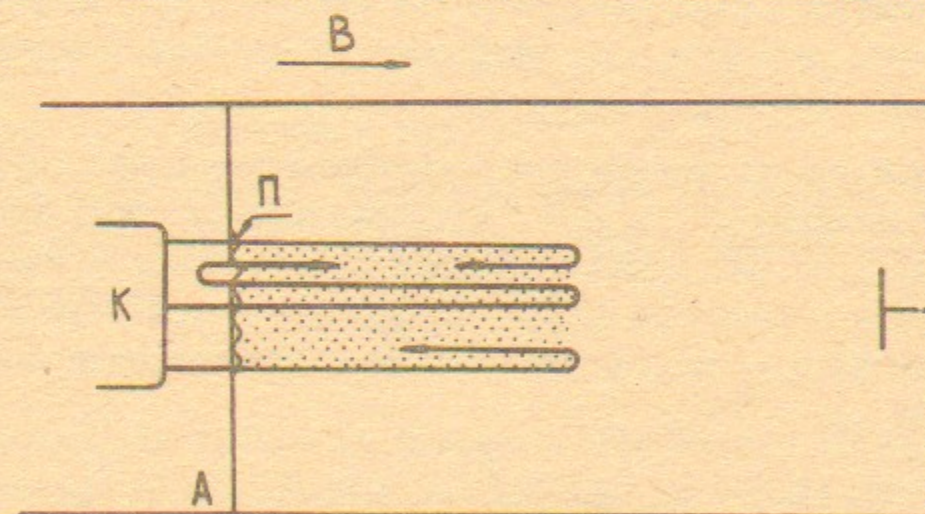


Рис. I. Схема газодинамического ускорения ионов.

К - катод; А - анодная фольга; П - поверхностная плазма, служащая источником ускоряемых ионов; точки - "синтезированная" плазма, стрелки иллюстрируют характер движения электронов, В - ведущее магнитное поле.

^{*)} Обычно она приготавливается посредством пробоя по поверхности тонкой диэлектрической пленки, расположенной с внешней стороны анодной фольги.

с уравнениями одномерной газовой динамики. Поэтому в работе /2/ рассматриваемый метод ускорения ионов было предложено называть "газодинамическим".

Характерная скорость расширения плазмы, то есть фактически характерная скорость ускоренных ионов, равна

$$v_i \sim \left(\frac{W_0}{M} \right)^{1/2},$$

где W_0 - энергия исходного электронного пучка, M - масса ионов (подразумевается, что заряд ионов равен единице). Эта скорость много меньше скорости электронов $v_0 = c(1 - \gamma^{-2})^{1/2}$, где $\gamma \equiv 1 + W_0/mc^2$ - релятивистский фактор электронного пучка (равный в типичных условиях 2+4). Поэтому каждый электрон совершает

$$N \sim \frac{v_0}{v_i} \sim \left(\frac{M}{m} \frac{\gamma+1}{\gamma^2} \right)^{1/2} \gg 1$$

пролетов через фольгу прежде, чем отдает свою энергию ионам (энергия передается через самосогласованное электрическое поле, обеспечивающее квазинейтральность плазмы). Соответственно, взаимодействие осциллирующих электронов с фольгой существенно влияет на весь процесс ускорения.

В случае тонкой фольги это взаимодействие можно характеризовать величинами $\bar{\theta}^2$ и δW , представляющими собой средне-квадратичный угол рассеяния и среднюю потерю энергии электрона при нормальном падении на фольгу (подразумевается, что $\theta^2 \ll 1$). Эти величины следующим образом связаны с характеристиками материала фольги (см. /3/):

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^2(p) &= \frac{4\pi l_0 n_0 Z^2 e^4 \Lambda_1}{p^2 v^2} \equiv \frac{l_0}{\lambda} \\ \delta W(p) &= \frac{2\pi l_0 n_0 Z e^4 \Lambda_2}{m v^2} \equiv \frac{l_0}{v} \dot{W} \end{aligned} \quad (I)$$

где p и v - импульс и скорость электрона, n_0 - число атомов в единице объема фольги, Z - атомный номер материала фольги, Λ_1 и Λ_2 - известные логарифмические множители, l_0 - толщина фольги. Величина λ имеет смысл длины рассеяния на угол порядка едини-

цы, а величина \dot{W} - скорости потерь энергии электрона, движущегося в материале фольги.

Рассеяние электронов на угол порядка единицы происходит за

$$N_1 \sim \frac{1}{\theta^2}$$

пролетов через фольгу, а заметная потеря энергии - за

$$N_2 \sim \frac{W_0}{\delta W}$$

пролетов. Существенно, что для фольги, изготовленной из материала с большим атомным номером ($Z \geq 10$), рассеяние идет значительно быстрее поглощения:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2\Lambda_1 Z}{\Lambda_2 \gamma \beta^2} \ll 1. \quad (2)$$

Очевидно, что одно из условий высокой эффективности ускорения состоит в том, чтобы осциллирующие электроны "остывали" из-за расширения облака быстрее, чем из-за торможения в фольге, то есть, чтобы было выполнено условие

$$N \ll N_2. \quad (3)$$

Это условие ограничивает толщину фольги сверху.

С другой стороны, в первых работах по теории газодинамического ускорения считалось, что толщина фольги ограничена и снизу условием

$$N_1 \ll N, \quad (4)$$

обеспечивающим изотропию облака осциллирующих электронов. Использование этого ограничения связано со следующим обстоятельством. При выполнении неравенства (3) характерная плотность облака n определяется оценкой $n v_i \sim n_b v_0$, где n_b - плотность пучка на фольге. Эта оценка отражает то очевидное обстоятельство, что рост числа частиц в облаке, связанный с увеличением его объема, происходит за счет инъекции частиц пучка. Из нее видно, что даже при ускорении ионов водорода плотность облака будет в десятки раз превышать плотность пучка. В связи с этим возникает вопрос, не приведет ли влияние пространственного

заряда той части облака, которая находится в диоде, к существенному снижению тока пучка по сравнению с величиной j_{b0} , определяемой "законом 3/2". Последнее нежелательно, поскольку в установившемся режиме ускорения плотность тока ускоренных ионов по порядку величины равна j_b , так что существенное уменьшение j_b по сравнению с j_{b0} одновременно означает снижение плотности тока ионов. Снижение j_b приводит и еще к одному нежелательному эффекту - увеличению длительности импульса ускорения, что означает рост вероятности перекрытия диодного промежутка плазмой или пробоя ускорительной трубки.

К счастью, как показано в работе /3/, если рассеяние осциллирующих электронов в фольге обеспечивает изотропию облака, то запирающее действие диода происходит при плотности облака, в десятки раз превосходящей n_{b0} , так что j_b , в принципе, может быть сравнимо с j_{b0} *. Возможность же одновременного выполнения условий (3) и (4) обеспечивается тем, что, в соответствии с (2), $N_1 \ll N_2$.

Основные качественные особенности газодинамического ускорения ионов были выявлены в работе /1/, в которой, в частности, было указано на существование дебаевского скачка у внешней стороны анодной фольги и построены автомоделные решения, позволяющие судить о предельной скорости расширения сгустка в вакуум. В найденных в работе /1/ автомоделных решениях все величины, характеризующие состояние ускоряемого сгустка (плотность, массовая скорость, давление) зависели от координаты x (отсчитываемой вдоль направления ускорения) и времени t только в комбинации $x/t = \xi$:

$$\rho = \rho(\xi), \quad v = v(\xi), \quad P = P(\xi). \quad (5)$$

Эти решения относились к случаю, когда в системе имелся большой буферный объем для накопления осциллирующих электронов.

Важный следующий шаг был сделан в работе /4/, где было показано, что при "ступенчатом" включении ускоряющего напряжения и при полном пренебрежении потерями энергии электронов в фольге автомоделность вида (5) сохраняется и в отсутствие буферного объема, то есть в ситуации, типичной для современных экспе-

* Мы не рассматриваем в настоящей статье возможности снижения импеданса диода путем нейтрализации заряда электронов диодного промежутка зарядом ионов, эмиттируемых с внутренней стороны анодной фольги.

риментов (см. /5-7/). Найденная в работе /4/ форма потенциальной ямы для электронов показана на рис.2. Ход потенциала в дебаевском скачке не зависит от времени, тогда как в области

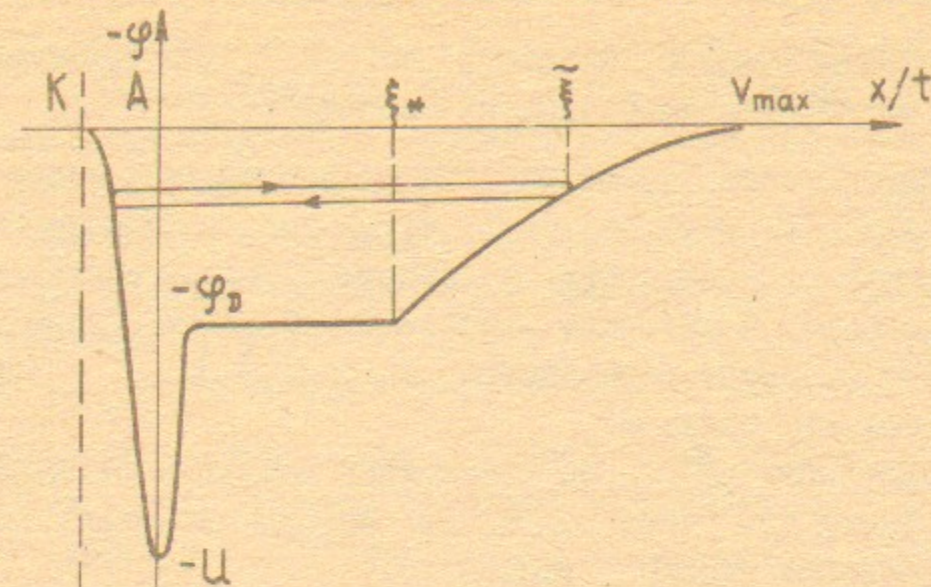


Рис.2. Форма потенциальной ямы для осциллирующих электронов.

$\varphi < \varphi_D$ ширина ямы линейно увеличивается со временем. Электроны, совершающие колебания внутри дебаевского слоя, "чувствуют" стационарное распределение потенциала, и их энергия не меняется. Что же касается электронов, проникающих в область ионного течения, то они теряют свою энергию вследствие расширения ямы. Так как рассеяние быстро размещивает электроны по сферическим оболочкам $|\vec{p}| = \text{const}$ (под \vec{p} мы понимаем импульс электронов в точке нахождения фольги) в пространстве импульсов, то скорость потерь импульса можно считать функцией только от $|\vec{p}|$. Поскольку скорость потерь импульса для электронов, захваченных в дебаевском слое, равна нулю (потерями импульса в фольге полностью пренебрегается), то поток частиц в импульсном пространстве в область $p < p_D$, где

$$p_D = \left[2me(U - \varphi) + \frac{e^2}{c^2}(U - \varphi)^2 \right]^{1/2},$$

равен нулю (величина p_D представляет собой тот предельный импульс, при котором электрон, вылетевший по нормали к поверхности фольги, еще удерживается в дебаевском слое). В области же $p_D < p < p_0$, где

$$p_0 = (2meU + \frac{e^2}{c^2} U^2)^{1/2},$$

замечательным образом оказалось (см. /4/), что функция распределения электронов на фольге не зависит от p .

Подводя итоги первым работам по теории газодинамического ускорения /1-4/, можно сказать, что в них был достаточно полно рассмотрен случай, когда рассеяние в фольге происходит бесконечно быстро, а потерями энергии в ней можно полностью пренебречь, т.е. когда неравенства $N_1 \ll N \ll N_2$ выполнены с очень большим запасом.

В настоящей работе мы рассмотрим задачу о газодинамическом ускорении при учете как потерь энергии в фольге, так и конечной скорости углового рассеяния.

В первой части работы (разделы II - VI) мы сохраняем предположение о бесконечно большой скорости углового рассеяния, допуская существование заметных потерь энергии. Наиболее чувствительной к ним оказывается функция распределения электронов в области $p < p_D$. Это связано с тем, что для электронов, захваченных в дебаевском слое, время торможения очень мало, порядка $N_2 r_D / v$, где r_D в типичных условиях (см. ниже) порядка $0,1 d$. Если время $N_2 r_D / v$ меньше длительности импульса ускорения τ , то в области $p < p_D$ устанавливается стационарная функция распределения, плавно сходящаяся с функцией распределения в области $p > p_D$.

Таким образом, в отличие от работы /4/, мы рассматриваем случай не слишком малых потерь энергии в фольге, когда

$$\frac{\delta W}{W_0} \gg \frac{d}{10c\tau}. \quad (6)$$

Подставляя в (6) типичные для современных экспериментов значения $d = 1$ см и $\tau = 30$ нс, получаем, что наше рассмотрение справедливо при $\delta W/W_0 > 10^{-4}$ - условие, которое практически всегда выполняется с большим запасом^{*}). Если же выполнено неравенство, обратное (6), то следует пользоваться результатами

^{*} Если за время эксперимента холодная поверхностная плазма, являющаяся источником ускоряемых ионов, успевает расширяться до размера a , превышающего $d/10$, то в неравенстве (6) величину $d/10$ следует заменить на a .

работы /4/. Нужно только иметь в виду, что при $\delta W/W_0 \ll d/10c\tau$ захваченные в дебаевском слое электроны за время τ не успевают изменить своей энергии и поглотиться. Поэтому, вообще говоря, вполне мыслима ситуация, когда в течение всего импульса ускорения в дебаевском слое будут "жить" те электроны, которые захватились там в начальные моменты поднятия напряжения. Формально это означает, что при $\delta W/W_0 \ll d/10c\tau$ автомодельное решение определено с большой степенью произвола - можно задавать разные функции распределения электронов, захваченных в дебаевский слой. Результаты работы /4/ соответствуют крайней возможности - когда захваченных электронов нет вовсе^{*}).

Вычисления, выполненные в первой части работы, показывают, что для фольг с не слишком большими значениями Z ($Z \leq 40$), из-за появления в задаче больших численных факторов, условие малости поглощения трудно совместимо с условием быстрого рассеяния. Поэтому во второй части работы (разд. VII, VIII) анализируется ситуация (характерная для экспериментов /5/), когда выполнено неравенство $N \leq N_1 \ll N_2$. Показано, что автомодельность (5) сохраняется и в этом случае и построены соответствующие автомодельные решения.

Автомодельные решения в задаче о газодинамическом ускорении ионов напоминают решения, описывающие разлет в пустоту первоначально полуограниченной плазмы с холодными ионами и горячими электронами (см. /9/). Особенность нашей задачи состоит в необходимости самосогласованного отыскания функции распределения электронов, которая сама формируется в ходе ускорения (и не может считаться просто заданной при $t = 0$). Дополнительные тонкости связаны с наличием дебаевского слоя на анодной фольге.

II. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ БЫСТРОМ РАССЕЯНИИ В ФОЛЬГЕ

Состояние облака осциллирующих электронов можно характеризовать функцией распределения электронов f в точке $x = 0$

^{*} Первый анализ задачи о газодинамическом ускорении ионов при условии (6) был выполнен в работе /8/. В ней было замечено, что при условии (6) автомодельность вида (5) сохраняется (несмотря на то, что потери энергии в фольге могут быть существенны). В той же работе были приведены параметры автомодельного решения, относящиеся к "нерелятивистским" ускоряющим напряжениям, $eU \lesssim mc^2$.

(на фольге). Если угловое рассеяние является самым быстрым процессом (т.е. выполнено неравенство (4)), то распределение электронов можно считать изотропным: $f = f(p, t)$. В пренебрежении потерями энергии в фольге вид функции распределения осциллирующих электронов был получен в работе /4/ путем операций последовательного усреднения кинетического уравнения по быстрым осцилляциям электронов и по углу. В данной работе приведен другой, более прямой (хотя и более громоздкий) вывод уравнения для $f(p, t)$, достоинство которого состоит в том, что он позволяет естественным образом оценить точность используемых приближений.

Рассмотрим сначала воображаемую ситуацию, когда в некоторый момент времени t , рассматриваемый как начальный, функция распределения электронов на фольге является моноэнергетической:

$$g(p, p_0, t) = \frac{\delta(p - p_0)}{4\pi p_0^2}. \quad (7)$$

Вследствие расширения потенциальной ямы (рис.2) и торможения электронов в фольге через промежуток времени Δt эта функция перейдет в другую, $g(p, p_0, t + \Delta t)$.

Очевидно, что знание функции $g(p, p_0, t + \Delta t)$ позволяет описать эволюцию за время Δt произвольной начальной функции распределения $f(p, t)$. Из смысла функции $g(p, p_0, t + \Delta t)$ (которая, по существу, является функцией Грина рассматриваемой задачи) следует, что

$$f(p, t + \Delta t) = 4\pi \int f(p_0, t) g(p, p_0, t + \Delta t) p_0^2 dp_0 \quad (8)$$

Если выбрать промежуток Δt достаточно малым по сравнению со временем "остывания" электронов τ , то функция $g(p, p_0, t + \Delta t)$ будет отлична от нуля только при $p_0 - p \ll p_0$. Соответственно, поскольку функция $f(p, t)$ является плавной функцией импульса, в подынтегральном выражении (8) можно будет использовать разложение

$$f(p_0, t) \approx f(p, t) + \frac{\partial f(p, t)}{\partial p} (p_0 - p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(p, t)}{\partial p^2} (p_0 - p)^2 \quad (9)$$

Одновременно проводя разложение

$$f(p, t + \Delta t) \approx f(p, t) + \frac{\partial f(p, t)}{\partial t} \Delta t, \quad (10)$$

легко получить следующее дифференциальное уравнение для f :

$$\frac{\partial f(p, t)}{\partial t} = \frac{\bar{1} - 1}{\Delta t} f(p, t) + \frac{\overline{\Delta p}}{\Delta t} \frac{\partial f(p, t)}{\partial p} + \frac{\overline{\Delta p^2}}{2 \Delta t} \frac{\partial^2 f(p, t)}{\partial p^2}, \quad (11)$$

где

$$\overline{\Delta p^n} = 4\pi \int_0^\infty (p_0 - p)^n g(p, p_0, t + \Delta t) p_0^2 dp_0, \quad (12)$$

причем $\bar{1} \equiv \overline{\Delta p^0}$.

Очевидно, что $\Delta p \sim p \Delta t / \tau$, то есть второе слагаемое в правой части (11) не зависит от Δt . Ниже будет показано, что величина $(\bar{1} - 1) / \Delta t$ также не зависит от Δt . Что же касается третьего слагаемого, то оно пропорционально Δt ($\overline{\Delta p^2} / \Delta t \sim p^2 \Delta t / \tau$) и стремится к нулю вместе с уменьшением Δt .

Минимально допустимое значение Δt есть, очевидно, время τ_s изотропизации электронов за счет рассеяния в фольге. Поскольку при $\Delta t \sim \tau_s$ отношение третьего и второго слагаемых в правой части (11) по порядку величины равно $\tau_s / \tau \ll 1$, то третьим слагаемым можно пренебречь по сравнению со вторым.

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы найти функцию $g(p, p_0, t + \Delta t)$. Предварительно заметим, что для начальной функции распределения (6) плотность электронов, имеющих на фольге угол θ в интервале $(\theta, \theta + d\theta)$, равна:

$$dn(x=0) = \sin \theta d\theta / 2. \quad (13)$$

Плотность этой же группы электронов в произвольной точке связана с $dn(x=0)$ уравнением непрерывности

$$dn(x) = dn(x=0) \frac{v_{||}(x=0)}{v_{||}(x)}. \quad (14)$$

Полное число электронов, угол θ у которых принимает на фольге значения в интервале $(\theta, \theta + d\theta)$, равно

$$dN = dn(x=0) v_{||} \cos \theta \int_0^x \frac{dx}{v_{||}(x)} = \frac{\sin \theta |\cos \theta| d\theta}{2} \cdot v_{||} t_{||}, \quad (15)$$

где $t_{||}$ - время движения электронов от фольги до точки поворота \tilde{x} .

Найдем теперь изменение начальной функции $g(p, p_0, t)$ за время Δt . Изменение δp импульса электронов за это время зависит, вообще говоря, от угла θ : $\delta p = \delta p(\theta, p_0)$. В результате заполнявшаяся электронами в начальный момент сферическая оболочка $p = p_0$ переходит в поверхность

$$p = p_0 - \delta p(\theta, p_0). \quad (I6)$$

Импульсы электронов, имевших угол θ в интервале $(\theta, \theta + d\theta)$, лежат теперь в области шириной

$$dp = \left| \frac{\partial \delta p(\theta, p_0)}{\partial \theta} \right| d\theta. \quad (I7)$$

Вследствие углового рассеяния эти электроны распределяются по сферическому слою толщиной dp . Число их dN , ввиду отсутствия потерь частиц, останется прежним. Это позволяет, учитывая (I4), записать следующее соотношение, определяющее

$$4\pi g(p, p_0, t + \Delta t) p^2 dp \cdot v(p) \int_0^{\pi/2} \sin\theta |\cos\theta| t_{||}(p, t + \Delta t) d\theta = \\ = \frac{1}{2} \sin\theta |\cos\theta| v(p_0) t_{||}(p_0, t, \theta), \quad (I8)$$

где $d\theta$ связано с dp соотношением (I7)*. В выражении (I8) учтено также, что все функции не меняются при замене $\theta \rightarrow \pi - \theta$. Окончательно, таким образом, имеем:

$$g(p, p_0, t + \Delta t) = \frac{1}{4\pi} \frac{v(p_0) t_{||}(p_0, t, \theta) \sin\theta |\cos\theta|}{v(p) p^2 (\partial p / \partial \theta)_{p_0} \langle t_{||}(p, t + \Delta t, \theta) \rangle}, \quad (I9)$$

где угловые скобки означают следующее усреднение:

$$\langle \dots \rangle = 2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \dots d\theta, \quad (20)$$

а индекс „ p_0 “ у производной $\partial p / \partial \theta$ указывает, что она берется при фиксированном значении p_0 (подразумевается, что p, p_0 и θ связаны между собой соотношением (I6)). Для дальнейшего нам потребуется также производная $(\partial p_0 / \partial \theta)_p$. Учитывая малость

* Для простоты считаем, что зависимость δp от θ на отрезке $0 \leq \theta \leq \pi/2$ монотонная. Если это не так, то в (I7) следует провести суммирование по монотонным ветвям.

с помощью (I6) легко показать, что

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right)_p = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{p_0} \left[1 - \frac{\partial \delta p}{\partial p} + O(\delta p^2) \right]. \quad (21)$$

Найдем теперь интересующие нас значения $\overline{\Delta p}$ и $\overline{I} - 1$. Учитывая соотношения (I6) и (I9) и переходя в (I2) от интегрирования по dp_0 к интегрированию по $d\theta$, получим:

$$\overline{\Delta p^n} = \frac{\langle \delta p^n(p, \theta, t) t_{||}(p_0, \theta, t) \frac{v(p_0) p_0^2 (\partial p_0 / \partial \theta)_p}{v(p) p^2 (\partial p / \partial \theta)_{p_0}} \rangle}{\langle t_{||}(p_0, \theta, t + \Delta t) \rangle} \quad (22)$$

При вычислении $\overline{\Delta p}$ следует учесть, что $\delta p \ll \Delta t$, поэтому с интересующей нас точностью можно в числителе (22) положить $p_0 = p$, а в знаменателе - $\Delta t = 0$. В результате находим

$$\overline{\Delta p} = \frac{\langle \delta p(p, \theta, t) t_{||}(p, \theta, t) \rangle}{\langle t_{||}(p, \theta, t) \rangle}. \quad (23)$$

При вычислении $\overline{I} - 1$ этого приближения оказывается недостаточно (оно дает $\overline{I} - 1 = 0$). Теперь необходимо в числителе (22) учесть разницу между p_0 и p , что, при использовании (I6) и (21), дает:

$$t_{||}(p_0, \theta, t) \frac{v(p_0) p_0^2 (\partial p_0 / \partial \theta)_p}{v(p) p^2 (\partial p / \partial \theta)_{p_0}} \approx t_{||}(p, \theta, t) \left[1 + \frac{\partial \delta p}{\partial p} + \frac{\delta p}{p^2 v} \frac{\partial p^2 v}{\partial p} + \frac{\delta p}{t_{||}} \frac{\partial t_{||}}{\partial p} \right].$$

В знаменателе же (22) следует учесть, что $\Delta t \neq 0$. В результате получаем:

$$\frac{\overline{I} - 1}{\Delta t} = \frac{\langle t_{||} \left(\frac{\partial \delta p}{\partial p} + \frac{\delta p}{p^2 v} \frac{\partial p^2 v}{\partial p} + \frac{\delta p}{t_{||}} \frac{\partial t_{||}}{\partial p} - \frac{\partial t_{||}}{\partial t} \right) \rangle}{\langle t_{||} \rangle} \quad (24)$$

Смысл угловых скобок определяется выражением (20).

Величина $\delta p(p, \theta, t)$ складывается из двух слагаемых: потеря импульса при прохождении электронов через фольгу δp_1 и потеря за счет расширения облака δp_2 :

$$\delta p = \delta p_1 + \delta p_2. \quad (25)$$

Первое слагаемое может быть записано в виде:

$$\delta p_1 = - \frac{\delta W}{v |\cos \theta|} \frac{\Delta t}{t_{||}}, \quad (26)$$

где δW - потери энергии при одном прохождении электрона через фольгу при нормальном падении, множитель $|\cos \theta|^{-1}$ учитывает возрастание потерь при наклонном падении, а отношение $\Delta t/t_{||}$ представляет собой число прохождений электроном через мишень за время Δt .

Укажем на распространенное заблуждение, состоящее в том, что при скользящем падении электронов на фольгу с $Z \gg 1$ они поглощаются в ней (как это формально могло бы следовать из соотношения (26)). На основе такого предположения в работе /10/ предлагалось использовать для функции распределения осциллирующих электронов граничное условие $f(\theta = \pi/2) = 0$. На самом деле при $Z \gg 1$ электрон даже при скользящем падении рассеивается по углу и вылетает из фольги существенно раньше, чем успевает поглотиться, и теряет лишь незначительную долю энергии. Это обстоятельство не учитывается соотношением (26), которое справедливо только при $|\theta - \frac{\pi}{2}| \geq (\bar{\theta}^2)^{1/3}$ (при $|\theta - \frac{\pi}{2}| \leq (\bar{\theta}^2)^{1/3}$ средняя энергия, теряемая электроном при прохождении через фольгу, перестает расти с уменьшением угла θ). Однако, при вычислении средних по углу потерь по формуле (23) эта неточность формулы (26) не играет роли, поскольку весовой множитель в (23) быстро убывает при $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Уменьшение импульса за счет расширения облака (т.е. величину δp_2) можно найти из условия сохранения продольного адиабатического инварианта

$$I(p, \theta, t) = \int_0^{\tilde{x}} q_{||}(x, p, \theta) dx \quad (27)$$

при дополнительном условии $q_{\perp} = \text{const}$, выражающем собой факт неизменности поперечной компоненты импульса частицы. Здесь

$$q_{||}(x, p, \theta) = [q^2(x, p) - q_{\perp}^2]^{1/2} -$$

продольный импульс электрона в точке x , $q(x, p)$ - полный импульс электрона в точке x , \tilde{x} - координата правой точки поворота, нижний предел в (27) заменен на нуль, поскольку в задаче рассматриваются времена, когда $\tilde{x} \gg \Gamma_D$. Напомним, что p

и θ - импульс и питч-угол электрона на фольге.

Как показано в Приложении, δp_2 может быть записано в виде:

$$\delta p_2 = - \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\Delta t}{v t_{||}} \quad (28)$$

В результате находим изменение импульса частицы δp за время Δt :

$$\delta p(p, \theta, t) = - \left(\frac{\delta W}{|\cos \theta|} + \frac{\partial I}{\partial t} \right) \frac{\Delta t}{v t_{||}} \quad (29)$$

Подставляя полученное выражение для δp в (23) и (24) и интегрируя по углу θ , находим (см. Приложение)

$$t_{||} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\delta W}{v} + \frac{1}{3v} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\tilde{x}} \frac{q^3(x, p)}{p^2} dx, \quad (30)$$

$$\langle t_{||} \rangle \frac{\bar{1}-1}{\Delta t} = \frac{1}{p^2 v} \frac{\partial p^2 \delta W}{\partial p} \quad (31)$$

Таким образом, уравнение для функции распределения будет иметь следующий вид:

$$\langle t_{||} \rangle \frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\delta W}{v} + \frac{1}{3v} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\tilde{x}} \frac{q^3(x, p)}{p^2} dx \right) \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{f}{p^2 v} \frac{\partial p^2 \delta W}{\partial p} + \frac{n_b}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_0) \quad (32)$$

Последний член в уравнении (32) описывает рост числа электронов в облаке за счет их инжекции с катода.

При выводе уравнения (32) существенным образом было использовано то обстоятельство, что угловое рассеяние электронов в фольге самый быстрый процесс. Формально вывод относился к случаю, когда среднеквадратичный угол рассеяния $\bar{\theta}^2$ при одном прохождении через фольгу был еще мал по сравнению с единицей. Вместе с тем, при использовании фольг из материала с очень большим Z вполне реальна ситуация, когда, одновременно с условием $\delta W/W_0 \ll 1$, будет выполняться условие $\bar{\theta}^2 \geq 1$. В этом случае проникновение через фольгу носит диффузионный характер с коэффициентом диффузии $D \sim \lambda v$ (λ определяется соотношением

(I)). Если время диффузии электронов через фольгу $t_D \sim l_0^2/D$ будет меньше времени потерь энергии электронов W_0/\dot{W} (где \dot{W} находится из соотношения (I)), то плотность облака осциллирующих электронов останется однородной внутри фольги. Это условие можно переписать в виде

$$l_0 \leq Z^{1/2} \lambda. \quad (33)$$

До тех пор, пока плотность облака будет однородна внутри фольги, вычисление скорости потерь энергии осциллирующими электронами по-прежнему приводит к результату, выраженному уравнением (32), в котором под δW следует понимать величину, формально вычисляемую с помощью (I). Поэтому условие применимости уравнения (32) со стороны толстых фольг выражается не условием $\theta^2 \ll 1$, а условием (33).

Еще одно замечание, которое следует сделать по поводу вывода уравнения (32), состоит в том, что он не учитывает наличия малой группы электронов, которые, после отражения от потенциального барьера в диоде и преодоления дебаевского потенциала, не могут догнать границу области постоянного течения $x = \xi_* t$ (см. рис.2). Такие электроны накапливаются в области постоянного течения. Однако оценки показывают, что их доля мала, $\sim (m/M)^{1/2}$.

III. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В АВТОМОДЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Характер движения осциллирующих электронов, как это видно из рис.2, существенно зависит от импульса частицы. Электроны, импульс которых меньше p_D , совершают колебания в стационарном потенциале дебаевского слоя. Для них верхний предел интегрирования $\tilde{\xi}$ во втором слагаемом в (30) не зависит от времени, и это слагаемое обращается в нуль: такие электроны теряют импульс только в анодной фольге. Что же касается электронов, импульс которых превышает p_D , то они проникают в область нестационарного потенциала, и их энергия меняется как вследствие торможения в фольге, так и вследствие расширения потенциальной ямы.

В автомодельном решении потенциал φ зависит от координаты x и времени t только в комбинации x/t . При этом (см. /4/) время продольного движения $t_{||}(p, \theta, t)$ и адиабатический инвариант $I(p, \theta, t)$ являются линейными функциями времени для электронов с импульсом $p > p_D$:

$$t_{||}(p, \theta, t) = t \int_0^{\tilde{\xi}} \frac{d\xi}{v_{||}(\xi, p, \theta)} \equiv t \tau_{||}(p, \theta), \quad (34)$$

$$I(p, \theta, t) = t \int_0^{\tilde{\xi}} q_{||}(\xi, p, \theta) d\xi = t J(p, \theta);$$

для электронов с $p < p_D$ эти величины равны нулю (т.к. при $p < p_D$ можно считать $\tilde{\xi} = 0$).

Из сказанного следует, что для потенциала, являющегося только функцией отношения x/t , уравнение (32) имеет вид:

$$t \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{1}{3v} \int_0^{\tilde{\xi}} \frac{q^3(\xi, p)}{p^2} d\xi \cdot \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{p^2 v} \frac{\partial (p^2 \delta W f)}{\partial p} + \frac{n_b}{4\pi p_0^2} \delta(p - p_D). \quad (35)$$

Поскольку в правую часть уравнения (35) время не входит, это уравнение (как и в задаче, рассмотренной в /4/) имеет стационарное решение $f = f(p)$. Нужно только оговориться, что для установления этого стационарного состояния требуется время порядка $(W_0/\delta W)(r_D/v)$ - чтобы электроны, захваченные в дебаевском слое, успели замедлиться до нуля. Поэтому полученные результаты, как уже отмечалось выше, справедливы только при условии (6).

Решая уравнение (35) (с $\partial f/\partial t = 0$), легко приходим к следующему результату

$$f(p) = \frac{n_b v_0}{4\pi \omega(p_0)} \exp \left[\int_p^{p_0} \frac{dp}{\omega(p)} \frac{\partial p^2 \delta W}{\partial p} \right], \quad (36)$$

где

$$\omega(p) = p^2 \delta W(p) + \frac{1}{3} \int_0^{\tilde{\xi}} q^3(\xi, p) d\xi.$$

Еще раз обратим внимание на тот факт, что при $p < p_D$ второй член, стоящий в знаменателе подынтегральной функции в (36), равен нулю (т.к. при $p < p_D$ $\tilde{\xi} = 0$).

Знание функции f позволяет найти плотность электронов в точке с потенциалом φ :

$$n(\varphi) = 4\pi \int_0^{\rho} \rho^2 f[\rho, \varphi] d\rho, \quad (37)$$

$$q(\rho, \varphi) = \left\{ \left[(\rho^2 + m^2 c^2)^{1/2} + \frac{e}{c} (\varphi - U) \right]^2 - m^2 c^2 \right\}^{1/2}.$$

Заметим, что, согласно (36), плотность осциллирующих электронов пропорциональна плотности n_b электронов пучка на фольге:

$$n(\varphi) = n_b \nu(\varphi) \quad (38)$$

где безразмерная функция $\nu(\varphi)$ не зависит от n_b .

IV. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО УСКОРЕНИЯ ИОНОВ

Содержание этого раздела в значительной мере перекрывается с работами /I/ и /4/, но для удобства читателя полезно вновь привести уравнения, которые будут основой для дальнейшего анализа задачи. Уравнение непрерывности и уравнение движения ионов,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_i}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

в автомоделных переменных записывается следующим образом:

$$(v_i - \xi) \frac{dn}{d\xi} + n \frac{dv_i}{d\xi} = 0 \quad (39)$$

$$(v_i - \xi) \frac{dv_i}{d\xi} = -\frac{e}{M} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

Плотность ионов в силу условия квазинейтральности равна плотности электронов и с помощью соотношений (36) - (38) может быть выражена через φ и плотность электронов пучка n_b .

Функция $e\varphi/M$, входящая в уравнения движения ионов, играет роль энтальпии единицы массы газа; её зависимость от плотности определяется неявным образом уравнением (38).

Рассматриваемая нами задача похожа на задачу о расширении в пустоту первоначально полуограниченного облака газа. В обычной газодинамике система (38), (39) дает решение этой задачи в форме волны разрежения (см., например, /II/). Существенно новым моментом в нашем случае является наличие дебаевского скачка у внешней стороны анодной фольги. Здесь все ионы ускоряются до некоторой скорости v_* . Поэтому волна разрежения сносится вниз по течению вместе с потоком газа. В результате картина движения выглядит так, как это показано на рис. 3^{ж)}, причем точка $\xi = \xi_*$ соответствует границе между невозмущенным газом и волной разрежения.

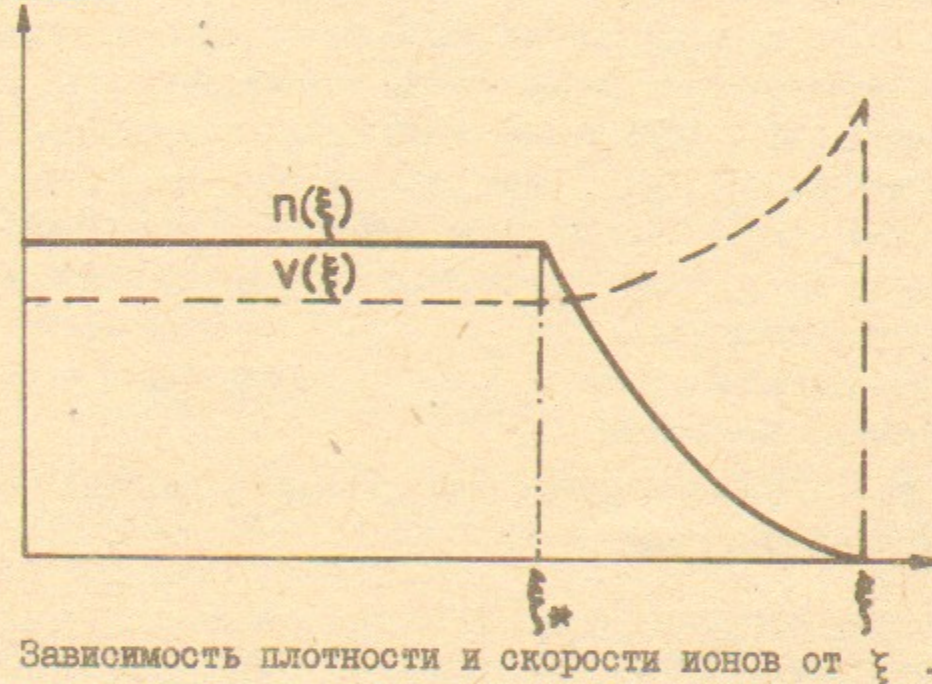


Рис. 3. Зависимость плотности и скорости ионов от ξ .

Скорость потока газа за дебаевским скачком определяется законом сохранения энергии:

$$v_* = \left[\frac{2e(U - \varphi_D)}{M} \right]^{1/2} \quad (40)$$

^{ж)} В принципе мыслима ситуация, когда скорость течения ионов за дебаевским слоем будет меньше скорости движения границы волны разрежения в сторону невозмущенного газа; тогда участок с постоянными параметрами потока ($0 < \xi < \xi_*$) не реализуется. Однако во всех рассмотренных в работе численных примерах этот участок имеется.

Еще одно граничное условие на скачке выражает собой равенство нулю электрического поля в области однородного потока за скачком (см. /4/):

$$\int_{\varphi_D}^U n(\varphi) d\varphi = n_b v_0 \int_{\varphi_D}^U \frac{d\varphi}{\left[\frac{2e(U-\varphi)}{M} \right]^{1/2}} \quad (41)$$

При заданной плотности пучка n_b и известной функции $\nu(\varphi)$ система уравнений (38) - (41) полностью определяет решение газодинамической части задачи. Основные трудности состоят в самосогласованном отыскании функции $\nu(\varphi)$: она определяется функцией распределения электронов (см. (37)), а последняя, в свою очередь - зависимостью потенциала от ξ (см. (36)). Соответствующая задача в большинстве случаев может быть решена только численно, с помощью метода последовательных приближений: задавая на нулевом шаге форму потенциальной ямы $\varphi(\xi)$, с помощью уравнений (36), (37) можно найти функцию распределения $f(p)$ и, соответственно, $\nu(\varphi)$. Зная зависимость $\nu(\varphi)$, из системы уравнений (38) - (41) находим следующее приближение для $\varphi(\xi)$. Повторяя эту процедуру несколько раз, можно найти достаточно точное выражение для $f(p)$ (и $\nu(\varphi)$). В результате получается самосогласованное решение задачи, определенное с точностью до масштабного множителя n_b .

Этот множитель можно найти, решая уравнение Пуассона в диоде. Оно имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi e n_b \left[\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\gamma} \frac{mc + \frac{e\varphi}{c}}{(2me\varphi + \frac{e^2\varphi^2}{c^2})^{1/2}} + \nu(\varphi) \right], \quad (42)$$

где первое слагаемое учитывает плотность заряда электронов пучка, а второе слагаемое - плотность заряда осциллирующих электронов. В данном случае будем считать, что в точке $x = 0$ находится катод, а в точке $x = d$ - анод. Отыскивая решение уравнения (42), удовлетворяющее граничным условиям

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=d} = U, \quad \frac{d\varphi}{dx}|_{x=0} = 0, \quad (43)$$

можно найти n_b , и тем самым завершить решение задачи.

Как уже отмечалось, реализация этой программы в общем случае требует привлечения численных методов. Вместе с тем, существует случай, когда решение может быть найдено аналитически /8/: это случай нерелятивистских электронов $W_0 \ll mc^2$. Соответствующее решение (опущенное в работе /8/) приводится в следующем разделе.

У. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ЭЛЕКТРОНЫ

В нерелятивистском случае, как это показывает формула (1), произведение $p^2 \delta W$ не зависит от энергии электрона, и поэтому функция распределения электронов на фольге, определяемая формулой (36), есть просто константа во всем интервале импульсов от $p = 0$ до $p = p_0$:

$$f(p) = \begin{cases} \frac{n_b v_0}{4\pi \omega(p_0)}, & p \leq p_0, \\ 0, & p \geq p_0. \end{cases}$$

Соответственно, из соотношений (37) и (39) имеем

$$\nu(\varphi) = \frac{p_0^3 v_0}{3\omega(p_0)} \psi^{3/2}, \quad (44)$$

где $\psi = \varphi/U$ - безразмерный потенциал.

Будем измерять в уравнениях (38) скорость ионов в единицах $(W_0/M)^{1/2}$, а плотность ионов в единицах $n_0 \equiv n_b \nu(1)$, то есть совершим замену переменных $v_i \rightarrow (W_0/M)^{1/2} v_i$, $n \rightarrow n_0 n$, $\xi \rightarrow (W_0/M)^{1/2} \xi$, где величины ξ , v и n , стоящие справа, являются уже безразмерными. В этих переменных уравнения (39) приобретают вид:

$$(v_i - \xi) \frac{dn}{d\xi} = -n \frac{dv_i}{d\xi}, \quad (45)$$

$$(v_i - \xi) \frac{dv_i}{d\xi} = -\frac{2}{3} n^{1/3} \frac{dn}{d\xi},$$

где мы учли, что, согласно (44),

$$n = \psi^{3/2}. \quad (46)$$

Найдем сначала форму решения в области волны разрежения, где $\frac{dn}{d\xi}, \frac{dv_i}{d\xi} \neq 0$. Деля первое из уравнений (45) на второе, находим:

$$\left(\frac{dv_i}{dn}\right)^2 = \frac{2}{3} n^{-4/3}$$

Извлекая корень и учитывая, что скорость ионов должна расти с уменьшением плотности (см. рис. 3), откуда с легкостью находим, что

$$v_i = -\sqrt{6} n^{1/3} + \text{const.}$$

В точке $n = 0$ скорость ионов достигает своего предельного значения, которое мы обозначим через v_{\max} . В результате получаем, что

$$v_i = v_{\max} - \sqrt{6} n^{1/3}. \quad (47)$$

Перемножая уравнения (45), находим

$$(v_i - \xi)^2 = \frac{2}{3} n^{2/3},$$

что совместно с (47) дает:

$$v_i = \frac{1}{4} (3\xi + v_{\max}),$$

$$n = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \frac{(v_{\max} - \xi)^3}{64}, \quad (48)$$

$$\psi = \frac{3}{32} (v_{\max} - \xi)^3.$$

Это решение справедливо при $\xi_* < \xi < v_{\max}$ (обозначения см. на рис. 2).

Обозначим значения n и v_i в области постоянного течения $0 < \xi < \xi_*$ через n_* и v_* , соответственно. Из условия сшивки этого течения с волной разрежения имеем:

$$v_* = \frac{1}{4} (3\xi_* + v_{\max}),$$

$$n_* = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \frac{(v_{\max} - \xi_*)^3}{64}, \quad (49)$$

причем, согласно (46), $n_* = \psi_D^{3/2}$. С другой стороны, граничные условия (40) и (41) на дебаевском скачке дают:

$$v_* = [2(1 - \psi_D)]^{1/2}$$

$$1 - \psi_D^{5/2} = 5\psi_D^{3/2}(1 - \psi_D). \quad (50)$$

Решая систему алгебраических уравнений (49) и (50), находим все не определенные пока значения численных параметров:

$$\begin{aligned} \xi_* &= 0,336; \\ \psi_D &= 0,466; \\ v_* &= 1,08; \\ v_{\max} &= 2,72; \\ n_* &= 0,318. \end{aligned} \quad (51)$$

Зная зависимость $\psi(\xi)$, которая задается соотношениями (48) и (51), можно вычислить величину $\omega(p_0)$ (см. (36)), определяющую связь между n_0 и n_b :

$$\omega(p_0) = \frac{p_0^3 v_0^3}{3} \left(\frac{3}{2} \frac{\delta W(p_0)}{W_0} + \left(\frac{3}{32}\right)^{3/2} \frac{v_{\max}^4}{4} \left(\frac{m}{2M}\right)^{1/2} \right). \quad (52)$$

Теперь из (36) определяем связь между n_0 и n_b :

$$n_0 = \frac{n_b}{\frac{3}{2} \frac{\delta W(p_0)}{W_0} + \left(\frac{3}{32}\right)^{3/2} \frac{v_{\max}^4}{4} \left(\frac{m}{2M}\right)^{1/2}}. \quad (53)$$

Таким образом, задача о течении "синтезированной" плазмы в области ускорения ионов полностью решена. Остается найти плотность пучка n_b . Для этого решим уравнение Пуассона в диоде с граничными условиями (43). В предположении, что ионов внутри диода нет, имеем

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{4\pi e^2}{W_0} [n_b \psi^{-1/2} + n_0 \psi^{3/2}]. \quad (54)$$

Проводя интегрирование, аналогично тому, как это делается при выводе "закона 3/2", получаем

$$R \equiv \int_0^1 \frac{d\psi}{(\psi^{5/2} + \frac{5n_b}{n_0} \psi^{1/2})^{1/2}} = \sqrt{\frac{16\pi e^2 n_0 d^2}{5W_0}}. \quad (55)$$

В интеграле (55) перейдем к новой переменной $y = \psi^2/s$, где $s = 5n_b/n_0$:

$$R = 2s^{-1/8} \int_0^{s^{-1/4}} \frac{y^{1/2} dy}{(1+y^4)^{1/2}} \equiv 2s^{-1/8} \left(\int_0^{\infty} \frac{y^{1/2} dy}{(1+y^4)^{1/2}} - \int_{s^{-1/4}}^{\infty} \frac{y^{1/2} dy}{(1+y^4)^{1/2}} \right). \quad (56)$$

Учитывая, что, согласно сказанному во Введении, $s \ll 1$, разложим знаменатель подынтегральной функции во втором интеграле (56) в ряд: $(y^4+1)^{-1/2} = y^{-2} + y^{-6} + O(y^{-8})$. Интегрируя (56), находим

$$R = 2s^{-1/8} \left[\frac{1}{4} B\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) - 2s^{1/8} + \frac{1}{9} s^{9/8} + O(s^{17/8}) \right], \quad (57)$$

где $B\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) \approx 10,4$ - бета-функция Эйлера^{*}.

Из формулы (53) видно, что для не слишком толстых фольг ($\delta W/W_0 \leq 0,05$), только и представляющих интерес в задаче о газодинамическом ускорении, $s < 0,25$. Поэтому с точностью до 2-3% в (57) можно пренебречь всеми членами, начиная с третьего. Окончательно имеем:

$$n_0 = \frac{5W_0}{4\pi e^2 d^2} \frac{1}{s^{1/4}} \left[\frac{1}{4} B\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) - 2s^{1/8} \right]^2. \quad (58)$$

Используя соотношение (53) и учитывая, что $j_b = en_b v_0$, откуда находим, что

$$\frac{j_b}{j_{b0}} = 14,5 s^{3/4} (1 - 0,8 s^{1/8})^2. \quad (59)$$

где, согласно (53),

$$s \equiv \frac{5n_b}{n_0} = 7,5 \frac{\delta W(A)}{W_0} + 1,17 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2},$$

а

$$j_{b0} = \frac{1}{9\pi d^2} \left(\frac{2W_0^3}{m}\right)^{1/2}$$

плотность диодного тока, определяемого по "закону 3/2".

Вычислим коэффициент полезного действия ускорения ионов, определенный как отношение энергосодержания ионов к энергии, введенной в систему электронным пучком:

* В справочнике /12/ в формуле 3.248.I для интеграла вида (56) допущена ошибка.

$$\eta = \frac{\frac{M}{2} \int_0^{\bar{x}} n v_i^2 dx}{n_b v_0 W_0 t} \equiv \frac{\frac{M}{2} \int_0^{V_{\max}} n v_i^2 d\xi}{n_b v_0 W_0}. \quad (60)$$

Подставляя в (60) полученные выше выражения для n и V_i , выполняя интегрирование и учитывая численные значения констант n_* , ξ_* и т.д. (см. (51)), находим:

$$\eta = \frac{0,179 n_0 \sqrt{2W_0/M}}{n_b v_0}. \quad (61)$$

Воспользовавшись формулой (53), имеем:

$$\eta = \frac{0,77}{1 + 6,44 \frac{\delta W}{W_0} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}} = \frac{0,895}{s} \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (62)$$

Видно, что к.п.д. ускорения близок к своему предельному значению 0,77 только при $\delta W/W_0 < 0,2 \sqrt{m/M}$. Отличие η от единицы при $\delta W \rightarrow 0$ связано с тем, что в каждый момент времени в системе имеются осциллирующие электроны с конечным значением энергии.

Из выражений (62) и (59) следует, что эффект запирания диода пространственным зарядом осциллирующих электронов прямо связано с к.п.д. ускорения. При малых потерях, когда η близко к 0,77, имеем $s = 1,17 \sqrt{m/M}$, т.е.

$$\frac{j_b}{j_{b0}} = 16,3 \left(\frac{m}{M}\right)^{3/8} \left(1 - 0,85 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/6}\right)^2.$$

Для водорода $j_b/j_{b0} = 0,23$, для аргона (с $Z = 1$) $j_b/j_{b0} = 0,084$. Таким образом, при ускорении тяжелых ионов запирание диода действительно может быть существенным.

VI. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ИОННОГО ПОТОКА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ γ .

Решение системы автомодельных уравнений газодинамического ускорения ионов (39) для произвольных значений релятивистского фактора γ может быть найдено численно, с помощью метода последовательных приближений по схеме, приведенной в разделе IV. Итерационный процесс быстро сходится, и обычно требуется лишь 3-5 итераций, чтобы получить достаточно точное выражение для

Функции распределения осциллирующих электронов $f(p)$. Сравнение результатов численных расчетов с аналитическим решением, приведенном в разделе V, позволяет судить о точности решений, полученных с помощью численных расчетов, которая обычно составляет 1-2%.

Ниже обсуждаются результаты расчетов, выполненных в предположении о справедливости условия (6). Для сравнения в ряде случаев приведены также взятые из работы /4/ параметры ионного потока, соответствующие случаю, когда выполнено условие, обратное (6).

Первая серия расчетов относится к случаю, когда $\gamma = 3$, а $\delta W/mc^2 = 4 \cdot 10^{-3}$. На рис.4 изображена функция распределения осциллирующих электронов $f(p)$. Отметим, что, как следует из (36),

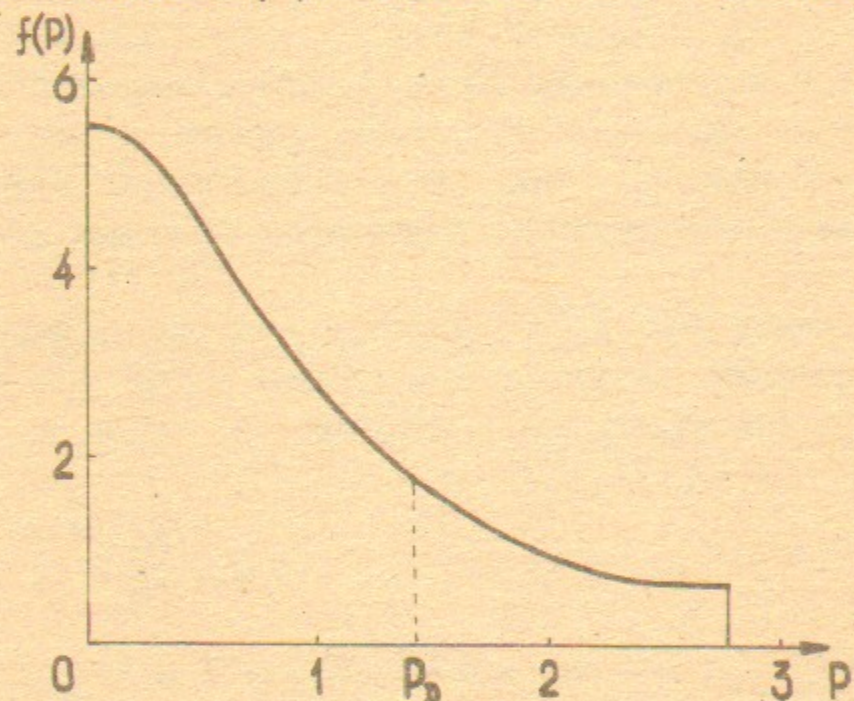


Рис.4. Зависимость функции распределения f от импульса p .

$f(p)$ уже не является константой во всем интервале импульсов $0 \leq p \leq p_0$, как это было при $W_0 \ll mc^2$.

Отношение плотности облака осциллирующих электронов $n(\psi)$ к плотности пучка n_b показано на рис.5. Спектр ускоренных ионов приведен на рис.6. Предельная энергия ускоренных ионов равна $4,03 W_0$. Нижняя граница спектра, связанная с начальным ускорением ионов в дебаевском слое, равна $0,36 W_0$. Наличие δ -образного пика в функции распределения ионов при энергии W_{min}

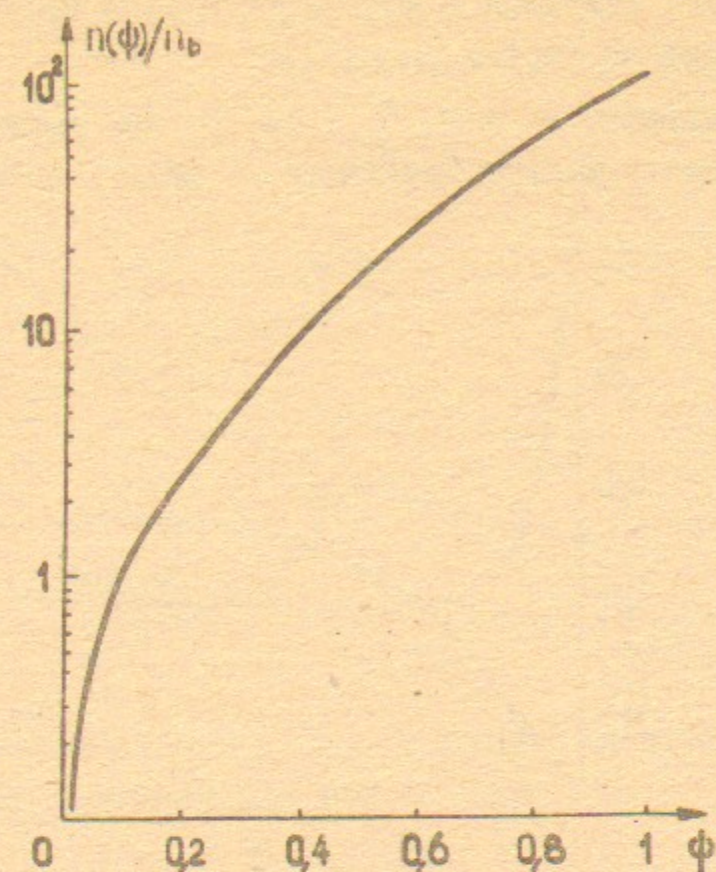


Рис.5. Отношение плотности облака осциллирующих электронов $n(\psi)$ к плотности пучка n_b как функция ψ .

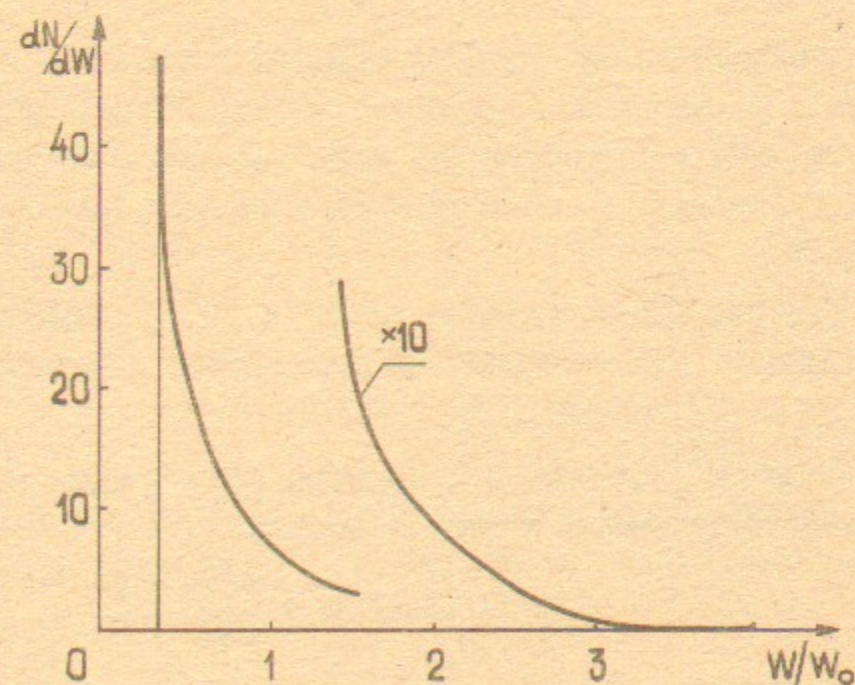


Рис.6. Зависимость функции распределения ионов от их энергии.

было впервые отмечено в работе /4/. Доля частиц в этом пике в рассматриваемом случае равна 0,41.

Зависимость η и j_b/j_{b0} от γ при конечной величине потерь энергии в фольге приведена на рис.7. Резкий спад η и рост

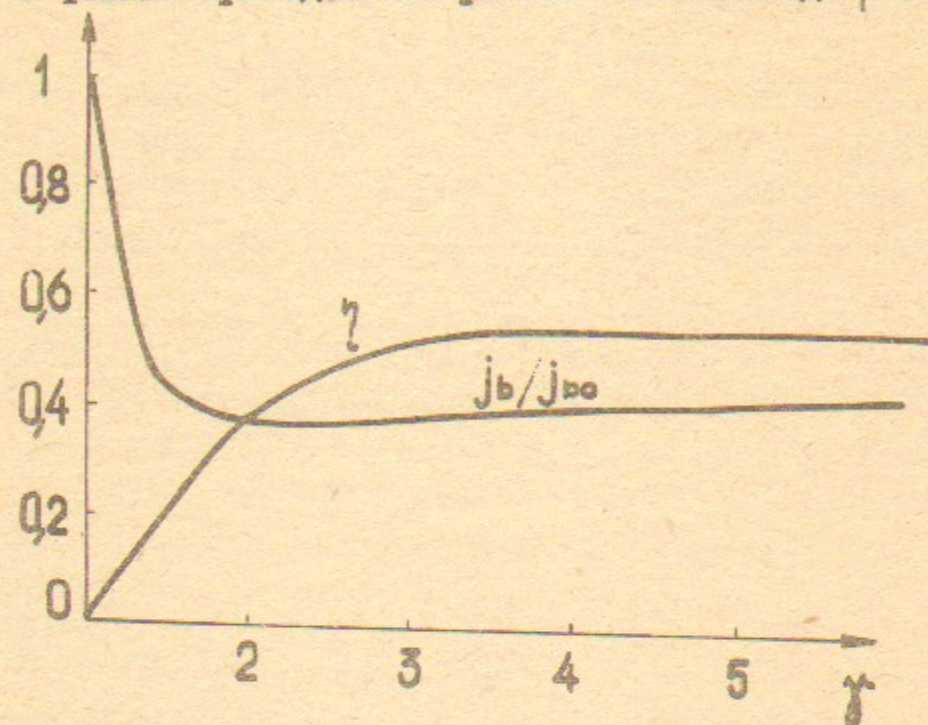


Рис.7. Зависимость к.п.д. ускорения ионов η и плотности диодного тока j_b/j_{b0} от релятивистского фактора γ .
 $\delta W/W_0 = 3.6 \cdot 10^{-3} / \beta^2 \gamma$.

j_b/j_{b0} в области малых энергий связаны с поглощением энергии электронов в фольге (см., соответственно, (59) и (62)). Влияние потерь энергии релятивистских электронов в фольге на эффективность ускорения η и плотность диодного тока j_b иллюстрируется рис.8.

При ускорении тяжелых ионов η и j_b существенно зависят от их массы. Эти зависимости для случая релятивистских электронов ($\gamma = 3$) показаны на рис.9.

Высоким (близким к предельно достижимым) к.п.д. ускорения соответствуют малые потери в фольге:

$$\frac{\delta W}{W_0} \ll 0,2 \left(\frac{\gamma m}{M} \right)^{1/2} \quad (63)$$

При столь малых значениях δW решение перестает зависеть от этой величины. Оно, тем не менее, не совпадает с решением, полученным в работе /4/ при $\delta W = 0$. Причина отличия состоит в

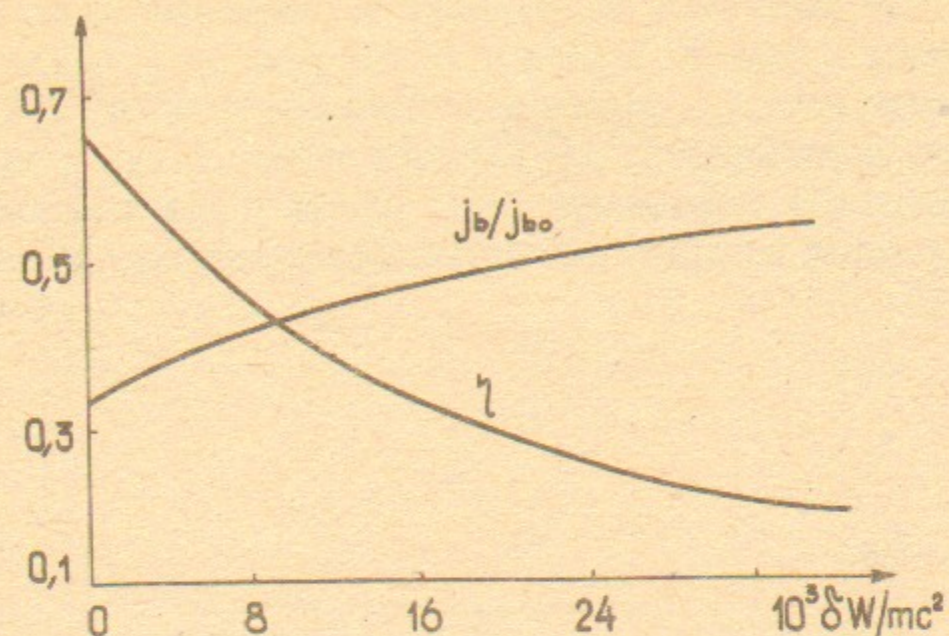


Рис.8. Зависимость η и j_b/j_{b0} от потерь энергии электронов в фольге δW при $\gamma = 3$.

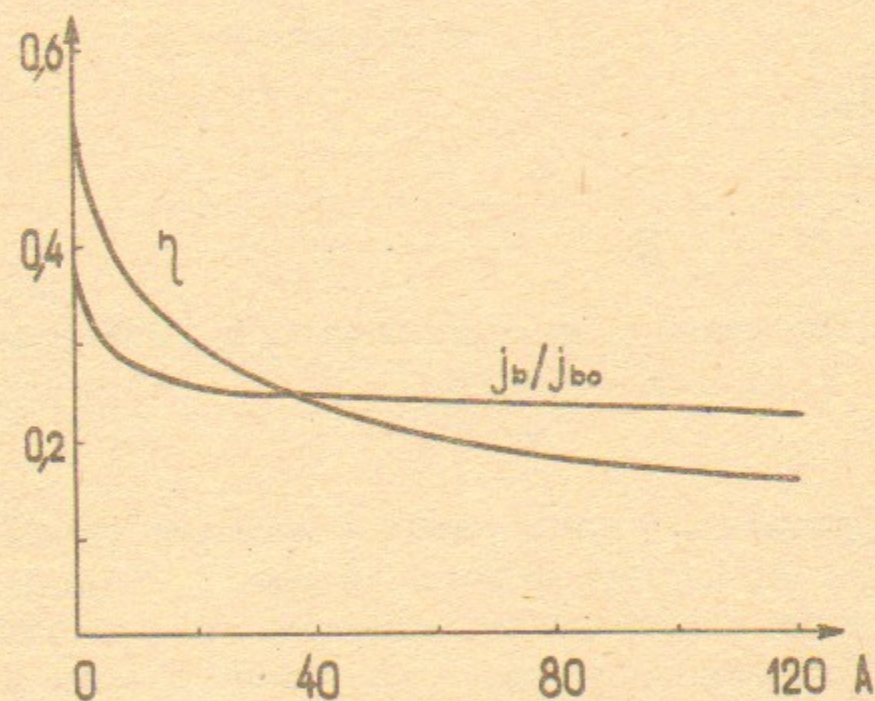


Рис.9. Зависимость к.п.д. ускорения η и плотности диодного тока j_b/j_{b0} от массы ускоряемых ионов для $\gamma = 3$, $\delta W/mc^2 = 4 \cdot 10^{-3}$.

том, что мы обязаны считать выполненным неравенство (6), означающее, что электроны, захваченные в дебаевский слой, успевают поглотиться в фольге. В работе же /4/ решение получено в условиях, когда потери в фольге полностью отсутствуют^{ж)}. Сравнение различных характеристик для случая конечных (хотя и малых, т.е. удовлетворяющих неравенству (63)) потерь с результатами работы /4/ (в которой потерями полностью пренебрегалось) приведено на рис. 10-13.

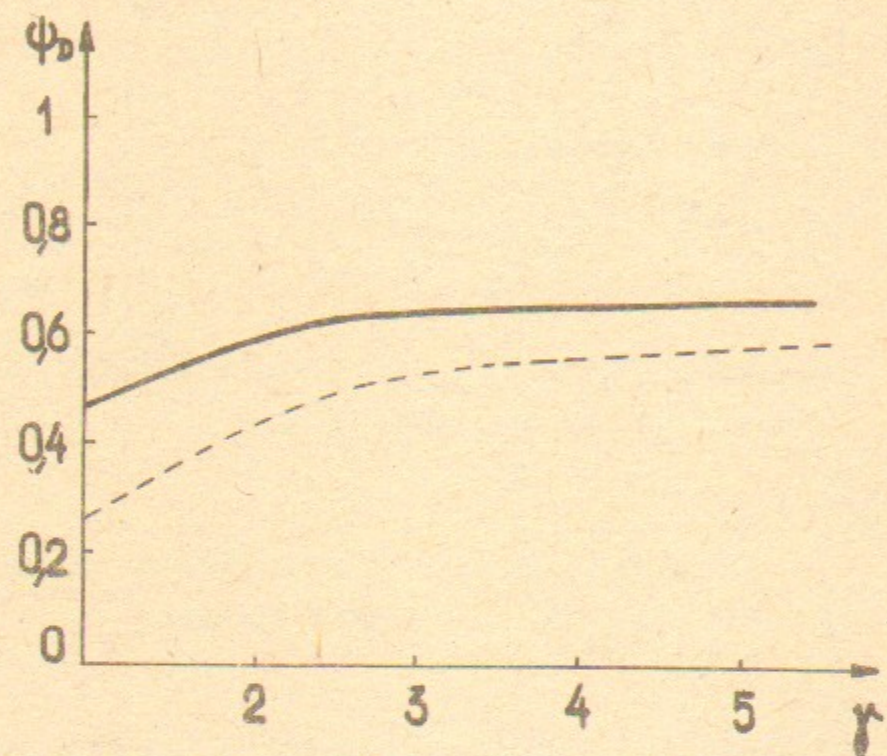


Рис. 10. Потенциал за дебаевским слоем ψ_D в зависимости от γ .

$$--- \frac{\delta W}{W_0} \ll \frac{d}{10ct}; \quad \text{---} \frac{\delta W}{W_0} \gg \frac{d}{10ct}$$

Из приведенных в предыдущем и в настоящем разделах результатов видно, что получить высокий (близкий к предельному) к.п.д. ускорения можно только при использовании очень тонких фольг, таких, чтобы выполнялось условие (63). Совместить это условие с требованием быстрого углового рассеяния (условие (4)) можно даже при ускорении ионов водорода только в том случае, если фольга изготовлена из материала с атомным номером $Z \sim 100$ (например, из золота). Поскольку в выполненных до настоящего времени экспериментах по газодинамическому ускорению не использовались

^{ж)} Как отмечалось во Введении, результаты работы /4/ соответствуют специальной организации начальной фазы ускорения, исключая захват электронов в дебаевский слой.

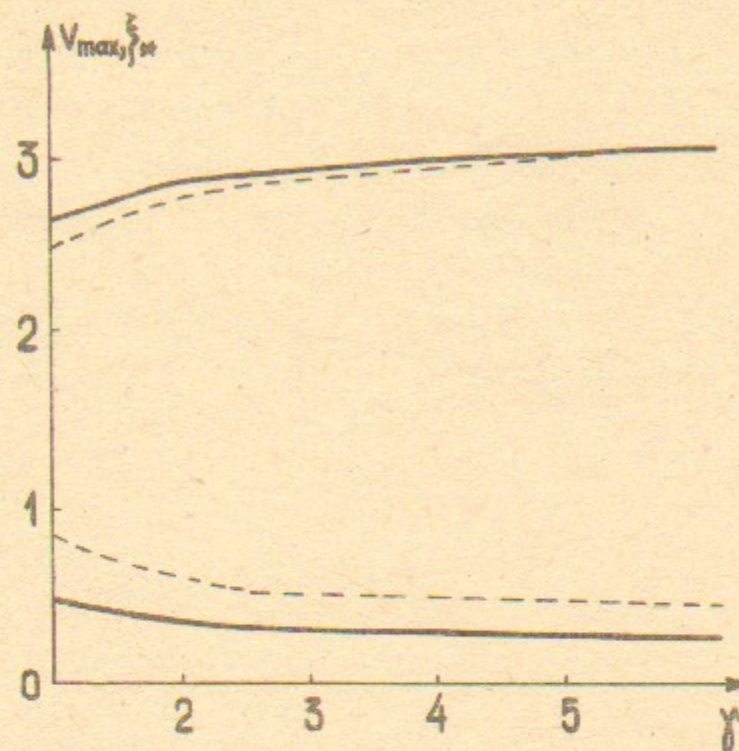


Рис. 11. Параметры автомодельного решения V_{max} и ξ_{in} в зависимости от γ .

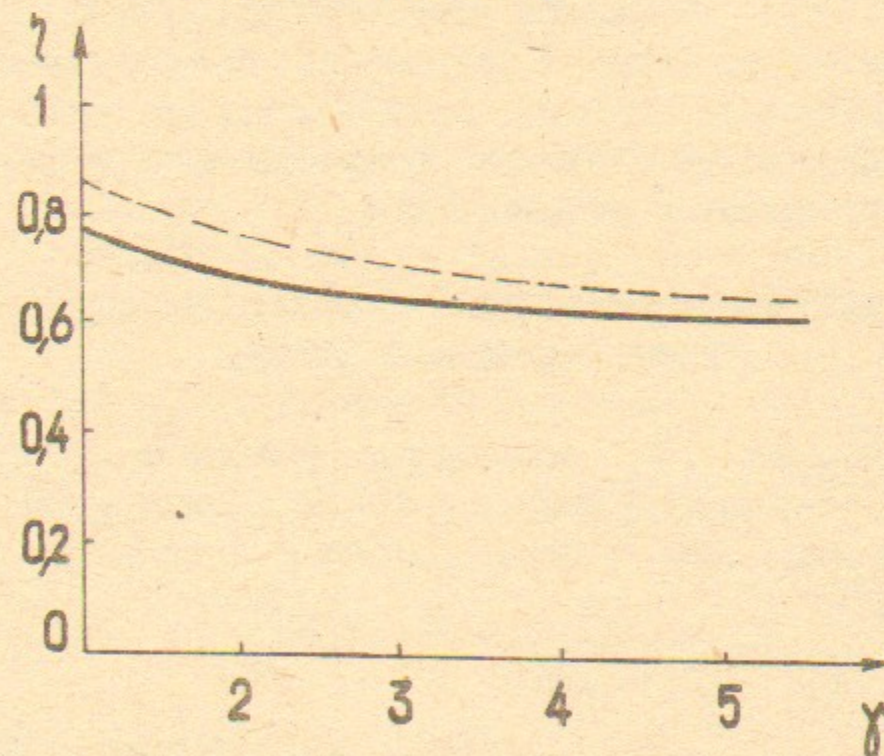


Рис. 12. Зависимость к.п.д. ускорения ионов от релятивистского фактора γ .

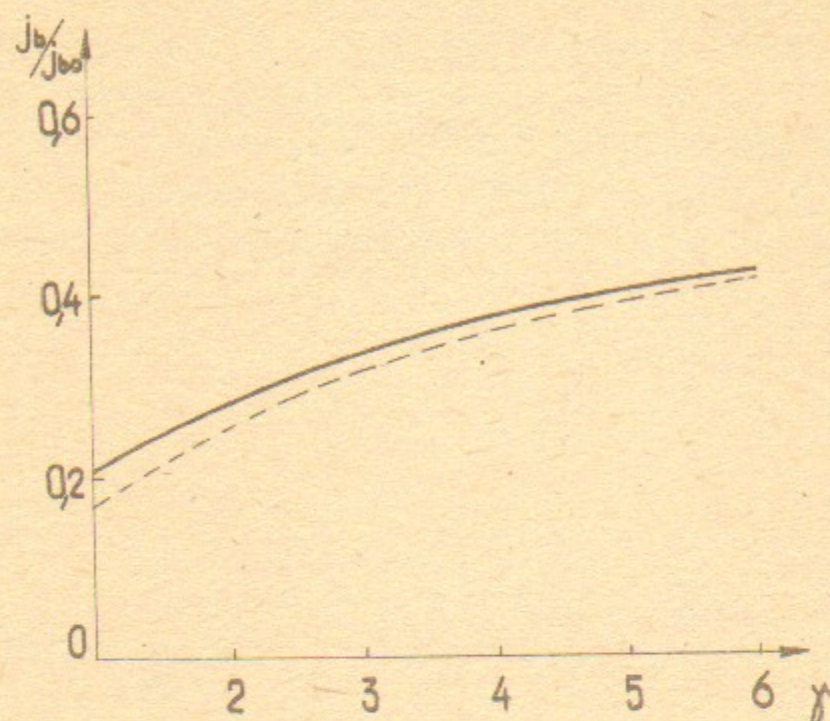


Рис. 13. Отношение плотности тока пучка j_b к j_{b0} как функция γ .

фольги с $Z > 22$, уменьшение толщины фольги приводило к тому, что переставало выполняться условие (4). Поэтому представляет интерес рассмотреть ситуацию, когда угловое рассеяние в фольге слабое, и функция распределения электронов анизотропна. Это сделано в следующих двух разделах.

VII. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ МЕДЛЕННОМ УГЛОВОМ РАССЕЯНИИ В ФОЛЬГЕ

В переменных I, p_1 кинетическое уравнение для функции распределения электронов у фольги после усреднения вдоль фазовых траекторий может быть записано следующим образом (ср. /4/):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{I, p_1} = \frac{\theta^2}{4 t_{\parallel} \sin \theta |\cos \theta|} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{t_{\parallel} p^2 v |\cos \theta|} \frac{\partial (p^2 \delta W \cdot f)}{\partial p} + \frac{n_b \delta(p-p_0) [\delta(\theta) + \delta(\pi-\theta)]}{4 \pi t_{\parallel} p_0^2 \sin \theta} \quad (64)$$

Слагаемые $\delta(\theta)$ и $\delta(\pi-\theta)$ в источнике соответствуют электронам исходного пучка и электронам, совершившим первое отражение от потенциального барьера в диоде.

Перейдем в левой части этого уравнения от переменных I, p_1 к переменным p и θ , пользуясь тем, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{I, p_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{p, \theta} + \frac{\partial f}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{I, p_1} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_{I, p_1},$$

где

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{I, p_1} = -\frac{1}{v t_{\parallel}} \frac{\partial I}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_{I, p_1} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{p v t_{\parallel}} \frac{\partial I}{\partial t}$$

(см. (28)). В результате получаем:

$$t_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\theta^2}{4 \sin \theta |\cos \theta|} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{p^2 v |\cos \theta|} \frac{\partial (p^2 \delta W \cdot f)}{\partial p} + \frac{1}{v} \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\operatorname{tg} \theta}{p v} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{n_b \delta(p-p_0) [\delta(\theta) + \delta(\pi-\theta)]}{4 \pi p_0^2 \sin \theta} \quad (65)$$

Так как в автомоделном решении нет масштаба размерности длины, φ зависит только от ξ . Поэтому для электронов с $p > p_D$ функции I и t_{\parallel} линейно зависят от времени. Что же касается электронов с $p < p_D$, то, как отмечалось в разделе III, для них можно считать $I = 0$, $t_{\parallel} = 0$. Из сказанного следует, что уравнение (65) может быть записано следующим образом:

$$t_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\theta^2}{4 \sin \theta |\cos \theta|} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{p^2 v |\cos \theta|} \frac{\partial (p^2 \delta W \cdot f)}{\partial p} + \frac{J}{v} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{J \operatorname{tg} \theta}{p v} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{n_b \delta(p-p_0) [\delta(\theta) + \delta(\pi-\theta)]}{4 \pi p_0^2 \sin \theta} \quad (66)$$

(в отношении обозначений см. (34)).

Поскольку время не входит в правую часть этого уравнения, оно имеет стационарное решение $f = f(p, \theta)$. Таким образом, рассматривавшаяся выше автомоделность сохраняется и при конечной скорости углового рассеяния в фольге.

Как отмечалось в разделах I и III, для электронов, захваченных в дебаевском слое, время установления стационарного состояния равно $(w/\delta W)(r_0/v)$. Выполнение условия (6) гарантирует, что это время меньше длительности импульса напряжения^{*}). Для фольги с $Z \gg 1$ угловое рассеяние идет намного быстрее, чем поглощение энергии. Поэтому при выполнении условия (6) (что подразумевается) функция распределения захваченных электронов изотропна: $f = f(p)$, причем, как видно из (66), зависимость от p имеет вид:

$$f(p) = \frac{\text{const}}{p^2 \delta W(p)}. \quad (67)$$

Чтобы выявить основные качественные особенности решения при слабом рассеянии, мы рассмотрим предельный случай, когда условие (4) нарушается с большим запасом, т.е. выполняется неравенство

$$\bar{\theta}^2 \ll \sqrt{\frac{\gamma m}{M}}. \quad (68)$$

Так как при этом условии угловая ширина функции распределения в области $p > p_D$ мала, можно легко решить уравнение (66) в этой области:

$$f(p, \theta) = \frac{n_0 v}{2\pi p_0^2 J(p_0, \theta=0) \theta_0^2(p)} \left[\exp\left(-\frac{\theta^2}{\theta_0^2(p)}\right) + \exp\left(-\frac{(\pi-\theta)^2}{\theta_0^2(p)}\right) \right] \quad (69)$$

где

$$\theta_0^2(p) = \int_p^{p_0} \frac{\bar{\theta}^2 v dp}{J(p, \theta=0)}. \quad (70)$$

По порядку величины,

$$\theta_0^2 \approx \bar{\theta}^2 \sqrt{\frac{M}{\gamma m}} \ll 1 \quad (71)$$

(ср. (68)).

Решение в такой форме справедливо, пока p не слишком близко к p_D , а именно при

^{*} Напомним, что при нарушении условия (6) автомодельное решение перестает быть однозначным: оно определяется с точностью до произвольной функции распределения электронов, захваченных в дебаевском слое. Физически эта функция распределения определяется процессами, происходящими на переднем фронте импульса ускоряющего напряжения, и зависит от формы фронта.

$$p - p_D \gg \gamma_D p_D \theta_0^2. \quad (72)$$

При меньших значениях $p - p_D$, угловая ширина функции распределения (69) становится сравнимой с угловой шириной области незапертых частиц на плоскости (p, θ) (см. рис. I4a), и начинается захват осциллирующих электронов в дебаевский слой.

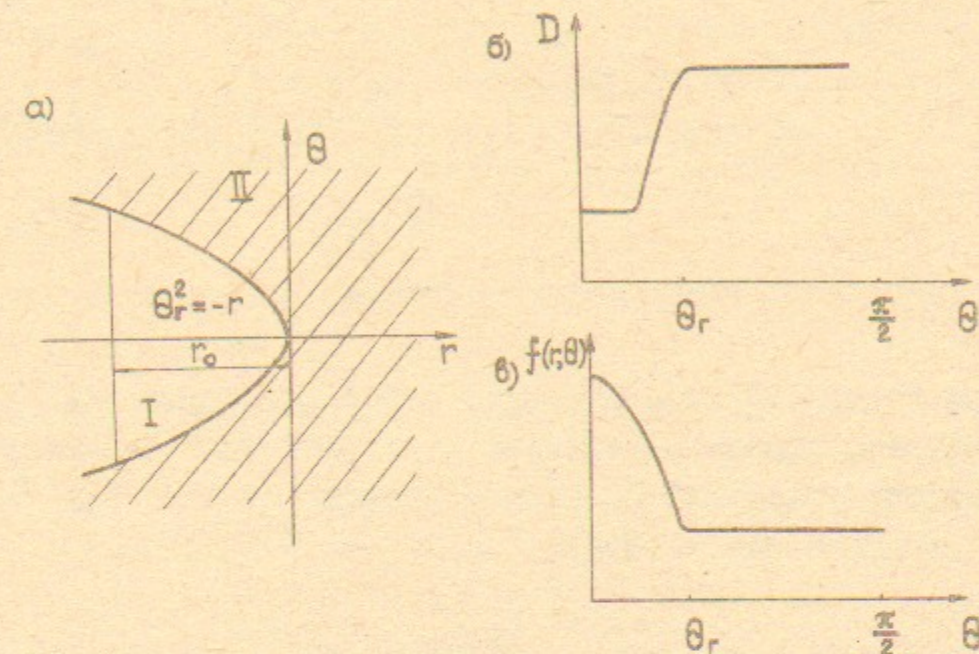


Рис. I4. К решению задачи о захвате электронов в дебаевский слой: а) I - область пролетных частиц; II - область захваченных частиц; переменная r определяется соотношением (73); б) зависимость D от θ при фиксированном r ; в) качественная зависимость функции распределения в переходной области I.

В переходной области происходит быстрое изменение функции по p , и поэтому слагаемое $J \partial f / \partial p$ в уравнении (66) намного превышает слагаемое $(J \tan \theta / p) \partial f / \partial \theta$. Кроме того, при $p - p_D \ll p_D$ пролетные частицы не проникают в область пространства, где $\xi > \xi_*$ (см. рис. 3), так что для них справедливо следующее выражение для J :

$$J = p_{||} \xi_* = p_D \xi_* \sqrt{-r - \theta^2}, \quad (73)$$

$$r = \frac{2(p_D - p)}{\gamma_D p_D}$$

Рассматривая область $|p-p_D| \ll p_D$, можно считать величины $\bar{\theta}^2$ и δW не зависящими от p . С учетом всех этих замечаний можно записать следующее уравнение для функции f в переходной области:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{D(r, \theta)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (74)$$

где

$$D(r, \theta) = \frac{\gamma_D v_D p_D \bar{\theta}^2(p_D)}{8} \begin{cases} \frac{1}{\delta W + p_D \epsilon_* \sqrt{-r - \theta^2}}, & \theta^2 \leq -r; \\ \frac{1}{\delta W}, & \theta^2 > -r. \end{cases} \quad (75)$$

Уравнение (73) представляет собой некоторый аналог уравнения диффузии, причем переменная r играет роль "времени"^{ж)}. "Коэффициент диффузии" D сильно зависит от θ : при $\theta^2 < -r$ (т.е. для пролетных частиц)

$$D \approx \theta_0^2(p_D) \quad (76)$$

(мы положили $\theta^2 \approx \theta_0^2$ и воспользовались оценкой (71)), а при $\theta^2 > -r$ (т.е. для запертых частиц)

$$D \approx Z, \quad (77)$$

где Z - атомный номер материала фольги. Качественно зависимость D от θ при фиксированном $r < 0$ иллюстрируется рис. I4б.

Нас интересует решение уравнения (74) на отрезке "времени"

$$r \leq A r_0, \quad r_0 \equiv \theta_0^2(p_D),$$

где A порядка нескольких единиц.

На левом конце этого отрезка справедливо решение (69) с $p = p_D$. Вследствие экспоненциально быстрого спада этого решения при больших θ , оно отлично от нуля только в области пролетных частиц (I на рис. I4а). Из оценки (76) видно, что в этой области выполняется условие

ж) "Каноническое" уравнение диффузии должно было бы иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} D \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

$$D r_0 \approx \theta_0^3 \ll \theta_0^2 \quad (78)$$

т.е. за "время" r_0 функция распределения в области I не успеет измениться. Поэтому частицы попадают из области I в область II (область запертых частиц) только вследствие уменьшения θ_r при приближении r к нулю ("движущаяся" граница "отъедает" функцию распределения в области I). После прохождения через границу между областями I и II частицы начинают быстро диффундировать в область II (коэффициент диффузии здесь очень велик). Оценка, аналогичная (78), для области II имеет вид:

$$D r_0 \sim Z \theta_0^2(p_D) \quad (79)$$

Качественно зависимость функции распределения от θ при $r = \text{const} \sim r_0$ показана на рис. I4в.

Рассмотрим более подробно случай, когда выполнено условие $Z \theta_0^2(p_D) \gg 1$, т.е.

$$\bar{\theta}^2 \gg \frac{1}{Z} \left(\frac{\gamma_m}{M} \right)^{1/2}. \quad (80)$$

В этом случае функция распределения в области II просто постоянна (см. рис. I4в) и равна своему значению при $\theta = \theta_r = \sqrt{-r}$:

$$f(r, \theta = \theta_r) = \frac{n_b v_0 \exp(r/\theta_0^2(p_D))}{2\pi J(p_0, \theta=0) p_0^2 \theta_0^2(p_D)}$$

Для доказательства этого соотношения полезно сделать замену $h = \sin \theta \partial f / \partial \theta$, сводящую уравнение (74) к виду

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{D}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta},$$

и заметить, что к полученному уравнению применим "принцип максимума", из которого следует, что

$$\max_{\theta} |h(r, \theta)| \leq \max |h(r \rightarrow -\infty, \theta)|,$$

где под $r \rightarrow -\infty$ понимается, что $-r \ll r_0$. Оценивая, далее, $\max_{\theta} |h(r \rightarrow -\infty, \theta)|$ из соотношения (69), и учитывая, что $\partial f / \partial \theta \sim h / \theta$, легко усмотреть, что изменение f при переходе через границу $\theta_r = \sqrt{-r}$ действительно мало.

Знание функции распределения при $\theta > \theta_\Gamma$ позволяет, очевидно, найти произвольную константу в решении (67), описывающем частицы с $p < p_D$:

$$\text{const} = \frac{n_b v_0 \delta W(p_D) p_D^2}{2\pi p_0^2 \theta_0^2(p_D) J(p_0, \theta=0)}. \quad (81)$$

Таким образом, мы нашли функцию распределения захваченных частиц. Их плотность, как видно из выражения (81), примерно в $1/\theta_0^2$ раз выше плотности пролетных частиц.

Случай, когда выполняется неравенство, обратное (80), соответствует исключительно тонким фольгам и представляет поэтому меньший интерес.

УШ. ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ ПРИ МЕДЛЕННОМ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ФОЛЬГЕ

Знание функции распределения $f(p, \theta)$ на анодной фольге позволяет найти плотность электронов в произвольной точке с потенциалом φ , а затем построить автомодельное решение газодинамического ускорения ионов.

В качестве иллюстрации приведем решение задачи для нерелятивистских электронов ($\gamma - 1 \ll 1$). В этом случае $n(\varphi)$ равно:

$$n(\varphi) = \begin{cases} n_0 \psi^{1/2}, & \psi < \psi_D; \\ n_0 \left[\psi^{1/2} - (\psi - \psi_D)^{1/2} + \frac{2(\psi - \psi_D)^{3/2}}{3\theta_0^2(p_D)} \right], & \psi > \psi_D, \end{cases} \quad (82)$$

где n_0 — не известная пока константа. Ее можно связать с плотностью пучка у фольги n_b , если воспользоваться тем, что в силу квазинейтральности ионного потока, плотность тока электронов $e n_b v_0$ должна равняться плотности ионного потока в области постоянного течения $e n_* v_*$. Вместе с (40) и (82) это дает

$$n_0 = \frac{n_b}{\sqrt{\frac{m}{M} \psi_D (1 - \psi_D)}} \quad (83)$$

Подставляя зависимость $\psi(\xi)$ в систему уравнений (39) — (41), находим автомодельное решение $v_i(\xi)$, $\psi(\xi)$ и $n(\xi)$ в области волны разрежения $\xi_* < \xi < v_{\max}$:

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1}{2} (v_{\max} + \xi), \\ \psi &= \frac{1}{8} (v_{\max} - \xi), \\ n &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (v_{\max} - \xi). \end{aligned} \quad (84)$$

Зная зависимость $\psi(\xi)$, вычисляем $J(p, \theta=0)$ (см. (34)):

$$\begin{aligned} J(p, \theta=0) &= 2W_0 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \left\{ (1 - \psi_D)^{1/2} \left(\frac{p^2 - p_D^2}{p_0^2}\right)^{1/2} + \right. \\ &\left. + \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2} \ln \left[\frac{(p_0^2 - p^2)^{1/2}}{p_0^2 \psi_D^{1/2} + (p^2 - p_D^2)^{1/2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (85)$$

Затем из выражения (70) определяем $\theta_0^2(p_D)$:

$$\theta_0^2(p_D) = \bar{\theta}^2(p_0) \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} Q(\psi_D), \quad (86)$$

где

$$Q(\psi_D) = \frac{1}{2} \int_0^{\psi_D} \frac{d\psi}{(1-\psi)^2 \left\{ [(1-\psi_D)(\psi_D-\psi)]^{1/2} + \psi \ln \frac{\psi^{1/2}}{\psi_D^{1/2} + (\psi - \psi_D)^{1/2}} \right\}}$$

Зависимость Q от ψ_D приведена на рис. 15.

Величину потенциала за дебаевским слоем ψ_D , константы v_{\max} и ξ_* находим из условия сшивки постоянного течения с волной разрежения и граничных условий (40), (41)

$$\frac{1}{3} \left[1 - \psi_D^{3/2} - (1 - \psi_D)^{3/2} \right] + \frac{2(1 - \psi_D)^{5/2}}{15 \theta_0^2(p_D)} = \psi_D^{1/2} (1 - \psi_D), \quad (87)$$

$$v_{\max} = \sqrt{2(1 - \psi_D)} + \sqrt{2\psi_D}, \quad \xi_* = \sqrt{2(1 - \psi_D)} - \sqrt{2\psi_D}. \quad (88)$$

Уравнение (87) перепишем следующим образом:

$$\theta_0^2(p_D) = \theta_*^2(\psi_D) \quad (89)$$

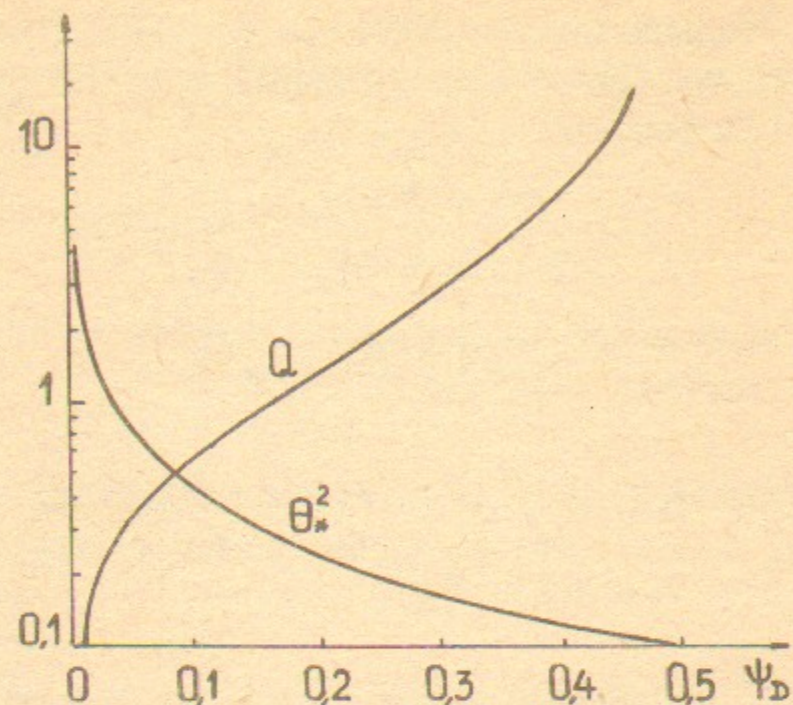


Рис.15. К определению дебаевского потенциала для нерелятивистского случая

где

$$\theta_*^2(\psi_D) = \frac{15[\psi_D^{1/2}(1-\psi_D) - \frac{1}{3}[1-\psi_D^{3/2} - (1-\psi_D)^{3/2}]]}{15[\psi_D^{1/2}(1-\psi_D) - \frac{1}{3}[1-\psi_D^{3/2} - (1-\psi_D)^{3/2}]]}$$

Зависимость θ_*^2 от ψ_D показана на рис.15. Решив уравнение (89), находим ψ_D , а затем из (87) определяем параметры v_{max} и ξ_* . Заметим, что когда ψ_D стремится к 0,5 (что соответствует тонким фольгам), ξ_* стремится к нулю, и участок с постоянными параметрами потока не реализуется. Таким образом, в рассматриваемом решении автоматически всегда $\psi_D < 0,5$.

Коэффициент полезного действия η в данном режиме ускорения равен:

$$\eta = \xi_* \left(\frac{1-\psi_D}{2} \right)^{1/2} + \left[(1-\psi_D)\psi_D \right]^{-1/2} \cdot \left[\frac{v_{max}^4}{4} - \frac{2}{3}\psi_D^{1/2}(1-\psi_D)^{1/2} - \frac{1}{6}(1-\psi_D)^2 \right]. \quad (90)$$

Плотность диодного тока j_b может быть найдена из решения уравнения Пуассона в диоде (см. (42)-(43)). Для тонких фольг ($\psi_D \rightarrow 0,5$) $j_b/j_{bo} = 0,22$.

Для релятивистских электронов $n(\psi)$ равно:

$$n(\psi) = \begin{cases} n_0(r_1^2 - 1)^{1/2}, & \psi < \psi_D, \\ n_0 \left\{ (r_1^2 - 1)^{1/2} - (r^2 - 1)^{1/2} + \frac{2\gamma_D^2}{(\gamma^2 - 1)\theta_0^2(p_D)} \left[\frac{r+2r_2}{r+r_2} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot (r^2 - 1)^{1/2} - 2r_2 \ln(r + \sqrt{r^2 - 1}) + \frac{2r_2^2 - 1}{\sqrt{1-r_1^2}} \arccos \frac{1+r_2 r}{r+r_2} \right] \right\}, & \psi > \psi_D, \end{cases} \quad (91)$$

где

$$n_0 = \frac{n_b (\gamma + 1)^{1/2}}{\left[\frac{2m}{M} (1-\psi_D)(\gamma-1)(2+\gamma\psi_D-\psi_D) \right]^{1/2} \gamma \psi_D^{1/2}}, \quad (92)$$

$$r = 1 + (\gamma-1)(\psi - \psi_D), \quad r_1 = 1 + (\gamma-1)\psi, \quad r_2 = (\gamma-1)(1-\psi).$$

Зная $n(\psi)$, аналогично тому, как это было сделано для нерелятивистских электронов, находим автомодельное решение $n(\xi)$, $v(\xi)$ и $\psi(\xi)$ для $\gamma \geq 1$.

В качестве иллюстрации приведем результаты расчетов, выполненных при условии (80) для $\gamma = 3$, в зависимости от $\bar{\theta}^2$ (см. рис.16-18). Спектр ускоренных ионов для $\bar{\theta}^2(p_0)(M/\gamma m)^{1/2} \approx 0,05$ приведен на рис.19. Как видно из рис.19, при выполнении условия

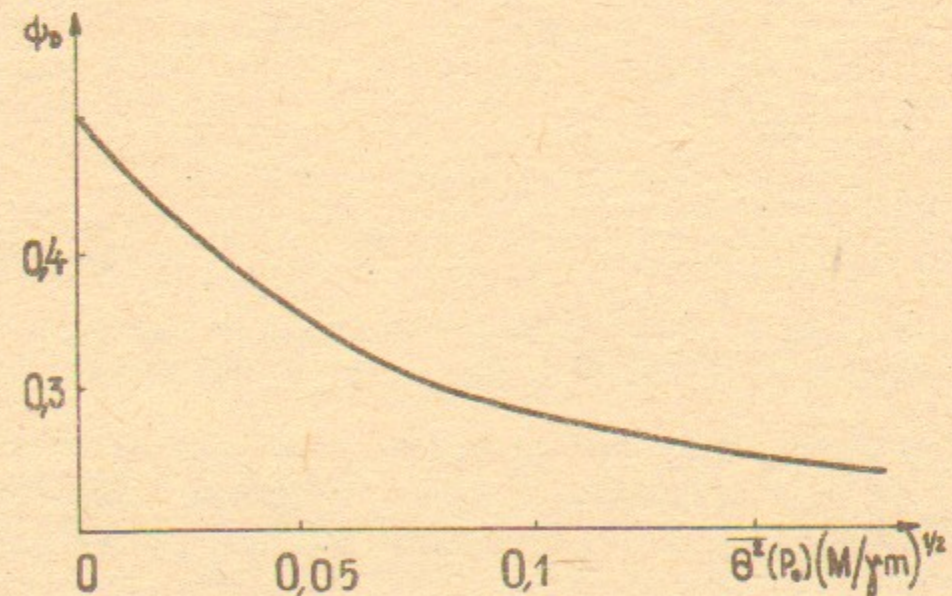


Рис.16. Зависимость потенциала за дебаевским слоем от среднеквадратичного угла рассеяния электронов в фольге для $\gamma = 3$.

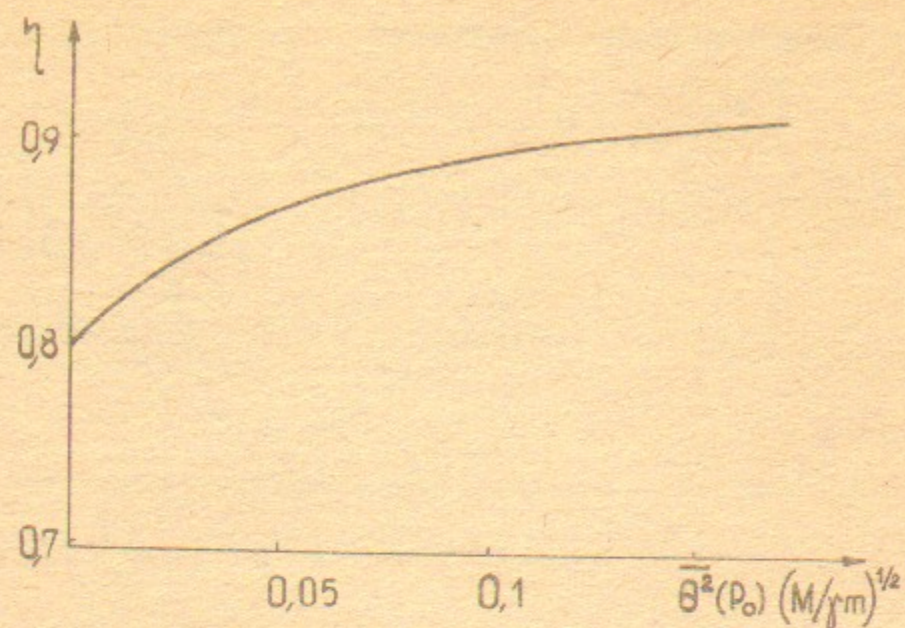


Рис.17. Зависимость к.п.д. ускорения ионов от $\bar{\theta}^2$ для $\gamma = 3$.

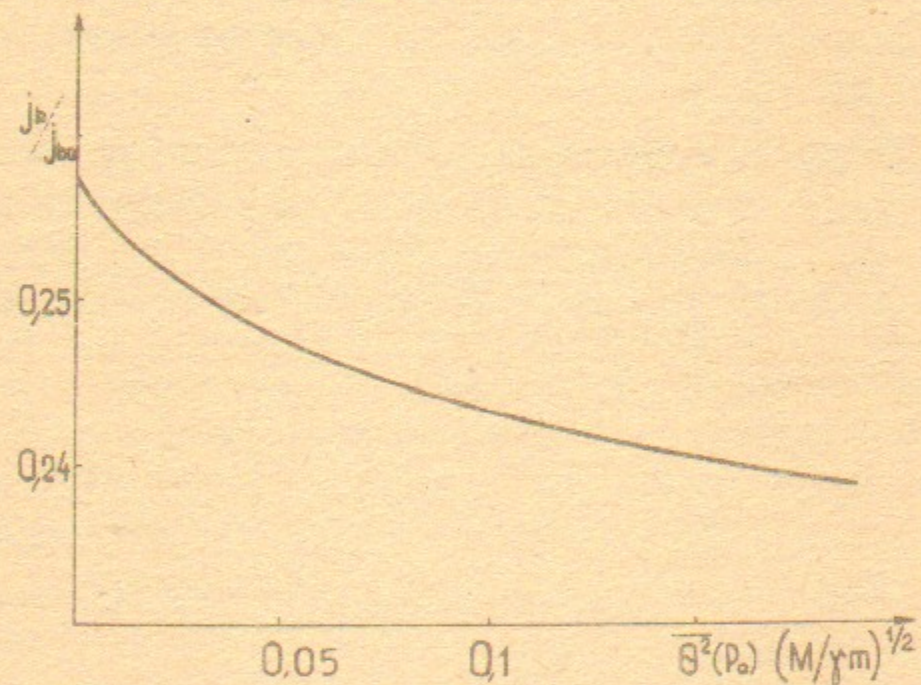


Рис.18. Зависимость j_b/j_{b0} от $\bar{\theta}^2$ для $\gamma = 3$.

(80) функция распределения ионов становится более узкой, чем в случае (4). Предельная энергия ускоренных ионов равна $1,93 W_0$. Доля частиц в δ -пике в рассматриваемом случае равна 0,26.

Зависимость η и j_b/j_{b0} от γ для $\bar{\theta}^2(mc)\sqrt{M/m} = 0,2$ приведена, соответственно, на рис.20 и 21.

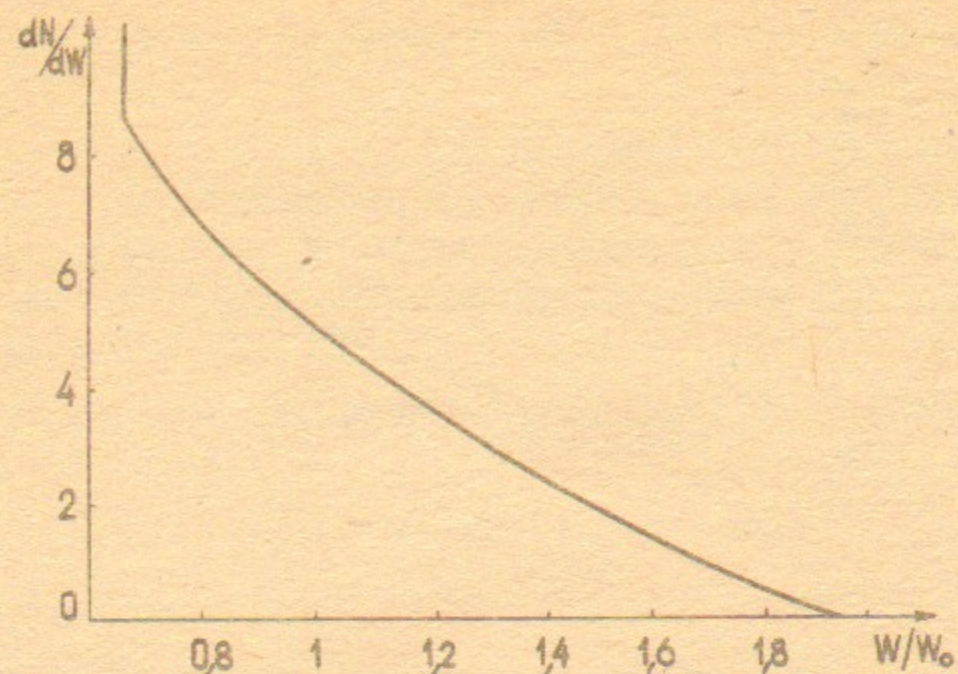


Рис.19. Спектр ускоренных ионов.

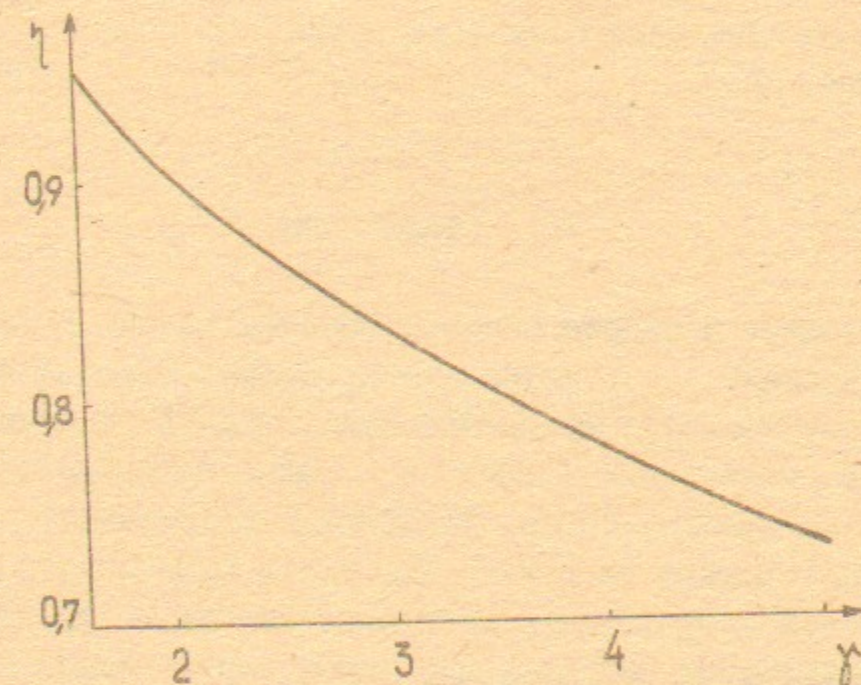


Рис.20. Зависимость к.п.д. ускорения ионов от релятивистского фактора γ при $\bar{\theta}^2(mc)\sqrt{M/m} = 0,2$.

Сравнение результатов расчетов, выполненных при условии (80) (анизотропная функция распределения $f(p, \theta)$) с результатами расчетов, полученных при условиях (4) и (63) (изотропная функция распределения $f(p)$), показывает, что в случае (80) к.п.д. ускорения ионов η несколько больше, чем в случае (4), а плотность диодного тока j_b/j_{b0} , соответственно, меньше.

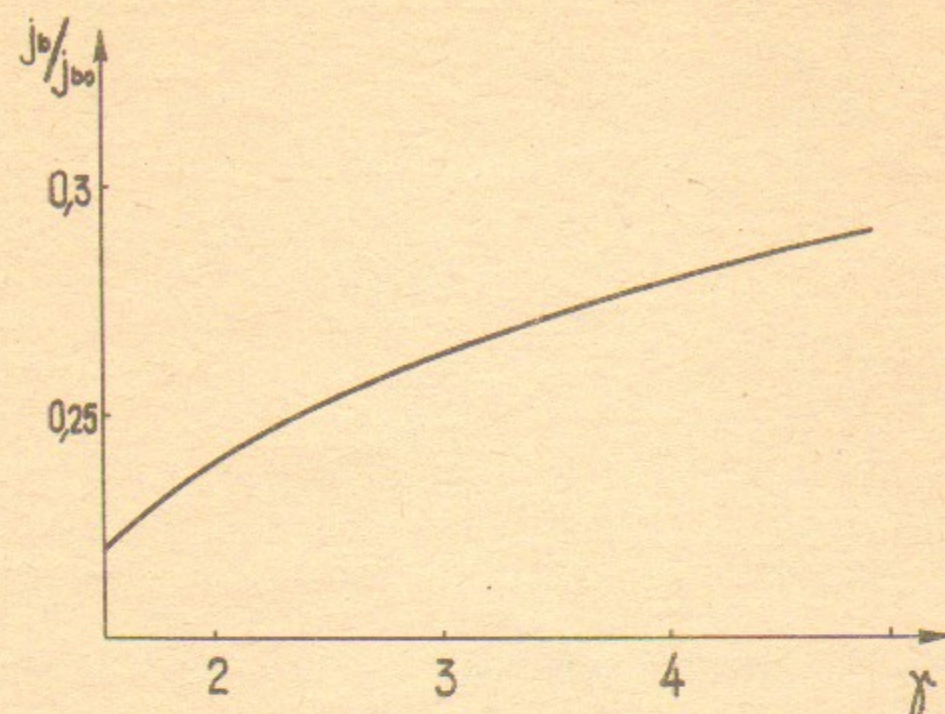


Рис. 21. Отношение плотности тока пучка j_b к j_{b0} как функция γ .

IX. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в работе способы решения задачи о газодинамическом ускорении ионов позволяют построить автомодельные решения для всех практически интересных значений "внешних" параметров задачи (таких, как толщина и атомный номер материала фольги, масса ускоряемых ионов, ускоряющее напряжение). Разумеется, в реальных условиях не приходится иметь дела со строго "ступенчатой" формой напряжения, так что сравнение наших расчетов с экспериментальными результатами может иметь только качественный характер. Тем не менее, такая величина, как отношение предельной энергии ускоряемых ионов к максимуму диодного напряжения, неплохо согласуется с экспериментальными результатами.

Автомодельное решение позволяет также оценить масштаб эффекта запирания диода пространственным зарядом облака осциллирующих электронов. Оказывается, что при ускорении ионов водорода этот эффект, хотя и ощутим, но все же не имеет катастрофического характера: диодный ток уменьшается всего в 2-3 раза

по отношению к расчету по "закону 3/2" (или его релятивистскому аналогу).

При переходе к ионам с $A > 10$ эффект запирания делается сильным. Чтобы реализовать газодинамическое ускорение в этом случае необходимо, по-видимому, переходить к диодам с заполнением ионами /6/ или использовать схему ускорения в неоднородном магнитном поле /8/.

Авторы приносят благодарность Г.В.Ступакову за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Из условия сохранения продольного адиабатического инварианта $I(p, \theta, t)$ и поперечной компоненты импульса $q_{\perp} = p \sin \theta$ находим изменение импульса δp_{\perp} за время Δt :

$$\delta p_{\perp} = \frac{\frac{\partial I}{\partial t} \Delta t}{\frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\operatorname{tg} \theta}{p} - \frac{\partial I}{\partial p}} \quad (\text{П.1})$$

Воспользовавшись законом сохранения энергии вдоль траектории электрона, находим:

$$\frac{\partial q_{\parallel}}{\partial p} = \frac{p \cos^2 \theta - \frac{pe(U-\varphi)}{\mathcal{E}}}{q_{\parallel}}, \quad (\text{П.2})$$

$$\frac{\partial q_{\parallel}}{\partial \theta} = - \frac{p^2 \sin \theta \cos \theta}{q_{\parallel}},$$

где $\mathcal{E} = (m^2 c^4 + c^2 p^2)^{1/2}$ — энергия электрона на фольге. Используя (П.2), найдем связь между $I(p, \theta, t)$ и $t_{\parallel}(p, \theta, t)$ *):

$$\frac{\partial I}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\operatorname{tg} \theta}{p} = v t_{\parallel} \quad (\text{П.3})$$

Подставив полученное выражение (П.3) в (П.1), находим изменение импульса δp_{\perp} :

$$\delta p_{\perp} = - \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\Delta t}{v t_{\parallel}} \quad (\text{П.4})$$

Найдем теперь интересующие нас значения $\frac{\overline{\Delta p}}{\Delta t}$ и $\frac{\overline{1-1}}{\Delta t}$. Подставив в (23) и (24) полученное в выражении (29) значение δp , находим

$$\langle t_{\parallel} \rangle \frac{\overline{\Delta p}}{\Delta t} = \frac{\delta W}{v} + \frac{1}{v} \frac{\partial \langle I \rangle}{\partial t}, \quad (\text{П.5})$$

$$\langle t_{\parallel} \rangle \frac{\overline{1-1}}{\Delta t} = \frac{1}{p^2 v} \frac{\partial (p^2 \delta W)}{\partial p} + \frac{1}{v} \frac{\partial \langle I_{\perp} \rangle}{\partial t},$$

* На это соотношение обратил наше внимание Г.В.Ступаков.

где

$$I_{\perp} = \frac{2I}{p} + \frac{\partial I}{\partial p} - v t_{\parallel}.$$

Воспользовавшись уравнением (П.3) и усреднив I и I_{\perp} по углу θ , получаем

$$\langle I \rangle = \frac{1}{3} \int_0^{\tilde{x}} \frac{q^3(x, p)}{p^2} dx, \quad (\text{П.6})$$

$$\langle I_{\perp} \rangle = \frac{1}{p} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial \theta} (I \sin^2 \theta) d\theta = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков. Физика плазмы, 2, 767, 1976.
2. Д.Д.Рютов. Препринт ИЯФ СО АН СССР 77-4, 1977.
3. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков. Физика плазмы, 2, 566, 1976.
4. Г.В.Ступаков. Физика плазмы, 6, 1322, 1980..
5. А.В.Бурдаков, В.С.Койдан, А.И.Рогозин, В.В.Чижумов. ЖЭТФ, 80, 1391, 1981.
6. П.П.Дейчули, В.М.Федоров. IV Всесоюзный симпозиум по сильноточной электронике, Новосибирск, 1982, Тезисы докладов, т.2, с.180, 184, 1982.
7. А.П.Авроров, В.Т.Астрелин, Э.Л.Бояринцев, В.А.Капитонов, Ю.А.Козьминых, В.М.Лагунов. IV Всесоюзный симпозиум по сильноточной электронике, Новосибирск, 1982, Тезисы докладов, т.2, с.192, 1982.
8. D.D.Ryutov. Proc. Intern. Conf. on High-Power Beams 81, Palaiseau, 1981, p. 77.
9. А.В.Гуревич, Л.В.Парийская, Л.П.Питаевский. ЖЭТФ, 49, 647, 1965.
10. J.Antontsen, E.Ott. Appl. Phys. Letters, 27, 424, 1976.
11. Л.Д.Ландау, Е.И.Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1954, § 92.
12. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962, с.308.

Д.Д.Рютов, Е.М.Сыресин

ТЕОРИЯ "ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО" УСКОРЕНИЯ ИОНОВ
ОБЛАКОМ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Препринт
№ 84-129

Работа поступила - 19 июля 1984 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 27.IX-1984 г. МН 06152

Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.3,3 печ.л., 2,6 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 129.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90