



Г.37

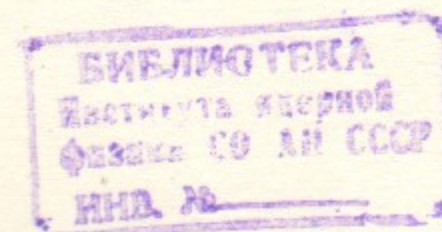
49

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Л.Герасимов

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ  
СИЛ ВСТРЕЧНОГО ПУЧКА С БОЛЬШИМ  
ОТНОШЕНИЕМ ПОПЕРЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

ПРЕПРИНТ 84-95



НОВОСИБИРСК

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ СИЛ ВСТРЕЧНОГО ПУЧКА  
С БОЛЬШИМ ОТНОШЕНИЕМ ПОПЕРЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

А.Л.Герасимов

А Н Н О Т А Ц И Я

Получены приближенные формулы для сил взаимодействия отдельной частицы с электромагнитным полем встречного пучка с большим отношением поперечных размеров  $\mathcal{L} \gg 1$ . Обсуждаются преимущества полученного приближения по отношению к существующим методам при численном моделировании эффектов встречи. Проводится анализ более простых, но менее точных моделей.

1. В в е д е н и е

Эффекты встречи являются одним из основных механизмов, ограничивающих светимость в ускорителях на встречных пучках. Поскольку в реальной экспериментальной ситуации из-за присутствия большого количества дополнительных факторов и взаимосвязанности основных параметров установки между собой трудно выделить зависимость эффектов встречи от отдельных параметров, то одним из основных методов их исследования является численное моделирование. Во всех современных электрон-позитронных установках встречные пучки в поперечном сечении имеют эллиптическую форму с параметром эллиптичности в месте встречи  $\mathcal{L} = \sigma_x / \sigma_z \sim 15-100$  ( $\sigma_x, \sigma_z$  - средние квадратичные размеры).

Силы встречного взаимодействия пучков, вычисленные в приближении "тонкой линзы" (когда изменение поперечных координат за время столкновения можно считать малым) являются функциями трех переменных -  $x, z, \mathcal{L}$  и могут быть представлены в виде одномерного интеграла.

При моделировании эффектов встречи в приближении "сильный-слабый" пучок  $\mathcal{L}$  является постоянной, и обычно для вычисления сил  $S_x, S_z$  применяются двумерные интерполяции по сетке  $x, z$  значения сил на которой находятся с помощью численного интегрирования /1-2/. При изменении  $\mathcal{L}$  (например, при моделировании взаимодействия двух пучков одинаковой интенсивности) применяется другое эквивалентное представление сил  $S_x, S_z$  с помощью действительной и мнимой части комплексной функции ошибок  $w$ . В результате этого функции трех аргументов  $S_{x,z}(x, z, \mathcal{L})$  выражаются через  $Re w(d+ip), Im w(d+ip)$  - функции двух аргументов  $d$  и  $p$ . Это позволяет получать трехмерную зависимость  $S_{x,z}(x, z, \mathcal{L})$  имея двумерные сетки функций  $Re w, Im w$  и применяя интерполяцию, что было сделано, например, в /3/. В обоих случаях для нахождения сил  $S_x, S_z$  необходимо создавать специальные программы вычисления двумерных массивов. Поскольку время вычисления этих массивов велико, необходимо организовывать общение со внешними запоминающими устройствами (однократную запись в программе вычисления массивов и считывание в программах моделирования).

Особым вопросом является влияние сеточного шума, поскольку необходимый для достижения требуемой точности размер шага сетки

может существенно зависеть от ряда параметров. Все это создает дополнительные трудности при оценке точности результатов моделирования.

Указанными неудобствами объясняется желание многих авторов /4,5,6/ получить более простой алгоритм нахождения сил. Так, для параметра эллиптичности  $\mathcal{E} = 1+5$  в /4/ получены приближенные формулы для сил, обладающих потенциальностью, т.е.  $\frac{\partial S_x}{\partial \mathcal{E}} = \frac{\partial S_z}{\partial \mathcal{E}}$ . Точность этих формул сильно зависит от  $\mathcal{E}$  и ухудшается от 5% при  $\mathcal{E} = 1$  до 34% при  $\mathcal{E} = 5$ . В работах /5,6/ используются приближенные формулы для сил  $S_x, S_z$  в пределе  $\mathcal{E} \gg 1$ , не обладающие потенциальностью ( $\frac{\partial S_x}{\partial \mathcal{E}} \neq \frac{\partial S_z}{\partial \mathcal{E}}$ ) и имеющие хорошую точность лишь для некоторой области значений координат  $x, z$ .

В настоящей работе делается попытка получить приближенные формулы для сил с большим параметром эллиптичности  $\mathcal{E} \gg 1$ . Максимальная погрешность приводимых нами формул составляет 4%. Хотя силы, определяемые этими формулами, не обладают потенциальностью, их использование в практических случаях приводит к достаточно точным результатам (см. § 6). При вычислении на ЭВМ скорость нахождения сил  $S_x, S_z$  по приведенным формулам приблизительно равна скорости нахождения сил интерполяцией по сеткам.

## 2. Исходные формулы и характерные особенности сил

Принимая распределение плотности заряда в пучках бигансовым  $\rho = \rho_0 \exp(-x^2/2 - z^2/2)$ , прямым интегрированием потенциалов Лиенара-Вихерта (при столкновении пучков в приближении тонкой линзы) может быть получена формула (см., например, /4/):

$$S_{x,z} = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\bar{x}}{z-\bar{z}} \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{z}^2}{2}\right) \frac{d\bar{x} d\bar{z}}{(x-\bar{x})^2 + \sigma_x^2(z-\bar{z})^2} \quad (2.1)$$

где  $X = \frac{x}{\sigma_x}, Z = \frac{z}{\sigma_z}$

$\sigma_x, \sigma_z$  - среднеквадратичные поперечные размеры пучка.

При  $\mathcal{E} \gg 1$  выражение (2.1) можно представить также в виде /7/:

$$S_{x,z} = \frac{4\pi}{1-v} \int_0^{1-v^2} \exp(-as - \frac{bs}{1-s}) \left(\frac{X}{1-s}\right) \frac{ds}{\sqrt{1-s}} \quad (2.2)$$

где  $a = \frac{1}{2} \frac{X^2}{1-v^2}; b = \frac{1}{2} v^2 \frac{Z^2}{1-v^2}; v = \frac{\sigma_z}{\sigma_x} = \frac{1}{\mathcal{E}}$  или в дру-

гой, более удобной для численного интегрирования форме

$$S_x = \frac{4\pi}{1-v} X \cdot \exp(\beta-a) \int_0^1 \exp(ay^2 - \beta/y^2) dy \quad (2.3)$$

$$S_z = \frac{4\pi}{1-v} vZ \cdot \exp(\beta-a) \int_0^1 \exp(ay^2 - \beta/y^2) dy$$

откуда, используя определение комплексной функции ошибок (см. /8/)

$$w(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt\right) \quad (2.4)$$

легко получить следующее представление /9/

$$S_x = \frac{2\pi}{1-v} \sqrt{2\pi(1-v^2)} \operatorname{Im} \left[ w(\sqrt{a'+i\sqrt{b'}}) - e^{\beta-\beta\sqrt{1+av^2-a}} \cdot w\left(\sqrt{a'v+i\frac{\sqrt{b'}}{v}}\right) \right] \quad (2.5)$$

$$S_z = \frac{2\pi}{1-v} \sqrt{2\pi(1-v^2)} \operatorname{Re} \left[ w(\sqrt{a'+i\sqrt{b'}}) - e^{\beta-\beta\sqrt{1+av^2-a}} \cdot w\left(\sqrt{a'v+i\frac{\sqrt{b'}}{v}}\right) \right]$$

Рассмотрим сначала наиболее характерные особенности сил  $S_x, S_z$  при  $\mathcal{E} \gg 1$  (т.е.  $v \ll 1$ ). В этом случае второе слагаемое в квадратных скобках для  $S_x$  в (2.5) как минимум в  $\mathcal{E}$  раз меньше первого. В этом можно убедиться, производя некоторые преобразования в (2.3). В результате с точностью до членов порядка можно записать:

$$S_x = 2\pi \sqrt{2\pi} \operatorname{Im} w\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{i\sqrt{Z}}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.6)$$

Поскольку  $v \ll 1$ , то в области  $|z| \ll \frac{|X|}{v}$  сила  $S_x$  практически не зависит ни от  $v$ , ни от  $Z$  и может быть представлена в виде:

$$S_x = 2\pi \sqrt{2\pi} \operatorname{Im} w\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right) = 4\pi \sqrt{2} F_D\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.7)$$

где  $F_D(y)$  - интеграл Доусона /8/

$$F_D(y) = e^{-y^2} \int_0^y e^{t^2} dt \quad (2.8)$$

Следует учесть, однако, что хотя для  $|x| < 1$  выражение (2.7) имеет область применимости (в смысле малой относительной погрешности) более узкую, чем  $|z| \ll 1/\nu$ , но поскольку при уменьшении  $x$  сила  $S_x$  тоже уменьшается ( $S_x \approx 4\pi x$  при  $|x| \ll 1$ ), то с практической точки зрения выражение (2.7) применимо в области  $|z| \ll 1/\nu$  (большие относительные ошибки малой величины неважны). Иными словами, приближение (2.7) имеет малую абсолютную погрешность в области  $|z| \ll 1/\nu$  и малую относительную погрешность в области  $|z| \ll x/\nu$ .

При выводе всех приближенных формул в этой работе используется тот факт, что замена второго слагаемого в квадратных скобках для  $S_z$  в 2.5 согласно

$$e^{b - b/\nu^2 + a\nu^2 - a} \cdot \operatorname{Re} w(\sqrt{a}\nu + i\sqrt{b}) \approx e^{\theta - a} \cdot (1 - \operatorname{erf}(\frac{\sqrt{b}}{\nu})) \quad (2.9)$$

может служить достаточно первым приближением (что было проверено численно). При замене первого слагаемого в квадратных скобках для  $S_z$  в (2.5) по формуле

$$\operatorname{Re} w(\sqrt{a} + i\sqrt{b}) = \operatorname{Re} w(\sqrt{a}) = e^{-a} \quad (2.10)$$

вычисление силы  $S_z$  из (2.5) с учетом (2.10) будет иметь малую абсолютную погрешность в области  $|z| \ll 1/\nu$  и малую относительную погрешность в области  $|z| \ll e^{-x/2}/\nu$ . Используя совместно (2.9) и (2.10), получим приближенную формулу для  $S_z$ . В итоге будем иметь

$$\begin{aligned} S_x &= 4\pi\sqrt{2} F_D (x/\sqrt{2}) \\ S_z &= 2\pi\sqrt{2\pi} e^{-x/2} \operatorname{erf}(z/\sqrt{2}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Обе формулы (2.11) имеют малую абсолютную погрешность в области  $|z| \ll |x|/\nu$ . Одновременно с этим первая формула (2.11) для  $S_x$  имеет малую относительную погрешность в области  $|z| \ll |x|/\nu$ , а вторая формула (2.11) для  $S_z$  имеет малую относительную погрешность в области  $|z| \ll e^{-x/2}/\nu$ .

Приближение (2.11) и его простейшие модификации использовались в работах /5,6/ для численного моделирования эффектов встречи. Хотелось бы отметить, что несмотря на свою простоту, формулы (2.11) отражают некоторые особенности взаимодействия

пучков с  $\varkappa \gg 1$ . В частности, качественно понятен наблюдавшийся практически всеми авторами как в экспериментальных работах, так и в работах по численному моделированию рост среднего размера пучка по оси  $z$  при отсутствии роста среднего размера по оси  $x$ . Дело в том, что в приближении (2.11), которое справедливо в области  $|z| \ll 1/\nu$ , где как раз и происходит существенное увеличение среднего размера пучка, движение частиц по  $x$  не зависит от движения по  $z$ . Движение же по  $z$ , напротив, сильно модулировано движением по  $x$ . В результате этого в приближении (2.11) вектора резонансных колебаний на нелинейных пучковых резонансах связи  $m\nu_x + n\nu_z + k = 0, n \neq 0$  направлены по оси  $z$ . Кроме того, из (2.11) можно понять другую характерную особенность полученной в /1/ структуры резонансов при  $\varkappa \gg 1$  - расположение большей части резонансов в области  $|x| < 3$ . Это связано с быстрым уменьшением нелинейного сдвига частоты  $\Delta\nu_z$  при увеличении амплитуды колебаний  $A_x = \sqrt{x^2 + p_x^2}$  (зависимости  $\Delta\nu_{x,z}(A_x, A_z)$ ) приведены также в /1/), что объясняется быстрым уменьшением силы  $S_z$  в (2.11) при увеличении  $|x|$ .

Таким образом, формулы (2.11), по-видимому, могут быть применены для объяснения эффектов, связанных с поведением частиц на малых амплитудах - зависимостей средних размеров пучка и удельной светимости от различных параметров. Так, при моделировании эффектов встречи для установки CESR ( $\varkappa \sim 60$ ) /6/ с использованием (2.11) были получены результаты, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментальными данными.

Следует заметить, однако, что для объяснения эффектов, связанных с поведением частиц на больших амплитудах (например, при исследовании зависимости времени жизни пучка от различных параметров) формулы (2.11) становятся непригодными. Так, в работе /1/ для параметров ВЭШ-2М ( $\varkappa = 20$ ) при численном моделировании наблюдался рост  $x$ -амплитуды частиц вплоть до  $x \approx 10$  в области  $|z| \sim 1/\nu \gg 1$ . Как следует из приведенного ранее анализа в этой области приближение (2.11) дает неверные результаты. Специально проведенное численное моделирование с упрощенными формулами (2.11) в вышеуказанной ситуации действительно показало отсутствие роста  $x$ -амплитуды и ничем не ограниченный уход частиц ( $|z| > 80$ ). Таким образом, формулы (2.11), хотя и содержат определенную информацию о силах  $S_x, S_z$  встречного взаимодействия пучков при  $\varkappa \gg 1$ , но имеют ограниченную область применимости.

### 3. Общее упрощение и вывод формул в основной области

Для получения приближенных формул для произвольных  $\alpha, \beta$ , начнем с рассмотрения (2.5). Для получения относительной погрешности выше, чем  $\sqrt{v}$  в отличие от приближения (2.11) учтем вклад второго слагаемого в квадратных скобках для  $\xi_z$  в формуле (2.5).

Используя условие  $\sqrt{a} \ll 1$  можно записать вторые слагаемые в (2.5) в более простом виде. Поскольку получить формулы, достаточно точно аппроксимирующие первые слагаемые в квадратных скобках в (2.5) — т.е. функции  $\operatorname{Re} w(\sqrt{a} + i\sqrt{b})$  и  $\operatorname{Im} w(\sqrt{a} + i\sqrt{b})$  (удовлетворяющие кроме того требованию достаточно высокой скорости вычисления на ЭВМ для любых значений  $X, Z$  представляется затруднительным, то разобьем плоскость  $X, Z$  на несколько областей, в каждой из которых будем использовать свои формулы. Так, в достаточно широкой области  $|z| \ll 1/\sqrt{v}$  при учете малости  $\sqrt{b} = \frac{z}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v^2}} \ll 1$  можно получить для  $\operatorname{Re}, \operatorname{Im} w(\sqrt{a} + i\sqrt{b})$  довольно простые выражения, скорость вычисления которых на ЭВМ достаточно высока. В другой области для  $|z| \gtrsim 1/\sqrt{v}$  приходится использовать более сложный способ вычисления  $\operatorname{Re} w(\sqrt{a} + i\sqrt{b})$ ,  $\operatorname{Im} w(\sqrt{a} + i\sqrt{b})$ , основанный на аппроксимациях Паде. Скорость вычисления на ЭВМ по этому способу гораздо ниже, но поскольку основная часть пучка находится в области  $|z| \ll 1/\sqrt{v}$ , то это мало влияет на время работы программ моделирования эффектов встречи.

Итак, при условии  $\sqrt{a} \ll 1$  имеем

$$e^{b - b/v^2 + av^2 - a} \cdot \operatorname{Re} w(\sqrt{a}v + \frac{i\sqrt{b}}{v}) \approx e^{b - b/v^2 - a} \cdot \operatorname{Re} w(\frac{i\sqrt{b}}{v}) =$$

$$= e^{b - b/v^2 - a} \cdot (1 - \operatorname{erf}(\frac{\sqrt{b}}{v})) \quad (3.1)$$

В то же время для мнимой части комплексной функции ошибок  $w$  надо учесть линейный член по  $\sqrt{a}v$ , поскольку нулевой член разложения равен нулю. Используя соотношение

$$w'(z) = -2z w(z) + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \quad (3.2)$$

получим

$$e^{b - b/v^2 + av^2 - a} \cdot \operatorname{Im} w(\sqrt{a}v + \frac{i\sqrt{b}}{v}) \approx \quad (3.3)$$

$$\approx e^{b - a} \left( -2\sqrt{ab} \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{b}}{v}\right) \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{a}v e^{-b/v^2} \right)$$

Таким образом, в приближении  $\sqrt{a}v \ll 1$  вместо (2.5) имеем

$$\xi_x = \frac{2\pi}{1-v} \sqrt{2\pi(1-v^2)} \left[ \operatorname{Im} w(\sqrt{a} + i\sqrt{b}) - 2e^{b - b/v^2 - a} \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{ab} \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{b}}{v}\right) \right) e^{b/v^2} \right) \right]$$

$$\xi_z = \frac{2\pi}{1-v} \sqrt{2\pi(1-v^2)} \left[ \operatorname{Re} w(\sqrt{a} + i\sqrt{b}) - e^{b - b/v^2 - a} \cdot e^{b/v^2} \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{b}}{v}\right) \right) \right] \quad (3.4)$$

Из-за наличия в (3.4) двух слагаемых, одно из которых быстро убывает при увеличении  $|X|$ , оказывается, что (3.4) верно с достаточно высокой точностью для любых  $|X|, |Z|$ , а не только для  $av \approx \frac{Xv}{\sqrt{2}} \ll 1$ .

Перейдем теперь к получению приближения для  $\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w$  в области  $|z| \ll 1/\sqrt{v}$  (т.е.  $\sqrt{b} \ll 1$ ). Разложим  $w(\sqrt{a} + i\sqrt{b})$  по  $\sqrt{b}$  до второго порядка включительно.

Из (2.4) имеем

$$w'(z) = -2z w(z) + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \quad (3.5)$$

$$w''(z) = -2w(z) + 4z^2 w(z) - \frac{4i}{\sqrt{\pi}} z$$

С учетом (3.5) получим

$$w(\sqrt{a} + i\sqrt{b}) \approx w(\sqrt{a}) + i\sqrt{b} \left( -2aw(\sqrt{a}) + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \right) - \frac{b}{2} \left( (4a-2)w(\sqrt{a}) - \frac{4i}{\sqrt{\pi}} \sqrt{a} \right) \quad (3.6)$$

Используя соотношение

$$w(\sqrt{a}) = e^{-a} + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} e^{-a} \int_0^{\sqrt{a}} e^{t^2} dt \quad (3.7)$$

и (2.8) можно получить

$$\operatorname{Re} w(\sqrt{a}) = e^{-a}$$

$$\operatorname{Im} w(\sqrt{a}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_D(\sqrt{a}) \quad (3.8)$$

$$\operatorname{Re} w(\sqrt{a}+i\sqrt{b}) \approx e^{-a} + \sqrt{b} \left( \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{a} F_0(\sqrt{a}) - \frac{e}{\sqrt{\pi}} \right) + b(1-2a)e^{-a}$$

$$\operatorname{Im} w(\sqrt{a}+i\sqrt{b}) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_0(\sqrt{a}) - 2\sqrt{b}\sqrt{a}e^{-a} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} b(\sqrt{a}+F_0(\sqrt{a}))(1-2a)$$

Подставляя (3.8) в (3.4), имеем выражение для сил в области А ( $|z| \ll 1/\nu$ )

$$S_x^A = \frac{2\pi}{1-\nu} \sqrt{2\pi(1-\nu^2)} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} ((1+b(1-2a))F_0(\sqrt{a}) + b\sqrt{a}) - 2\sqrt{b}\sqrt{a}e^{-a} - 2e^{b-\frac{b}{\nu^2}-a} \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{a}\sqrt{b}(1-\operatorname{erf}(\frac{\sqrt{b}}{\nu}))e^{\frac{b}{\nu^2}} \right) \right] \quad (3.9)$$

$$S_z^A = \frac{2\pi}{1-\nu} \sqrt{2\pi(1-\nu^2)} \left[ e^{-a}(1+b(1-2a)) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{b}(2\sqrt{a}F_0(\sqrt{a})-1) - e^{b-\frac{b}{\nu^2}-a} \cdot e^{\frac{b}{\nu^2}}(1-\operatorname{erf}(\frac{\sqrt{b}}{\nu})) \right]$$

#### § 4. Аппроксимация Паде и формулы для больших амплитуд

Для получения сил  $S_x, S_z$  в области  $|z| \gtrsim 1/\nu$  функции  $\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w$  в (3.4) предлагается вычислять с помощью аппроксимаций Паде. Вычисление с помощью аппроксимаций Паде, входящих в (2.5) комплексных функций ошибок было предложено в [10] для произвольных значений  $X, Z$ , однако, при реализации на ЭВМ затраты машинного времени на вычисление сил  $S_x, S_z$  слишком велики. Поскольку в области больших амплитуд находится мало частиц, то полные затраты машинного времени при моделировании эффектов встречи будут определяться в основном алгоритмом вычисления сил в области малых амплитуд  $|x|, |z| \lesssim 2-3$ , и применение аппроксимаций Паде в области больших амплитуд не повлияет существенно на время вычислений.

Аппроксимации Паде являются рациональными приближениями и, так же как и степенные разложения, имеют два варианта - разложение по степеням  $y$  и по степеням  $1/y$ . Для нашего случая первый вариант соответствует малым значениям  $|X|, |Z|$ , второй - большим значениям  $|X|, |Z|$ . В книге [11] приведены аппроксимации Паде для функций, заданных интегралами

$$\int_0^y e^t \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad (|y| \ll 1) ; \quad \int_y^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad (|y| \gg 1)$$

Используя указанные аппроксимации и определение (2.4) можно получить приближенное выражение для  $w(y)$  при  $|y| \ll 1$ .

$$w(y) = e^{-y^2} + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \frac{C_n(\frac{1}{2}, y^2)}{D_n(\frac{1}{2}, y^2)} \quad (4.1)$$

где  $C_n(\frac{1}{2}, p), D_n(\frac{1}{2}, p)$  - действительные полиномы от  $p$  степени  $n/II$ .

При  $|y| \gg 1$  (используя соотношение  $\int_0^\lambda e^{t^2} dt = -i(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_\lambda^\infty e^{-t^2} dt)$ ) можно получить другое выражение для  $w(y)$ :

$$w(y) = \frac{i}{\sqrt{\pi} y} \frac{G_n(\frac{1}{2}, -y^2)}{H_n(\frac{1}{2}, -y^2)} \quad (4.2)$$

где  $H_n(\frac{1}{2}, p), G_n(\frac{1}{2}, p)$  - действительные полиномы от  $p$  степени  $n/II$ . При увеличении индекса  $n$  в  $\frac{C_n}{D_n}$  и  $\frac{G_n}{H_n}$  точность приближений увеличивается.

Необходимо отметить, что при вычислении  $w(\sqrt{a}+i\sqrt{b})$  из (4.2) в случае  $\sqrt{b}=0$  получим  $\operatorname{Re} w(\sqrt{a})=0$ , хотя на самом деле  $\operatorname{Re} w(\sqrt{a})=e^{-a}$  (точное свойство функции  $w$ ). Вследствие этого при таком способе вычисления  $w$  не будет выполняться точное свойство  $S_z(x, z)|_{z=0}=0$  (см. (2.3)), и при стремлении  $\sqrt{b}$  (т.е.  $Z$ ) к нулю относительная погрешность определения  $S_z$  будет неограниченно возрастать. Тем не менее абсолютная погрешность вычисления  $\operatorname{Re} w$  и  $S_z$  пропорциональна  $e^{-a} \approx e^{-x^2/2}$  и при достаточно большом  $a$  (т.е.  $X$ ) будет очень мала. Сама область значений  $Z$ , в которой имеется большая относительная погрешность, пропорциональна  $e^{-a}$ , и при больших  $a$  также мала.

Заметим, что в области, дополнительной к области А ( $|z| \ll 1/\nu$ ) в принципе возможно применение только приближения (4.2) ( $|y| \gg 1$ ). Однако при этом необходимо использование слишком высоких порядков аппроксимации  $H_n, G_n$ , что по многим причинам неудобно. Поэтому предпочтительным представляется разбиение области, дополнительной к А на две части - подобласть умеренных  $|y|$

( $|y| = \sqrt{a} + i\sqrt{b} \sim 0.3 \div 2$ ) - в ней можно применять приближение (4.1) ( $|y| < 1$ ); и подобласть больших  $|y|$  - в ней можно применять приближение (4.2) ( $|y| \gg 1$ ). При этом можно ограничиться относительно невысокими порядками аппроксимации  $n = 4$  в обеих областях. Дальнейшее уменьшение порядка аппроксимации  $n$ , как показал численный анализ, приводит к недопустимому понижению точности.

### 5. Границы применения различных формул

Перейдем теперь к нахождению границы между областями применения разных аппроксимаций. При этом требуется, чтобы погрешность вычисления сил и величина скачка для значений сил на границе были минимальны. В то же время желательно, чтобы граница лежала достаточно далеко от начала координат.

Сначала находились области применимости каждого из приближений (3.9), (3.4, 4.1), (3.4, 4.2) (рис.1). Максимальная погрешность приближений в областях А, В, С составляет 4%. При вычислении на ЭВМ оказывается более удобным применение приближения (3.10) не для всех значений  $|x|$ , как показано на рис.1, а для значений  $|x| < x_{\max} = 4,5$ . Это ограничение непринципиально и может быть устранено ценой увеличения размерности некоторых массивов (см. ниже). Наиболее удобным с практической точки зрения представляется разграничение плоскости  $|x|, |z|$  на области А, В, С, показанное на рис.2.

Максимальная погрешность приближения (3.10) в области А не зависит от  $x_2$ , в то время как приближение (3.4, 4.2) имеет бесконечно большую относительную погрешность при  $z = 0$ . Однако, абсолютная погрешность приближения (3.4, 4.2) при  $z = 0$  пропорциональна  $e^{-x/2}$ , то есть очень мала. Кроме того, сама область  $D$  значений  $z$ , при которых приближение (3.4), (4.2) имеет большую относительную ошибку, очень мала (область  $D$ :  $|z| < 30e^{-x/2}$ ).

Для полноты приведем формулы приближений А, В, С. Приближения в областях А, В, С получаются из (3.4) при аппроксимации  $w(\sqrt{a} + i\sqrt{b})$  зависимостями:

Приближение (3.9) (область А):

$$\text{Im } w(\sqrt{a} + i\sqrt{b}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} [(1 + \beta(1 - 2\alpha)) F_0(\sqrt{a}) + \beta\sqrt{a}] - 2\sqrt{ab} \cdot e^{-a}$$

$$\text{Re } w(\sqrt{a} + i\sqrt{b}) = e^{-a} (1 + \beta(1 - 2\alpha)) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{b} (2\sqrt{a} F_0(\sqrt{a}) - 1)$$

где  $F_0(y)$  - интеграл Доусона (2.8).

Приближение (4.1) (область В):

$$\text{Im } w(\sqrt{a} + i\sqrt{b}) = \text{Im} \left[ e^{-y^2} + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \frac{C_4(1/2, y^2)}{D_4(1/2, y^2)} \right]$$

$$\text{Re } w(\sqrt{a} + i\sqrt{b}) = \text{Re} \left[ e^{-y^2} + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \frac{C_4(1/2, y^2)}{D_4(1/2, y^2)} \right]$$

где  $y = \sqrt{a} + i\sqrt{b}$ , и

$$C_4(1/2, y^2) = 2048 y^8 - 43560 y^6 + 540540 y^4 - 2252250 y^2 + 11486475$$

$$D_4(1/2, y^2) = 5040 y^8 + 110880 y^6 + 1081080 y^4 + 5405400 y^2 + 11486475$$

Приближение (4.2) (область С):

$$\text{Im } w(\sqrt{a} + i\sqrt{b}) = \text{Im} \left[ \frac{i}{\sqrt{\pi}} y \frac{G_4(1/2, -y^2)}{H_4(1/2, -y^2)} \right]$$

$$\text{Re } w(\sqrt{a} + i\sqrt{b}) = \text{Re} \left[ \frac{i}{\sqrt{\pi}} y \frac{G_4(1/2, -y^2)}{H_4(1/2, -y^2)} \right]$$

$$y = \sqrt{a} + i\sqrt{b}$$

$$G_4(1/2, -y^2) = 16 y^8 - 280 y^6 + 1380 y^4 - 1950 y^2 + 384$$

$$H_4(1/2, -y^2) = 16 y^8 - 288 y^6 + 1512 y^4 - 2520 y^2 + 945$$

При выборе областей А, В, С, показанном на рис.2, максимальная погрешность вычисления сил составляет 4%.

## 6. Численный алгоритм и его характеристики

При моделировании на ЭВМ эффектов встречи затрачиваемое машинное время определяется в основном скоростью вычисления сил  $S_x, S_z$  в области А. В предлагаемых формулах фигурируют специальные функции  $\exp f, F_D$ , а также медленно вычисляемая  $\exp$ . Поэтому для достижения максимальной скорости выгодно использовать интерполяцию по вычисленным заранее значениям этих функций в дискретных точках. Поскольку интерполируемые функции зависят от одной переменной, то вычисление массивов значений этих функций не составляет больших потерь во времени и не потребует слишком много памяти. Из вида формул (3.10) следует, что наиболее удобно находить из интерполяций зависимости  $F_D(\sqrt{a}) e^{b/\sqrt{v}(1-\exp(\frac{\sqrt{b}}{v}))}$  и  $\exp(-a), \exp(b-\frac{b}{\sqrt{v^2}-a})$ .

В таблице I приведены времена вычисления сил  $S_x, S_z$  по различным формулам. Измерение времен проводилось на ЭВМ ЕС-1040, T — абсолютное затрачиваемое время в микросекундах. При вычислении сил  $S_x, S_z$  в области В в программе использовалось выражение (4.1) с применением комплексных переменных, но для ускорения вычисления слагаемого  $e^{-\gamma^2} = e^{b-a} (\cos 2\sqrt{ab} + i \sin 2\sqrt{ab})$  использовалась линейная интерполяция входящих в это выражение функций  $\exp, \sin, \cos$ . Как было проверено численно (см. ниже) время вычисления сил  $S_x, S_z$  в областях В и С не влияет существенно на полное время вычислений при моделировании эффектов встречи. Вследствие этого мы не ставили задачи ускорить вычисления в областях В и С, однако, при необходимости это можно сделать перейдя от записи 4.1 и 4.2 с помощью комплексных переменных к действительной форме (4.1) и (4.2). Скорость вычисления при этом возрастает приблизительно в 2 раза. Как уже было отмечено, полученные формулы аппроксимируют силы  $S_x, S_z$  с точностью 4%, но не удовлетворяют условию потенциальности  $\frac{\partial S_x}{\partial z} = \frac{\partial S_z}{\partial x}$ . Однако отображение

$$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{p}_x = p_x + F_x(x, z) \\ \bar{z} = z \\ \bar{p}_z = p_z + F_z(x, z) \end{cases}$$

хотя и не является каноническим при непотенциальных  $F_x, F_z$ , но фазовый объем оно сохраняет и в этом случае. Это означает,

что переход к приближенным формулам не вносит дополнительного трения. Кроме того, в электрон-позитронных установках всегда есть огрубляющие динамику механизмы — трение и шум. Вследствие этого естественно предположить, что непотенциальность рассматриваемых приближенных сил  $S_x, S_z$  не повлияет существенно на результаты моделирования.

Для проверки полученных формул был предпринят расчет некоторых конкретных примеров эффектов встречи с помощью сил  $S_x, S_z$ , получаемых из сеточных интерполяций, и с помощью сил, получаемых из предлагаемых формул. Результаты представлены в Таблице 2, где приведены полученные значения удельной светимости и среднего размера пучка по оси  $z$ . Приведены также величины статистических ошибок. Величина модуляций, рабочая точка и остальные параметры соответствуют режиму ВЭШ-4 для  $z = 30$ . Как видно из этой таблицы, разница результатов вариантов I и II не превышает статистической ошибки. Время вычисления слабо зависит от увеличения размера пучка (максимальное увеличение времени вычислений на 3% в случае 4).

Таким образом, полученные формулы для сил  $S_x, S_z$  имеют достаточную точность и время вычисления сил  $S_x, S_z$  на ЭВМ по этим формулам достаточно мало. Это позволяет эффективно применять их при моделировании эффектов встречи.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф.М.Израйлеву за постоянное внимание к работе и плодотворное обсуждение.



Л и т е р а т у р а

- I. Герасимов А.Л., Израйлев Ф.М., Вассерман И.Б., Теннисон Дж. "Эффекты встречи эллиптического пучка с большим отношением поперечных размеров". Доклад на XII Международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий", Батавия, США, 1983. Препринт 84-16 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1984.
2. A. Piwinski, DESY M-81/31 (1981), DESY 83-028 (1983)
3. S. Myers "Simulation of the Beam-beam effect for  $e^+e^-$  storage rings" LEP Note 362, 1982
4. В.В. Вечеславов. Препринт 80-72 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1980.
5. J. Tennyson "A simulation study of the beam-beam interaction at SPEAR" in the "Proceedings of the beam-beam interaction seminar", Stanford, 1980
6. S. Peggs "Some aspects of Machine Physics at CESR", Ph.D. thesis, Cornell University, 1981
7. S. Kheifets "Potential of a three-dimensional Gaussian bunch", PETRA Note 119 (1.10.1976)
8. "Справочник по специальным функциям" под ред. М.Абрамовича и И.Стигана, Москва, 1979.
9. M. Basetti, G. Ezskine "Closed expression for the electric field of a two-dimensional Gaussian charge" CERN-ISR-TH/80-06
10. Okamoto and Talman "Rational approximation of the complex error function and the electric field of a two-dimensional Gaussian charge distribution", CBN-80-13 (1980)
- II. Ю. Люк. "Специальные математические функции и их аппроксимации", Москва, 1980.

Таблица I. Время вычисления сил  $\mathcal{F}_x$ ,  $\mathcal{F}_z$  по различным формулам

Вариант	T
I	260
II	620
III	520
IV	2500

- I - Круглый пучок  $\sigma_x = \sigma_z$ ;  $\mathcal{F}_{x,z} = \frac{x}{z} \int \frac{4\pi}{x^2+z^2} (1 - \exp(-\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2}))$
- II - Эллиптический пучок, линейная интерполяция по сетке
- III - Эллиптический пучок (3.9)
- IV - Эллиптический пучок (4.1)

Таблица 2. Сравнение результатов моделирования эффектов встречи с использованием сеточных интерполяций (индекс I) и полученных приближенных формул (индекс II)

Вариант	$L^I$	$L^II$	$\bar{z}^I$	$\bar{z}^{II}$
1	$0,87 \pm 0,036$	$0,89 \pm 0,018$	$1,44 \pm 0,09$	$1,40 \pm 0,09$
2	$0,93 \pm 0,018$	$0,95 \pm 0,020$	$1,08 \pm 0,03$	$1,07 \pm 0,04$
3	$0,89 \pm 0,027$	$0,87 \pm 0,025$	$1,21 \pm 0,06$	$1,35 \pm 0,07$
4	$0,64 \pm 0,040$	$0,67 \pm 0,040$	$2,39 \pm 0,20$	$2,38 \pm 0,20$
5	$0,80 \pm 0,044$	$0,87 \pm 0,045$	$1,88 \pm 0,16$	$1,51 \pm 0,16$

Обозначения:  $L$  - удельная светимость,  $\bar{z}$  - средний размер по оси  $z$ .

Основные параметры:  $\nu_x = 8.535$ ,  $\nu_z = 9.585$ , время затухания в числе оборотов  $N = 3 \cdot 10^3$ , синхротронная частота  $\nu_s = 0.02$ .

Параметры  $\nu_z$  и  $\bar{z}$  были модулированы продольным движением по формулам:  $\nu_z = \nu_{z0} + A \cdot s$ ,  $\bar{z} = \bar{z}_0 \sqrt{1 + B \cdot s^2}$ , где  $s$  - продольная координата (синхротронная энергия)  $|s| = 0.92$ .  
 $A = 0.0024$ ,  $B = 0.067$ .

Вариант 1	$\bar{z}_x = 0,035$	$\bar{z}_z = 0,07$ .
Вариант 2	$\bar{z}_x = 0,07$	$\bar{z}_z = 0,035$ .
Вариант 3	$\bar{z}_x = 0,14$	$\bar{z}_z = 0,07$
Вариант 4	$\bar{z}_x = 0,18$	$\bar{z}_z = 0,09$
Вариант 5	$\bar{z}_x = 0,025$	$\bar{z}_z = 0,10$ (с удвоенной модуляцией)

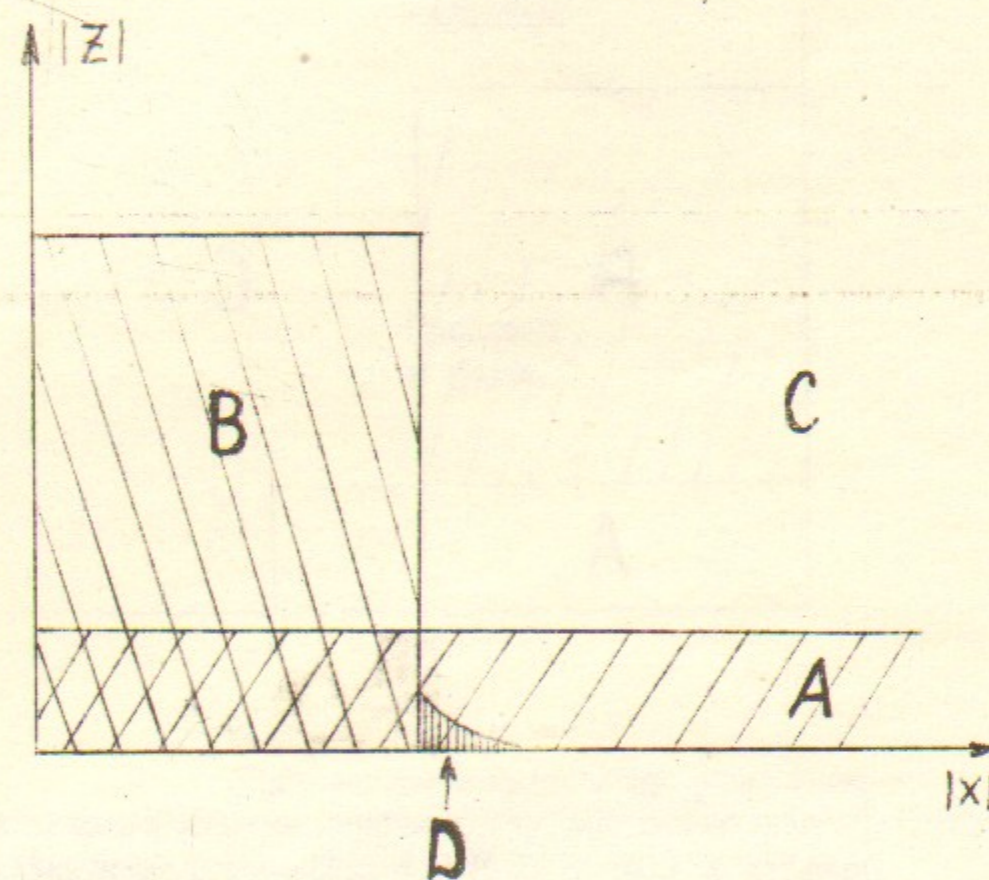


Рис. I. Области применимости различных приближений при точности 4%.

Область A ( $|z| < \frac{\infty}{3}$ ) - приближение (3.10)

Область B ( $|z| < 1.5 \infty$ ,  $|x| < 3.5$ ) - приближение (3.4, 4.1) при  $n = 4$ .

Область C ( $|z| > 1.5 \infty$  или  $|x| \geq 3.5$ ) с исключением области D, показанной (в увеличенном масштабе) сплошной штриховкой, область D:  $z = 30e^{-x/2}$  - приближение (3.4, 4.2) при  $n = 4$

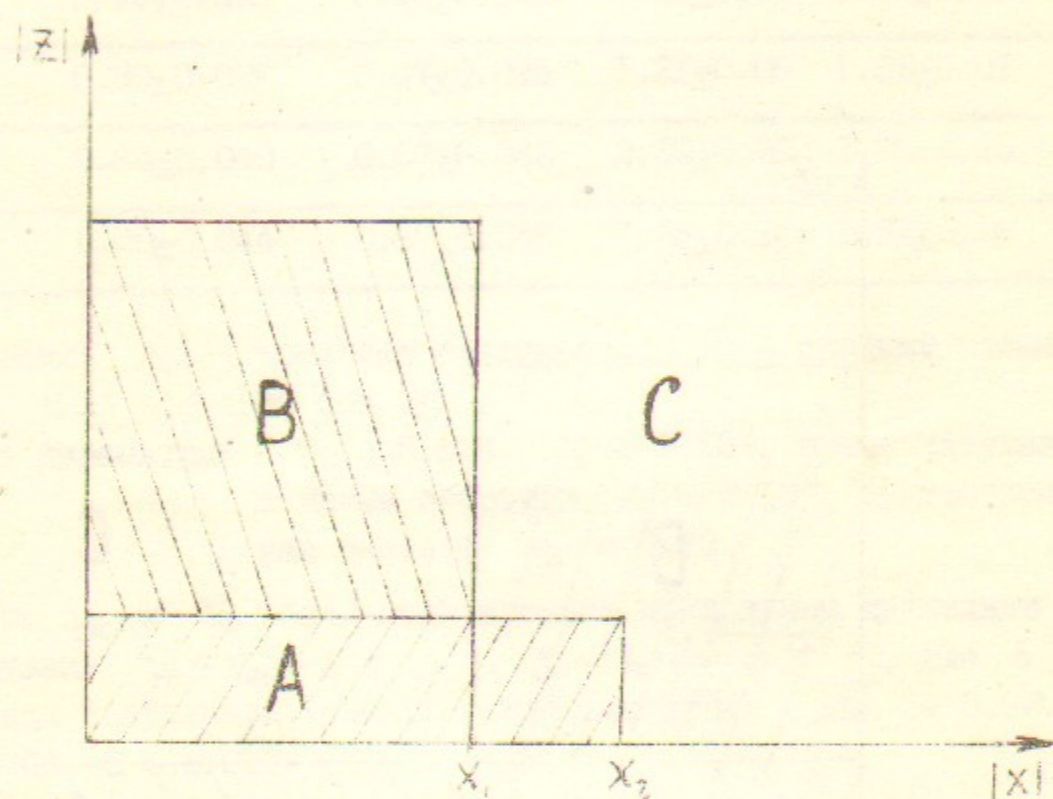


Рис.2. Предлагаемые области применения различных приближений.  
 Область А ( $|z| < \pi/3, |x| < 4,5$ ) - приближение (3.10)  
 Область В ( $1,5 < |z| < \pi/3, |x| < 3,5$ ) - приближение (3.4, 4.1)  
 при  $n = 4$ .  
 Область С ( $x, z$  не принадлежат А, В) - приближение  
 (3.4, 4.2) при  $n = 4 \quad x_1 = 3,5 \quad x_2 = 4,5$

А.Л.Герасимов

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ СИЛ ВСТРЕЧНОГО  
 ПУЧКА С БОЛЬШИМ ОТНОШЕНИЕМ ПОПЕРЕЧНЫХ  
 РАЗМЕРОВ

Препринт  
 № 84-95

Работа поступила - 22 июня 1984 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
 Подписано к печати 6.07-1984 г. МН 04420  
 Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.  
 Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 95.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90