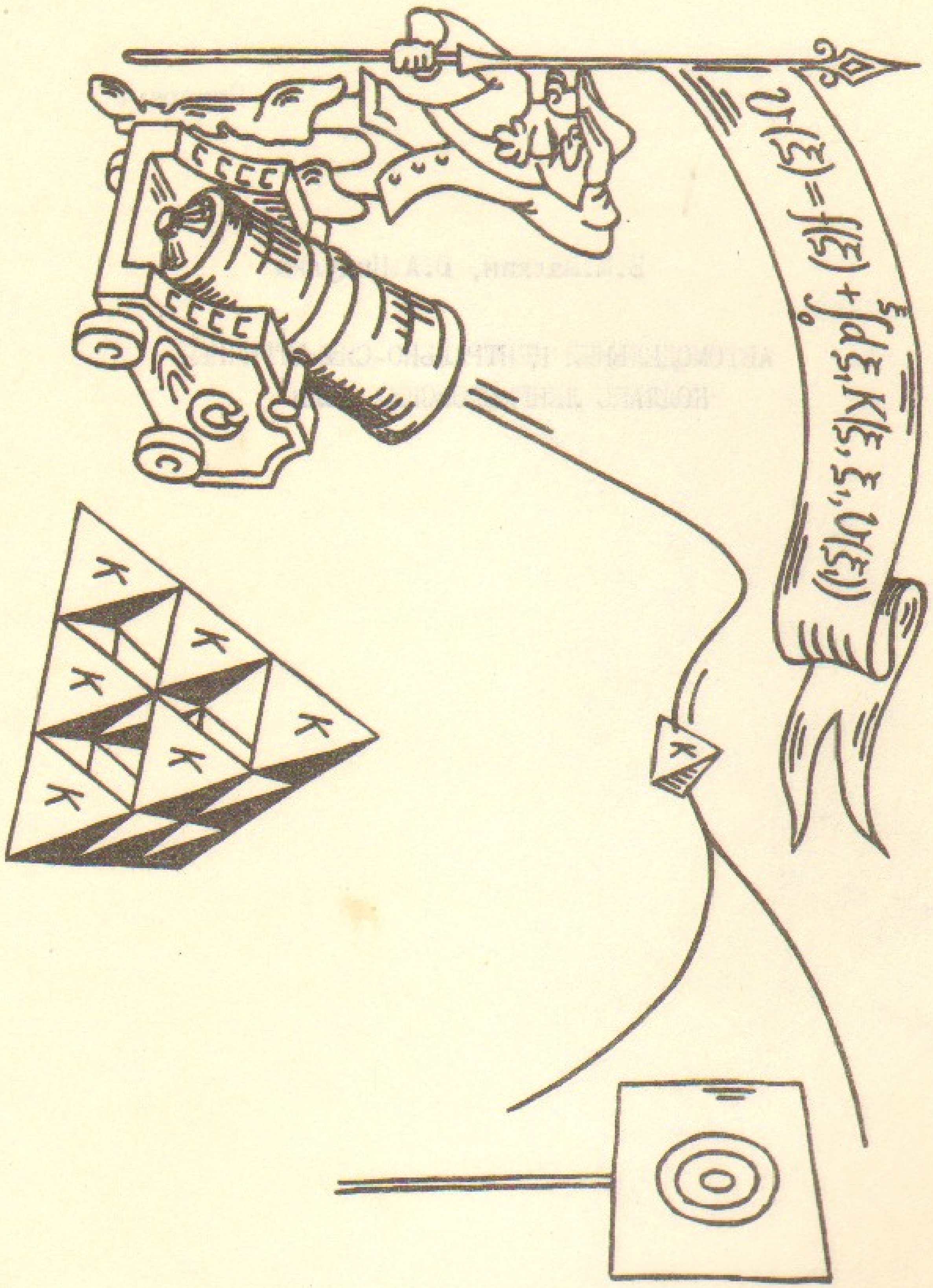
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.М.Малкин, Ю.А.Цидулко

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ КОЛЛАПС ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

ПРЕПРИНТ 84-65

НОВОСИБИРСК



АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ КОЛЛАПС ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

В.М.Малкин, Ю.А.Цидулко

АННОТАЦИЯ

Выявлена долгое время исключавшаяся возможность исследования коллапса ленгмюровских волн в простейшей геометрии. Явно найдено автомодельное решение с центрально-симметричной каверной. Это решение является первым примером автомодельного решения, удовлетворяющего необходимому условию устойчивости $E_s^2 < \frac{14}{9}$ (E_s^2 - среднее значение квадрата электрического поля в центре каверны).

SELF-SIMILAR SPHERICALLY-SYMMETRIC COLLAPSE OF LANGMUIR WAVES

V.M.Malkin and Yu.A.Tsydulko
630090, Novosibirsk, U.S.S.R.

ABSTRACT

Langmuir wave collapse in the simplest geometry (for a long time considered impossible) is investigated. The self-similar solution with the spherically-symmetric cavity is explicitly found. This solution is the first example of the self-similar solution, which satisfies the necessary condition for the stability: $E_s^2 < \frac{14}{9}$ (E_s is the value of electric field in the centre of the cavity).

I. Введение

Попытки отыскания автомодельных режимов ленгмюровского коллапса предпринимались, начиная с самой первой работы о нем [1]. Сначала обсуждались центрально-симметричные решения, но численные расчеты [2] показали, что при столь высокой симметрии поля коллапс отсутствует. Это получило в [2] простое объяснение: было замечено, что симметричное электрическое поле обращается в нуль в центре каверны и плазма, вытесняясь в область пониженного поля, препятствует развитию коллапса (см., также [3]). Поскольку прямое вычисление несимметричных автомодельных решений при помощи существующих ЭВМ казалось невозможным, стали строиться упрощенные модели. К настоящему времени автомодельные решения удалось отыскать в моделях центрально-симметричного скалярного коллапса и ленгмюровского коллапса сильно сплюснутой каверны [4]. Недавно выяснилось, что эти автомодельные решения, а также все возможные автомодельные решения скалярной модели, неустойчивы относительно малых возмущений [5]. В общем случае ленгмюровского коллапса подобную теорему доказать не удалось, и возник вопрос о существовании автомодельных режимов, удовлетворяющих необходимому условию устойчивости

$$E_s^2 < \frac{14}{9} \tag{1}$$

(E_s - среднее электрическое поле в центре каверны в безразмерных автомодельных переменных (подробнее см. в [5]). В настоящей работе данный вопрос решен: автомодельное решение, удовлетворяющее условию (1), найдено явно.

§ 2. Постановка задачи

В адиабатическом сверхзвуковом пределе коллапс ленгмюровских волн описывается следующими безразмерными уравнениями:

$$\nabla(-\omega_p - n + \Delta)\nabla\varphi_p = 0 , \tag{2}$$

$$n_{tt} = \Delta \sum_p |\nabla\varphi_p|^2 , \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\int d^3r\, |\nabla\varphi_p|^2 = 0. \tag{4}$$

Здесь n – возмущение концентрации плазмы, φ_p – адиабатически меняющиеся собственные моды электростатического потенциала. Временна́я огибающая потенциала φ выражается через них следующим образом:

$$\varphi = \sum_p \varphi_p \exp\left\{ i \int^t \omega_p(t')\,dt' \right\}.$$

При выводе уравнений (2)-(4) были опущены интерференционные члены в давлении ленгмюровских волн $|\nabla\varphi|^2$. Данное приближение заведомо оправдано, если собственные частоты ω_p не вырождены, так как при этом частота осцилляций интерференционных членов ω, в силу адиабатичности коллапса, гораздо больше обратного времени изменения каверны γ. В случае центрально-симметричной каверны, о котором пойдет речь ниже, уравнения (2)-(4) нуждаются в пояснении. Действительно, при наличии центральной симметрии собственные моды φ_p являются одновременно собственными функциями оператора поворота; роль индекса p, нумерующего связанные состояния, играет тройка целых чисел (κ, ℓ, m), где κ – "главное квантовое число", ℓ – "орбитальный момент", $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm \ell$ – "проекция орбитального момента" на некоторое направление; собственные частоты ω_p не зависят от m, т.е. имеет место $2\ell+1$ – кратное вырождение. Но в адиабатическом пределе достаточно ничтожного возмущения, нарушающего симметрию каверны, чтобы расщепление вырожденных собственных частот превысило γ и уравнения (2)-(4) стали применимыми. Ниже предполагается, что такое возмущение имеется. Числа заполнения расщепленных уровней считаются одинаковыми. При этом правая часть уравнения (3) с высокой точностью является центрально-симметричной и в процессе эволюции не нарушает симметрии каверны. Таким образом, центрально-симметричный ленгмюровский коллапс возможен. Он и является предметом дальнейшего исследования.

§ 3. Основные уравнения

Автомодельные решения системы (2)-(4):

$$\varphi_p(\vec r, t) = \tilde t^{-1/3}\,\psi_p(\tilde t^{-2/3}\vec r), \quad \tilde t \equiv t_s - t,$$
$$n(\vec r, t) = \tilde t^{-4/3}\,u(\tilde t^{-2/3}\vec r), \quad \omega_p(t) = \tilde t^{-4/3}\,\Omega_p. \qquad (5)$$

(t_s – момент образования особенности), – удовлетворяют следующим уравнениям

$$\nabla(-\Omega_p - u + \Delta)\nabla\psi_p = 0, \qquad (6)$$

$$\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)u = \Delta\sum_p |\nabla\psi_p|^2, \qquad (7)$$

где ∇ означает уже дифференцирование по $\vec\xi = \tilde t^{-2/3}\vec r$. В центрально-симметричной каверне собственные функции $\psi_p(\vec\xi)$ $(p = (\kappa, \ell, m))$ имеют вид[I)]

$$\psi_{\kappa\ell m}(\vec\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}}\,R_{\kappa\ell}(\xi)\,\tilde Y_{\ell m}\left(\frac{\vec\xi}{\xi}\right). \qquad (8)$$

Радиальные функции $R_{\kappa\ell}(\xi)$ определяются из уравнений:

$$\left\{\left[\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d}{d\xi} - \frac{\ell(\ell+1)}{\xi^2}\right]^2 - \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2(u + \Omega_{\kappa\ell})\frac{d}{d\xi} + \frac{\ell(\ell+1)}{\xi^2}(u + \Omega_{\kappa\ell})\right\}R_{\kappa\ell}(\xi) = 0. \qquad (9)$$

При обычной нормировке сферических функций $Y_{\ell m}$:

$$\int dO_\xi \left|Y_{\ell m}\left(\frac{\vec\xi}{\xi}\right)\right|^2 = 1, \; - \qquad (10)$$

числа заполнения связанных состояний $N_{\kappa\ell m} = \int d^3\xi\,|\nabla\psi_{\kappa\ell m}|^2$ не зависят от m и выражаются через функции $R_{\kappa\ell}$ следующим образом:

$$N_{\kappa\ell} \equiv (2\ell+1)N_{\kappa\ell m} = \int_0^\infty d\xi\,\xi^2\left[\left(\frac{dR_{\kappa\ell}}{d\xi}\right)^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{\xi^2}R_{\kappa\ell}^2\right].$$

С учетом (8), (10), уравнение (7) приобретает вид

$$\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\xi\frac{d}{d\xi}\right)\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\xi\frac{d}{d\xi}\right)u = \frac{1}{\xi}\frac{d^2}{d\xi^2}\xi\Phi, \qquad (11)$$

I) Здесь $\tilde Y_{\ell\pm m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{\ell m} \pm Y_{\ell -m})$, т.к. с учетом малого возмущения, снимающего вырождение, собственные функции пропорциональны вещественным.

$$\Phi \equiv \sum_p |\nabla\psi_p(\xi)|^2 = \sum_{k,\ell}\left[\left(\frac{dR_{k\ell}}{d\xi}\right)^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{\xi^2}R^2_{k\ell}\right],$$

и вместе с (9) образует замкнутую систему для функций u, $R_{k\ell}$. Числа заполнения $N_{k\ell}$, от которых решение зависит как от параметров, могут быть заданы в известной степени произвольно. Произвол ограничен, в частности, тем, что заметная доля запертых в каверне волн должна находиться в состояниях с ℓ = = I, так как только в этих состояниях волны создают ненулевое давление в центре каверны, препятствуя вытеснению туда плазмы. Ниже, для простоты, предполагается, что все волны находятся в состояниях с ℓ = I, причем заселен лишь один из имеющихся триплетов. В силу симметрии уравнений (9), (II) относительно преобразования

$$\xi \to \lambda\xi, \quad R_{k\ell} \to \lambda R_{k\ell},$$

$$u \to \lambda^{-2} u, \quad \Omega_{k\ell} \to \lambda^{-2}\Omega_{k\ell},$$

"энергию связи" Ω_{11}, соответствующую заселенному триплету, можно, не теряя общности, считать равной единице:

$$\Omega_{11} = 1.$$

Уравнение (9) для радиальной собственной функции $R_{11} \equiv R$ удобно заменить следующим интегральным уравнением:

$$R(\xi) = A(\xi + a_2\xi^3) + \frac{1}{3}\int_0^\xi d\xi_1\left\{[u(\xi_1)+1]R(\xi_1) - [u(0)+1]A\xi_1\right\}\left(\xi - \frac{\xi_1^3}{\xi^2}\right) + \frac{1}{15}\int_0^\xi d\xi_1[u(\xi_1)-u(0)]\left[R(\xi_1)\left(-5\xi_1 + 6\frac{\xi_1^3}{\xi^2} - \frac{\xi^3}{\xi_1^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{dR(\xi_1)}{d\xi_1}\left(-5\xi_1^2 + 3\frac{\xi_1^4}{\xi^2} + 2\frac{\xi^3}{\xi_1}\right)\right]. \quad \text{(I2)}$$

Интегральная форма уравнения (II) хорошо известна (см., например, [4,6]):

$$u(\xi) = \frac{9}{4\xi^2}\left\{\Phi(\xi) - \Phi(0) - \frac{1}{2\xi^{3/2}}\int_0^\xi d\xi_1\,\xi_1^{1/2}[\Phi(\xi_1) - \Phi(0)]\right\} \quad \text{(I3)}$$

§ 4. <u>Простейшие свойства автомодельных решений</u>

Дополненные определением функции Φ :

$$\Phi(\xi) = \left(\frac{dR(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \frac{2}{\xi^2}R^2(\xi), \quad \text{(I4)}$$

уравнения (I2), (I3) задают аналитическое в нуле решение своих дифференциальных аналогов (9),(II). Оно зависит от двух параметров, в качестве которых можно выбрать, например, A и a_2. Давление волн в центре каверны $\Phi(0)$ и глубина каверны $u(0)$ связаны с A и a_2 соотношениями

$$\Phi(0) = 3A^2,$$

$$u(0) = \frac{27}{28}\left.\frac{d^2\Phi}{d\xi^2}\right|_{\xi=0} = \frac{135}{7}Aa_2.$$

Входящее в необходимое условие устойчивости (I) поле E_s попросту равно A :

$$E_s^2 = \max_{|\vec n|=1}\sum_p(\vec n\nabla\psi_p)^2 = \frac{1}{3}\Phi(0) = A^2.$$

При произвольных значениях A и a_2 решение уравнений (I2)- -(I4) имеет в некоторой точке ξ_s особенность вида (ср. с [4]):

$$R(\xi)\Big|_{\xi\approx\xi_s} \approx \pm\frac{2\sqrt2}{3}\xi_s \ln\left(1-\frac{\xi}{\xi_s}\right), \quad u(\xi)\Big|_{\xi\approx\xi_s} \approx \frac{2}{(\xi-\xi_s)^2}. \quad \text{(I5)}$$

Условие регулярности решения при всех конечных значениях ξ -

$$\xi_s = \infty - \quad \text{(I6)}$$

определяет линию $A = A(a_2)$ в плоскости параметров

A, a_2. На этой линии асимптотика решения при $\xi \to \infty$, как нетрудно показать, имеет вид

$$R(\xi) \approx C\left(\xi + \frac{9}{2}\frac{A^2-C^2}{\xi}\right) + \frac{B}{\xi^2}, \tag{I7}$$

$$u(\xi) \approx \frac{9}{2}\,\frac{C^2-A^2}{\xi^2}\,.$$

Поскольку электрическое поле вне каверны в автомодельных переменных (5) равно нулю, должно выполняться условие

$$C = 0. \tag{I8}$$

Это условие определяет точку на линии $A = A(a_2)$.

Асимптотика автомодельного возмущения концентрации при $\xi \to \infty$:

$$u(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\approx} -\frac{9}{2}\frac{A^2}{\xi^2} \equiv -\frac{\beta}{\xi^2}, - \tag{I9}$$

позволяет судить о спектре собственных частот в области малых "энергий связи" $\Omega_p \ll 1$. Для обычного уравнения Шредингера с потенциалом (I9) зависимость спектра от коэффициента β хорошо известна [7]: при $\beta < \beta_\ell \equiv (\ell + \frac{1}{2})^2$ связанные состояния с орбитальным моментом ℓ и достаточно малой энергией связи отсутствуют, а при $\beta > \beta_\ell$ их имеется бесконечное множество. Уравнение (6) с потенциалом (I9) отличается от уравнения Шредингера обычного вида с тем же потенциалом, но может быть исследовано по описанной в [7] схеме. Результат оказывается аналогичным, меняется лишь выражение для критического значения коэффициента β:

$$\beta_\ell = \left(\ell + \frac{1}{2} - \frac{1}{\ell+\frac{1}{2}}\right)^2. \tag{20}$$

Таким образом, условие существования в каверне бесконечного числа связанных состояний с орбитальным моментом ℓ (сгущающихся по мере уменьшения энергии связи) имеет вид

$$E_s^2 \equiv A^2 > \tilde{A}_\ell^2 \equiv \frac{2}{9}\left(\ell + \frac{1}{2} - \frac{1}{\ell+\frac{1}{2}}\right)^2. \tag{2I}$$

Расположенные в порядке возрастания, величины $\tilde{A}_\ell^2$ образуют такую последовательность:

$$\tilde{A}_1^2 = \frac{25}{162},$$
$$\tilde{A}_0^2 = \frac{1}{2},$$
$$\tilde{A}_2^2 = \frac{49}{50},$$
$$\tilde{A}_3^2 = \frac{225}{98},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdot$$

Для решений, удовлетворяющих необходимому условию устойчивости (I), неравенство (2I) может выполняться только при $\ell \leq 2$.

§ 5. Результаты численных расчетов

Дифференцирование (I2) по ξ приводит к уравнению

$$\frac{dR(\xi)}{d\xi} = A(1 + 3a_2\xi^2) + \frac{1}{3}\int_0^\xi d\xi_1 \left\{[u(\xi_1)+1]R(\xi_1) - [u(0)+1]A\xi_1\right\}\left(1 + 2\frac{\xi_1^3}{\xi^3}\right) + \frac{1}{5}\int_0^\xi d\xi_1 [u(\xi_1) - u(0)]\left[-R(\xi_1)\left(4\frac{\xi_1^3}{\xi^3} + \frac{\xi^2}{\xi_1^2}\right) + \frac{dR(\xi_1)}{d\xi_1}\left(\frac{\xi^2}{\xi_1} - \frac{\xi_1^4}{\xi^3}\right)\right]. \tag{22}$$

Система нелинейных интегральных уравнений (I2)-(I4), (22) представима в виде

$$v(\xi) = f(\xi) + \int_0^{\xi} d\xi_1 \mathcal{K}(\xi, \xi_1, v(\xi_1)), \tag{23}$$

где $v = \left(R, \frac{dR}{d\xi}, u\right)$ – искомая, а f и $\mathcal{K}$ – заданные трехкомпонентные функции. Представление (23) позволяет эффективно решать задачу различными численными методами. Фактически использовался следующий метод: с помощью (23) по известным значениям $v(\xi_1)$ на отрезке $(0, \xi)$ вычислялись первые I0-I5 производных v в точке ξ, а по ним – значения v на отрезке $(\xi, \xi + h)$. Количество производных и величина h подбирались так, чтобы обеспечить заданную точность вычислений; реально величина h равнялась 0,2÷0,5.

Расчеты показали, что при произвольных значениях A и a_2 решение действительно имеет особенность вида (I5). Определяемая условием (I6) линия $A = A(a_2)$ изображена на рис.I. При переходе через эту линию асимптотика (I5) функции $R(\xi)$ меняет знак (см. рис.2). Фигурирующая в асимптотике (I7) функция $C(a_2)$ также изображена на рис.I. Она обращается в нуль в точке

$$a_2 \approx -0.918, \qquad A \approx 1.032. \tag{24}$$

Соответствующие точке (24) графики функций $R(\xi)$, $\frac{dR(\xi)}{d\xi}$, $\varphi(\xi)$, $u(\xi)$ приведены на рис.3. Пунктирная линия на рис.3б относится к мажоранте"потенциала" $u(\xi)$, определяемой формулой (I9) с $\beta = \beta_*$:

$$\beta_* = 5.1. \tag{25}$$

Как показывает сопоставление (24), (25) с (2I), в каверне имеется бесконечно много связанных состояний с ℓ = 0,I,2 и вовсе не имеется связанных состояний с $\ell \geqslant 3$.

Следует заметить, что решающим моментом проделанных расчетов явилось вычисление величины C, – именно этим этапом вычислений определялась точность конечных результатов. Дело в том, что для вычисления C необходимо было добраться до асимптотики (I7), отодвинув как можно дальше точку возникновения особенности ξ_s (которая в реальных расчетах, разумеется, всегда была конечна). Для достижения же больших значений ξ_s потребовалась экспоненциально высокая точность расчетов, так как

$$\xi_s \lesssim \ln \delta^{-1}, \tag{25}$$

где δ – погрешность. Оценка (25) связана с экспоненциальным разбеганием решений уравнений (I2) в области $1 \ll \xi \ll \xi_s$. Из-за погрешности δ коэффициент при растущей экспоненте не равен нулю, и в указанной области

$$\frac{dR(\xi)}{d\xi} - C \approx \delta e^{\xi}$$

При $\xi \approx \ln \delta^{-1}$ электрическое поле начинало возрастать с увеличением ξ и решение выходило на особенность (I5). В описанных выше расчетах были достигнуты значения $\xi_s \approx 20 \div 30$.

§ 6. Заключение

Изменяя параметры, от которых зависит семейство автомодельных решений системы (2)-(4), можно непрерывным образом переводить найденное выше автомодельное решение в другие, несимметричные решения; а так как необходимое условие устойчивости (I) выполняется в рассмотренном примере с запасом, этот пример свидетельствует о существовании довольно широкого класса автомодельных решений,удовлетворяющих (I). Таким образом, имеющий место в скалярной модели коллапса запрет существования устойчивых автомодельных решений не распространяется на коллапс ленгмюровских волн. Вопрос о достаточности необходимого условия устойчивости (I) и установлении удовлетворяющих ему решений в настоящее время не ясен. Наиболее доступным путем исследования этого вопроса представляется усовершенствование численных расчетов, посвященных решению задачи Коши для описывающих коллапс уравнений.

Литература:

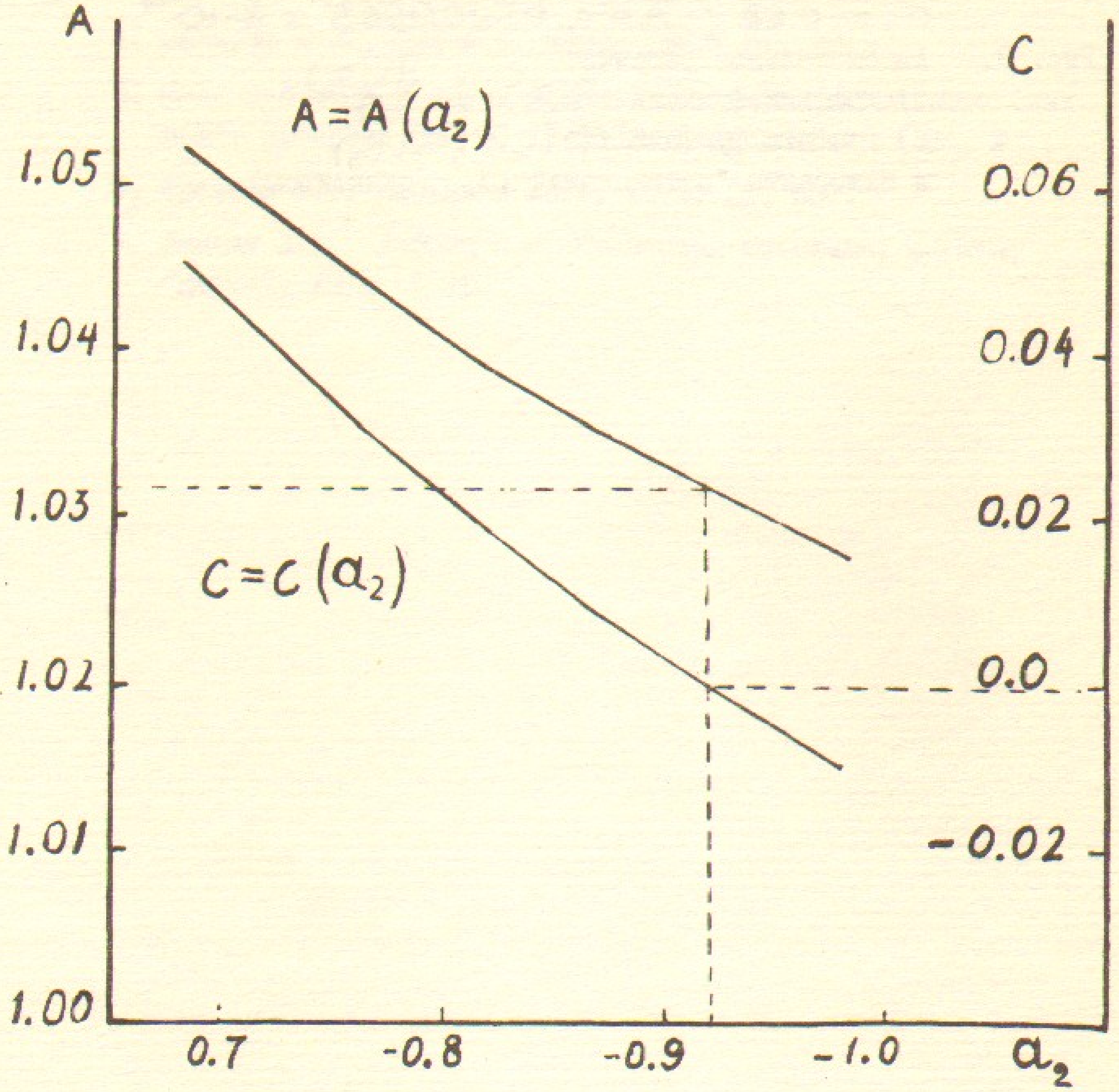
1. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1972, 62, 1745.
2. Литвак Л.Г., Фрайман Г.М., Юнаковский А.Д. Письма в ЖЭТФ, 1974, 19, 23.
3. Галеев А.А., Сагдеев Р.З., Сигов Ю.С., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Физика плазмы, 1975, 1, 10.
4. Захаров В.Е., Шур Л.Н. ЖЭТФ, 1981, 81, 2019.
5. Малкин В.М. К вопросу о динамике коллапса ленгмюровских волн. Препринт ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1984, №
6. Фрайман Г.М. Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, 557.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, Москва, "Наука", 1974, § 35.

Подписи к рисункам

Рис. 1. Линии $A(a_2)$ и $C(a_2)$.

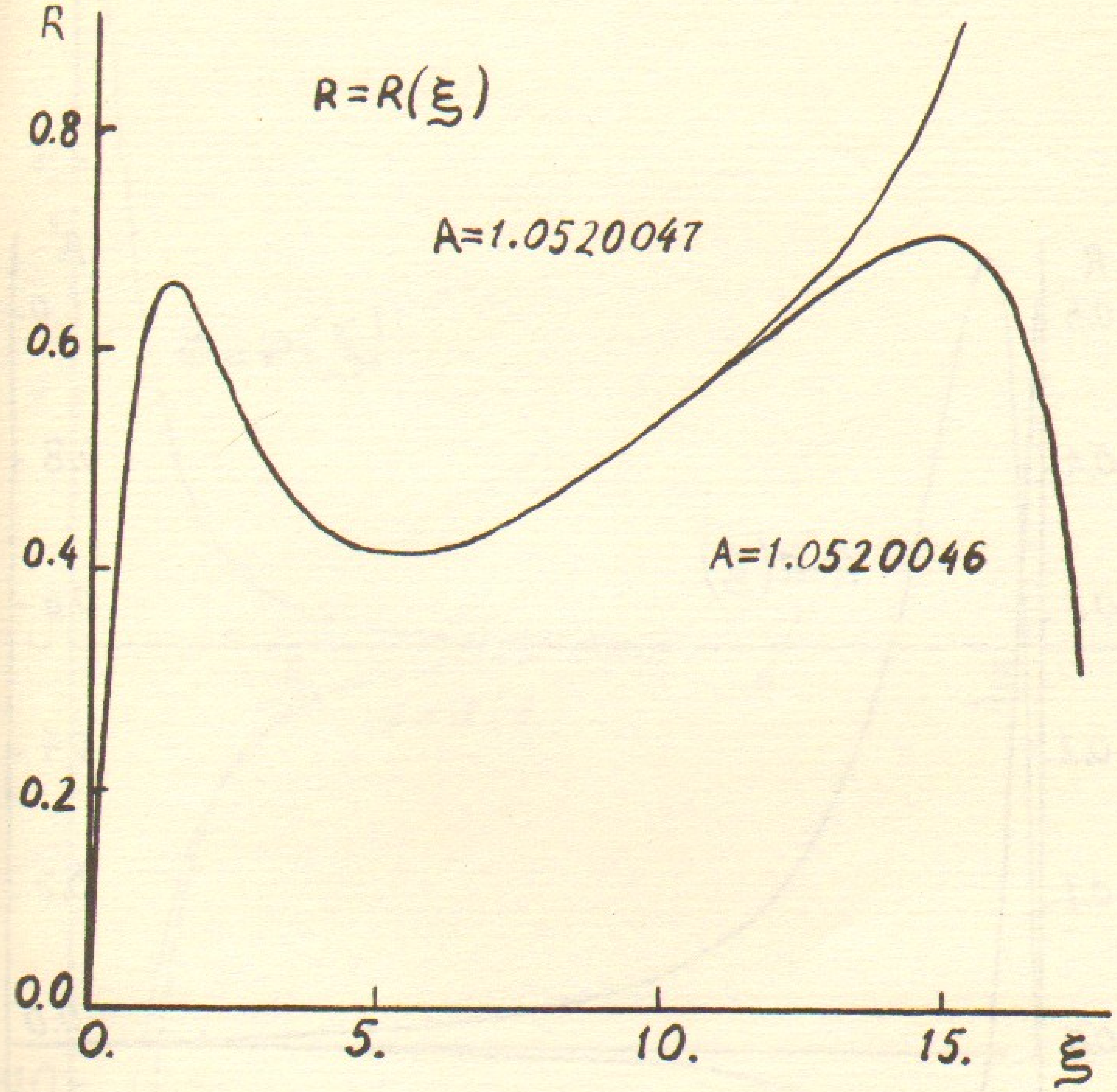
Рис. 2. Функция $R(\xi)$ при двух значениях параметров A и a_2, близких к кривой $A(a_2)$ и лежащих по разные стороны от неё: $a_2=-0.68$; $A=1.05200465 \pm 5\times10^{-8}$.

Рис. 3. Автомодельное решение:
а) графики функций $R(\xi)$, $\frac{dR(\xi)}{d\xi}$;
б) графики функций $\varphi(\xi)$, $u(\xi)$
и мажоранты "потенциала" u (пунктиром).



A
C
$A = A(a_2)$
$C = C(a_2)$
1.05
1.04
1.03
1.02
1.01
1.00
0.06
0.04
0.02
0.0
-0.02
0.7
-0.8
-0.9
-1.0
a_2

Рис. 1



R
$R = R(\xi)$
A=1.0520047
A=1.0520046
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.
5.
10.
15.
ξ

Рис. 2

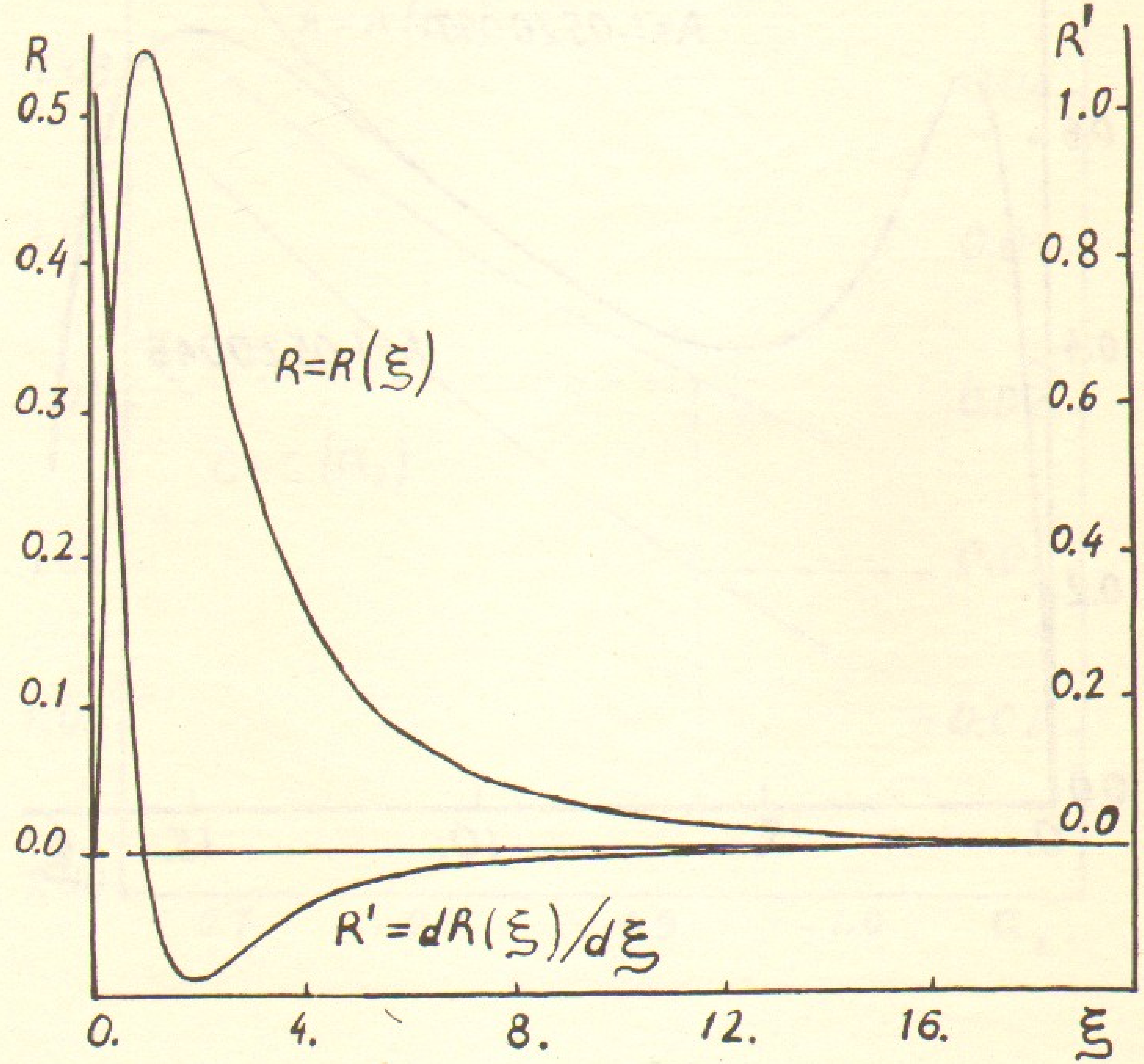

R
R'
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.
4.
8.
12.
16.
ξ
R=R(ξ)
R' = dR(ξ)/dξ

Рис. 3а.

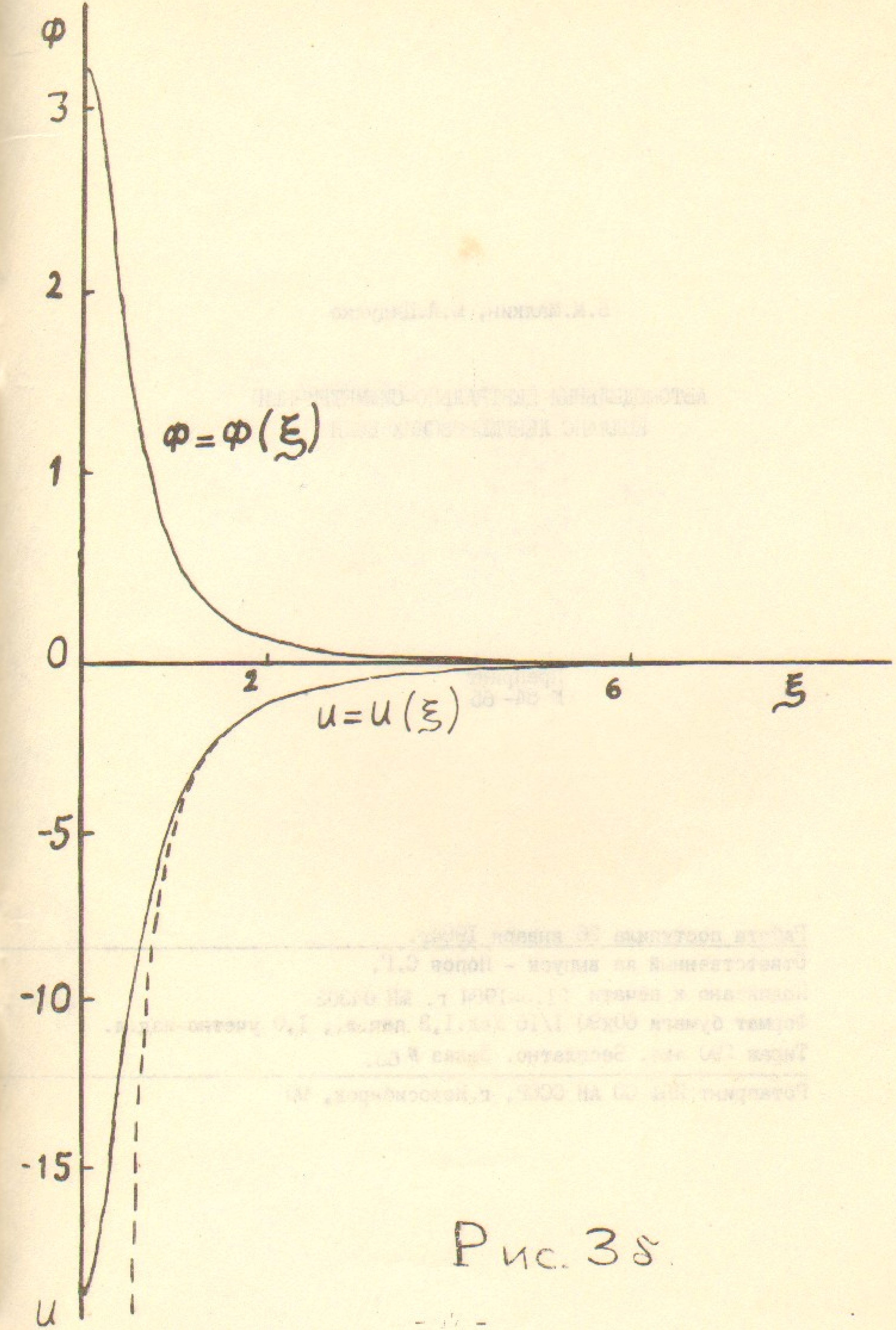

Φ
3
2
1
0
-5
-10
-15
u
2
6
ξ
Φ = Φ(ξ)
u = u(ξ)

Рис. 3б

В.М.Малкин, Ю.А.Цидулко

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ КОЛЛАПС ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

Препринт
№ 84-65

Работа поступила 26 января 1984г.

Ответственный за выпуск - Попов С.Г.

Подписано к печати 21.5-1984 г. МН 04303

Формат бумаги 60x90 I/I6 Усл.I,3 печ.л., I,0 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 65.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90