

M.19

//



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.М.Малкин

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ КОЛЛАПСА
ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

ПРЕПРИНТ 84-18

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИНВ. № _____



НОВОСИБИРСК

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ КОЛЛАПСА
ЛЕНГМОРОВСКИХ ВОЛН

В.М.Малкин

А Н Н О Т А Ц И Я

Получен критерий неустойчивости автомодельных режимов сверхзвукового коллапса ленгморовских волн. Показано, что все известные в настоящее время автомодельные решения удовлетворяют данному критерию. Обсуждены возможные проявления неустойчивости в численных расчетах. Рассмотрены вопросы о влиянии магнитного поля и электронных нелинейностей на динамику ленгморовского коллапса.

ON THE DYNAMICS OF LANGMUIR
WAVE COLLAPSE

V.M.Malkin

Institute of Nuclear Physics,
630090, Novosibirsk, U.S.S.R.

ABSTRACT

The sufficient condition for the instability of self-similar regimes of the supersonic Langmuir wave collapse is obtained. It is shown that all of the known now self-similar solutions satisfy this condition. The possible manifestations of the predicted instability in a numerical calculations are discussed. The influence of the electron nonlinearities and magnetic field on the collapse dynamics is considered.

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ КОЛЛАПСА
ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

В.М.Малкин

§ 1. Введение

За десять лет, прошедших после предсказания ленгмюровского коллапса [1], было опубликовано большое количество работ, посвященных условиям возникновения, динамике и следствиям данного явления. Особое внимание неизменно привлекал вопрос об автомоделных режимах коллапса, казавшийся важным и в то же время наиболее доступным исследованию. По данному вопросу был получен ряд существенных результатов, в частности, теорема о наличии бесконечного числа связанных состояний в автомоделной каверне [2]. Недавно существование автомоделных решений было подтверждено их непосредственным вычислением в случаях центрально-симметричного скалярного коллапса и ленгмюровского коллапса сильно сплюснутой каверны¹⁾ [3]. Тем не менее достигнутый к настоящему времени уровень понимания динамики коллапса не вполне удовлетворителен, - в первую очередь, из-за неясности вопроса об устойчивости и возможности установления автомоделных режимов. В исследовании этого и некоторых других неясных вопросов динамики коллапса состоит цель настоящей работы.

§ 2. Необходимые сведения о коллапсе

Уравнения, описывающие коллапс ленгмюровских волн, имеют в безразмерных переменных следующий вид [1]:

$$\nabla \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \Delta - n \right) \nabla \psi = 0, \quad (1)$$

¹⁾ Следует заметить, что для сильно сплюснутой каверны автомоделные решения были найдены не во всем пространстве, поэтому могут оставаться сомнения в существовании полных решений.

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \Delta(n+W) = 0, \quad W \equiv |\nabla\varphi|^2. \quad (2)$$

Здесь φ - временная огибающая высокочастотного электрического потенциала, n - возмущение концентрации ионов. Вместо (1), (2) часто исследуется более простая система уравнений:

$$(i \frac{\partial}{\partial t} + \Delta - n)E = 0, \quad (1')$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \Delta(n+W) = 0, \quad W \equiv |E|^2, \quad (2')$$

обычно называемая "скалярной моделью".

Уравнение (1) (или (1')) позволяет установить связь между характерным временем ω^{-1} изменения фазы огибающей электрического поля, глубиной n и пространственным масштабом a коллапсирующей каверны:

$$\omega \sim n \sim a^{-2}. \quad (3)$$

С помощью уравнения (2) можно оценить характерное время γ^{-1} углубления каверны. В отсутствие компенсации давления высокочастотного поля газокINETическим давлением плазмы $W+n \sim W$ и

$$\gamma \sim \left(\frac{W}{n a^2} \right)^{1/2} \sim W^{1/2}. \quad (4)$$

Поскольку углубление каверны сопровождается ее сжатием и ростом плотности энергии W запертых в ней волн, γ^{-1} является также временем удвоения W :

$$W_t \sim \gamma W. \quad (5)$$

Учитывая (4) и (5), нетрудно найти закон возрастания плотности энергии волн в каверне по мере приближения к моменту образова-

ния особенности t_s :

$$W \sim (t_s - t)^{-2}. \quad (6)$$

Следует подчеркнуть, что этот результат получается из довольно грубых соображений, без предположения об автомодельной эволюции каверны. Столь же грубым является вывод об "адиабатичности" коллапса, т.е. о выполнении условия

$$\omega \gg \gamma \quad (W a^4 \ll 1). \quad (7)$$

С уменьшением размера каверны a это условие выполняется все лучше и лучше, поскольку плотность энергии волн в каверне (в отсутствие внешних источников) не может расти быстрее, чем a^{-3} :

$$W \lesssim W_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3. \quad (8)$$

Здесь уместно напомнить, что величина W ограничена снизу необходимым для развития коллапса условием модуляционной неустойчивости $W \gtrsim a^{-2}$. Если выполняется более сильное ограничение

$$W \gg a^{-2}, \quad (9)$$

позволяющее пренебречь в уравнении (2) членом Δn , то коллапс называют "сверхзвуковым".

Для отыскания зависимости размера каверны от времени обычно используют предположение о постоянстве полной энергии запертых в ней волн. При этом в (8) имеет место равенство,

$$W \sim a^{-3}, \quad (10)$$

и по мере приближения к моменту t_s условие сверхзвукового сжатия (9) выполняется со все большим запасом.

§ 3. О возможности мелкомасштабной неустойчивости

Большое превышение плотности энергии волн над порогом модуляционной неустойчивости таит в себе опасность для устойчивости сверхзвуковых режимов коллапса. Дело в том, что при выполнении условия (9) в стационарной яме плотности модуляционно неустойчивыми были бы не только возмущения с длинами $k^{-1} \sim a$, но и возмущения гораздо меньших масштабов - вплоть до

$k^{-1} \sim W^{-2/2} \ll a$. Разумеется, эволюционирующая каверна отличается от стационарной: быстрое изменение основного масштаба a , в принципе, может подавить мелкомасштабную неустойчивость. Однако тот факт, что инкремент неустойчивости стационарной каверны практически не зависит от длины волны возмущения k^{-1} во всей области $a^{-1} \leq k \ll W^{1/2}$ (см. рис), наводит на мысль о возможном выживании мелкомасштабной неустойчивости при переходе к эволюционирующей каверне. Ответ на вопрос об устойчивости эволюционирующей каверны, очевидно, определяется игрой чисел и может быть получен только путем количественного анализа.

§ 4. Основные уравнения

Хорошо известные простые оценки, собранные для удобства читателей в § 2, показывают, что, по крайней мере, на достаточно поздней стадии коллапса исходные уравнения содержат два малых параметра - отношение нелинейного инкремента модуляционной неустойчивости γ к частоте осцилляций ω временной отгибающей электрического поля в каверне и отношение скорости звука к скорости схлопывания каверны:

$$g = \frac{\gamma}{\omega} \sim W^{1/2} a^2 \sim (t_s - t)^{2/3},$$

$$\epsilon = \left(\frac{a}{t_s - t} \right)^{-1} \sim (t_s - t)^{1/3}. \quad (\text{II})$$

Решение исходных уравнений можно раскладывать по каждому из па-

раметров g и ϵ независимо, однако удобнее представить оба разложения в виде одного - по степеням $(t_s - t)^{1/3}$. В простейшем случае для получения этого разложения следует положить

$$\psi = \psi_p \exp \left\{ i \int^t \omega_p(t') dt' \right\}, \quad (\text{I2})$$

где ψ_p и ω_p - медленно меняющиеся функции, и последовательными приближениями решать уравнения

$$\nabla(-\omega_p - n + \Delta) \nabla \psi_p + i \Delta \frac{\partial \psi_p}{\partial t} = 0, \quad (\text{I3})$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \Delta (n + |\nabla \psi_p|^2) = 0.$$

Если перейти в (I3) к новым переменным и ввести новые функции согласно формулам:

$$\tilde{t} = t_s - t, \quad \vec{\xi} = \vec{r} \tilde{t}^{-2/3},$$

$$\psi_p(\vec{r}, t) = \tilde{t}^{-1/3} \psi_p(\vec{\xi}, \tilde{t}),$$

$$n(\vec{r}, t) = \tilde{t}^{-4/3} u(\vec{\xi}, \tilde{t}),$$

$$\omega_p(t) = \tilde{t}^{-4/3} \Omega_p(\tilde{t}),$$

то возникнут уравнения

$$\nabla(-\Omega_p - u + \Delta) \nabla \psi_p = i \tilde{t}^{1/3} \Delta \left(\hat{L} - \frac{3}{2} \right) \psi_p,$$

$$\left(\hat{L}^2 - \frac{1}{4} \right) u - \Delta |\nabla \psi_p|^2 = \tilde{t}^{2/3} \Delta u. \quad (\text{I4})$$

Здесь ∇ означает уже дифференцирование по $\vec{\xi}$,

$$\hat{L} = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \tilde{t} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}.$$

Решения уравнений (I4), как и произвольные функции времени, представимы в виде

$$f(\tilde{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} (i\tilde{t}^{1/3})^j f^{(j)}(\tilde{t}). \quad (I5)$$

Для того, чтобы сделать представление (I5) однозначным, можно условиться оставлять в коэффициентах $f^{(j)}(\tilde{t})$ лишь такую зависимость от времени, которую нельзя разложить в ряд Тейлора по степеням $\tilde{t}^{1/3}$. Подстановка разложений (I5) функций u , ψ_p , Ω_p в (I4) приводит к следующей цепочке уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla(-\Omega_p^{(0)} - u^{(0)} + \Delta)\nabla\psi_p^{(0)} &= 0, \\ (\hat{L}^2 - \frac{1}{4})u^{(0)} &= \Delta|\nabla\psi_p^{(0)}|^2; \end{aligned} \quad (I6)$$

$$\begin{aligned} \nabla(-\Omega_p^{(0)} - u^{(0)} + \Delta)\nabla\psi_p^{(j)} &= \Delta(\hat{L} - \frac{3}{2} - \frac{j-1}{3})\psi_p^{(j-1)} + \\ &+ \sum_{j_1=1}^j \nabla(\Omega_p^{(j_1)} + u^{(j_1)})\nabla\psi_p^{(j-j_1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(\hat{L} - \frac{j}{3})^2 - \frac{1}{4}]u^{(j)} &= -\Delta u^{(j-2)} + \\ &+ \sum_{j_1=0}^j (-1)^{j_1} \Delta(\nabla\psi_p^{(j_1)})^* \nabla\psi_p^{(j-j_1)}. \end{aligned} \quad (I7)$$

Ниже предполагается, что собственное значение $\Omega_p^{(0)}$, определяемое первым из уравнений (I6), невырождено. При этом функции $\psi_p^{(j)}$ можно, не теряя общности, считать вещественными; функции $u^{(j)}$ и $\Omega_p^{(j)}$ оказываются вещественными автоматически. Поскольку, с другой стороны, нечетные коэффициенты разложений (I5) функций u и Ω_p обязаны быть мнимыми, эти коэффициенты тождественно равны нулю.

Полученная цепочка уравнений позволяет искать решение системы (I4) последовательными приближениями. В частности, замкнутую систему уравнений нулевого приближения составляют уравнения (I6), дополненные условием разрешимости уравнений первого приближения. Это условие имеет вид

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \int d^3\xi |\nabla\psi_p^{(0)}|^2 = 0 \quad (I8)$$

и означает сохранение числа запертых в каверне волн.

Переход от исходной системы уравнений к (I6), (I7) позволяет естественным образом поставить задачу об устойчивости автомодельных (асимптотически при $\tilde{t} \rightarrow 0$) решений, поскольку им соответствуют стационарные решения уравнений (I6), (I7). Линеаризованные на фоне некоторого стационара, эти уравнения содержат время явно лишь в комбинации $\tilde{t} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, следовательно, у них имеются степенные по \tilde{t} решения:

$$\begin{aligned} \delta u^{(j)}(\xi, \tilde{t}) &= u_{\alpha}^{(j)}(\xi) \tilde{t}^{\alpha} + \text{к.с.}, \\ \delta \Omega_p^{(j)}(\tilde{t}) &= \Omega_{p\alpha}^{(j)} \tilde{t}^{\alpha} + \text{к.с.}, \\ \delta \psi_p^{(j)}(\xi, \tilde{t}) &= \psi_{p\alpha}^{(j)} \tilde{t}^{\alpha} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (I9)$$

Используя выше представленные временной огибающей потенциала ψ в виде (I2) относится к случаю, когда из всех имеющихся в каверне адиабатически меняющихся связанных состояний заселено лишь одно. В общем случае в правой части (I2) следует писать сумму по номерам состояний p . Обобщение уравнений нулевого приближения также сводится к простой замене:

$$|\nabla\psi_p|^2 \rightarrow \sum_p |\nabla\psi_p|^2$$

в правой части второго из уравнений (I6). Опущенные в нулевом приближении интерференционные члены в давлении высокочастотных

волн приводят к появлению малой по параметру адиабатичности быстроосциллирующей добавки к медленно меняющемуся возмущению концентрации. Эта добавка, в свою очередь, дает нелинейные сдвиги собственных частот и, кроме того, порождает малые добавки к потенциалу φ , осциллирующие с частотами, отличными от собственных. Новые слагаемые в φ приводят к появлению новых интерференционных членов и т.д.. Все упоминавшиеся добавки могут быть выражены через медленно меняющиеся функции u , ψ_p , Ω_p , для которых в итоге получается цепочка уравнений, аналогичная (I6), (I7). Наиболее существенное отличие от рассмотренных выше уравнений одномодового режима состоит в том, что резонансы, неизбежно возникающие в достаточно высоких порядках теории возмущений, приводят к слабому (но уже не экспоненциально) изменению чисел заполнения связанных состояний. Для дальнейшего это отличие не имеет значения, — важны лишь довольно грубые структурные свойства уравнений (I6), (I7), в равной мере присущие уравнениям многомодовых режимов.

§ 5. Свойства симметрии основных уравнений

Уравнения (I3) инварианты относительно пространственно-временных сдвигов и пространственных поворотов; цепочка уравнений (I6), (I7) допускает растяжение времени:

$$\tilde{t} \rightarrow \beta \tilde{t}, \quad (20)$$

а уравнения нулевого приближения (I6), (I8) обладают еще и симметрией относительно растяжений координат:

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &\rightarrow \vec{\xi} \lambda, & \psi_p^{(0)} &\rightarrow \lambda \psi_p^{(0)}, \\ u^{(0)} &\rightarrow \lambda^{-2} u^{(0)}, & \Omega_p^{(0)} &\rightarrow \lambda^{-2} \Omega_p^{(0)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Бесконечно малый пространственный сдвиг $\vec{z} \rightarrow \vec{z} + \delta \vec{z}$ порождает преобразование

$$\vec{\xi} \rightarrow \vec{\xi} + \frac{\delta \vec{z}}{\tilde{t}^{2/3}},$$

$$\begin{aligned} u^{(j)}(\vec{\xi}) &\rightarrow u^{(j)}(\vec{\xi}) + \frac{\delta \vec{z}}{\tilde{t}^{2/3}} \nabla u^{(j)}(\vec{\xi}), \\ \psi^{(j)}(\vec{\xi}) &\rightarrow \psi^{(j)}(\vec{\xi}) + \frac{\delta \vec{z}}{\tilde{t}^{2/3}} \nabla \psi^{(j)}(\vec{\xi}), \end{aligned} \quad (22)$$

т.е. три растущие собственные моды (I9) с $\alpha = -\frac{2}{3}$.

Инфинитезимальный временной сдвиг $\tilde{t} \rightarrow \tilde{t} + \delta$ порождает преобразование

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &\rightarrow \vec{\xi} - \frac{2}{3} \frac{\delta}{\tilde{t}} \vec{\xi}, \\ u^{(j)}(\vec{\xi}) &\rightarrow u^{(j)}(\vec{\xi}) + \frac{\delta}{\tilde{t}} \left[\frac{j-4}{3} u^{(j)}(\vec{\xi}) - \frac{2}{3} \vec{\xi} \nabla u^{(j)}(\vec{\xi}) \right], \\ \psi_p^{(j)}(\vec{\xi}) &\rightarrow \psi_p^{(j)}(\vec{\xi}) + \frac{\delta}{\tilde{t}} \left[\frac{j-1}{3} \psi_p^{(j)}(\vec{\xi}) - \frac{2}{3} \vec{\xi} \nabla \psi_p^{(j)}(\vec{\xi}) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Omega_p^{(j)} \rightarrow \Omega_p^{(j)} + \frac{\delta}{\tilde{t}} \frac{j-4}{3} \Omega_p^{(j)},$$

т.е. растущую собственную моду (I9) с $\alpha = -1$.

Пространственные повороты переводят одно стационарное решение цепочки уравнений (I6), (I7) в другое, и потому порождают три безразлично устойчивые собственные моды²⁾ ($\alpha = 0$).

Симметрия (20), как уже отмечалось выше, позволяет искать решения линеаризованных на фоне некоторого стационара уравнений (I6), (I7) в виде (I9).

Дополнительная симметрия (21) уравнений нулевого приближения, как выяснится в дальнейшем, приводит к специфическому вырождению их решений: оказывается, что каждому стационарному решению цепочки уравнений (I6), (I7), вообще говоря, соответ-

²⁾ Следует заметить, что безразлично устойчивых собственных мод имеется счетное множество, так как семейство стационарных решений зависит от счетного числа параметров.

ствуется однопараметрическое семейство стационарных решений уравнений нулевого приближения. Причина, по которой не всякое стационарное решение уравнений (I6), (I8) может быть использовано в качестве нулевого приближения при построении стационарного решения цепочки (I6), (I7), состоит в том, что разложение в окрестности точки $\xi = 0$ решения системы (I6), (I8), вообще говоря, содержит нецелые степени ξ , а регулярное в нуле решение системы (I6), (I7) содержать их не может, так как в противном случае, из-за члена $\Delta u^{(j-2)}$ во втором из уравнений (I7), в разложениях функций $u^{(j)}$, $\psi_p^{(j)}$ с достаточно большими j обязательно возникли бы отрицательные степени ξ . Подобное различие имеется и между линеаризованными системами уравнений (I6), (I7) и (I6), (I8): для первой из них спектр собственных значений α оказывается дискретным, а для второй, вообще говоря, — непрерывным. Разложения в окрестности точки $\xi = 0$ собственных функций непрерывного спектра линеаризованной системы уравнений (I6), (I8) содержат нецелые степени ξ , вследствие чего этим функциям нулевого приближения нельзя поставить в соответствие какие-либо близкие к ним собственные функции точной задачи: поправки следующих приближений оказываются не малыми в области

$$\xi \lesssim \tilde{t}^{1/3}.$$

Можно, однако, заменить собственные функции нулевого приближения близкими к ним аналитическими функциями (не содержащими

дробных степеней ξ) так, чтобы поправки высших приближений стали малыми всюду, а уравнения для собственных функций нулевого приближения нарушились незначительно. Это нарушение порождает компенсирующую его слабую временную зависимость сглаженных в нуле собственных функций. Таким образом, собственным модам непрерывного спектра линеаризованной системы (I6), (I8) можно поставить в соответствие долго остающиеся близкими к ним решения точной линейной задачи — "квазимоды". Ясно, что близость квазимод к собственным модам нулевого приближения тем выше, чем меньше главный неаналитический член разложения последних при $\xi \rightarrow 0$. Ввиду конечности времени коллапса, а также возможности разрушения каверны достаточно большими возмущениями, растущие квазимоды представляют собой практически такую же угрозу для осуществимости сверхзвуковых автомоделных режимов, как и истинные собственные моды с $Re \alpha < 0$. Приведенные в начале данного раздела собственные моды с $\alpha = -\frac{2}{3}$ и $\alpha = -1$, соответствующие сдвигам места и времени возникновения особенности, разумеется, не опасны в данном отношении. Но существование хотя бы одной отличающейся от них собственной моды или квазимоды с $Re \alpha < 0$ означало бы реальную неустойчивость.

§ 6. Критерий неустойчивости автомоделных режимов "скалярного" коллапса

В скалярной модели коллапса линеаризованная система уравнений нулевого приближения имеет следующий вид:

$$\alpha \int d^3 \xi E_p E_{p\alpha} = 0, \quad (24)$$

$$(-\Omega_p - u + \Delta) E_{p\alpha} = (u_\alpha + \Omega_{p\alpha}) E_p, \quad (25)$$

$$(\hat{L}_\alpha^2 - \frac{1}{4}) u_\alpha = 2 \Delta \sum_p E_p E_{p\alpha}. \quad (26)$$

Здесь \hat{L}_α — оператор, получающийся из \hat{L} заменой \tilde{t} на α ; верхний индекс "0", означающий нулевое приближение, для краткости опущен. Прежде чем приступить к исследованию спектра собственных значений α системы (24)–(26) в общем

случае, полезно рассмотреть более простую задачу - об устойчивости центрально-симметричной каверны с единственным заселенным уровнем относительно возмущений, не нарушающих симметрии. В этом простейшем частном случае уравнения (25), (26) представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Рассматривая слагаемое $\Omega_\alpha E$ (индекс "Р" для краткости опущен) в правой части уравнения (25) как вынуждающую силу, можно представить общее решение системы (25), (26) в виде суммы частного решения и четырех линейно независимых решений однородной системы. Частное решение, очевидно, можно выбрать регулярным в точке $\xi = 0$. Асимптотики решений однородной системы при $\xi \rightarrow 0$ таковы:

$$E_\alpha \sim \xi^{-1}, \quad u_\alpha \sim \xi^{-1}; \quad (27)$$

$$E_\alpha \rightarrow \text{const}, \quad u_\alpha \rightarrow \text{const}; \quad (28)$$

$$E_\alpha \sim \xi^{c+2}, \quad u_\alpha \sim \xi^c, \\ c = \frac{3}{2} \left[\alpha - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \pm \left(\frac{1}{4} + 2E_s^2 \right)^{1/2} \right], \quad (29) \\ E_s \equiv E(0).$$

В зависимости от значения $\text{Re } \alpha$ количество регулярных при $\xi \rightarrow 0$ асимптотик может меняться от одной до трех. Если

$$\text{Re } \alpha < \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + 2E_s^2 \right)^{1/2}, \quad (30)$$

то регулярной является только асимптотика (28), - и общее регулярное в нуле решение содержит три свободных параметра:

$E_\alpha(0)$, Ω_α и α . После отождествления решений, отличающихся друг от друга лишь умножением на константу, остается два свободных параметра. Значения этих двух параметров следует выбрать так, чтобы решение было регулярным при $\xi \rightarrow \infty$ и, кроме того, удовлетворяло условию (24).

Линейно независимые асимптотики решений однородной системы при $\xi \rightarrow \infty$ имеют вид

$$E_\alpha \sim e^{\pm \xi} \quad (31)$$

(u_α определяется из уравнения (26));

$$u_\alpha \sim \xi^{\frac{3}{2} \left(\alpha - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)} \quad (32)$$

(E_α определяется из уравнения (25)).

В области значений α (30) одна из этих асимптотик ($E \sim e^\xi$) нерегулярна. Следовательно, два параметра, от которых зависит регулярное в нуле решение, должны удовлетворять двум уравнениям, - и спектр собственных значений α дискретен.

Если

$$\alpha_s \equiv \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + 2E_s^2 \right)^{1/2} < \text{Re } \alpha < \frac{4}{3}, \quad (33)$$

то в нуле появляется вторая регулярная асимптотика, а на бесконечности по-прежнему остается только одна нерегулярная. Это означает, что собственные значения α заполняют всю полосу (33). При

$$E_s^2 > \frac{14}{9} \quad (34)$$

полоса (33) пересекается с полуплоскостью $\text{Re } \alpha < 0$. Следовательно, (34) является достаточным условием неустойчивости.

Все приведенные выше рассуждения легко переносятся на случай возмущений, нарушающих симметрию каверны. Угловые зависимости таких возмущений даются сферическими гармониками. Для e -ой гармоники формулы (27), (28) приобретают вид

$$E_\alpha \sim \xi^{-e-1}, \quad u_\alpha \sim \xi^{-e-1}; \quad (27')$$

$$E_\alpha \sim \xi^e, \quad u_\alpha \sim \xi^e; \quad (28')$$

а формулы (29)-(34) не меняются.

Полученные результаты остаются в силе и для каверны, не обладающей симметрией. Это ясно уже из того, что при переходе от симметричной каверны к несимметричной происходит всего лишь взаимозацепление различных сферических гармоник в угловых зависимостях собственных функций, количество же регулярных в нуле и нерегулярных на бесконечности асимптотик не меняется. Слово "количество" нуждается здесь в пояснении: поскольку имеется счетное множество различных асимптотик, то, строго говоря, следует рассматривать некоторую конечномерную аппроксимацию исходных уравнений (например, отбрасывать все гармоники с $l > N$), а затем осуществлять предельный переход ($N \rightarrow \infty$).

Наконец, результаты обобщаются и на случай, когда в каверне заселено несколько уровней. В этом случае величину E_s^2 в окончательных формулах (33), (34) нужно понимать следующим образом:

$$E_s^2 = \sum_p E_p^2(0). \quad (35)$$

§ 7. Критерий неустойчивости автомодельных режимов ЛЕНГМЕРОВСКОГО КОЛЛАПСА

Исследование системы линеаризованных уравнений нулевого приближения (16), (18):

$$\alpha \int d^3\xi \vec{E}_p \nabla \psi_{p\alpha} = 0, \quad (36)$$

$$\nabla(-\Omega_p - u + \Delta) \psi_{p\alpha} = \nabla(\Omega_{p\alpha} + u_\alpha) \vec{E}_p, \quad (37)$$

$$(\hat{L}_\alpha^2 - \frac{1}{4}) u_\alpha = 2\Delta \sum_p \vec{E}_p \nabla \psi_{p\alpha}, \quad (38)$$

$$\vec{E}_p \equiv \nabla \psi_p, -$$

во многом аналогично описанному выше, и потому будет проведено сразу в общем случае. Для сокращения выкладок полезно заметить, что при заданной регулярной функции u_α уравнения (36), (37) совпадают бы с уравнениями первого порядка стационарной теории возмущений уравнения Шредингера (с надлежащим об-

разом выбранным гамильтонианом). При этом регулярные функции $\psi_{p\alpha}$, очевидно, определялись бы однозначно, т.е. число свободных параметров в общем решении уравнения (37) равнялось бы суммарному числу условий регулярности и условий³⁾ (36). Ввиду эквивалентности всех пропорциональных друг другу решений линейных уравнений, при заданной регулярной линейной связи возмущения "потенциала" u_α с функциями $\psi_{p\alpha}$ для выполнения условий регулярности и условий (36) недоставало бы одного параметра. Если линейная связь, налагаемая уравнением (38), действительно является жестко заданной, то в качестве недостающего параметра можно использовать лишь α , - и спектр собственных значений α дискретен. Если же связь (38) приводит к появлению в общем решении хотя бы одного дополнительно-го свободного параметра, отличного от α , то величина α может быть выбрана произвольно. Вопрос о наличии или отсутствии дополнительных параметров может быть решен исследованием специфических (т.е. не собственных) уравнениям (36), (37) с заданной функцией u_α) асимптотик системы уравнений (36)-(38). При $\xi \rightarrow \infty$ порождаемые связью (38) дополнительные асимптотики даются формулами (32) и в области $\text{Re} \alpha < \frac{4}{3}$ все без исключения являются регулярными. Поэтому для освобождения параметра α в области $\text{Re} \alpha < \frac{4}{3}$ достаточно появления хотя бы одной регулярной в нуле специфической асимптотики. Асимптотики решений системы (37), (38) при $\xi \rightarrow 0$ можно найти из упрощенной системы уравнений:

$$\Delta \sigma_{p\alpha} = \vec{E}_p(0) \nabla u_\alpha, \quad \sigma_{p\alpha} = \Delta \psi_{p\alpha},$$

$$(\hat{L}_\alpha^2 - \frac{1}{4}) u_\alpha = 2 \sum_p \vec{E}_p(0) \nabla \sigma_{p\alpha}, \quad (39)$$

которая получается удержанием в (37), (38) наиболее сингулярных членов. Уравнения (39) имеют степенные по ξ решения, аналогичные (29):

3) Здесь снова имеется ввиду конечномерная аппроксимация с последующим предельным переходом.

$$\psi_{p\alpha} \sim \xi^{c+3}, \quad u_\alpha \sim \xi^c. \quad (40)$$

Поскольку действие оператора \hat{L}_α на степенную функцию ξ^c сводится к ее умножению на число

$$L_{\alpha c} = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}c - \alpha, \quad (41)$$

возмущения плотности заряда $\sigma_{p\alpha}$ легко исключаются из уравнений (39), и последние сводятся к уравнению для возмущения концентрации u_α :

$$(L_{\alpha c} - \frac{1}{4}) \Delta u_\alpha = 2 \sum_p (\vec{E}_p(0) \nabla)^2 u_\alpha. \quad (42)$$

Симметричный дифференциальный оператор второго порядка, фигурирующий в правой части уравнения (42), может быть диагонализирован надлежащим выбором системы координат $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\sum_p (\vec{E}_p(0) \nabla)^2 = \sum_{\beta=1}^3 E_\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_\beta^2}, \quad E_\beta^2 \equiv \sum_p (\vec{E}_p(0) \vec{e}_\beta)^2. \quad (43)$$

Если величина $L_{\alpha c} - \frac{1}{4}$ (которая, как нетрудно показать, должна быть вещественной) больше всех величин $2E_\beta^2$ ($\beta = 1, 2, 3$):

$$L_{\alpha c} - \frac{1}{4} > 2 \max_\beta E_\beta^2 = 2 \max_{|\vec{n}|=1} \sum_p (\vec{E}_p(0) \vec{n})^2, \quad (44)$$

то подходящим растяжением координат уравнение (42) приводится к уравнению Лапласа. Решение существует при целых c и может быть легко найдено. Однако уравнения для функций $\psi_{p\alpha}$ оказываются при этом неразрешимыми. Действительно, для разрешимости уравнения

$$(L_{\alpha c} - \frac{1}{4}) u_\alpha = 2 \Delta \sum_p \vec{E}_p(0) \nabla \psi_{p\alpha}$$

нужна ортогональность угловой части функции $u_\alpha \sim \xi^c$ сферическим гармоникам с индексом $l = c + 2$, а это условие, очевидно, не выполняется.

В дополнительной к (44) области значений параметров α и c :

$$L_{\alpha c} - \frac{1}{4} \leq 2 \max_{|\vec{n}|=1} \sum_p (\vec{E}_p(0) \vec{n})^2 \quad (45)$$

для существования регулярной асимптотики (40) необходимо неравенство

$$\operatorname{Re} \alpha \geq \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \left[\frac{1}{4} + 2 \max_{|\vec{n}|=1} \sum_p (\vec{E}_p(0) \vec{n})^2 \right]. \quad (46)$$

Достаточность условия (46) доказывается следующим примером решения уравнений (39):

$$u_\alpha = (\vec{\xi} \vec{n})^c, \quad \psi_{p\alpha} = A_p (\vec{\xi} \vec{n})^{c+3}, \quad (47)$$

$$L_{\alpha c} - \frac{1}{4} = 2 \sum_p (\vec{E}_p(0) \vec{n})^2, \quad |\vec{n}| = 1.$$

Таким образом, вывод о наличии целой полосы собственных значений α остается в силе и для ленгмювских волн.

Определив величину E_s^2 соотношением

$$E_s^2 = \max_{|\vec{n}|=1} \sum_p (\vec{E}_p(0) \vec{n})^2, \quad (48)$$

можно сохранить для этой полосы и критерия неустойчивости формулы (33), (34).

Следует отметить, что как в скалярном, так и в ленгмювском случае среди неустойчивых возмущений обязательно имеются мелкомасштабные. Они соответствуют собственным значениям α с $|\operatorname{Im} \alpha| \gg 1$ и вычисляются явно методом ВКБ. Причины, по которым мелкомасштабные возмущения могут быть неустойчивыми, уже упоминались в § 3. Отсутствие неустойчивости в области очень больших волновых чисел $k \sim \omega^{1/2} \sim \tilde{t}^{-1}$ на приведенном

в § 3 рисунке связано со стабилизирующим влиянием отброшенного при переходе к сверхзвуковому пределу члена Δn в уравнении (2). Этот член оценочно мал для возмущений с $k \ll \omega^{1/2} \sim \tilde{t}^{-1}$, т. е.

$$|\Im m \alpha| \sim k a \ll \tilde{t}^{-1/3}. \quad (49)$$

Условие (49) обеспечивает одновременно узость области $\xi \leq \tilde{t}^{2/3} |\Im m \alpha|$, в которой собственные моды нулевого приближения должны быть сглажены для получения квазимод точной задачи.

§ 8. Об условиях существования автомоделных решений

Обсуждение данного вопроса также удобно начать с простейшего случая — центрально-симметричного скалярного коллапса каверны с единственным заселенным уровнем. В этом случае автомоделные решения определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \frac{d^2}{d\xi^2} \xi E &= (\Omega + U) E, \\ (\hat{L}_0^2 - \frac{1}{4}) U &= \frac{1}{\xi} \frac{d^2}{d\xi^2} \xi E^2. \end{aligned} \quad (50)$$

В силу симметрии (21), собственная частота Ω является здесь не параметром, подлежащим определению, а заданной положительной величиной, которую можно, не теряя общности, считать равной единице. Общий вид регулярного в нуле решения уравнений (50) при небольших значениях ξ таков:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{z,q} E_{z,q} \xi^{z+cq}, \\ U &= \sum_{z,q} U_{z,q} \xi^{z+cq}. \end{aligned} \quad (51)$$

Суммирование ведется по всем целым неотрицательным значениям z и q ; c — некоторое, вообще говоря иррациональное,

положительное число. Подстановка (51) в (50) приводит к следующей цепочке рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} (z+cq+3)(z+cq+2)E_{z+2,q} &= \Omega E_{z,q} + \\ &+ \sum_{z_1=0}^z \sum_{q_1=0}^q U_{z_1,q_1} E_{z-z_1,q-q_1}, \\ \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}(z+cq) \right]^2 - \frac{1}{4} \right\} U_{z,q} &= \quad (52) \\ &= (z+cq+3)(z+cq+2) \sum_{z_1=0}^{z+2} \sum_{q_1=0}^q E_{z_1,q_1} E_{z+2-z_1,q-q_1}; \\ E_{0,q} |_{q \geq 1} &= 0, \quad E_{z,q} = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что вместе с $E_{z,q}$ обращаются в нуль все коэффициенты $E_{z,q}; U_{z,q}$, у которых z нечетно. При $q=0$ из (52) получается замкнутая система уравнений для величин $E_{z,0}, U_{z,0}$. (Ранее считалось, что именно она соответствует наиболее общему регулярному в нуле решению уравнений (50)). К настоящему времени эта система изучена довольно подробно. Основные результаты содержатся в статье [3] и состоят в следующем. Все величины $E_{z,0}, U_{z,0}$ выражаются через $E_{0,0} \equiv E(0) \equiv E_s$. В частности,

$$U(0) \equiv U_{0,0} = \frac{\Omega E_s^2}{\frac{14}{9} - E_s^2} \quad (53)$$

При произвольном значении E_s регулярное в нуле решение имеет в некоторой точке $\xi = \xi_s$ особенность вида

$$E(\xi) |_{\xi \approx \xi_s} \approx \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\xi_s}{\xi - \xi_s}; \quad U(\xi) |_{\xi \approx \xi_s} \approx \frac{2}{(\xi - \xi_s)^2}.$$

Только в том случае, когда

$$\xi_s = \infty, \quad (54)$$

решение оказывается ограниченным на всей вещественной оси. Условие (54) определяет дискретный (счетный) набор значений E_s .

В силу соотношения (53) и естественного требования $u(0) < 0$ (в необходимости которого можно убедиться и формальным путем), все решения удовлетворяют неравенству

$$E_s^2 > \frac{14}{9}. \quad (55)$$

Более подробный анализ, проведенный в той же работе [3], показывает, что для n -го в порядке возрастания E_s решения величина E_s^2 заключена в интервале

$$\frac{2}{3} n \left(\frac{4}{3} n + 1 \right) < E_{sn}^2 < \frac{2}{3} (n+1) \left[\frac{4}{3} (n+1) + 1 \right]. \quad (56)$$

При заданных значениях $E_{z,0}, u_{z,0}$ из (52) получается замкнутая система уравнений для величин $E_{z,1}, u_{z,1}$. В координатном представлении эта система уравнений совпадает с линеаризованными на фоне аналитического в нуле решения уравнениями (50). Учитывая результаты § 6, можно получить ответ без вычислений. Условие нетривиальной разрешимости уравнений для величин $E_{z,1}$ и $u_{z,1}$ сводится к формуле (29) с $\alpha = 0$:

$$C = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{1}{4} + 2E_s^2 \right)^{1/2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \right]. \quad (57)$$

При таком C одна из указанных величин, например $u_{z,1}$, может быть выбрана произвольно, т.е. в решении возникает свободный параметр. Члены более высокого порядка по q , как нетрудно усмотреть из уравнений (52), пропорциональны q -ой степени $u_{z,1}$; величины $u_{z,q}$ отличаются от нуля при $z \gg 2(q-1)$, а $E_{z,q}$ - при $z \gg 2q$. Таким образом, к аналитическому в нуле решению уравнений (50) можно "прицепить" с произвольным весом $u_{z,1}$ некоторую неаналитическую добавку. Условие регулярности этой добавки в нуле ($C > 0$) совпадает с необходимым условием (55) существования автомодельных решений и потому выполняется автоматически.

Разложения, подобные (51) нетрудно написать и для нестационарных решений, отличающихся от стационара неаналитической

в нуле добавкой с зависящим степенным образом от времени весом $u_{z,1}$. Оценка коэффициентов нестационарных разложений показывает, что рассмотренная в § 6 неустойчивость переходит в нелинейную стадию при $u_{z,1} \sim 1$, т.е. при заметном искажении формы каверны.

В случае несимметричной каверны следует заменить в уравнениях (50) радиальные части лапласианов полными операторами Δ . Разложения (51) остаются в силе, только коэффициенты являются уже не числами, а функциями углов или, что то же самое, - единичного вектора $\vec{n} = \vec{\xi}/\xi$. Наконец, в формулах (52) следует добавить к каждому из множителей $(z + cq + 3)(z + cq + 2)$ угловую часть оператора Лапласа. Последнее обстоятельство приводит к тому, что коэффициент $E_{z,0}$ уже не обязательно обращается в нуль, поскольку уравнение $\Delta \xi E_{z,0} = 0$ имеет нетривиальное решение:

$$E_{z,0} = \vec{A} \vec{n},$$

где $\vec{A} = \nabla E|_{\xi=0}$ - независимый от $\vec{\xi}$ вектор. Появление линейного по ξ члена в разложениях (51) несколько меняет формулу (53):

$$u(0) = \frac{2E_s^2 + A^2}{\frac{14}{9} - E_s^2} \quad (53')$$

Но это изменение никак не влияет на условие существования автомодельных решений (55), и потому не отражается на полученных выше результатах.

При наличии в каверне нескольких заселенных связанных состояний также не возникает принципиальных изменений: соотношение (53) и все вытекающие из него следствия остаются в силе, если определить E_s и A формулами (35) и

$$A^2 = \sum_p (\nabla E_p)^2 |_{\xi=0}.$$

Все выводы выживают и в случае ленгмюровского коллапса сильно сплюснутой каверны, поскольку на ее короткой оси автомодельные решения удовлетворяют тем же уравнениям, что и в скалярной модели, а значит, и условию (55). Однако на общий случай ленгмюровского коллапса условие (55), по-видимому, не распространяется. Качественное объяснение несоответствия состоит в том, что при $\vec{z} \rightarrow 0$ поле E в первом из уравнений скалярной модели (1') является аналогом не векторного поля $\nabla \varphi$, а плотности заряда $\Delta \varphi$ в уравнении (1); во второе же уравнение (см. (2) и (2')) скалярное и векторное поля входят одинаково. Поскольку значения векторного поля и плотности заряда в начале координат не связаны между собой простым алгебраическим соотношением, формула, подобная (53), в ленгмюровском случае отсутствует и связанный с ней запрет существования автомодельных решений, не удовлетворяющих условию (55), снимается.

§ 9. Обсуждение численных расчетов

Условие (55) существования автомодельных режимов скалярного коллапса совпадает с критерием неустойчивости (34); многие, хотя возможно и не все, автомодельные режимы коллапса ленгмюровских волн также удовлетворяют данному критерию, — поэтому естественен вопрос о проявлениях предсказываемой неустойчивости в численных расчетах. К настоящему времени наиболее подробно обчислен центрально-симметричный скалярный коллапс каверны с единственным заселенным уровнем. В этом случае автомодельным решениям соответствуют следующие значения поля в центре каверны E_s и показателя роста α_s наиболее неустойчивых возмущений⁴⁾:

$$\begin{array}{ll} E_{s1}^2 = 1.926, & \alpha_{s1} = -0.193; \\ E_{s2}^2 = 5.276, & \alpha_{s2} = -1.454; \\ E_{s3}^2 = 12.433, & \alpha_{s3} = -3.178; \\ \dots & \dots \end{array}$$

⁴⁾ Значения поля взяты из работы [4]. Они немного отличаются от результатов более ранних расчетов [3].

В силу (56), величины α_{sn} удовлетворяют неравенствам

$$\frac{4}{3}(n-1) < -\alpha_{sn} < \frac{4}{3}n. \quad (59)$$

Численное решение нестационарных центрально-симметричных уравнений скалярной модели [4] показало, что со временем устанавливается первое из автомодельных решений (58). Этот факт качественно согласуется с выводом о неустойчивости второго и высших автомодельных решений. Что касается первого решения, то его неустойчивость весьма слаба ($\alpha_s = -0.19$) и, вероятно, была подавлена звуковым членом Δn , который в обсуждаемых расчетах не успевал стать достаточно малым:

$$E \sim \left(\frac{n}{|E|^2} \right)^{1/2} \gtrsim 0.2 + 0.3$$

Для более обстоятельного выяснения данного вопроса полезно было бы продлить счет, а также повторить его без члена Δn , задавая аналитические и неаналитические в центре каверны начальные условия.

В случае аксиально-симметричного коллапса ленгмюровских волн автомодельные решения известны лишь при сильно сплюснутой каверне (см. примечание I). В этой модели

$$\begin{array}{ll} E_{s1}^2 = 2.506, & \alpha_{s1} = -0.461; \\ E_{s2}^2 = 6.750, & \alpha_{s2} = -1.875; \\ \dots & \dots \end{array} \quad (60)$$

Предположение о сильной сплюснутости автомодельной каверны основано на результатах численного решения аксиально-симметричной задачи Коши для уравнений (1), (2) [5,6]. Проверка автомодельности в работах [5,6] проводилась по зависимостям $|n(0,t)|^{-3/4}$ и $|\nabla \varphi(0,t)|^{-2}$, которые при ее наличии должны быть линейными. Оказалось, что данные зависимости действительно близки к линейным в течение некоторого времени, однако оно слишком мало для получения надежных выводов: размер каверны успевал измениться за это время лишь в 2-3 раза, — на малых же участках,

как известно, любая функция близка к линейной. Если все же предположить автомодельность и вычислить по наклону линейного участка кривой $|\nabla\psi(0,t)|^{-1}$ величину E_s , то окажется, что $E_s^2 \approx 6$. Это близко ко второму из значений (60), но вид решения на оси каверны (см. рис. 5 в статье [6]) заметно отличается от соответствующего автомодельного решения (см. рис. 1а в статье [3]). Отличие может объясняться неадекватностью модели сильно сплюснутой каверны, малым временем счета или обсуждавшейся выше неустойчивостью автомодельных режимов коллапса. Проведенные к настоящему времени численные расчеты динамики аксиально-симметричного ленгмюровского коллапса не достаточны для получения однозначных выводов. Полезны были бы такие же, как и в скалярной модели, усовершенствования этих расчетов: увеличение их продолжительности и варьирование в более широких пределах начальных значений различных величин, особенно, звукового параметра ϵ . Следует заметить, что в статье [6] упомянуты проведенные авторами в пределе $\epsilon = 0$ численные расчеты, но их результаты не приведены. Между тем результаты подобных расчетов могли бы дать важную информацию об устойчивости автомодельных режимов коллапса даже при относительно малом времени счета. Действительно, в случае $\epsilon \ll 1$ одинаково неустойчивы модуляционные возмущения с сильно различающимися пространственными масштабами (см. рис. к § 3), поэтому заранее неясно, какие каверны сформируются из начального состояния с длиной волны k_0^{-1} . Если устойчивые автомодельные режимы сверхзвукового коллапса существуют, то можно ожидать появления каверн размера k_0^{-1} , так как возмущения этого масштаба представлены в начальном состоянии с наибольшим весом. В противном случае можно ожидать появления каверн меньшего размера, которые, коллапсируя, будут, в свою очередь, дробиться на еще меньшие каверны. Такая эволюция должна приводить к естественному отбору наименее неустойчивых каверн. Для них, как показывает пример центрально-симметричного скалярного коллапса, показатель α_s может быть весьма мал и процесс дробления сильно подавлен. В численных экспериментах дробление каверн, по-видимому, пока не фиксировалось с достаточной достоверностью. Описанное в [7] формирование нескольких каверн меньшего размера на месте начальной каверны относилось к случаю достаточно силь-

ного магнитного поля. Утверждалось, впрочем, что подобное явление имеет место и в отсутствие магнитного поля, но результаты соответствующих расчетов приведены не были. Без них же трудно понять, наблюдалось ли одновременное образование нескольких каверн, или энергии волн хватало для повторного акта коллапса.

Следует заметить, что дробление каверн не является единственно возможным вариантом динамики коллапса в отсутствие устойчивых автомодельных решений обычного вида. Другая возможность состоит в существовании устойчивых (не обязательно автомодельных) режимов коллапса, в которых каверна имеет два пространственных масштаба, по-разному зависящих от времени. Список альтернатив нетрудно продолжить. Ввиду сложности вопроса, для выявления истинного характера динамики коллапса необходимы более совершенные численные расчеты.

§ 10. О роли электронных нелинейностей в динамике коллапса

Если предположить существование устойчивых сверхзвуковых режимов коллапса, то, как уже отмечалось выше, при достаточно большой плотности энергии ленгмюровской турбулентности следует ожидать появления каверн, в которых плотность энергии волн будет с самого начала сильно превышать порог модуляционной неустойчивости⁵⁾:

$$w_0 \gg n_0 T \left(\frac{\tau_D}{a_0} \right)^2. \quad (61)$$

К моменту, когда плотность энергии волн в коллапсирующей каверне сравняется с плотностью тепловой энергии плазмы $n_0 T$, размер каверны, уменьшаясь по закону, $a \sim w^{-1/3}$, достигнет значения

$$a_e \sim a_0 \left(\frac{w_0}{n_0 T} \right)^{1/3}.$$

⁵⁾ В этом и следующем разделах используются размерные величины.

В силу (61), размер a_e может оказаться настолько большим по сравнению с дебаевским радиусом τ_D , что поглощение волн с длинами порядка a_e будет пренебрежимо слабым. Это обстоятельство делает весьма актуальным вопрос о роли электронных нелинейностей в динамике коллапса, так как при $W \approx n_0 T$ скорость колебаний электронов в поле ленгмюровских волн превышает тепловую и дисперсия этих волн является нелинейной. Нелинейные дисперсионные члены были вычислены в работе [8]. Там же было показано, что соответствующий им вклад в гамильтониан в ряде случаев положителен и, на основании предположения об универсальности этого свойства, сделан вывод об остановке коллапса электронными нелинейностями. К тому же выводу пришли и авторы статьи [9]. Недавно этот вывод был подтвержден численными расчетами, в которых электронные нелинейности учитывались модельно, добавлением квадратичного по электрическому полю положительного члена к возмущению концентрации плазмы [10]. Тем не менее имеются основания для сомнений в достоверности указанного вывода. Прежде всего необходимо заметить, что из гипотезы о положительном вкладе электронных нелинейностей в гамильтониан [8] следует вывод, противоположный сделанному. Действительно, этот положительный вклад может быть скомпенсирован отрицательным вкладом члена $n|E|^2$. Условие компенсации имеет вид

$$n \sim n_0 \frac{T_{эф}}{m \omega_p^2 a^2} \quad (62)$$

Величина $T_{эф} \equiv \frac{W}{n_0} + T$ оценочно равна средней энергии электрона и может интерпретироваться как эффективная электронная температура плазмы в каверне. Такая наглядная интерпретация не только дает правильную оценку нелинейных дисперсионных членов, но и в большей степени, чем модель [10], соответствует их структуре: эти члены, подобно линейным, содержат четвертые пространственные производные потенциала φ (за исключением некоторых вырожденных случаев). При $W \approx n_0 T$ подстановка (62) в уравнение

$$\frac{\delta^2 n}{\delta t^2} \sim \frac{W}{m a^2} \quad (63)$$

приводит к выводу об экспоненциальном росте плотности энергии волн со временем:

$$\ln \frac{W}{n_0 T} \sim \omega_{pi} (t - t_e) \quad (64)$$

Здесь t_e - момент включения электронных нелинейностей, ω_{pi} - ионная плазменная частота. Таким образом, есть основания полагать, что сами по себе электронные нелинейности не останавливают коллапс, а лишь несколько замедляют его: взрывной рост плотности энергии волн сменяется экспоненциальным ростом. Замедление коллапса, разумеется, облегчает поглощение запертых в каверне волн посредством затухания Ландау или пересечения электронных траекторий.

§ II. О коллапсе в магнитном поле

В данном разделе речь пойдет о формировании каверн и коллапсе в слабом, но все же заметно меняющем дисперсию ленгмюровских волн, магнитном поле (предполагается, что скорость волн гораздо меньше скорости света):

$$k_0^2 \tau_D^2 \ll \frac{\omega_H^2}{\omega_p^2} \ll 1 \quad (65)$$

Здесь ω_H - электронная циклотронная частота, k_0 - характерное волновое число в ленгмюровском спектре. Для установления соответствия с результатами работы [11] ниже потребуются различать характерные значения волнового числа поперек и вдоль магнитного поля или ввести угловую ширину спектра $\theta_0 \sim \frac{k_{\perp 0}}{k_0}$. Для того, чтобы "магнитная" дисперсионная добавка к частоте ленгмюровских волн была больше "тепловой", должно выполняться условие

$$\theta_0 \gtrsim \frac{\omega_p}{\omega_H} k_0 \tau_D \quad (66)$$

Относительно параметров ленгмюровского спектра будет предполагаться еще и то, что ширина спектра гораздо больше инкремента его модуляционной неустойчивости, т.е. параметр адиабатичности

мал. В этом случае, как было показано в [12], уже при очень незначительном уровне возмущений плотности плазмы быстрейшим из нелинейных процессов становится упругое рассеяние ленгмюровских волн, ведущее к эргодизации их спектра⁶⁾. При условиях (65), (66) поверхности постоянной частоты в \vec{k} - пространстве на заметном протяжении совпадают с конусами, ось которых направлена вдоль магнитного поля. Поэтому в процессе предшествующей формированию каверн эргодизации спектра его угловая ширина оценочно не меняется. Что касается характерного волнового числа, то оно возрастает и к моменту завершения эргодизации спектра, когда продольная "тепловая" добавка $\omega_p k_{||}^2 \tau_D^2$ к частоте ленгмюровских волн сравнивается с "магнитной" добавкой, достигает значения

$$k_{||}' \sim \frac{\omega_H}{\omega_p} \theta_0 \tau_D^{-1}.$$

Поперечное волновое число достигает при этом значения $k_{\perp}' \sim k_{||}' \theta_0$. Если начальная угловая ширина спектра не мала ($\theta_0 \sim 1$), то после эргодизации не только продольная, но и поперечная "тепловая" добавка к частоте волн оказывается порядка "магнитной" добавки, и коллапс с самого начала протекает практически так же, как в отсутствие магнитного поля.

Если $\theta_0 \ll 1$, то после эргодизации спектра формируются каверны⁷⁾ с продольным размером $a_0 \sim \frac{1}{k_{||}'}$ и поперечным размером $b_0 \sim \frac{a_0}{\theta_0}$. Соотношение

$$b \sim a^2 \tau_D^{-1} \frac{\omega_H}{\omega_p}$$

между продольным и поперечным размерами каверны поддерживается в процессе коллапса до тех пор, пока они не станут оценочно равными. После этого влияние магнитного поля на динамику коллапса перестает быть существенным. Ввиду малости параметра адиабатич-

6) Данный вывод был получен в [12] на примере изотропной плазмы, но он справедлив и в общем случае.

7) Начиная с этого места, используется обычно подразумеваемое предположение о существовании устойчивых режимов сверхзвукового коллапса.

ности, в начале промежуточной стадии коллапса реализуется первый из рассмотренных в [II] автомодельных режимов; объем каверн убывает как $a b^2 \sim a^5$, параметр адиабатичности растет⁸⁾ как $(\omega a^4)^{1/2} \sim a^{-1/2}$ и, в принципе, может достигнуть единицы. Если вначале данный параметр был меньше $\theta_0^{1/2}$, то этого не произойдет и условие адиабатичности будет выполняться все время. В противном случае условие адиабатичности успеет нарушиться до окончания промежуточной стадии коллапса, и сможет проявиться второй из рассмотренных в [II] автомодельных режимов.

§ 12. Заключение

Основным результатом настоящей работы является критерий неустойчивости автомодельных режимов сверхзвукового адиабатического коллапса: $E_s^2 > \frac{14}{9}$. В скалярной модели данный критерий выполняется для всех автомодельных решений. В ленгмюровском случае все найденные к настоящему времени решения также удовлетворяют указанному критерию, но теорема, запрещающая существование автомодельных решений с $E_s^2 < \frac{14}{9}$ неизвестна. Решения с $E_s^2 < \frac{14}{9}$, если таковые имеются, представляются весьма привлекательными: они не только не подвержены предсказываемой неустойчивости, но и не чувствительны к вырождению уравнений сверхзвукового приближения⁹⁾, и потому хорошо определены уже в рамках этих уравнений. Если устойчивые автомодельные решения обычного вида отсутствуют, возникает вопрос об истинном характере динамики коллапса. Можно предположить довольно много правдоподобных ответов на данный вопрос, и трудно установить, какой из них верен. Существенную помощь в этом могли бы оказать более совершенные, чем проводившиеся до сих пор, численные расчеты. Хорошие численные эксперименты необходимы и для окончательного выяснения затронутых в конце статьи вопросов о влиянии электронных нелинейностей и магнитного поля на динамику коллапса.

8) На этом основании адиабатический автомодельный режим промежуточной стадии коллапса был понапрасну забракован в [II].

9) Следует заметить, что эти свойства не являются независимыми: неустойчивость связана с вырождением.

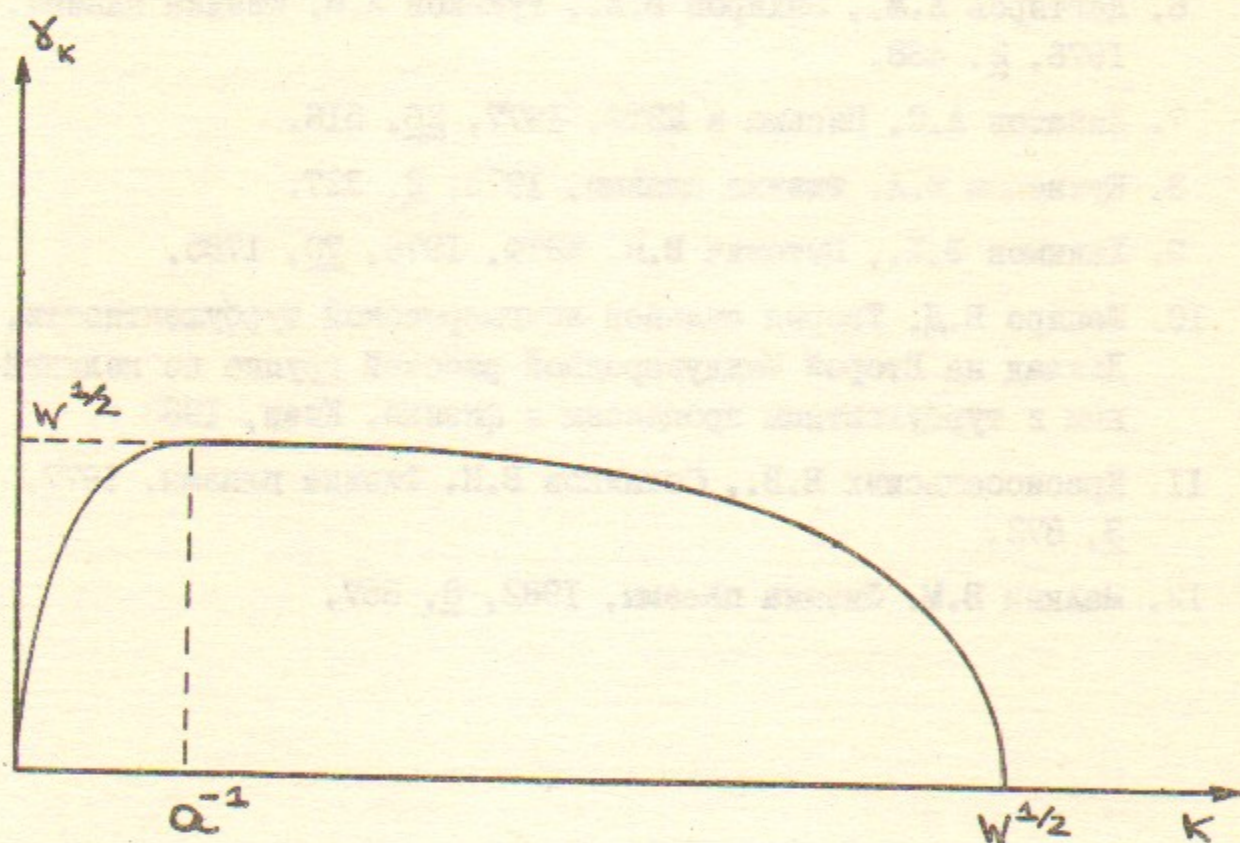
Автор выражает благодарность за полезные дискуссии по данной работе и упомянутым в ней статьям: Красносельских В.В., Кузнецову Е.А., Рубенчику А.М., Рытову Д.Д., Фрайману Г.М., Шапиро В.Д., Янькову В.В.

Литература

1. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1972, 62, 1745.
2. Фрайман Г.М. Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, 557.
3. Захаров В.Е., Шур Л.Н. ЖЭТФ, 1981, 81, 2019.
4. Дегтярев Л.М., Копа-Овдиенко А.Л. Скалярная модель ленгмюровского коллапса. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша, 1982 г., № 123.
5. Захаров В.Е., Матриков А.Ф., Сынах В.С. Физика плазмы, 1975, 1, 614.
6. Дегтярев Л.М., Захаров В.Е., Рудаков Л.И. Физика плазмы, 1976, 2, 438.
7. Дипатов А.С. Письма в ЖЭТФ, 1977, 26, 516.
8. Кузнецов Е.А. Физика плазмы, 1976, 2, 327.
9. Хакимов Ф.Х., Цытович В.Н. ЖЭТФ, 1976, 70, 1785.
10. Шапиро В.Д. Теория сильной ленгмюровской турбулентности. Доклад на Второй Международной рабочей группе по нелинейным и турбулентным процессам в физике. Киев, 1983 г.
11. Красносельских В.В., Сотников В.И. Физика плазмы, 1977, 3, 872.
12. Малкин В.М. Физика плазмы, 1982, 8, 357.

Подпись к рисунку

График зависимости инкремента модуляционной неустойчивости от волнового числа возмущений при большом превышении над порогом ($W \gg \alpha^{-2}$). В области $k \gg \alpha^{-1}$ справедлива простая формула: $\gamma_k \approx \sqrt{W - k^2}$.



В.М.Малкин

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ КОЛЛАПСА
ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

Препринт
№ 84-18

Работа поступила - 7 апреля 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 7.П-1984 г. МН 04061
Формат бумаги 60x90 I/16 Усл.2,0 печ.л., 1,6 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 18.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90