

C.88

8



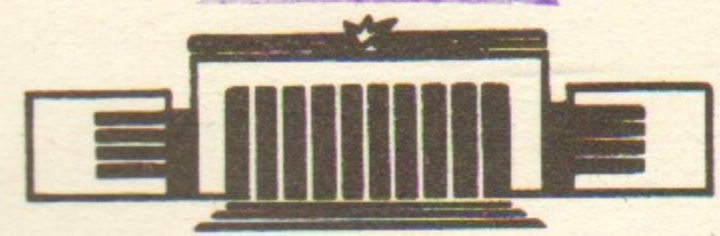
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Г.В.Ступаков

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ КОНЕЧНОГО  
ЛАРМОРОВСКОГО РАДИУСА НА  
РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ

ПРЕПРИНТ 84-15

БИБЛИОТЕКА  
Института ядерной  
физики СО АН СССР  
ИЯФ. ЯФ



НОВОСИБИРСК



ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ КОНЕЧНОГО ЛАРМОРОВСКОГО  
РАДИУСА НА РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ

Г.В.Ступаков

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрены плоские равновесия плазмы малого давления в продольном магнитном поле. Показано, что эффекты конечного ларморовского радиуса (которые на гидродинамическом языке соответствуют учету так называемой бесстолкновительной вязкости ионов и их инерции) даже будучи малыми, в определенной степени сужают класс равновесных конфигураций, допускаемых уравнениями идеальной магнитной гидродинамики. Дана интерпретация физического механизма эффекта в терминах дрейфовой теории движения заряженных частиц. Кратко обсуждается проявления описанного эффекта в магнитных ловушках.

EFFECT OF FINITE LARMOR RADIUS  
ON PLASMA EQUILIBRIUM

G.V. Stupakov

A B S T R A C T

Equilibria of a small  $\beta$  plasma immersed in a magnetic field with parallel straight lines of force are considered. It is shown that finite ion Larmor radius effects (in hydrodynamical description of plasma these effects correspond to accounting for collisionless ion viscosity and ion inertia), even being small, considerably reduce the class of possible equilibrium configurations predicted by the usual MHD model. The microscopic origin of the effect is due to the ion drifts appearing in high (third) orders of drift theory. Relevance of this effect to magnetic traps is briefly discussed.



## I. Введение

Изучение равновесных плазменных конфигураций в различных системах обычно проводится в рамках модели одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики (МГД) и основано на решении уравнения [1]:

$$\nabla p = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \vec{B}, \vec{B}], \quad (I)$$

где  $p$  обозначает давление плазмы, а  $\vec{B}$  индукцию магнитного поля. Такой подход, начиная с работ [2,3], широко используется для расчета стационарных состояний в токамаках и стеллараторах (см., например, обзор [4]), а соответствующее обобщение на случай неізотропного давления служит исходным пунктом для исследования равновесий в открытых ловушках [5].

Законность применения МГД приближения (I) к плазме получает строгое обоснование при кинетическом рассмотрении задачи [6]. Одновременно кинетическая теория позволяет вычислить поправки к уравнению (I) и установить границы его применимости. Так в наиболее интересном с точки зрения управляемого термоядерного синтеза случае высокотемпературной плазмы, когда можно пренебречь кулоновскими столкновениями частиц, кинетическая теория предсказывает появление анизотропных составляющих в тензоре напряжений, обусловленных конечным ларморовским радиусом (КЛР) частиц. Возникающие вследствие этого дополнительные слагаемые в (I) по порядку величины равны  $\rho \rho_{ni}^2 / a^3$ , где  $\rho_{ni}$  — ларморовский радиус ионов,  $a$  — характерный масштаб, на котором меняются параметры плазмы. В типичных условиях эти поправки малы по сравнению с газодинамическим давлением по параметру  $(\rho_{ni}/a)^2$ .

Тем не менее, учет формально малых членов, связанных с КЛР, в некоторых случаях может оказаться принципиальным и существенно изменить результаты, полученные на основе решения уравнения (I). Это обстоятельство отмечалось в недавней работе [7] применительно к задаче о равновесии плазмы в длинной открытой ловушке, хотя аналогичные эффекты, в принципе, могут иметь место и в других типах систем для удержания плазмы. Представляется целесообразным поэтому, отвлекаясь от специфических черт той или иной геометрии ловушки, исследовать основные закономерности влияния КЛР в наиболее простой конфигурации, примером которой



является плоское равновесие в магнитном поле с прямыми силовыми линиями ( $\Theta$ -пинч). Решению этой задачи и посвящена настоящая работа. Полученные в ней результаты могут быть использованы при изучении более сложных равновесий, для которых нулевым приближением является плоская модель.

Сформулируем теперь постановку задачи. Будем считать, что магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ ,

$$\vec{B} = \hat{e}_z B(x, y), \quad (2)$$

а давление  $p$  не зависит от  $z$ ,  $p = p(x, y)$ . Из уравнения (I) тогда следует хорошо известное соотношение

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const}, \quad (3)$$

которое означает, что для любой функции  $p(x, y)$  существует равновесная конфигурация с  $B(x, y)$ , определяемым из (3). В этом смысле в рамках уравнения (I) плоская задача является сильно вырожденной. Как будет видно из дальнейшего, учет эффекта КЛР в определенной степени снимает это вырождение (см. точнее в разделе 4), и основной вопрос заключается в том, чтобы вывести те дополнительные ограничения, которым должны удовлетворять КЛР-равновесия.

Один из возможных методов решения сформулированной задачи основан на использовании уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики [9], учитывающих так называемую бесстолкновительную вязкость ионов и их инерцию. Мы, однако, воспользуемся кинетическим подходом, оказывающимся в некоторых отношениях проще, а, главное, позволяющим выявить и легко интерпретировать физический механизм эффекта КЛР. Как будет видно из дальнейшего, он связан с дрейфами более высокого (третьего) порядка по отношению  $\rho_H/a$ . Вычислению этих дрейфов посвящен второй раздел работы. В третьем разделе формулируется кинетическое уравнение для ведущих центров частиц, а в четвертом решается собственно задача о равновесии. Обсуждение основных результатов содержится в последнем, пятом разделе работы.

В заключение этого раздела отметим, что, хотя всюду выше шла речь о плазме изотропного давления, не представляет никакого труда отказаться от предположения об изотропии. При этом

уравнение (3) и вся постановка задачи остаются без изменения, только под  $p$  надо понимать перпендикулярную к магнитному полю составляющую давления. Результаты последующих разделов фактически справедливы и в этом, наиболее общем случае анизотропной плазмы.

## 2. Дрейфовая теория в третьем порядке

Введем в рассмотрение электрическое поле в плазме с помощью потенциала  $\varphi = \varphi(x, y)$ . Это поле не входит в уравнение (I), и заданным равновесным распределениям  $p$  и  $B$  в теории, не учитывающей КЛР, соответствует бесконечное множество допустимых распределений потенциала. Единственное требование, как будет видно из дальнейшего, состоит в том, чтобы эквипотенциалы  $\varphi = \text{const}$  совпадали с линиями постоянного значения  $p$  (и  $B$ ). Наша задача сейчас состоит в том, чтобы получить дрейфовые уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле (2) и потенциале  $\varphi(x, y)$  с точностью до членов, пропорциональных кубу отношения ларморовского радиуса  $\rho_H$  к характерному масштабу  $a$ .

Будем считать, что перепад потенциала  $\varphi$  на масштабе  $a$  по порядку величины равен средней кинетической энергии частиц,  $e\varphi \sim m v^2$ . Это означает, что

$$\frac{cE}{vB} \sim \frac{\rho_H}{a}, \quad (4)$$

то есть, отношение величины скорости электрического дрейфа

$$\vec{v}_E = c \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{B^2} \quad (5)$$

к характерной скорости частицы  $v$  мало по параметру  $\rho_H/a$ .

Что же касается магнитного поля, то предположение о том, что оно меняется в два раза на масштабе  $a$  приводит к весьма громоздким окончательным выражениям для дрейфов. Поэтому мы ограничимся рассмотрением ситуации, когда параметр  $\beta$  плазмы ( $\beta = 8\pi p/B^2$ ) не превышает малой величины  $\rho_H/a$ , то есть

$$\frac{B}{|vB|} \sim a \frac{a}{\rho_H}. \quad (6)$$



Указанные выше предположения о порядке малости разных величин удобно формализовать, введя в рассмотрение безразмерный параметр малости  $\epsilon \sim \rho_H / a$ . Условия малости электрического поля по сравнению с магнитным (4) и медленности изменения  $B$  в пространстве (6) будем отмечать, приписывая в функции  $B(x, y)$  параметр  $\epsilon$  к координатам  $x$  и  $y$  и умножая  $B$  на  $\epsilon^{-1}$ :

$$B(x, y) \rightarrow \frac{1}{\epsilon} B(\epsilon x, \epsilon y). \quad (7)$$

Этот прием позволяет легко следить за порядком малости разных членов в уравнениях в процессе вычислений; в окончательных выражениях нужно положить  $\epsilon = 1$ .

Проекцию уравнения движения заряженной частицы на плоскость  $(x, y)$  запишем, введя комплексную координату:

$$\epsilon \frac{1}{\Omega} \ddot{w} - i \dot{w} = \epsilon \tilde{\mathcal{E}} \quad (8)$$

где

$$\Omega(\epsilon x, \epsilon y) = \frac{e}{mc} B(\epsilon x, \epsilon y), \quad \tilde{\mathcal{E}} = \frac{c}{eB} (E_x - iE_y), \quad (9)$$

$e, m$  - заряд и масса частицы,  $c$  - скорость света, а точка обозначает дифференцирование по времени.

В соответствии с общей теорией дрейфового движения (см., например, [10]) решение уравнения (8) будем искать в виде асимптотического ряда

$$w = w_0 + \epsilon w_1 e^{i\psi} + \epsilon^2 w_2 e^{2i\psi} + \epsilon^3 w_{-1} e^{-i\psi} + \dots, \quad (10)$$

в котором  $w_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) являются плавными функциями времени, а быстрые осцилляции с ларморовской частотой описываются фазовыми множителями  $\exp(ik\psi)$ . Скорость изменения фазы  $\psi$  определяется значением частоты  $\Omega$  в точке нахождения ведущего центра частицы:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\epsilon} \Omega(\epsilon x_0, \epsilon y_0), \quad (11)$$

координаты  $x_0$  и  $y_0$  которого задаются нулевым членом в разложении (10),

$$x_0 = \frac{1}{2} (w_0 + w_0^*), \quad y_0 = -\frac{1}{2i} (w_0 - w_0^*). \quad (12)$$

Амплитуды  $w_k$  с  $k > 1$  и  $k < 0$  (порядок малости которых в (10) написан применительно к рассматриваемой конкретной задаче и, фактически, должен проверяться в ходе дальнейших вычислений) представляют собой также асимптотические ряды по неотрицательным степеням  $\epsilon$  и выражаются через  $w_0, w_1$  и производные от полей в точке нахождения ведущего центра. Что же касается  $w_0$  и  $w_1$ , то их эволюция во времени задается следующими рядами:

$$\dot{w}_0 = \epsilon A_0 + \epsilon^2 B_0 + \epsilon^3 C_0 + \dots, \quad (13)$$

$$\dot{w}_1 = \epsilon A_1 + \epsilon^2 B_1 + \dots,$$

где стоящие в правых частях члены являются функциями  $x_0, y_0, \text{Re} w_1, \text{Im} w_1$ . Наша задача состоит в вычислении этих членов, а также в нахождении амплитуд  $w_{-1}$  и  $w_2$  в (10).

Дальнейший ход вычислений заключается в прямой подстановке ряда (10) в уравнение (8) и приравнивании членов одинакового порядка по  $\epsilon$ . При этом зависящие от координат функции  $\Omega$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$  нужно разложить в ряд Тейлора по разности  $w - w_0$  с точностью до членов второго порядка по  $\epsilon$  включительно. Опуская простые, хотя и громоздкие вычисления <sup>\*</sup>, приведем ответ:

$$\begin{aligned} A_0 &= i \tilde{\mathcal{E}}, \\ B_0 &= -\frac{i}{2} |w_1|^2 \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} - i \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right), \\ A_1 &= -\frac{i}{2} w_1 \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial y} \right), \\ w_{-1} &= -\frac{1}{4} w_1^* \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial x} - i \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial y} \right), \\ w_2 &= \frac{w_1^2}{4\Omega} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} + i \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

\* В ходе которых, в частности, проверяется правильность порядков малости разных членов в (10).



$$C_0 = \frac{i}{4} |\omega_1|^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \right) - \frac{i}{2\Omega} \left[ (\bar{c}^* - \bar{c}) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - i(\bar{c}^* + \bar{c}) \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right].$$

Входящие в эти формулы  $\bar{c}$  и  $\Omega$ , а также их производные, берутся в точке нахождения ведущего центра частицы, причем, для упрощения записи, через  $\partial\Omega/\partial x$  и  $\partial\Omega/\partial y$  обозначены производные  $\Omega$  по "медленным" переменным  $\varepsilon x$ ,  $\varepsilon y$ , имеющие нулевой порядок малости (мы будем придерживаться этих обозначений и в дальнейшем).

Перепишем теперь полученный результат в векторных обозначениях. Обозначим двумерный радиус-вектор частицы  $(x, y)$  через  $\vec{r}$ , а радиус-вектор ведущего центра  $(x_0, y_0)$  через  $\vec{R}$  и введем в рассмотрение действительные переменные  $u$  и  $\gamma$ , определенные соотношением

$$\omega_1 = u e^{i\gamma}. \quad (I5)$$

Тогда выражение (I0) задает положение частицы в терминах "дрейфовых" переменных  $\vec{R}$ ,  $u$ ,  $\gamma$  и, с учетом (I5), может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{r} = & \vec{R} + \varepsilon \frac{u}{\Omega} (\vec{e}_x \cos \theta - \vec{e}_y \sin \theta) - \\ & - \varepsilon^3 \frac{eu}{4m\Omega^3} \left[ \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) (\vec{e}_x \cos \theta - \vec{e}_y \sin \theta) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) (-\vec{e}_x \sin \theta + \vec{e}_y \cos \theta) \right] + \varepsilon^3 \frac{u^2}{4\Omega^2} \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial x} (\vec{e}_x \cos 2\theta - \right. \\ & \left. - \vec{e}_y \sin 2\theta) - \frac{\partial \Omega}{\partial y} (\vec{e}_x \sin 2\theta + \vec{e}_y \cos 2\theta) \right] + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (I6)$$

где  $\theta = \varphi + \gamma$ , а  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$  обозначают единичные векторы в направлении осей  $x$  и  $y$ . Закон изменения  $\vec{R}$ ,  $u$  и введенной выше переменной  $\theta$  со временем задается уравнениями (II), (I3), (I4) и в векторных обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}} = & \varepsilon \vec{v}_E + \varepsilon^2 \frac{u^2}{2\Omega^2} [\vec{e}_2, \nabla \Omega] + \varepsilon^3 \frac{eu^2}{4m\Omega^3} [\Delta \vec{E}, \vec{e}_2] - \\ & - \frac{\varepsilon^3}{\Omega} [(\vec{v}_E \nabla) \vec{v}_E, \vec{e}_2] + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (I7)$$

$$\dot{u} = \varepsilon^2 \frac{u}{2\Omega} \vec{v}_E \nabla \Omega + O(\varepsilon^3), \quad (I8)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\varepsilon} \Omega - \varepsilon \frac{e}{2m\Omega} \text{div} \vec{E} + O(\varepsilon^2), \quad (I9)$$

где  $\vec{v}_E$  - скорость электрического дрейфа (5). Наконец, приведем нужное для дальнейшего выражение для скорости частицы  $\vec{v}_\perp$ , получающееся дифференцированием (I6) по времени

$$\begin{aligned} \vec{v}_\perp = & \dot{\vec{R}} - u (\vec{e}_x \sin \theta + \vec{e}_y \cos \theta) + \varepsilon^2 \frac{eu}{2m\Omega^2} \text{div} \vec{E} (\vec{e}_x \sin \theta + \\ & + \vec{e}_y \cos \theta) - \varepsilon^2 \frac{eu}{4m\Omega^2} \left[ \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) (-\vec{e}_x \sin \theta + \right. \\ & \left. + \vec{e}_y \cos \theta) + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) (-\vec{e}_x \cos \theta - \vec{e}_y \sin \theta) + \varepsilon^2 \frac{u^2}{2\Omega} \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial x} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (-\vec{e}_x \sin 2\theta - \vec{e}_y \cos 2\theta) + \frac{\partial \Omega}{\partial y} (-\vec{e}_x \cos 2\theta + \vec{e}_y \sin 2\theta) \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (20)$$

Как видно из (20) величина  $u$  имеет смысл сглаженной поперечной скорости частицы (она отличается от  $v_\perp$  на величину  $\sim \varepsilon$ ).

Если в уравнениях (I6) - (20) отбросить члены  $\sim \varepsilon^3$ , то мы получим хорошо известный результат [II]. Скорость дрейфа (I7) при этом складывается из электрического и градиентного магнитного дрейфов (малость последнего по сравнению с первым связана с нашим предположением  $\beta \ll 1$ ), а темп изменения  $u$ , задаваемый (I8), соответствует сохранению магнитного момента частицы:

$$\frac{d}{dt} \frac{u^2}{\Omega} = 0.$$

Новые слагаемые в (I7), имеющие порядок  $\varepsilon^3$ , описывают дрейфы, лежащие за пределами обычной дрейфовой теории. Они могут быть интерпретированы следующим образом. Первое слагаемое, линейное по электрическому полю, возникает, если учесть, что при более точном вычислении электрического дрейфа в качестве  $\vec{E}$  в (5) нужно подставлять не его значение в точке нахождения ведущего центра  $\vec{E}(\vec{R})$ , а электрическое поле  $\langle \vec{E} \rangle$ , усреднен-



ное вдоль ларморовской окружности частицы (эта интерпретация эффектов конечного ларморовского радиуса применительно к задачам о колебаниях в плазме, отмечалась ранее в [12]). С помощью элементарного расчета нетрудно убедиться, что

$$\langle \vec{E} \rangle - \vec{E}(\vec{R}) = \varepsilon^2 \frac{v_{\perp}^2}{4\Omega^2} \Delta \vec{E}$$

и, таким образом, установить, что эта разность дает в точности третье слагаемое в (17). Второе же слагаемое, пропорциональное  $\varepsilon^3$  (последнее в (17), квадратичное по  $E$ ), как видно, имеет смысл дрейфа под действием силы инерции, появляющейся вследствие изменения скорости  $\vec{v}_E$ .

### 3. Дрейфовое кинетическое уравнение

Для формулировки задачи о равновесии воспользуемся дрейфовым кинетическим уравнением для функции распределения ведущих центров  $f_c$ , зависящей в общем случае от переменных  $\vec{R}$ ,  $u$ ,  $\theta$  и времени  $t$ :

$$f_c = f_c(\vec{R}, u, \theta, t).$$

Она определяется таким образом, что число  $dN$  ведущих центров в элементарной площадке  $d^2R$ , характеризующихся величинами  $u$  и  $\theta$  в интервалах  $du$ ,  $d\theta$  равно

$$dN = f_c(\vec{R}, u, \theta, t) d^2R d\theta u du. \quad (21)$$

Разумеется, эта функция отличается от истинной функции распределения частиц  $f_p(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , однако, существенно, что задание  $f_c$  вместе с соотношениями (16), (20) сохраняет всю информацию о распределении частиц. Действительно, для того чтобы найти  $f_p(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , нужно обратить соотношения (16), (20), выразив из них (в виде асимптотических рядов)  $\vec{R}$ ,  $u$  и  $\theta$  через  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ , и подставить эти выражения в  $f_c$ . Одновременно необходимо также преобразовать элементарный фазовый объем  $d^2R du d\theta$  к переменным  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ . Отметим, что эта процедура, в принципе, может быть выполнена в сколь угодно высоких порядках дрейфовой теории.

Вычисления сильно упрощаются, если принять во внимание то обстоятельство, что фактически нам понадобится не сама функция распределения частиц, а только два ее момента — плотность частиц  $n$  и плотность тока  $\vec{j}_{\perp}$ . Легко понять, что последние могут быть найдены непосредственным интегрированием  $f_c$  по формулам

$$n(\vec{r}') = \int d^2R u du d\theta f_c \delta(\vec{r}' - \vec{r}(\vec{R}, u, \theta)), \quad (22)$$

$$\vec{j}_{\perp}(\vec{r}') = \int d^2R u du d\theta f_c \vec{v}_{\perp}(\vec{R}, u, \theta) \delta(\vec{r}' - \vec{r}(\vec{R}, u, \theta)), \quad (23)$$

в которых  $\delta$  — функция учитывает различие между пространственными положениями частицы и ее ведущего центра. Подставляя в (22), (23)  $\vec{r}$  и  $\vec{v}_{\perp}$  в виде рядов (16), (20) и пользуясь разложением  $\delta$  — функции

$$\delta(\vec{r} + \vec{a}) = \delta(\vec{r}) + (\vec{a} \cdot \nabla) \delta(\vec{r}) + \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \nabla)^2 \delta(\vec{r}) + \dots,$$

можно выполнить интегрирование и получить ответ также в виде рядов по  $\varepsilon$ . Мы приведем результат такого интегрирования в конце настоящего раздела, предварительно рассмотрев кинетическое уравнение, которому подчиняется функция  $f_c$ .

Это уравнение в общем случае имеет вид уравнения непрерывности в 4-мерном пространстве, точки которого задаются координатами вектора  $\vec{R}$  и параметрами  $u$  и  $\theta$ :

$$\frac{\partial f_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \dot{\vec{R}} f_c + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \dot{u} f_c + \frac{\partial}{\partial \theta} \dot{\theta} f_c = 0, \quad (24)$$

где  $\dot{\vec{R}}$ ,  $\dot{u}$  и  $\dot{\theta}$  определяются формулами (17)–(19). Важным достоинством уравнения (24), отличающим его от кинетического уравнения для функции распределения частиц  $f_p$ , является то, что нигде в его коэффициенты не входит фаза  $\theta$ . Поэтому, если  $f_c$  в начальный момент зависела от  $\theta$ , то за время  $\sim \Omega^{-1}$  произойдет полное размешивание по фазе, после которого (с экспоненциальной точностью) можно считать, что  $f_c$  является функцией только переменных  $\vec{R}$ ,  $u$  и  $t$ . Уравнение, определяющее эволюцию  $f_c$  на временах, больших по сравнению с циклотронным периодом, получается усреднением (24) по  $\theta$ . В результате последнее слагаемое в (24) исчезает и, для интересующей нас в дальнейшем стационарной функции распределения, полу-



чаем

$$\frac{\partial}{\partial \vec{R}} \dot{\vec{R}} f_c + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} u \dot{u} f_c = 0. \quad (25)$$

Вычисляя интегралы (22), (23) для функции  $f_c$ , не зависящей от  $\theta$ , можно получить следующие результаты:

$$n(\vec{F}) = n_c + \varepsilon^2 \frac{1}{2m\Omega^2} \Delta p_c + O(\varepsilon^4), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \vec{j}_\perp(\vec{F}) = & \varepsilon n_c \vec{v}_E - \varepsilon \frac{1}{m\Omega} [\nabla p_c, \vec{e}_z] + \varepsilon^3 \frac{e}{2m^2\Omega} \times \\ & \times \text{rot}(\vec{e}_z p_c \text{div} \vec{E}) - \varepsilon^3 \frac{1}{16\Omega^3} \text{rot}(\vec{e}_z \Delta q_c) - \varepsilon^3 \frac{n_c}{\Omega} [(\vec{v}_E \nabla) \vec{v}_E, \vec{e}_z] + \\ & + \varepsilon^3 \frac{e p_c}{2m^2\Omega^3} [\Delta \vec{E}, \vec{e}_z] + \varepsilon^3 \frac{e}{2m^2\Omega^3} \Delta p_c [\vec{E}, \vec{e}_z] + O(\varepsilon^4), \quad (27) \end{aligned}$$

где  $n_c$ ,  $p_c$  и  $q_c$  обозначают моменты функции распределения ведущих центров:

$$\begin{cases} n_c(\vec{F}) \\ p_c(\vec{F}) \\ q_c(\vec{F}) \end{cases} = 2\pi \int_0^\infty u du \begin{cases} 1 \\ \frac{m u^2}{2} \\ u^4 \end{cases} f_c(\vec{F}, u). \quad (28)$$

#### 4. Определение равновесных конфигураций

Обратимся теперь к собственно задаче о равновесии. Наиболее прямой путь построить равновесную конфигурацию состоит в том, чтобы найти решение уравнения (25) для электронной и ионной функций распределения ведущих центров, вычислить плотности частиц  $n_e$  и  $n_i$  и потребовать выполнения условия квазинейтральности

$$n_e = n_i$$

(для простоты ионы считаются однозарядными). К сожалению, такой подход наталкивается на значительные трудности, связанные прежде всего с тем, что входящая в (25) величина  $\dot{u}$  известна только с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$  (см. формулу (18)), тогда как интересующие нас эффекты описываются членами  $\sim \varepsilon^3$  в дрейфовых уравнениях. Поэтому нахождение плотности частиц с нужной точностью потребовало бы проведения довольно громоздких вычис-

лений для того, чтобы повысить порядок точности уравнения (18).

Существует, однако, и другой подход, которым мы и воспользуемся ниже, позволяющий получить искомые условия равновесия, решая кинетическое уравнение только в нулевом приближении.

Запишем уравнение (25), удержав главный член в выражении (17) для  $\vec{R}$ :

$$\vec{v}_E \frac{\partial f_c}{\partial \vec{R}} + O(\varepsilon) = 0. \quad (29)$$

Общее решение (29) имеет вид

$$f_c(\vec{R}, u) = F(\varphi(\vec{R}), u) + O(\varepsilon), \quad (30)$$

где  $F$  произвольная функция своих аргументов. Подставляя (30) в (28), найдем моменты  $n_c$  и  $p_c$ :

$$n_c = N(\varphi) + O(\varepsilon), \quad p_c = P(\varphi) + O(\varepsilon), \quad (31)$$

где

$$\begin{cases} N \\ P \end{cases} = 2\pi \int_0^\infty u du \begin{cases} 1 \\ \frac{m u^2}{2} \end{cases} F(\varphi, u).$$

Все выражения выше относятся в равной мере как к ионам, так и к электронам. Но учитывая, что электронный ларморовский радиус много меньше ионного (при сравнимых температурах), мы пренебрежем эффектами КЛР электронов и не будем делать различия между ведущим центром электрона и им самим, отождествляя  $n_{ce}$  и  $p_{ce}$  с  $n_e$  и  $p_e$ , соответственно, (здесь и ниже величины, относящиеся к электронам и ионам снабжаются дополнительными индексами  $e$  и  $i$ , соответственно, причем  $\varepsilon$  в дальнейшем обозначает  $\rho_{ni}/a$ ). В частности, вместо (27) можно писать

$$\vec{j}_{e\perp} = -\varepsilon e n_e \vec{v}_E + \varepsilon \frac{c}{B} [\vec{e}_z, \nabla p_e]. \quad (32)$$

В этой формуле явно учтено, что заряд электрона равен  $-e$ .

Отметим еще, что величины  $p_{ci}$  и  $p_{ce}$  совпадают с давлением частиц  $p_i$  и  $p_e$ , соответственно, с точностью до малых по параметру  $\varepsilon$  поправок. Поэтому соотношения (31) доказы-



вают сформулированное в начале второго раздела утверждение о том, что линии  $\varphi = \text{const}$  совпадают с линиями постоянного значения  $\rho$  (а также  $\rho_i$ ,  $\rho_e$  и  $n$ ), разумеется, с определенной точностью по параметру  $\varepsilon$ .

Найдем теперь суммарный ток электронов и ионов  $\vec{J}$ , текущий по плазме. Для этого сложим  $\vec{j}_{e\perp}$  с ионным током (27), воспользовавшись условием квазинейтральности, которое при учете (26) можно записать в следующем виде

$$n_{ci} = n_e - \varepsilon^2 \frac{1}{2m_i \Omega_i^2} \Delta \rho_{ci} + O(\varepsilon^4). \quad (33)$$

В результате получим

$$\vec{J} = \varepsilon \frac{e}{m_i \Omega_i} [\vec{e}_z, \nabla(\rho_{ci} + \rho_e)] + \varepsilon^3 \vec{J}'_i + O(\varepsilon^4), \quad (34)$$

где через  $\varepsilon^3 \vec{J}'_i$  обозначены все члены в  $\vec{j}_{i\perp}$ , кубичные по  $\varepsilon$ . Распределение магнитного поля в рассматриваемом равновесии определяется уравнением

$$\text{rot } \vec{B} = [\nabla B, \vec{e}_z] = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (35)$$

откуда находим, что

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \nabla B = -\varepsilon \nabla(\rho_{ci} + \rho_e) + \varepsilon^3 \frac{B}{4\pi} [\vec{e}_z, \vec{J}'_i] + O(\varepsilon^4). \quad (36)$$

Пользуясь теперь полученными соотношениями, вычислим дивергенцию полного тока (34) и приравняем ее к нулю. Формула (36) помогает при этом установить, что дивергенция первого члена в правой части (34) равна нулю с точностью до членов  $\sim O(\varepsilon^4)$  и, следовательно, должно выполняться соотношение

$$\text{div } \vec{J}'_i = 0. \quad (37)$$

Выделяя в (27) ток  $\vec{J}'_i$  (при этом нужно учесть вклад в него первого слагаемого в правой части (27), возникающий вследствие отличия плотности ведущих центров  $n_{ci}$  от плотности частиц  $n_i$ , согласно (26)) и вычисляя его дивергенцию, нетрудно прийти к следующему результату

$$A [\nabla \varphi, \nabla \Delta \varphi] + \frac{1}{2} \frac{dA}{d\varphi} [\nabla \varphi, \nabla (\nabla \varphi)^2] = 0, \quad (38)$$

где через  $A$  обозначена сумма

$$A(\varphi) = e N_i + \frac{dP_i}{d\varphi}$$

(напомним, что  $N$  и  $P$  имеют смысл плотности и давления частиц в нулевом приближении по параметру  $\varepsilon$ ).

Переходя к анализу уравнения (38), отметим прежде всего, что при заданных распределениях  $N_i$  и  $P_i$  в плоскости  $(x, y)$  (в силу (31) всегда можно считать, что  $N_i = N_i(P_i)$ ), оно может быть формально удовлетворено, если  $A$  тождественно обращается в нуль. Так будет, когда распределение потенциала  $\varphi$  задается соотношением

$$\varphi = -\frac{1}{e} \int N_i dP_i, \quad (39)$$

при этом исходное вырождение плоской задачи, обсуждавшееся во введении, сохранится. Однако в реальных магнитных ловушках, для которых рассматриваемая задача служит нулевым приближением, распределение потенциала  $\varphi$  обычно определяется другими физическими механизмами (например, из требования амбиполярности диффузии), с точки зрения которых удовлетворить соотношению (39) можно только в исключительном случае. Поэтому наибольший интерес представляют решения уравнения (38), соответствующие не равной тождественно нулю функции  $A$ .

Итак, будем считать, что  $A$  и  $dA/d\varphi$  отличны от нуля и рассмотрим сначала частный случай аксиально-симметричных равновесий,  $\varphi = \varphi(r)$ . Легко видеть, что при этом оба векторных произведения в левой части (38) обращаются в нуль и, следовательно, соотношение (38) автоматически выполняется при произвольной функции  $A(\varphi)$ . Можно доказать и обратное, тождественное равенство нулю обоих векторных произведений в (38) означает, что множество эквипотенциальных линий представляет собой набор концентрических окружностей или параллельных прямых (см. приложение).



Обращаясь теперь к общему случаю, воспользуемся заменой  $x = x(\varphi)$ , сохраняющей неизменными эквипотенциальные линии. Нетрудно убедиться, что выбор в качестве  $x$  функции

$$x(\varphi) = \int^{\varphi} |A(\varphi')|^{1/2} d\varphi' \quad (40)$$

переводит (38) в уравнение

$$[\nabla x, \nabla \Delta x] = 0,$$

которому удовлетворяет любая функция  $x(x, y)$ , являющаяся решением уравнения

$$\Delta x = G(x), \quad (41)$$

где  $G(x)$  — произвольная зависимость от  $x$ . Таким образом, мы приходим к заключению, что допустимые распределения потенциала  $\varphi(x, y)$  восстанавливаются по заданной (ненулевой) функции  $A(\varphi)$  и любой выбранной функции  $G(x)$  с помощью решения задачи (41) (с нужными граничными условиями) и обращения зависимости (40). Хотя такая процедура и позволяет получить широкий класс аксиально-несимметричных решений, исходный произвол теории равновесия без учета КЛР, состоявший в возможности построить равновесную конфигурацию для любого распределения потенциала  $\varphi(x, y)$ , исчезает.

## 6. Заключение

В настоящей работе на примере плоского равновесия в магнитном поле с прямыми силовыми линиями показано, что учет эффектов конечного ларморовского радиуса ионов в значительной степени сужает класс равновесных конфигураций, допускаемых идеальной МГД-теорией. Микроскопическим механизмом, лежащим в основе эффекта, является дрейф ионов, возникающий в третьем порядке дрейфовой теории, со скоростью  $U_{\text{КЛР}}$ , равной по порядку величины  $v_{Ti} (\rho_{ni}/a)^3$ , где  $v_{Ti}$  — тепловая скорость ионов. Мы рассмотрели задачу, соответствующую малым значениям  $\beta$  плазмы, однако, основные результаты работы сохраняются и при  $\beta \sim 1$ , хотя количественный расчет становится гораздо более сложным.

Интерпретация эффекта КЛР на языке дрейфовой теории позволяет качественно понять, что происходит при переходе к равнове-

сиям в искривленном магнитном поле. В этом случае нужно принимать во внимание так называемый центробежный дрейф  $v_{\text{ц}}$ , равный по порядку величины  $v_{Ti} (\rho_{ni}/R)$ , где  $R$  — кривизна силовой линии. Учет кривизны, как известно, также снимает вырождение плоской задачи (приводя к тому, что поверхности  $p = \text{const}$  определяются постоянством интеграла  $\int ds/B$ ) и в этом смысле конкурирует с эффектами КЛР. Последние будут играть определяющую роль, если  $U_{\text{КЛР}} \gtrsim v_{\text{ц}}$ , то есть

$$\left(\frac{\rho_{ni}}{a}\right)^2 \gtrsim \frac{a}{R}. \quad (42)$$

При выполнении же обратного соотношения, эффектами КЛР можно пренебречь.

Неравенство (42) выполняется для многих современных экспериментов на открытых ловушках. Рассмотрение соответствующих равновесий будет проведено в отдельной работе автора.

В заключение выражаю благодарность Д.Д.Ритову за стимулирующие дискуссии в ходе выполнения этой работы, а также Б.Н.Брейзману и Г.Е.Векштейну за полезное обсуждение.

## Приложение

Пусть одновременно выполняются соотношения

$$[\nabla \varphi, \nabla \Delta \varphi] = 0, \quad (П1)$$

$$[\nabla \varphi, \nabla (\nabla \varphi)^2] = 0. \quad (П2)$$

Легко видеть, что из (П1) и (П2) следует, что линии уровня функций  $\varphi$ ,  $\Delta \varphi$  и  $(\nabla \varphi)^2$  совпадают, другими словами  $\Delta \varphi$  и  $(\nabla \varphi)^2$  зависят от координат  $x$  и  $y$  через посредство функции  $\varphi$ :

$$\Delta \varphi = G(\varphi), \quad (П3)$$

$$(\nabla \varphi)^2 = H(\varphi). \quad (П4)$$

Воспользуемся теперь следующим выражением для радиуса кривизны  $R$  линии, задаваемой уравнением  $\varphi(x, y) = \text{const}$  (см., например, [13]):

$$R^{-1} = |\nabla \varphi|^{-3} \left( \frac{1}{2} \nabla \varphi \nabla (\nabla \varphi)^2 - (\nabla \varphi)^2 \Delta \varphi \right). \quad (П5)$$



Совместно с (П3) и (П4) оно означает, что  $\mathcal{R}$  также есть функция только  $\varphi$ , то есть является постоянной величиной вдоль эквипотенциали. Следовательно эквипотенциальные линии являются окружностями. Замечая, что  $|\nabla\varphi|^{-1}$ , пропорциональный расстоянию между двумя соседними эквипотенциалами, в силу (П4) также постоянен вдоль линии  $\varphi = \text{const}$ , мы приходим к выводу, что множество эквипотенциалей представляет собой набор концентрических окружностей (который в пределе  $\mathcal{R} \rightarrow \infty$  вырождается в семейство параллельных прямых).

## Л и т е р а т у р а

- I. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1983, § 68.
2. Шафранов В.Д. ЖЭТФ, 1957, 33, 710.
3. Шафранов В.Д. ЖЭТФ, 1959, 37, 1088.
4. Freidberg J.P. Rev. Mod. Phys., 1982, 54, 801
5. Hall L.S., McNamara B. Phys. Fluids, 1975, 18, 552.
6. Брагинский С.И. ЖЭТФ, 1957, 33, 459.
7. Newcomb W.A. J. Plasma Phys., 1981, 26, 529.
8. Vulmer R.H. et al. Plasma Phys. and Contr. Nuclear Fusion Res. 1982, 1983, 1, 531.
9. Брагинский С.И. Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963, вып. I, 183.
10. Нортрон Т. Адиабатическая теория движения заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1967.
- II. Сивухин Д.В. Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963, вып. I, 7.
12. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1977, 2, 173.
13. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: ГИИТЛ, 1956.



Г.В.Ступаков

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ КОНЕЧНОГО ЛАРМОРОВСКОГО  
РАДИУСА НА РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ

Препринт  
№ 84-15

Работа поступила - 21 ноября 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 7.П-1984 г. МН 04064

Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,2 печ.л., 1,0 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 15.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90