

4-65

33

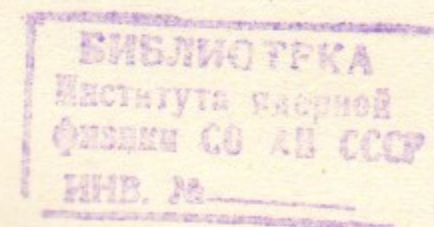


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКОГО  
ХАОСА В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

ПРЕПРИНТ 83-149



НОВОСИБИРСК



КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА  
В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ<sup>\*</sup>)

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск, СССР

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается структура границы хаоса в фазовом пространстве и ее влияние на корреляционные и другие статистические свойства хаотического движения. Высказана гипотеза о том, что эта структура описывается хаотической ренормгруппой. Обсуждается эффект внешнего шума и диссипации.

<sup>\*</sup>) Доклад на II Международной рабочей группе по нелинейным и турбулентным процессам в физике (Киев, 1983).

I. Введение

В докладе рассматриваются некоторые корреляционные свойства динамического хаоса в гамильтоновых системах с разделенным фазовым пространством. Динамическим хаосом называется случайное движение полностью детерминированной (=динамической) системы. В свою очередь, случайным (по Алексееву /1/) называется движение, почти все траектории которого имеют ненулевую удельную (на единицу времени) сложность по Колмогорову (см. /2,3/ и популярное изложение в /12,13/). Последнее означает алгоритмическую независимость достаточно длинных отрезков как одной и той же, так и различных траекторий, т.е. невозможность получить их один из другого ("предсказать") с помощью любых операций с конечной точностью. С математической точки зрения в основе этого феномена случайности лежит следующее фундаментальное свойство числового пространства: последовательность цифр почти любого действительного (иррационального) числа является случайной (см., например /4/). С точки зрения физики, возможность случайных динамических траекторий связана с непрерывностью фазового пространства в классической механике, которая (непрерывность) полностью проявляется лишь в условиях сильной (экспоненциальной) локальной неустойчивости (гиперболичности) движения. Эта неустойчивость характеризуется метрической энтропией (см., например, /5/):

$$h \geq \Lambda_m > 0 \quad (I)$$

где  $\Lambda_m$  - максимальный показатель Ляпунова для линеаризованных уравнений движения. Последнее неравенство в (I) является одновременно и принципиально важным (по теореме Алексеева-Брудно /1-3/ оно эквивалентно случайности) и практически удобным (по крайней мере для численных экспериментов) критерием динамического хаоса.

До недавнего времени классификация статистических свойств динамического хаоса производилась путем их "одномерного" упорядочивания по импликациям. Самым слабым является, бесспорно, эргодичность, тогда как на роль самого сильного (из известных) имеются по крайней мере три кандидата: 1) бернуллиевость; 2) гауссовы флуктуации (центральная предельная теорема теории вероятностей); 3) экспоненциальное убывание корреляций. Однако



в связи с развитием алгоритмической теории динамических систем и, в частности, строгим обоснованием понятия случайной траектории современная классификация динамического хаоса получила новое "измерение". С одной стороны, можно поставить вопрос, является ли данное движение случайным ( $\Lambda_m > 0$ ) или неслучайным ( $\Lambda_m = 0$ ). С другой стороны, необходимо выяснить, какими статистическими свойствами обладает данное случайное или неслучайное движение (точнее, та или иная его инвариантная компонента). Заметим сразу, что некоторые слабые статистические свойства (эргодичность и даже перемешивание) может иметь и неслучайное движение. С другой стороны, случайное движение может не обладать, например, перемешиванием (при наличии в спектре дискретной компоненты), т.е. его корреляции могут и не затухать полностью при  $t \rightarrow \infty$ .

Поведение корреляций <sup>зависит</sup> как от динамики системы, так и, вообще говоря, от коррелирующей функции динамических переменных (простые примеры см. в /6/). В случае полной и равномерной гиперболичности (система Аносова) корреляции затухают экспоненциально /7/, что кажется вполне естественным и почти "очевидным". Однако в общем случае из экспоненциальной неустойчивости не следует экспоненциальное затухание корреляции (и даже вообще их затухание). Причина этого связана с разным характером усреднения для энтропии и для корреляций. В численных экспериментах /8/, по-видимому, впервые было обнаружено неэкспоненциальное (степенное) затухание корреляций для газа твердых шариков ( $h > 0$ ). Аналогичное поведение имеет место и в простой модели бильярдного типа "стадион" (отражающая граница составлена из двух полуокружностей, соединенных параллельными прямыми) /9/. Ниже мы рассмотрим другой достаточно широкий класс гамильтоновых систем с необычными статистическими свойствами, когда фазовое пространство разделено на области хаотического и регулярного движения. Данно было замечено, что такая "граница хаоса" и "переходная зона" вокруг нее имеет очень сложную структуру (см., например, /10,11/). Связанные с этим аномалии статистических свойств, по-видимому, впервые наблюдались в /14/ и в дальнейшем изучались в ряде работ /15-17/. Наш опыт показал, что наиболее удобным является изучение статистики возвратов Пуанкаре, как это было сделано неявно в /14/. В то же время убывание корреляций носит обычно сложный колебательный ха-

рактер и это существенно затрудняет выделение главной зависимости (убывания). Как показывает простой пример Нагашимы /18/, колебания корреляционной функции могут быть случайными (с непрерывным спектром), и это даже является, по-видимому, весьма распространенным случаем. В отличие от этого, функция распределения (вероятность) возвратов Пуанкаре является, по крайней мере, положительно определенной.

В качестве характерного примера мы рассмотрим (как и в /15/) хаотическое движение в ограниченном слое вокруг сепаратрисы нелинейного резонанса, которое может быть приближенно описано сепаратрисным отображением /19/:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y + \sin \theta \\ \bar{\theta} &= \theta - \lambda \ln |y| + \nu \end{aligned} \quad (2)$$

где фаза  $\theta$  характеризует положение системы вдоль слоя, а действие  $y$  — поперек; параметр  $\lambda$  определяет ширину слоя  $|y| \leq \lambda$ , а постоянная  $\nu$  влияет на структуру границы слоя (см. ниже). Локальное (вблизи  $y = z$ ) движение (2) описывается стандартным отображением

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P + K \sin \theta \\ \bar{\theta} &= \theta + \bar{P} \end{aligned} \quad (3)$$

где новое действие  $P = \lambda(z - y)z - \lambda \ln |z|$ ; новый параметр  $K = -\lambda/z$ . В отличие от (2) отображение (3) не имеет границы глобального хаоса, но имеет критическое значение параметра  $K = K_{кр} \approx 1$ , которое разделяет финитное ( $K < K_{кр}$ ) и инфинитное ( $K > K_{кр}$ ) движение.

Рассмотрим вначале структуру отображения (3) при  $K = K_{кр}$  и структуру границы хаоса для отображения (2).

## 2. Структура критической инвариантной кривой

Инвариантная кривая двумерного отображения вида (2) или (3) характеризуется числом вращения

$$\gamma = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta(t) - \theta(0)}{t} \quad (4)$$



где  $\omega$  - частота, а  $t$  - дискретное время (число итераций отображения). Например, для (3) при  $K = 0$  величина  $\gamma = P/2\pi$ . Рациональное значение  $\gamma = P/q$  соответствует резонансу  $q$ -ой гармоники, структура которого периодична (при  $K \rightarrow 0$ ) по  $\theta$  с периодом  $2\pi/q$ .

Любая инвариантная кривая  $\gamma$  становится критической при некотором  $K = K_\gamma$ , при котором она разрушается. Для иррационального  $\gamma$  структура вблизи критической кривой характеризуется некоторым законом подобия (ренормгруппой), который определяется разложением  $\gamma$  в непрерывную дробь:

$$\gamma = \frac{1}{m_1 + \frac{1}{m_2 + \dots}} \equiv [m_1, m_2, \dots] \quad (5)$$

где  $m_i \geq 1$  целые, а  $\gamma$  ограничено интервалом  $(0,1)$ . Это разложение выделено тем, что его подходящие дроби

$$\gamma_n = \frac{p_n}{q_n} = [m_1, m_2, \dots, m_n] \quad (6)$$

дают наилучшее рациональное приближение  $\gamma$  со знаменателем не больше  $q_n$  (см., например, /20/). Тем самым последовательность  $\gamma_n \rightarrow \gamma$  задает основные резонансы, которые и определяют соответствующую ренормгруппу и структуру в окрестности кривой  $\gamma$ .

Ренормгруппа является некоторой "динамической системой" в функциональном пространстве различных отображений. При этом роль времени играет логарифм пространственного масштаба (номер  $n$  подходящей дроби  $\gamma_n$ ), а асимптотика  $n \rightarrow \infty$  соответствует бесконечно малым масштабам (локальная структура). В силу дискретности последовательности  $\gamma_n$  ренормгруппа также является дискретной, т.е. некоторым "отображением" (структуры двух разных масштабов).

Простейшая ренормгруппа соответствует "золотому сечению"  $\gamma = \gamma^{(1)} = [1, 1, \dots, 1, \dots] = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,62$ . Этот случай детально исследован, начиная с пионерских работ Грина /21/, многими авторами (см., например, /22-25/). Систематическое изложение метода ренормгруппы для канонических отображений дано в /25/. "Ренормотображение" оказывается в этом случае "диссипативным" и имеет простой аттрактор в виде "неподвижной точки" - универ-

сального отображения (которое, кстати, близко к стандартному отображению (3)). Существование неподвижной точки непосредственно связано с однородностью непрерывной дроби для  $\gamma^{(1)}$ . В этом случае говорят также о масштабной инвариантности локальной структуры движения.

В простой теории /26/ все факторы подобия выражаются через асимптотическое значение отношения знаменателей соседних подходящих дробей  $\gamma_n$ :

$$S_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} \rightarrow \frac{1}{\gamma^{(1)}} = 1 + \gamma^{(1)} \approx 1,62 \quad (7)$$

Последнее выражение соответствует  $\gamma = \gamma^{(1)}$ . Например, масштаб вдоль инвариантной кривой изменяется в  $S_\theta = S_0$  раз, так как период резонансной структуры равен  $2\pi/q_n$ . Поперечный фактор подобия  $S_\rho = S_0^2$  из критерия перекрытия резонансов или условия устойчивости периодической траектории  $\gamma_n = p_n/q_n$  в центре резонанса /26/. Оба фактора относятся к преобразованным каноническим переменным  $\tilde{P}, \tilde{\theta}$  ( $\tilde{P} = \Delta\gamma$ ;  $\tilde{\theta} = \gamma$ , см., например, /22/) и имеют смысл средних по  $\tilde{\theta}$ . Локальные (по  $\tilde{\theta}$ ) значения  $S$  в исходных переменных могут заметно отличаться. Так, например, на линии симметрии /25/  $S_\theta/S_0 = 0,874$  и  $S_\rho^{1/2}/S_0 = 1,082$ . Однако произведение  $S_\theta S_\rho = S_\mu$ , характеризующее преобразование меры как хаотической, так и регулярной компонент на периоде резонанса ( $2\pi/q_n$ ), не зависит от  $\theta$ . Отношение  $S_\mu^{1/3}/S_0 = 1,0081$  свидетельствует о хорошей точности простой теории. Отметим, что хаотическая компонента составляет асимптотически около 50%/15,19/. Наконец, для времени  $S_t = S_0^{-1}$  из тех же соображений, что и для  $S_\rho$  выше.

Золотое сечение является, конечно, очень специальным значением  $\gamma$ , однако, оно выделено согласно гипотезе Грина /21/ тем, что соответствующая ему инвариантная кривая наиболее устойчива к действию возмущения (разрушается последней). Это свойство характеризуется асимптотикой величины

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma - \gamma_n| q_n^2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4+m^2}} \quad (8)$$

где последнее выражение относится к однородным дробям  $\gamma^{(m)}$



$= [m, m, \dots]$ . При небольших  $m$  разница в  $R$  кажется слишком незначительной, чтобы иметь динамические последствия. Тем не менее, для стандартного отображения гипотеза Грина подтверждается численными данными. Например, для  $\gamma^{(1)}$  критическое  $K_1 = 0,9716 \dots /21/$  ( $R_1 = 0,447$ ), а для  $\gamma^{(2)}$  величина  $K_2 = 0,9574 \dots /22/$  ( $R_2 = 0,354$ ). В общем случае это, однако, не так (см., например, /27/), и "золотая" гипотеза Грина модифицируется в гипотезу "золотого хвоста" (или "благородных" кривых) /25/, т.е. чисел вращения вида

$$\gamma = [m_1, \dots, m_n, 1, 1, \dots]$$

Ясно, что асимптотическая структура будет в этом случае такая же, как и для золотого сечения.

Асимптотика (8) определяет пространственный спектр критического возмущения (в преобразованных переменных) /26/:

$$q_n^4 \tilde{V}_{q_n} \propto R^2 \quad (9)$$

поскольку ширина резонанса пропорциональна  $\tilde{V}_q^{1/2}$ , где  $\tilde{V}_q$  — амплитуда Фурье преобразованного возмущения гамильтониана. Отсюда фактор подобия для спектра  $S_{\tilde{V}} = S_0^4$ . Это определяет также критическую (необходимую) гладкость исходного возмущения:  $q^4 V_q$  ограничено при  $q \rightarrow \infty$ .

Если исходное возмущение аналитическое, то  $V_q \propto \exp(-\sigma_0 q)$ . В  $\tilde{P}, \tilde{\theta}$  переменных параметр  $\sigma$  зависит от величины возмущения ( $K$ ) и обращается в нуль при  $K = K_{кр} /21/$ . При  $K - K_{кр} = \varepsilon \rightarrow 0$  можно принять  $\sigma(\varepsilon) \propto \varepsilon$ . Отсюда следует, в частности, что периодическая траектория  $\gamma_n = P_n / q_n$  теряет устойчивость при  $\varepsilon_n \propto 1/q_n$ , и фактор подобия для параметра возмущения  $S_\varepsilon = S_0$ . Разрушение центра резонанса происходит, таким образом, при большем возмущении, чем разрушение инвариантных кривых между резонансами ( $\varepsilon_n > 0$ ), и идет через последовательность бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума /25,28/. Отметим, что опять таки точное значение  $S_\varepsilon$  /25/ очень близко к  $S_0$  ( $S_\varepsilon / S_0 = 1,0061$ ).

Все "благородные" числа  $\gamma$  образуют множество нулевой меры. Структура непрерывной дроби типичной инвариантной кривой совершенно иная: элементы дроби  $m_i$  образуют случайную пос-

ледовательность, причем вероятность появления элемента  $m_i > m \gg 1$  пропорциональна  $1/m$  /5/. Ясно, что в этом случае масштабная инвариантность может иметь место только в среднем, за большое число итераций ренормотображения, тогда как последовательные преобразования подобия будут носить хаотический характер<sup>\*)</sup>. Возможность стационарного процесса масштабных преобразований связана с тем, что флуктуации величины  $R_n$  в (8) ограничены

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n U(q_n, r) = C(r) \quad (10)$$

где  $U(q) \sim \ln q$  (см. /20/). Хотя основной фактор подобия  $\langle S_0 \rangle \approx 3,28$  ( $\langle \ln S_0 \rangle = \pi^2 / 12 \ln 2 / 5$ ) заметно отличается от "золотого"  $S_0 \approx 1,62$ , соотношения между остальными параметрами остаются прежними, изменяется только "шаг" ренормотображения. Например, для возмущения  $\tilde{V}_q$  фактор

$$S_{\tilde{V}} \approx S_0^4 \left(1 + \frac{\ln S_0}{\ln q}\right)^2 \rightarrow S_0^4$$

Однако критическая гладкость возмущения несколько повышается:  $q^4 V_q \rightarrow 0$  при  $q \rightarrow \infty$ . При этом зависимость  $K_{кр}(r)$  выражается очень сложной (фрактальной) функцией /24/.

### 3. Структура границы хаоса

Эта задача /10,15,19,26/ существенно отличается от предыдущей тем, что параметр возмущения теперь не задан, а сам зависит от преобразованного действия  $\tilde{X} = \tilde{y} - \tilde{y}_0$ , где  $\tilde{y}_0$  — граница стохастической компоненты движения (для отображения (2)). Граничное число вращения  $\gamma_0(\lambda)$  зависит от параметра отображения, и основной вопрос заключается в том, будет ли эта зависимость непрерывной или разрывной. В первом случае для почти всех  $\lambda$  структура границы будет характеризоваться ренормхаосом. Во втором случае  $\gamma_0$  может, например, принимать только "благородные" значения, и асимптотически будет иметь место обычная масштабная инвариантность. Непрерывная зависимость  $\gamma_0(\lambda)$ , по-видимому, исключается из-за скачка  $\gamma_0$  при прохождении границы через резонанс с учетом конечной

<sup>\*)</sup> Аналогичная ситуация в диссипативных системах обсуждается в /34/.



толщины стохастического слоя. Структура фрактальной диаграммы функции  $K_{кр}(r)$ , полученной в /24/, указывает, по-видимому, на некоторое промежуточное поведение. Характерной особенностью зависимости  $K_{кр}(r)$  является бесконечная масштабно-инвариантная иерархия локальных максимумов, причем внутри каждого максимума одного масштаба имеются два главных максимума следующего масштаба с близкими значениями  $K_{кр}$ . Вследствие такого удвоения "наиболее устойчивые"  $r = r_s$  образуют несчетное канторово множество нулевой меры. Элементы непрерывной дроби таких  $r_s = [m_i]$  принимает только два значения:  $m_i = 1; 2$ , с вероятностями  $2/3$  и  $1/3$ , соответственно. При этом подходящие дроби одного масштаба  $n$  удовлетворяют соотношению  $\sum m_i = 2n$ . Это правило, как и само существование двух близких максимумов, связано с приближенным соотношением для основного фактора подобия на множестве  $r_s$ :

$$\langle s_0 \rangle \approx (s_0^{(1)})^{1/2} (s_0^{(2)})^{1/4} \approx 1,59 \approx s_0^{(1)} \approx 1,62 \approx (s_0^{(2)})^{1/2} \approx 1,55.$$

Это и значит, что два элемента 1 эквивалентны одному элементу 2. Все граничные значения  $r_0$  асимптотически совпадают, по-видимому, с одним из  $r_s$ . Представление о разбросе значений  $K_{кр}$  для различных  $r_s$  можно получить из приведенных выше данных:  $K_1 - K_2 \approx 0,014$ . При изменении параметра отображения  $\lambda$  происходят "перескоки" между различными  $r_s$ . Для некоторых специальных значений  $\lambda$  возможны большие скачки  $\Delta r_s \sim 1$  при  $\Delta \lambda \rightarrow 0$ . Однако в большинстве случаев  $\Delta r_s$  уменьшается вместе с  $\Delta \lambda$ , причем, как можно показать,  $\Delta r_s \propto (\Delta \lambda)^2$  при  $\Delta \lambda \rightarrow 0$ .

Поэтому можно ожидать, что на границе хаоса в фазовом пространстве ренормгруппа также является хаотической для почти всех значений параметра  $\lambda$ . Соответствующее ренормотображение имеет в этом случае хаотический аттрактор.

Можно думать также, что асимптотическая структура границы хаоса является универсальной для любого канонического двумерного отображения.

#### 4. Статистика возвратов Пуанкаре

Масштабно-инвариантная структура границы хаоса существенно изменяет статистические свойства хаотической компоненты дви-

жения. Грубо говоря, траектория может "застревать" вблизи границы на произвольно большое время, что приводит, в частности, к изменению статистики возвратов Пуанкаре. На рис.1а представлена зависимость интегральной вероятности возврата  $P(\tau)$  за время  $> \tau$  для двух отображений с разделенным фазовым пространством. Кружками показаны данные /15/ для отображения (2) с  $\lambda = 3$  ( $10^8$  итераций, одна траектория). Регистрировался возврат на линию  $y = 0$ , или, иначе, переход траектории из одной половины стохастического слоя ( $y > 0$ ) в другую ( $y < 0$ ) и наоборот (отображение (2) симметрично относительно замены  $y \rightarrow -y$ ;  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ ). Сплошная кривая представляет результаты уникального счета Карни /16/ для отображения

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y + 2(x^2 - K) \pmod{L} \\ \bar{x} &= x + \bar{y} \pmod{L} \end{aligned} \quad (II)$$

для  $K = 0,1$  (1600 траекторий по  $2 \times 10^9$  итераций!). Это отображение похоже на стандартное (3), и имеет область устойчивости с границей хаоса.

Прежде всего отметим, что общий характер зависимости  $P(\tau)$  оказывается одинаковым для обоих отображений, хотя глобальная структура движения совершенно различна: ограниченный стохастический слой в случае (2) и ограниченная область устойчивости для (II). Систематический сдвиг кривых объясняется особенностями отображения (2) и зависит от  $\lambda$  (см./15/). В среднем зависимость

$$P(\tau) \propto \frac{1}{\tau^p} \quad (I2)$$

является степенной с эмпирическим показателем  $p = 1,44$  (сплошная прямая на рис.1а). Пунктирная прямая с  $p = 1,61$  демонстрирует верхнюю эмпирическую границу для  $p$ . Эти данные можно сравнить со средним значением  $\langle p \rangle = 1,45$  для различных  $\lambda$  /15/. Характерным является и наличие, по-видимому, нерегулярных колебаний. Эта нерегулярность хорошо видна на рис.2 в работе /15/, где сравниваются  $P(\tau)$  для разных  $\lambda$ . Эти колебания (как и значение  $p$ ) не зависят от начальных условий (хотя движение локально неустойчиво) и характеризуют, таким образом, не флуктуации, а некоторую структуру края стохастического слоя, которая зависит от граничного числа вращения



$r_0$ .

Для выяснения природы колебаний функции  $P(\tau)$  было проведено специальное моделирование, при котором значения параметров  $\lambda$  и  $\nu$  подбирались таким образом, чтобы  $r_0 \approx r^{(1)} = [1, 1, \dots]$ . Тем самым можно "погасить" начальные колебания, амплитуда и период которых тем больше, чем больше начальные разности ( $m_i - 1$ ). Результаты этого моделирования приведены на рис.2. Видно, что колебания, действительно существенно уменьшились, что качественно подтверждает их связь со структурой границы хаоса.

Помимо этого, в отсутствие колебаний численное значение показателя  $\rho$  является более надежным. Оно определялось по методу наименьших квадратов в интервале  $1 \leq \log \tau \leq 4$  и оказалось равным  $1,338 \pm 0,014$ ;  $1,331 \pm 0,014$  для двух случаев, изображенных на рис.2. Оба значения совместимы с

$$\rho = \frac{4}{3} \quad (I3)$$

Качественная интерпретация зависимости (I2) на основе эффекта "застревания" траектории на границе хаоса была дана в /15/ (см. также /26/). Ниже делается предварительная попытка связать эти результаты с численными данными /19/ по скорости диффузии в стандартном отображении (3) вблизи критического значения  $K = K_{кр} + \varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) и теорией этого явления в /29/. Предположим, как и в /15/, что время возврата  $\tau \sim \tau_n$  определяется временем перехода в следующий, более крупный, масштаб вблизи границы. Для оценки этого времени используем грубую аналогию перехода между соседними целыми резонансами в стандартном отображении и между соседними масштабами вблизи границы хаоса. Согласно /29/ время перехода (в числе итераций) в стандартном отображении определяется надкритичностью и изменяется по закону

$$\tau_{ст} \sim \varepsilon_{ст}^{-3} \quad (I4)$$

что удовлетворительно согласуется с численными данными. Вблизи границы хаоса средний параметр стандартного отображения  $K = -\langle \lambda \rangle \tilde{\sigma}$  линейно зависит от  $\tilde{X}$ , откуда  $\varepsilon \sim \tilde{X}$ . Учитывая, что масштаб времени  $T_n \sim \tilde{X}_n^{-1/2}$  /26/, получим

$\tau_n \sim T_n \varepsilon_n^{-3} \sim \tilde{X}_n^{-3/2}$ . С другой стороны, масштаб меры  $\mu_n \sim \tilde{X}_n$ , а из эргодичности движения (см. /15/):

$P(\tau) \cdot \tau \sim \langle \tau \rangle \mu; \langle \tau \rangle \sim 1$  (это справедливо при  $\rho > 1$ , так как иначе  $\langle \tau \rangle = \infty$ ). В результате получаем:  $\rho = 9/7 \approx 1,29$ , что неплохо согласуется с эмпирическим значением (I3)

и, таким образом, подтверждает приняты предположения. Наиболее существенное из них состоит в том, что время перехода между соседними масштабами зависит от локальной надкритичности  $\varepsilon$  и неограниченно возрастает при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для дополнительной проверки этого предположения был проведен специальный численный эксперимент со стандартным отображением при  $K = K_{кр} = 0,971635$ . Статистика возвратов в этом случае представлена на рис.3. Прямая соответствует степенной зависимости с показателем  $\rho = 0,975 \pm 0,013$  и получена по методу наименьших квадратов для интервала  $2 \leq \log \tau \leq 5$ . Фактически достигнутое за  $10^8$  итераций граничное  $r_0 = 0,3797$  ( $1 - r^{(1)} = 0,3819 \dots$ ). Последние точки на рис. 3 ненадежны из-за малой статистики. Аномальное поведение при малых  $\tau$  связано с фазовыми колебаниями на целом резонансе  $P = 0$  с периодом около  $2\pi$  (регистрировались возвраты на линию  $P = 0$ ). Поскольку  $\rho \approx 1$ , то  $\rho_c \approx 0$ , т.е. корреляции почти не затухают (см. (I5) ниже). Это и означает, что время перехода между всеми масштабами очень велико, поскольку  $\varepsilon \approx 0$  на всех масштабах. В этом отличие от границы хаоса, например, в отображении (2), где  $\varepsilon$  растет вглубь хаотической компоненты.

Следует отметить, что внешняя граница стохастической компоненты не является единственной границей хаоса. Напротив, поскольку центры резонансов разрушаются при большем возмущении, чем касаются их сепаратрисы (стохастические слои), вблизи внешней границы имеется сложная система внутренних границ, окружающих устойчивые периодические траектории. Этот вопрос обсуждается в /16,26/. В первой работе приведен пример длительного "застревания" траектории на внутренней границе. Мы также наблюдали подобные случаи, особенно, для некоторых значений  $\lambda$  (например,  $\lambda = 1$ ;  $\nu = 0$ ), когда внутри стохастического слоя имеются большие области устойчивости. В случае универсальной структуры любой границы хаоса, это, казалось бы, не должно изменить статистические свойства движения и, в частности, значение показателя  $\rho$  в (I2). Однако, наличие внутренних границ



со своими числами вращения может привести к колебаниям  $P(\tau)$  даже, если на внешней границе  $r_0 = r^{(d)}$ . Это также наблюдалось при численном моделировании. С другой стороны, при отсутствии колебаний (см. рис. 2,3) было проверено, что самые длинные возвраты связаны с застреванием траектории именно на внешней границе.

### 5. Корреляции

Как отмечалось выше, поведение корреляционной функции является, вообще говоря, очень сложным. Можно, однако, выбрать такие специальные корреляции, которые были бы прямо связаны с вероятностью возвратов  $P(\tau)$ . Возьмем, например, коррелирующую функцию, постоянную в некоторой полосе вдоль всей границы хаоса /16/, чтобы исключить быстрые ее изменения из-за движения вдоль границы. Тогда корреляции  $C(\tau)$  просто пропорциональны мере области, для которой время застревания  $> \tau$ . Из эргодичности ( $\rho > 1$ )

$$C(\tau) \sim \mu(\tau) \sim \tau P(\tau) \quad (15)$$

(подробнее см. в /16/), т.е. корреляции затухают также по степенному закону с показателем  $\rho_c = \rho - 1$ .

Результат аккуратного пересчета вероятности возвратов в корреляции для отображения (II) показан на рис. 14 /16/. Быстрое затухание корреляций для  $\tau > 10^7$  (пунктир) связано с ограниченностью времени счета и его не следует принимать во внимание. Эмпирическое значение показателя затухания  $\rho_c \approx 0,4$  определенно меньше 0,6 (пунктирная прямая) и уж во всяком случае  $\rho_c < 1$  (нижняя прямая). Последнее неравенство приводит к качественному изменению статистических свойств. В частности, коэффициент диффузии (в том случае, когда он определяется корреляциями рассматриваемого типа, см. ниже) обращается в бесконечность, поскольку он пропорционален интегралу от  $C(\tau)$ . Это, разумеется, не означает бесконечной скорости диффузии, но приводит к тому, что второй момент функции распределения растет быстрее, чем  $t$  /16/. Например, для отображения (2) величина

$$S^2 = \left\langle \left( \sum_{i=1}^t y_i \right)^2 \right\rangle \propto t^d; \quad d = 3 - \rho > 1 \quad (16)$$

Мы проверяли соотношение  $d + \rho = 3$  в численном моделировании для различных  $\lambda$  и нашли, что оно выполняется с точностью около 10% для  $t \leq 10^4$ , пока колебания  $\rho$  еще не очень существенны. Отметим, что при  $d > 1$  обычное диффузионное уравнение неприменимо, поскольку процесс существенно не марковский.

В работе /30/ подобный режим диффузии был обнаружен для стандартного отображения (3) при  $K = 6,6$ . Отображение (2) можно рассматривать как качественную модель этого явления, в которой края стохастического слоя соответствуют границам двух областей устойчивости системы (3), где импульс  $P$  изменяется линейно со временем в противоположных направлениях (так называемый ускорительный режим, см. /19/). Этот процесс и описывается суммой  $S$  в (16).

Отметим, что в упомянутой выше модели "стадион" существует режим, качественно аналогичный (но гораздо проще и нагляднее) "застреванию" траектории на границе хаоса. Он соответствует движению почти перпендикулярно прямым участкам границы "стадиона". Легко видеть, что корреляции убывают при этом по закону  $C(\tau) \propto 1/\tau$ .

Наконец, упомянем об одном настоящем эксперименте с электронами в магнитной ловушке /31/, в котором, по-видимому, наблюдались обсуждаемые здесь статистические аномалии (подробнее см. в /26/).

### 6. Влияние внешнего шума

Реальные системы всегда подвержены воздействию внешнего шума. Так, для эксперимента /31/ роль такого шума играет рассеяние на остаточном газе. Для исследования влияния шума в правую часть первого уравнения отображения (2) было добавлено слагаемое  $f \xi_n$ , где  $\xi_n$  — независимые случайные величины, распределенные в интервале  $[-1/2, 1/2]$ , а  $f$  — постоянная. Пример влияния шума на статистику возвратов Пуанкаре показан на рис. 1а пунктирной кривой. Начиная с некоторого  $\tau = \tau_f$ , зависящего от интенсивности шума  $f^2$ , вероятность возвратов опадает значительно медленнее, приблизительно как  $1/\sqrt{\tau}$ . Отметим, что такая же зависимость наблюдается и при малых  $\tau \leq \lambda^2$  /15/ (см. также рис. 2). Она и приводит к относи-



тельному сдвигу кривых  $P(\tau)$  для двух отображений на рис. 1а. Причина в обоих случаях одна и та же — свободная диффузия с приблизительно постоянной скоростью. Для малых  $\tau$  это диффузия в пределах слоя, а в случае шума диффузия идет внутрь устойчивой области.

Величину  $\tau_f$  можно оценить из условия, что масштаб  $\tilde{x} \sim \Delta y$ , соответствующий времени возврата  $\tau_f$ , проходит за то же время под действием внешнего шума:  $\Delta y \sim \sqrt{D_f \tau_f}$ , где  $D_f = f^2/12$  — коэффициент внешней диффузии. Как и выше, из эргодичности  $\Delta y/\lambda \sim P(\tau_f) \tau_f / \langle \tau \rangle$ , где  $\langle \tau \rangle \approx 3\lambda$  — среднее время возврата. Переписав это соотношение в виде  $P(\tau_f) \sim 3\sqrt{D_f/\tau_f}$ , получим выражение для вероятности возврата при  $\tau \gg \tau_f$ :

$$P(\tau) \approx 2,5 \sqrt{\frac{D_f}{\tau}} \quad (17)$$

где коэффициент 2,5 получен из результатов численного моделирования. В случае ограниченного размера устойчивой области зависимость (17) перейдет в конце концов в экспоненциальную.

В случае свободной диффузии оценка (15) для корреляций неприменима из-за отсутствия стационарного распределения. Нетрудно видеть, что корреляции рассматриваемого вида будут убывать при этом как  $1/\sqrt{\tau}$ . Отметим, что при  $p = 3/2$  закон убывания корреляций не изменится.

Интересно, что в модели "стадион" эффект шума совершенно иной, так как здесь нет аналога устойчивой области. Поэтому при  $\tau \gg \tau_f$  убывание корреляций становится экспоненциальным с тем же характерным временем  $\tau_f$ . Легко показать, что  $\tau_f \sim f^{-2/3}$ , где  $f^2$  порядка коэффициента внешней диффузии по скорости.

### 7. Влияние диссипации

Рассмотренные выше аномалии статистических свойств гамильтоновой системы связаны с границей хаоса в фазовом пространстве. При наличии диссипации хаос в этом случае является, вообще говоря, только переходным, или временным, и заканчивается захватом траектории на простой аттрактор в устойчивой области /33/. Поэтому можно думать, что на стохастическом аттракторе граница

хаоса, вообще говоря, невозможна, а, следовательно, и статистические свойства движения являются "обычными". В частности, можно ожидать экспоненциального убывания корреляций и вероятности возвратов Пуанкаре.

Для проверки этой гипотезы было проведено численное моделирование модифицированного отображения (2), в котором  $\gamma$  умножалось дополнительно на параметр диссипации  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ). Хаотический аттрактор появляется при достаточно сильной диссипации  $\delta > \delta_{кр}$  ( $\delta = 1 - \gamma$ ). Критическое значение  $\delta_{кр}$  можно приблизительно оценить из условия отсутствия устойчивых неподвижных точек (см. дополнение). При  $\lambda \gg 1$

$$\delta_{кр} \approx \frac{2}{\sqrt{\lambda}}; \quad \delta'_{кр} \approx \frac{8}{\lambda^2} \quad (18)$$

Вторая граница ( $\delta'_{кр}$ ) соответствует переходному хаосу, но с очень большим временем жизни и получена из условия экспоненциально малой равновесной функции распределения в районе устойчивых периодических точек. При  $\lambda \sim 1$  величина  $\delta_{кр} = 0,5$  и определяется условием исчезновения неподвижных точек  $y = \pm 1$ . Из численного моделирования  $\delta_{кр} \approx 0,47$ .

Также как и при  $\gamma = 1$  исследовалась статистика возвратов Пуанкаре на линии  $y = 0$ , т.е. переходы между двумя симметричными половинами аттрактора. Типичные зависимости  $P(\tau)$  при  $\lambda = 3$  и  $\gamma = 0,5; 0,2$  приведены на рис. 4. В отличие от гамильтонова случая (рис. 2) вероятность возвратов хорошо описывается простым экспоненциальным законом (распределение Пуассона):

$$P(\tau) = A W^{\tau-1} = A e^{-\frac{\tau-1}{\tau_r}}, \quad \tau > 1 \quad (19)$$

где  $(1 - W)$  имеет смысл вероятности перехода в другую половину аттрактора, а  $\tau_r$  — время релаксации. Эмпирические значения констант равны:  $W \approx 0,56; A \approx 0,79$  ( $\gamma = 0,5$ );  $W \approx 0,64; A \approx 1,26$  ( $\gamma = 0,2$ ). Отклонения значений  $A$  от единицы, также как и отклонения  $P(\tau)$  на рис. 4 при малых  $\tau$  от (19), связаны с корреляциями между последовательными переходами. Представление о величине этих корреляций можно получить, сравнив  $P(2)$  с  $W$ . Для  $\gamma = 0,5; 0,2$  отношения  $(1 - P(2))/W \approx 1,13; 0,45$ . В случае независимых



переходов (марковский процесс) это отношение равнялось бы единице. Исключая небольшой интервал  $\tau \sim 1$ , зависимость (I9) оказалась справедливой во всех обследованных случаях ( $0,1 \leq \gamma \leq 0,951$ ;  $3 \leq \lambda \leq 10^3$ ), причем всегда  $W > 0,5$ . Более того, при  $\delta \ll 1$  параметры распределения (I9) могут быть получены из диффузионного уравнения (см. дополнение):

$$P(\tau) = \sqrt{2\delta} e^{-\delta\tau}; \quad \tau \gg 1 \quad (20)$$

Например, для  $\delta = 0,04$ ;  $\lambda = 10^3$  отношение  $-\ln W/\delta = 0,93$ , а  $A^2/2\delta = 0,97$ . Справедливо также приближенное соотношение  $W \approx \gamma$ , которое неплохо выполняется вплоть до  $\gamma = 0,5$ . Эти данные дополнительно подтверждают "нормальные" статистические свойства хаотического аттрактора (см. также /I3/).

Были обследованы также переходы через линию  $\theta = \pi$  (вместо  $\gamma = 0$ ). Распределение (I9) справедливо и в этом случае, но  $W < 0,5$ . Например, для  $\lambda = 3$ ;  $\gamma = 0,5$  величина  $W = 0,32$ .

Аналогичные результаты были получены и для некоторых других моделей с хаотическим аттрактором.

Пользуемся случаем выразить искреннюю благодарность Ф. Вивальди, Ч. Карни, Р. Мак-Кай и И. Персиваль за интересные и полезные обсуждения.

### Дополнение

В качестве необходимого условия возникновения хаотического аттрактора при  $\delta \ll 1$  примем отсутствие устойчивых неподвижных точек  $\bar{y} = y$ ;  $\bar{\theta} = \theta + 2\pi n$ . В противном случае траектория, попав в зону притяжения устойчивой точки, станет периодической. Оценка вероятности попадания будет дана ниже.

Координаты неподвижных точек равны

$$y = \pm e^{-\frac{2\pi n}{\lambda}}; \quad \sin \theta = \pm \frac{1-\gamma}{\gamma} e^{-\frac{2\pi n}{\lambda}} \quad (D.1)$$

Условие их неустойчивости определяется тем, что одно из собственных значений матрицы линеаризованного отображения будет по модулю больше единицы, и имеет вид (см., например, /I3/)

$$\lambda e^{\frac{2\pi n}{\lambda}} \gamma \cos \theta \leq -(2+2\gamma) \quad (D.2)$$

или

$$\lambda e^{\frac{2\pi n}{\lambda}} \gamma \cos \theta \geq 0$$

Из (D.1) видно, что неподвижные точки существуют только для тех  $n$ , у которых  $|\sin \theta| = \frac{1-\gamma}{\gamma} e^{-\frac{2\pi n}{\lambda}} \leq 1$ . Поэтому устойчивые неподвижные точки отсутствуют, если для любого  $n$  выполняется одно из неравенств

$$\lambda \gamma e^{\frac{2\pi n}{\lambda}} |\cos \theta| > 2+2\gamma \quad (D.3)$$

или

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} e^{-\frac{2\pi n}{\lambda}} > 1$$

Первое есть условие неустойчивости неподвижной точки, а второе — ее отсутствия. Выполнение неравенств (D.3) для любого целого  $n$  и дает необходимое условие возникновения хаотического аттрактора.

При  $\lambda \gg 2\pi$  и  $\delta \ll 1$ , подставляя значение  $\cos \theta$  из (D.2) в (D.3), получим, что наиболее "опасным" оказывается  $n = -[\frac{\lambda}{2\pi} \ln(\frac{\gamma}{1-\gamma})]$ , где скобки означают целую часть. Согласно (D.3) хаотический аттрактор возникает, когда эта неподвижная точка теряет устойчивость, что имеет место при

$$\delta_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha\lambda}} \quad (D.4)$$



где  $\alpha = \left\{ \frac{\lambda}{2\pi} \ln \left( \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \right\}$ , а фигурные скобки обозначают дробную часть.

Функция распределения  $f(y)$ , усредненная по фазе, может быть получена из уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова /13/ и равна

$$f(y) = \sqrt{\frac{2\delta}{\pi}} e^{-2\delta y^2} \quad (Д.5)$$

Отсюда видно, что характерный размер аттрактора оказывается порядка  $\Delta y \sim 1/\sqrt{2\delta}$ . Поэтому если при  $\delta \ll \delta_{кр}$  координата первой устойчивой точки  $y_1 = \exp(2\pi n/\lambda) \approx \lambda/4$  значительно превышает размер аттрактора  $\Delta y$ , то вероятность попадания в нее оказывается экспоненциально малой. Это дает мягкое условие возникновения хаотического аттрактора

$$\delta \gg \delta'_{кр} = \frac{\delta}{\lambda^2} \quad (Д.6)$$

При этом, однако, следует иметь в виду, что возникающий аттрактор может оказаться метастабильным, т.е. будет существовать конечное, хотя и экспоненциально большое, время.

Отметим, что необходимое условие (Д.3), по-видимому, близко к достаточному при слабой диссипации, когда как и в гамильтоновом случае, наиболее устойчивы точки периода 1. Для оценки его можно использовать и при  $\gamma \sim 1$ ,  $\lambda \sim 1$ . Так для  $\lambda = 3$  согласно (Д.1)-(Д.3) неподвижная точка с  $n = 0$  существует и остается устойчивой вплоть до  $\gamma \geq 1/2$ . При  $\gamma < 1/2$  она исчезает и, согласно критерию (Д.3), возникает хаотический аттрактор. Численные эксперименты дают несколько большее значение  $\gamma \leq 0,53$ . В интервале  $0,5 < \gamma < 0,53$  наряду с хаотическим аттрактором существует и простой аттрактор - неподвижная точка с  $n = 0$  и  $|y| = 1$ .

Как показано в /13/, при малой диссипации  $\delta \ll 1$  для статистического описания движения можно использовать уравнение ФПК:

$$\frac{\partial f(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} (Bf) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (Df) \quad (Д.7)$$

Для модели п.7

$$\bar{y} = \gamma(y + \sin \theta); \quad \bar{\theta} = \theta - \lambda \ln |\bar{y}|$$

моменты

$$B = \langle (\bar{y} - y) \rangle = -\gamma\delta; \quad \delta = 1 - \gamma \quad (Д.8)$$

$$D = \frac{1}{2} \langle (\bar{y} - y)^2 \rangle = \frac{\gamma^2}{4}$$

Вводя новую переменную

$$x = \frac{2\sqrt{\delta}}{\gamma} y \quad (Д.9)$$

получим уравнение для собственных функций

$$f_n(x,t) = \varphi_n(x) e^{-\lambda_n t} \quad (Д.10)$$

в виде

$$\varphi'' + x\varphi' + \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right)\varphi = 0 \quad (Д.11)$$

Для граничных условий  $\varphi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  собственные функции /35/

$$\varphi_n = \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}; \quad \lambda_n = n\delta; \quad n = 0, 1, \dots \quad (Д.12)$$

ортогональны с весом  $\exp(x^2/2)$ .

Пусть  $g(x,t)$  - решение (Д.7) с граничными условиями  $g(0,t) = g(\infty,t) = 0$  и начальным условием  $g(x,0) = d\delta(x)/dx$ , где  $\delta(x)$  - дельта-функция. Тогда вероятность возврата

$$P(\tau) = C \int_0^\infty g(x,\tau) dx = G(0,\tau) \quad (Д.13)$$

где  $C g(x,t) = -\frac{d}{dx} G$ ;  $G(\infty,\tau) = 0$ , а  $C$  - нормировочная постоянная, определяемая из условия  $P(1) = 1$ . При  $t\delta \ll 1$  диссипацией можно пренебречь и /26/

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t\delta}} \quad (Д.14)$$

Пусть

$$-\frac{dG_0}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) e^{-n t \delta} \quad (Д.15)$$



Тогда при  $\epsilon \delta \gg 1$

$$P(\tau) \approx a_1 e^{-\tau \delta} \int_0^{\infty} \varphi_1(x) dx = -a_1 e^{-\tau \delta} \quad (\text{Д.16})$$

где

$$-a_1 = \frac{\int_0^{\infty} \frac{dG_0}{dx} \varphi_1 e^{x^2/2} dx}{\int_0^{\infty} \varphi_1^2 e^{x^2/2} dx} = \sqrt{2\delta} \quad (\text{Д.17})$$

Подписи к рисункам

Рис.1. Статистические свойства движения на границе хаоса: (а) распределение возвратов Пуанкаре; (б) убывание корреляций. Сплошные кривые - численные данные Карни /16/ для отображения (11); кружки - то же для отображения (2) по данным /15/. Прямые - степенные зависимости с указанным показателем  $P$ . Пунктирная кривая - эффект слабого внешнего шума (17).

Рис.2. Статистика возвратов Пуанкаре для отображения (2) при специальном значении граничного числа вращения  $\gamma_0 \approx 0,617 = [1,1,1,1,1,1,3, \dots] \approx \gamma^{(1)}$ ;  $10^7$  итераций. Верхние точки:  $\lambda = 3,22$ ;  $\nu = 0$ ;  $\rho = 1,338$  (прямая). Нижние точки:  $\lambda = 2,65$ ;  $\nu = -0,185x2x$ ;  $\rho = 1,321$  (прямая). Нижние точки сдвинуты для удобства на  $\Delta \log P = -1$ . Логарифмы здесь и ниже - десятичные.

Рис.3. То же, что и на рис.2 для стандартного отображения (3) при  $K = K_{кр} = 0,971635$  ( $\gamma = 1 - \gamma^{(2)}$ );  $10^8$  итераций;  $\rho = 0,975$  (прямая).

Рис.4. То же, что и на рис.2, но с диссипацией при  $\lambda = 3$ ;  $\nu = 0$ ; (1)  $\gamma = 0,5$ ; (2)  $\gamma = 0,2$ .



### Л и т е р а т у р а

1. Алексеев В.М. - Математический сб., 1968, т.76, № I, с.72.
2. Брудно А.А. - УМН, 1978, т.33, № I, с.207.
3. Алексеев В.М., Якобсон М.В. Символическая динамика и гиперболические динамические системы. Добавление в книгу: Боуэн Р. Методы символической динамики. М.: Мир, 1979, с.198.
4. Звонкин А.К., Левин Л.А. - УМН, 1970, т.25, № 6, с.85.
5. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
6. Crawford J.D., Cary J.R. - Physica, 1983, v. 6D, p. 223.
7. Перекрест В.Т. - УМН, 1974, т.29, № I, с.181.
8. Alder B., Wainwright T. - Phys. Rev. Lett., 1967, v. 18, p. 968.
9. Vivaldi F., Casati G., Guarneri I. - Phys. Rev. Lett., 1983, v. 51, p. 727.
10. Chirikov B.V., Izrailev F.M. Some Numerical Experiments with a Nonlinear Mapping: Stochastic Component. Coll. Int. CNRS No. 229 (Toulouse, 1973). Paris: CNRS, 1976, p. 409.
11. Гадияк Г.В., Израйлев Ф.М. - ДАН СССР, 1974, т.218, с.1302.
12. Ford J. - Physics Today, 1983, v. 36, No. 4, p. 40.
13. Lichtenberg A.J., Leiberman M.A. Regular and Stochastic Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1983.  
(Имеется перевод: Лихтенберг А.Дж., Либерман М.А. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984).
14. Channon S.R., Lebowitz J.L. - Ann. N.Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 108.
15. Чирикв Б.В., Шепелянский Д.Д. Статистика возвратов Пуанкаре и структура стохастического слоя нелинейного резонанса. В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям (Киев, 1981). Киев, Наукова думка, 1983, т.П, с.137.

16. Karney C.F.F. Physica 1983, v. 8D, p. 360.

17. Белошапкин В.В., Заславский Г.М. О спектральных свойствах динамических систем в области перехода к хаосу. Препринт № 228Ф. Красноярск: Институт физики СО АН СССР, 1983.
18. Nagashima T. - Lecture Notes in Physics, 1983, v. 179, p. 250; Nagashima T., Haken H. - Phys. Lett., 1983, v. 96A, p. 385.
19. Chirikov B.V. - Physics Reports, 1979, v. 52, p. 263.
20. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М.: Физматгиз, 1961.
21. Greene J.M. - J. Math. Phys., 1979, v. 20, p. 1183; ibid, 1968, v. 9, p. 760.
22. Shenker S.J., Kadanoff L.P. - J. Stat. Phys., 1982, v. 27, p. 631.
23. Escande D.F. - Physica Scripta, 1982, v. T2/1, p. 126.
24. Schmidt G., Bialek J. - Physica, 1982, v. 5D, p. 397.
25. MacKay R.S. Thesis, Princeton University, 1982.
26. Chirikov B.V. - Lecture Notes in Physics, 1983, v. 179, p. 29.
27. Израйлев Ф.М., Чирикв Б.В., Шепелянский Д.Д. Динамическая стохастичность в классической механике. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 80-209, Новосибирск, 1980.
28. Greene J.M., MacKay R.S., Vivaldi F., Feigenbaum M.J. - Physica, 1981, v. 3D, p. 468.
29. MacKay R.S., Meiss J.D., Percival I.C. Physica D (to appear).
30. Karney C.F.F., Rechester A.B., White R.B. - Physica, 1982, v. 4D, p. 425.
31. Bora D., John P.I., Saxena Y.C., Varma R.K. - Plasma Physics, 1980, v. 22, p. 653.
32. Чирикв Б.В. Динамика частиц в магнитных ловушках. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.13. М.: Энергоиздат, 1983.



- 33. Chirikov B.V., Izrailev F.M. - Physica, 1981, v. 2D, p. 30.
- 34. Ostlund S., Rand D. et al. - Physica, 1983, v. 8D, p. 303.
- 35. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961.

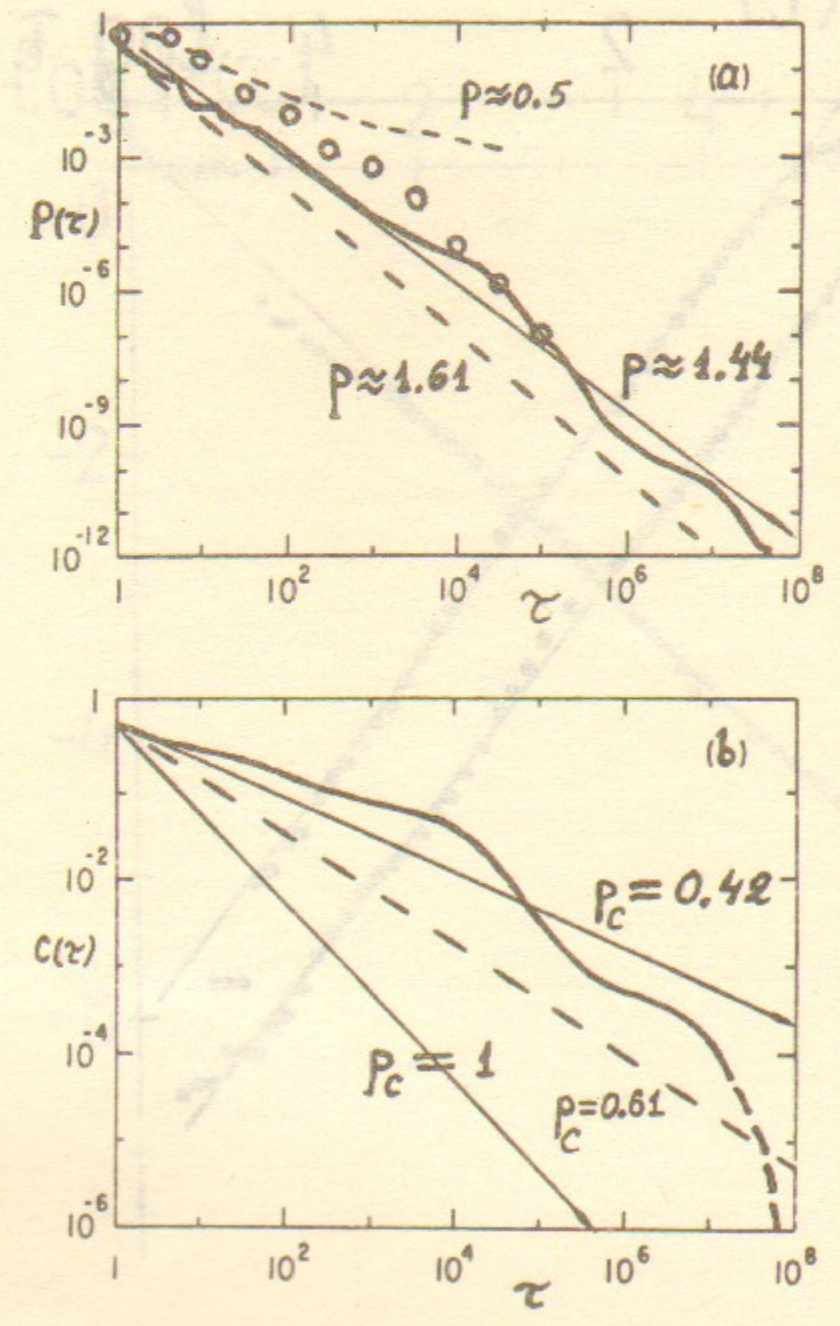


Рис. I



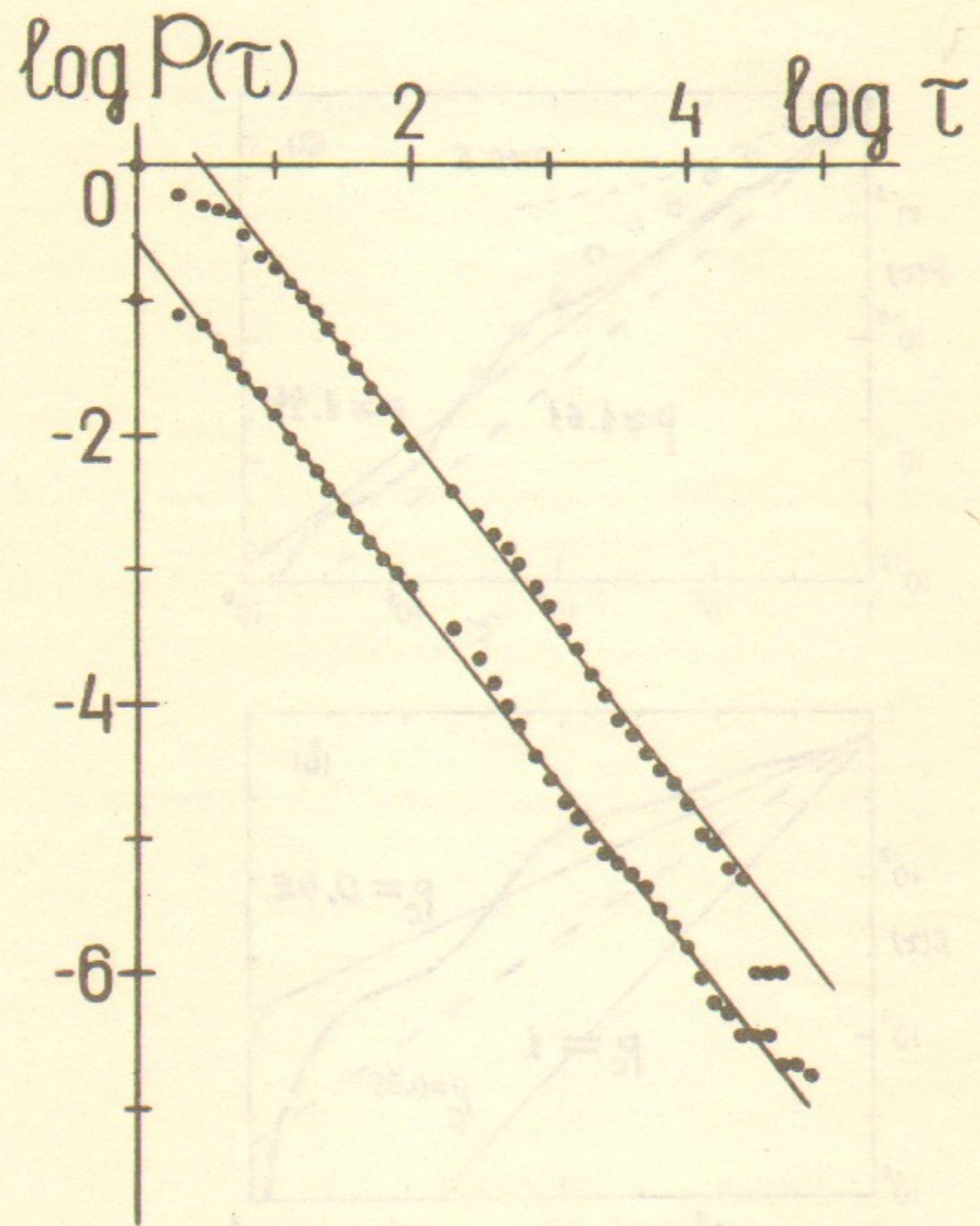


Рис. 2

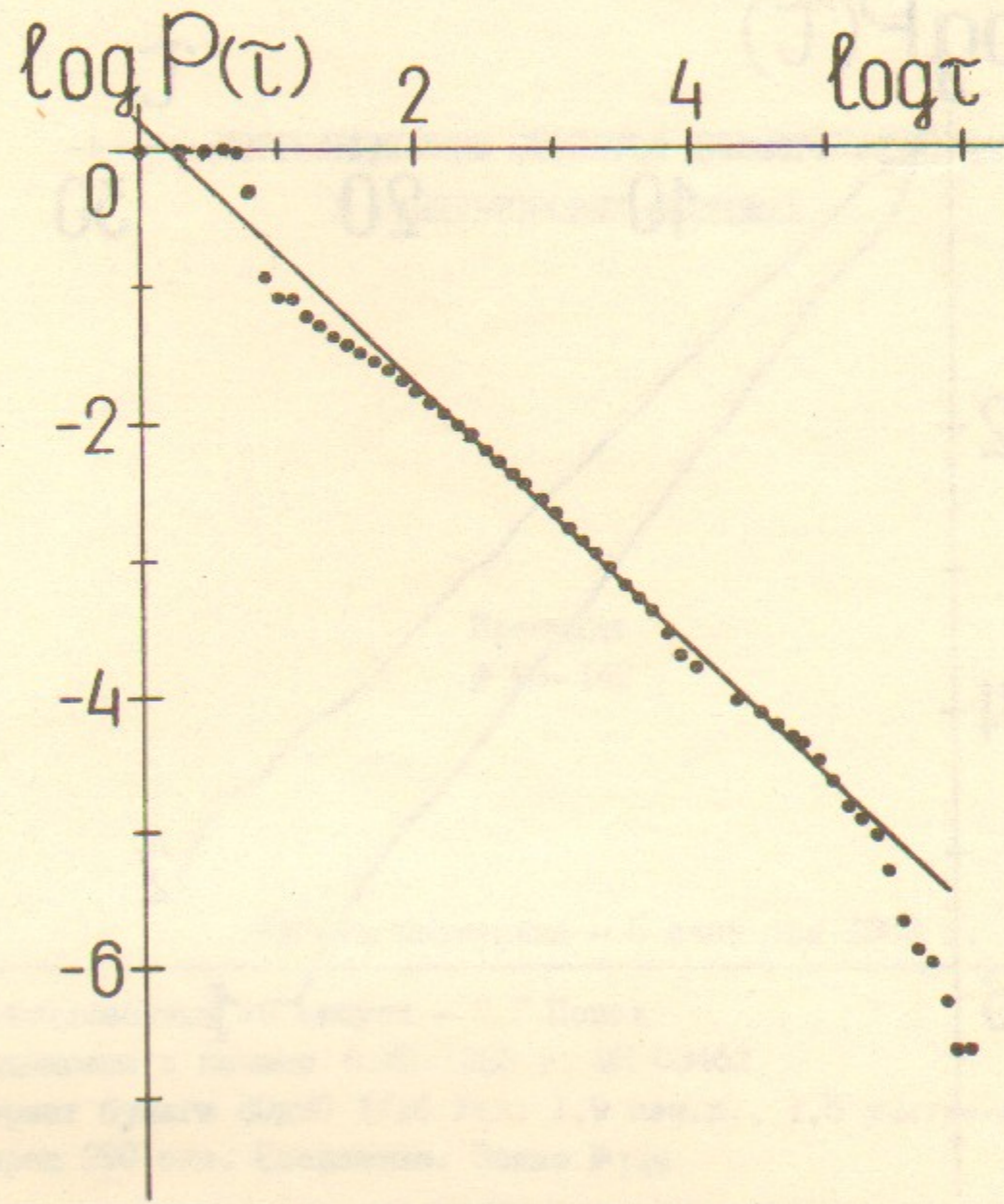


Рис. 3



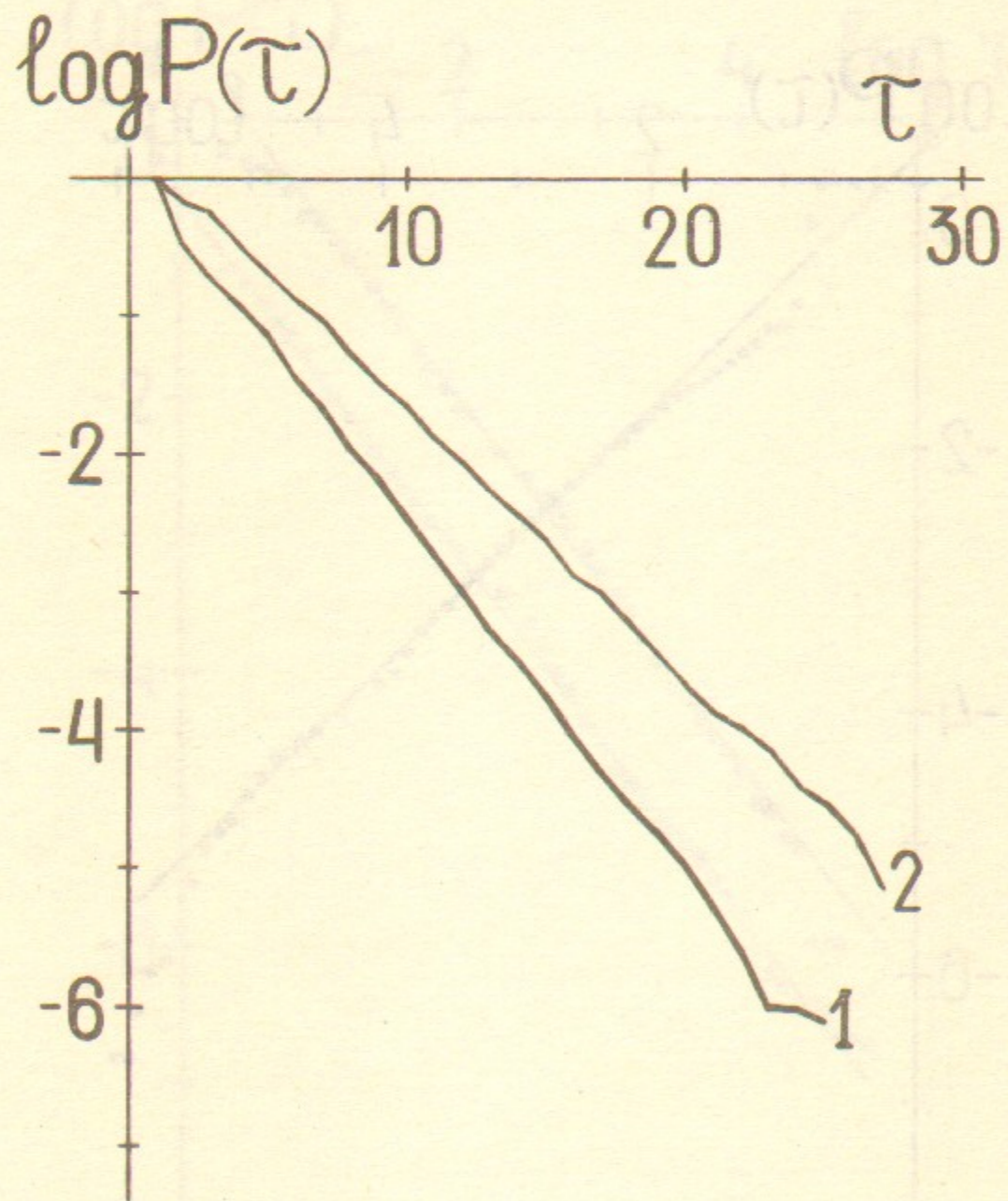


Рис. 4

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА  
В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

Препринт  
№ 83-149

Работа поступила - 5 сентября 1983 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 6.XII-1983 г. МН 03462  
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл. 1,9 печ.л., 1,5 учетно-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 149.

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90