ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.В.Соколов

О ХАРАКТЕРЕ КВАНТОВЫХ ПОПРАВОК ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

ПРЕПРИНТ 83-144

НОВОСИБИРСК

О ХАРАКТЕРЕ КВАНТОВЫХ ПОПРАВОК ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В.В.Соколов

А Н Н О Т А Ц И Я

Известно /3/, что квантовые эффекты экспоненциально быстро разрушают стохастическую фазовую траекторию нелинейного осциллятора, возбуждаемого регулярной силой, действующей на него со стороны внешнего источника. В настоящей работе проведено полное суммирование экспоненциально растущих квантовых поправок. В результате квазиклассический ряд для квантовомеханических средних перестраивается таким образом, что уже не содержит экспоненциально быстро нарастающих членов. Основной член полученного ряда приводит в случае стохастического движения к той же зависимости среднего действия осциллятора от времени, что и в классическом случае, а первая поправка имеет порядок $\hbar^2$. В то же время, средние степеней действия уже в главном приближении содержат растущие степенным образом со временем поправки $\sim\hbar$, которые, однако, не меняют асимптотики при $t \to \infty$. Полученные результаты не чувствительны к выбору начального состояния осциллятора.

ABSTRACT

It is known /3/ that quantum effects lead to exponentially rapid destroy of a stochastic phase trajectory for non-linear oscillator influenced by an external regular force. In the presented paper the complete summing up of the exponentially increasing quantum corrections is performed. In consequence of the summing the quasiclassical row for quantummecanical averages is transformed into the new row, which does not contain the rapidly increasing terms. The main term of the obtained row gives in the case of stochastic motion of the classical oscillator the same time dependence of average action as in classical one and the first correction is of the second order of $\hbar$. At the same time the averages of powers of action already in the main approximation contain corrections of the order of $\hbar$ powerly increasing in time. However these corrections do not change the time asymptotic of averages. The obtained resalts are not sensitive to the initial state of the oscillator.

I. Различные аспекты поведения квантовых систем, стохастических в классическом пределе, вызывают в последние годы широкий и все возрастающий интерес. Их интенсивное изучение началось совсем недавно и большинство возникающих здесь проблем не только не нашли еще своего решения, но даже и сама их постановка содержит немало неясностей.

Одна из немногих четко сформулированных задач состоит в изучении отличий в поведении со временем средних значений динамических переменных и корреляторов квантовых систем и их классических аналогов. Важность учета квантовых эффектов при изучении стохастической неустойчивости динамических систем была впервые подчеркнута Э.В.Шуряком. В /2/ отмечено их существенное влияние на зависимость от времени квантовых "медленных переменных" вблизи сепаратрисы классического нелинейного резонанса. Начало систематическому изучению временной зависимости квантовомеханических средних значений динамических величин было положено работами /3,6/. Это изучение велось как аналитически /3-7, I0/, так и с помощью численного моделирования на ЭВМ /6,7/. Во всех этих исследованиях моделью служил нелинейный осциллятор /3-5,7/ или ротатор /6,7/, возбуждаемый периодически следующими толчками. В /3-5/ в качестве начального состояния осциллятора выбиралось когерентное состояние, которое, как известно /8/, минимизирует соотношение неопределенностей переменных фазовой плоскости и служит поэтому естественным квантовым обобщением классичеких начальных условий. Хотя такой выбор начального состояния может показаться чересчур специальным, он не уменьшает общности рассмотрения, поскольку, как отмечено в /5/, позволяет получить средние по любому начальному состоянию интегрированием найденных средних по когерентному состоянию с подходящей функцией Глаубера /9/.

Авторы работы /3/ обнаружили экспоненциальное нарастание со временем первой ($\sim\hbar$) квантовой поправки к классическим динамическим переменным, что означает чрезвычайно быстрое разрушение классической фазовой траектории при стохастическом движении. Однако, численные исследования /6,7/ хотя и обнаружили отклонения в поведении квантовых средних от диффузии по действию, характерной для классического движения, определенно свидетельствуют о том, что эти отклонения нарастают со временем гораздо медленнее, чем найдено в /3/. Этот результат весьма слабо зависит от выбора начального состояния и является поэтому проявлением существенных свойств квантовой динамики. Основанные на квазиклассическом методе В.П.Маслова теоретические оценки /10/ также свидетельствуют о медленном /лишь степенном/ нарастании влияния квантовых эффектов.

Сказанное означает, что быстрое разрушение квантовыми эффектами стохастической классической траектории не означает еще само по себе возникновения глобальных отличий квантового движения от классического, хотя и служит указанием на возможность появления таких отличий. Действительно, объем, занимаемый на фазовой плоскости системой, находящейся в когерентном состоянии, равен $\hbar$. Поэтому разложение квантовомеханических средних по такому состоянию в ряд по $\hbar$ содержит как члены, обусловленные некоммутативностью операторов в гейзенберговских уравнениях движения, так и те члены, которые возникли от разложения по фазовому объему начального состояния. Только первые из них имеют безусловно динамическое происхождение. Если бы мы опустили в квантовомеханическом среднем по когерентному состоянию все такие члены, оно превратилось бы в классическое среднее по начальным данным, лежащим в фазовой плоскости в области, численно равной по порядку величины $\hbar$. Ясно, что его разложение по $\hbar$ привело бы в случае стохастического движения к экспоненциально растущим со временем членам. Причиной появления последних служит характерная для такого движения локальная неустойчивость. Важно подчеркнуть, однако, что само такое среднее при достаточно больших временах, практически, вовсе не зависит от фазового объема, по которому проводилось усреднение, т.е. от $\hbar$.

В данной работе показано, что с аналогичной ситуацией мы имеем дело и при разложении по $\hbar$ квантовых средних по когерентному состоянию. Хотя в этом разложении присутствуют экспоненциально растущие члены, их суммирование приводит к результату не столь чувствительному к величине $\hbar$, как можно было бы ожидать на основании вида исходного ряда.

Первая попытка подобного суммирования была предпринята в /5/. С помощью метода функционального интегрирования в этой работе были отсуммированы все вклады вида $(\hbar e^{\sigma t})^n$ /σ - практически постоянный параметр/, но были опущены вклады $\hbar(\hbar e^{\sigma t})^n$

и т.д. Хотя такое суммирование и улучшает результат, полученный в /3/, экспоненциальный характер отброшенных членов означает, что область его применимости попрежнему остается ограниченной весьма малыми временами. В настоящей статье метод работы /3/ усовершенствован, что позволило просуммировать все экспоненциально растущие члены. В результате исходный ряд по $\hbar$ преобразуется в ряд, в котором коэффициенты при старших степенях $\hbar$ уже медленно растут со временем. Почленное интегрирование нового ряда с произвольной функцией Глаубера не меняет поведения его членов, так что выбор начального состояния не оказывает существенного влияния на окончательный результат.

Основной член перестроенного ряда предсказывает, как будет видно, ту же зависимость квантовомеханического среднего от времени, что и у среднего действия соответствующей классической стохастической системы, а первая квантовая поправка имеет порядок $\hbar^2$. В то же время, растущие со временем поправки в средних более высоких, чем первая, степеней действия возникают уже в первом порядке по $\hbar$.

Хотя настоящая работа основана на методе, предложенном в /5/, в ней приводится новый более компактный и общий вывод основного выражения (20). Поэтому эта статья может читаться независимо от /5/.

2. Для удобства последующих сравнений приведем сначала несколько формул, относящихся к классическому стохастическому движению нелинейного осциллятора. Классические величины будем в дальнейшем отмечать индексом c .

Пусть осциллятор возбуждается периодической внешней силой

$$g(t)=g_0\sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s e^{2\pi i s t} \quad ; \ |f_s|\leq 1$$

/период силы принят равным единице, так что время t безразмерно/. При $f_s=1$ сила $g(t)$ имеет вид периодических мгновенных толчков, рассматриваемых в /3/, /6/ и др; в настоящей работе явный вид $g(t)$ не имеет значения. В качестве канонических переменных удобно использовать комплексно сопряженные величины $\alpha_c=\sqrt{I_c}\,e^{-i\theta_c}$ и $\alpha_c^*=\sqrt{I_c}\,e^{i\theta_c}$, где I_c и θ_c - стандартные переменные действие - угол. Функция Гамильтона осциллятора имеет в этих переменных вид

$$H_c(\alpha_c,\alpha_c^*;t)=\omega_0|\alpha_c|^2+\gamma|\alpha_c|^4-g(t)(\alpha_c+\alpha_c^*)$$

С помощью замен $\alpha_c\to\alpha_c/\sqrt{\gamma}$, $g_0\to g_0/\sqrt{\gamma}$, $H_c\to H_c/\gamma$ можно исключить из этого выражения параметр нелинейности γ:

$$H_c(\alpha_c,\alpha_c^*;t)=\omega_0|\alpha_c|^2+|\alpha_c|^4-g(t)(\alpha_c+\alpha_c^*), \qquad \text{(I)}$$

причем как действие $I_c=|\alpha_c|^2$, так и параметры ω_0 и g_0 в (I) уже безразмерны. Функции Гамильтона (I) отвечают канонические уравнения движения

$$i\frac{d\alpha_c(t)}{dt}=[\omega_0+2I_c(t)]\alpha_c(t)-g(t);\quad i\frac{d\alpha_c^*(t)}{dt}=-[\omega_0+2I_c(t)]\alpha_c^*(t)+g(t), \qquad (2)$$

с помощью которых легко получить, задав начальные условия $\alpha_c(0)=\mathring{\alpha}$, $\alpha_c^*(0)=\mathring{\alpha}^*$

$$\alpha_c(t)=e^{-i\varphi_c(t)}\Big[\mathring{\alpha}+i\int_0^t d\tau\, g(\tau)e^{i\varphi_c(\tau)}\Big]\stackrel{def}{\equiv}e^{-i\varphi_c(t)}a_c(t)$$

$$\alpha_c^*(t)=e^{i\varphi_c(t)}\Big[\mathring{\alpha}^*-i\int_0^t d\tau\, g(\tau)e^{-i\varphi_c(\tau)}\Big]\stackrel{def}{\equiv}e^{i\varphi_c(t)}a_c^*(t), \qquad (3)$$

где фаза

$$\varphi_c(t)=\int_0^t d\tau\,[\omega_0+2I_c(\tau)]. \qquad (4)$$

Непосредственно из (3) следует уравнение для действия

$$I_c(t)=|\alpha_c(t)|^2=\Big|\mathring{\alpha}+i\int_0^t d\tau\, g(\tau)e^{i\varphi_c(\tau)}\Big|^2=\mathring{I}+\beta_c(t)+\beta_c^*(t) \qquad (5)$$

$$\beta_c(t)\stackrel{def}{\equiv}-i\int_0^t d\tau\, g(\tau)\alpha_c(\tau). \qquad (6)$$

Хорошо известно /II/, что при $g_0>g_0^{cr}\sim 1$ фазы (4) становятся случайными функциями времени. Это, в частности, означает быстрое /за время $\tau_c\sim 1/\ln g_0$ / расщепление корреляций фаз,

относящихся к разным моментам времени.

Перейдем от фиксированных начальных условий $(\mathring{\alpha},\mathring{\alpha}^*)$ к их распределению, сосредоточенному вблизи этой точки фазовой плоскости с плотностью

$$\rho_c(\delta\mathring{\alpha},\delta\mathring{\alpha}^*)=\frac{1}{\pi\sigma_c}\exp\Big(-\frac{1}{\sigma_c}|\delta\mathring{\alpha}|^2\Big). \qquad (7)$$

Усреднение уравнения (5) с учетом расцепления корреляций фаз

$$\int d^2\delta\mathring{\alpha}\,\rho_c(\delta\mathring{\alpha},\delta\mathring{\alpha}^*)\,e^{i[\varphi_c(\tau)-\varphi_c(\tau')]}\sim\exp\Big(-\frac{1}{\tau_c}|\tau-\tau'|\Big)$$

дает простой диффузионный закон изменения среднего значения действия со временем

$$\langle I_c(t)\rangle=\int d^2\delta\mathring{\alpha}\,\rho_c(\delta\mathring{\alpha},\delta\mathring{\alpha}^*)\,I_c(\mathring{\alpha}+\delta\mathring{\alpha},\mathring{\alpha}^*+\delta\mathring{\alpha}^*;t)=\mathring{I}+g_0^2t,$$

не зависящий на самом деле от конкретного вида распределения начальных данных. /В средней части этого равенства явно подчеркнута зависимость I_c от начальных условий/. Выбор распределения (7) продиктован лишь соображениями простоты и удобства сравнения с результатами последующего рассмотрения.

Аналогичными свойствами обладает любое среднее вида $\langle I_c^n(t)\rangle$ и, следовательно, производящая функция

$$Z_c(\xi;t)=\int d^2\delta\mathring{\alpha}\,\rho_c(\delta\mathring{\alpha},\delta\mathring{\alpha}^*)\exp\{-i\xi I_c(t)\} \qquad (8)$$

3. Гамильтониан соответствующей квантовой задачи получается из (I) с помощью замен $\alpha_c\to\sqrt{\varkappa}\,\hat{a}$, $\alpha_c^*\to\sqrt{\varkappa}\,\hat{a}^+$, $I_c\to\varkappa\hat{a}^+\hat{a}=\varkappa\hat{n}$

$$\hat{H}=\varkappa\omega_0\hat{n}+\varkappa^2\hat{n}^2-g(t)\sqrt{\varkappa}(\hat{a}+\hat{a}^+), \qquad (9)$$

где $\varkappa$ играет в безразмерных единицах роль постоянной Планка /в обычных единицах $\varkappa=\hbar\gamma\times$ период внешней силы/, а операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ подчиняются обычным перестановочным соотношениям.

Ниже мы будем интересоваться зависимостью от времени средних значений различных степеней квантового оператора действия $\varkappa\hat{n}$. Их можно вычислить, зная производящую функцию

$$Z(\xi;t)=\langle\psi(t)|\exp(-i\xi\varkappa\hat{n})|\psi(t)\rangle. \tag{10}$$

Вектор состояния $|\psi(t)\rangle$ образуется из начального состояния $|\psi(0)\rangle$ в результате действия оператора временного развития, отвечающего гамильтониану (9)

$$\hat{U}(t)=T\exp\left\{-i\int_0^t d\tau\left[\omega_0\hat{n}+\varkappa\hat{n}^2-\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}g(\tau)(\hat{a}+\hat{a}^+)\right]\right\}. \tag{11}$$

Как уже было сказано во введении, в качестве начального состояния достаточно выбрать когерентное состояние $|\alpha\rangle$. Производящая функция для произвольного начального состояния получается из производящей функции

$$Z_\alpha(\xi;t)=\langle\psi_\alpha(t)|\exp(-i\xi\varkappa\hat{n})|\psi_\alpha(t)\rangle, \tag{12}$$

где

$$|\psi_\alpha(t)\rangle=\hat{U}(t)|\alpha\rangle,$$

путем интегрирования с подходящей функцией Глаубера $P(\alpha,\alpha^*)$ по формуле

$$Z(\xi;t)=\int d^2\alpha\, P(\alpha,\alpha^*)\, Z_\alpha(\xi;t) \tag{13}$$

Чтобы найти $|\psi_\alpha(t)\rangle$, воспользуемся, следуя /5/, под знаком хронологического произведения представлением

$$\exp\left(-i\varkappa\int_0^t d\tau\,\hat{n}^2\right)=\int\prod_\tau\frac{d\lambda(\tau)}{\sqrt{4\pi i\varkappa}}\exp\left[\frac{i}{4\varkappa}\int_0^t d\tau\,\lambda^2(\tau)-i\int_0^t d\tau\,\lambda(\tau)\hat{n}\right]. \tag{14}$$

Функциональный интеграл берется по всем действительным $\lambda(\tau)$. Подстановка (14) в (11) позволяет полностью "распутать" хронологическое произведение операторов и после применения полученного оператора к когерентному начальному состоянию $|\alpha\rangle$ приводит к выражению

$$|\psi_\alpha(t)\rangle=\int\prod_\tau\frac{d\lambda(\tau)}{\sqrt{4\pi i\varkappa}}\exp\left[\frac{i}{4\varkappa}\int_0^t d\tau\,\lambda^2(\tau)-\frac{i}{\varkappa}\,\mathrm{Im}\,\beta_\lambda(t)\right]|\alpha_\lambda(t)\rangle. \tag{15}$$

Состояние $|\alpha_\lambda(t)\rangle$ здесь также когерентно, а функции $\alpha_\lambda(t)$ и $\beta_\lambda(t)$ даются выражениями

$$\alpha_\lambda(t)=e^{-i\varphi_\lambda(t)}\left[\alpha+i\int_0^t d\tau\, g(\tau)e^{i\varphi_\lambda(\tau)}\right]\equiv e^{-i\varphi_\lambda(t)}a_\lambda(t) \tag{16}$$

$$\varphi_\lambda(t)=\int_0^t d\tau\left[\omega_0+\lambda(\tau)\right] \tag{17}$$

$$\beta_\lambda(t)=-i\int_0^t d\tau\, g(\tau)\alpha_\lambda(\tau), \tag{18}$$

которые получаются соответственно из (3), (4) и (6), если заменить в них $2I_c(\tau)$ на $\lambda(\tau)$. В частности, $\alpha_\lambda(t)$ удовлетворяет уравнению /ср. с (2)/

$$i\frac{d\alpha_\lambda(t)}{dt}=\left[\omega_0+\lambda(t)\right]\alpha_\lambda(t)-g(t) \tag{19}$$

при начальном условии $\alpha_\lambda(0)=\alpha$.

Теперь легко получить производящую функцию. Подставляя (15) в (12) и учитывая, что

$$\langle\alpha_2|\exp(-i\xi\varkappa\hat{n})|\alpha_1\rangle=\langle e^{\frac{i}{2}\xi\varkappa}\alpha_2|e^{-\frac{i}{2}\xi\varkappa}\alpha_1\rangle=$$

$$=\exp\left\{\frac{i}{\varkappa}\,\mathrm{Im}\left[e^{-\frac{i}{2}\xi\varkappa}\alpha_1 e^{-\frac{i}{2}\xi\varkappa}\alpha_2^*\right]-\frac{1}{2\varkappa}\left|e^{-\frac{i}{2}\xi\varkappa}\alpha_1-e^{\frac{i}{2}\xi\varkappa}\alpha_2\right|^2\right\},$$

получаем

$$Z_\alpha(\xi;t)=$$

$$=\int\prod_\tau\frac{d\lambda_1(\tau)d\lambda_2(\tau)}{4\pi\varkappa}\exp\left\{\frac{i}{4\varkappa}\int_0^t d\tau\left[\lambda_1^2(\tau)-\lambda_2^2(\tau)\right]+\frac{i}{\varkappa}\,\mathrm{Im}\left[e^{-\frac{i}{2}\xi\varkappa}\alpha_{\lambda_1}(t)\times\right.\right. \tag{20}$$

$$\left.\left.\times e^{-\frac{i}{2}\xi\varkappa}\alpha_{\lambda_2}^*(t)-\beta_{\lambda_1}(t)-\beta_{\lambda_2}^*(t)\right]-\frac{1}{2\varkappa}\left|e^{-\frac{i}{2}\xi\varkappa}\alpha_{\lambda_1}(t)-e^{\frac{i}{2}\xi\varkappa}\alpha_{\lambda_2}(t)\right|^2\right\}.$$

Отметим отрицательный знак действительной части показателя экспоненты в (20).

Линейная замена переменных в функциональном интеграле

$$\lambda_1(\tau) = 2\mu(\tau) + \tfrac{1}{2}\varkappa\nu(\tau) \qquad (21)$$
$$\lambda_2(\tau) = 2\mu(\tau) - \tfrac{1}{2}\varkappa\nu(\tau)$$

полностью устраняет постоянную Планка из меры интегрирования, т.к. $\lambda_1^2(\tau) - \lambda_2^2(\tau) = 4\varkappa\,\mu(\tau)\nu(\tau)$, а якобиан преобразования (21) дает множитель $2\varkappa$. Сделав, наконец, сдвиг переменной $\nu(\tau) \to \nu(\tau) - -\xi\,\delta(t-\tau)$, приходим к окончательному выражению для производящей функции

$$Z_{\varkappa}(\xi;t) = \int\prod_\tau \frac{d\mu(\tau)d\nu(\tau)}{2\pi}\, e^{-i\xi\mu(t)} \exp\Big\{ i\int_0^t d\tau\,\mu(\tau)\nu(\tau) + \qquad (22)$$
$$+ \frac{i}{\varkappa}\, G[\mu(\tau),\nu(\tau)] - \frac{1}{2\varkappa} R[\mu(\tau),\nu(\tau)]\Big\}.$$

Здесь функционалы

$$G[\mu(\tau),\nu(\tau)] = \operatorname{Im}\left[\alpha_{\lambda_1}(t)\alpha^*_{\lambda_2}(t) - \beta_{\lambda_1}(t) - \beta^*_{\lambda_2}(t)\right] \qquad (23)$$

$$R[\mu(\tau),\nu(\tau)] = |\alpha_{\lambda_1}(t) - \alpha_{\lambda_2}(t)|^2, \qquad (24)$$

причем в правых частях необходимо сделать подстановку (21).

4. Выражения (22) - (24) являются пока точными, но осуществить функциональное интегрирование в общем виде невозможно. Однако, в классическом пределе $\varkappa \to 0$ подынтегральная функция сильно упрощается. Легко видеть, что при малых $\varkappa$ $G \sim \varkappa$, $R \sim \varkappa^2$. В самом деле, из уравнений (19) для α_{λ_1} и α_{λ_2} следуют равенства /ср. с (5)/

$$\alpha_{\lambda_1}(t)\alpha^*_{\lambda_2}(t) - \beta_{\lambda_1}(t) - \beta^*_{\lambda_2}(t) - \mathring{I} = -i\varkappa\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)\alpha_{\lambda_1}(\tau)\alpha^*_{\lambda_2}(\tau) \approx$$
$$\approx -i\varkappa\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)|a(\tau)|^2, \qquad (25)$$

$$e^{i\varphi(t)}[\alpha_{\lambda_1}(t) - \alpha_{\lambda_2}(t)] = -\frac{i}{2}\varkappa\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)e^{i\varphi(\tau)}[\alpha_{\lambda_1}(\tau) + \alpha_{\lambda_2}(\tau)] \approx \qquad (26)$$
$$\approx -i\varkappa\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)a(\tau).$$

Здесь через $\alpha(t)$, $a(t)$ и $\varphi(t)$ обозначены соответственно $\alpha_\lambda(t)$, $a_\lambda(t)$ и $\varphi_\lambda(t)$ при $\nu(\tau) \equiv 0$. Они получаются из (16), (17) заменой $\lambda(\tau)$ на $2\mu(\tau)$.

Функция $\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{d\alpha(t)}{dt} = [\omega_0 + 2\mu(t)]\alpha(t) - g(t) \qquad (27)$$

при прежнем начальном условии.

Теперь видно, что при $\varkappa = 0$ показатель экспоненты в (22) равен

$$-i\xi\mu(t) + i\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)\left[\mu(\tau) - |a(\tau)|^2\right] \qquad (28)$$

Интеграл по $\nu(\tau)$ поэтому берется явно и равен

$$\prod_\tau 2\pi\,\delta\left[\mu(\tau) - |a(\tau)|^2\right].$$

При интегрировании по $\mu(\tau)$ вклад дают $\mu(\tau)$, удовлетворяющие уравнению

$$\mu(\tau) = |a(\tau)|^2 = \Big|\mathring{\alpha} + i\int_0^t d\tau\, g(\tau)e^{i\varphi(\tau)}\Big|^2. \qquad (29)$$

Сравнение этого уравнения с (5) показывает, что $\mu(\tau) = I_c(\tau)$ и, следовательно, в пределе $\varkappa = 0$

$$Z_{\varkappa}(\xi;t) = \exp\{-i\xi I_c(t)\}, \qquad (30)$$

как и следовало ожидать.

Учтем теперь следующий член разложения по $\varkappa$. Т.к. поправка к G имеет порядок $\varkappa^3$, следует учесть лишь

$$R \approx \varkappa^2 \Big|\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)a(\tau)\Big|^2,$$

так что в показателе подынтегральной экспоненты к (28) добавляется

$$-\frac{1}{2}\varkappa\Big|\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)a(\tau)\Big|^2$$

Интеграл по $\nu(\tau)$ теперь гауссов и поэтому все еще может быть вычислен точно. Замечательно, однако, что точно берется и интеграл по $\mu(\tau)$. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся интегральным представлением

$$\exp\left(-\frac{\varkappa}{2}|A|^2\right) = \frac{2}{\pi\varkappa}\int d^2\delta\mathring{\alpha}\, e^{-\frac{2}{\varkappa}|\delta\mathring{\alpha}|^2} \exp\left[-2i\,\mathrm{Re}(\delta\mathring{\alpha}^* A)\right] \qquad (31)$$

В рассматриваемом приближении

$$Z_{\mathring{\alpha}}(\xi;t) \approx$$

$$\approx \frac{2}{\pi\varkappa}\int d^2\delta\mathring{\alpha}\, e^{-\frac{2}{\varkappa}|\delta\mathring{\alpha}|^2} \int\prod_{\tau}\frac{d\mu(\tau)\,d\nu(\tau)}{2\pi}\, e^{-i\xi\mu(t)} \exp\Big\{i\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)\big[\mu(\tau)-$$

$$-|\delta\mathring{\alpha}+\alpha(\tau)|^2+|\delta\mathring{\alpha}|^2\big]\Big\}$$

Вычисление функциональных интегралов теперь не вызывает затруднений и

$$Z_{\mathring{\alpha}}(\xi;t) \approx \frac{2}{\pi\varkappa}\int d^2\delta\mathring{\alpha}\, \exp\left[-\frac{2}{\varkappa}|\delta\mathring{\alpha}|^2 + i\xi|\delta\mathring{\alpha}|^2 - i\xi\tilde{I}_c(t)\right] =$$

$$= \frac{1}{1-i\xi\frac{\varkappa}{2}+\varkappa\frac{\partial}{\partial\omega_0}} \exp\left(\frac{\frac{1}{2}\varkappa}{1-i\xi\frac{\varkappa}{2}+\varkappa\frac{\partial}{\partial\omega_0}}\,\frac{\partial^2}{\partial\mathring{\alpha}\,\partial\mathring{\alpha}^*}\right)\exp\{-i\xi I_c(t)\} \qquad (32)$$

В этом выражении $\tilde{I}_c(t) \equiv I_c(\omega_0 - 2|\delta\mathring{\alpha}|^2;\, \mathring{\alpha}+\delta\mathring{\alpha},\, \mathring{\alpha}^*+\delta\mathring{\alpha}^*;\, t)$ обозначает действие классического осциллятора с частотой малых колебаний $\omega_0 - 2|\delta\mathring{\alpha}|^2$, при движении с начальными условиями $\tilde{\alpha}_c(0) = \mathring{\alpha}+\delta\mathring{\alpha}$, $\tilde{\alpha}_c^*(0) = \mathring{\alpha}^* + \delta\mathring{\alpha}^*$.

Замена в (32) оператора $1 - i\xi\frac{\varkappa}{2} + \varkappa\frac{\partial}{\partial\omega_0}$ единицей привела бы к выражению, которое, в отличие от (30), совпадает с классическим средним (8) с функцией распределения (7) при значении $\sigma_c = \frac{1}{2}\varkappa$. Наличие этого оператора обусловлено чисто квантовыми эффектами. Однако и при их учете результат все еще формально совпадает с некоторым классическим средним, хотя это усреднение и проводится уже не только по начальным данным, но и по совокупности осцилляторов с слегка различными значениями

частоты ω_0. При стохастическом движении траектории с близкими значениями ω_0 в силу локальной неустойчивости экспоненциально разбегаются. Поэтому в разложении (32) по $\varkappa$, содержащем наряду с производными по начальным данным и производные по ω_0, присутствуют экспоненциально растущие поправки, обязанные своим происхождением особенностям квантовой динамики. Тем не менее, как уже было отмечено в п.I, при достаточно больших t выражение (32) подобно (8) слабо зависит от $\varkappa$, т.к. при стохастическом движении классическая диффузия не чувствительна ни к начальным данным, ни к конкретным значениям ω_0.

В частности,

$$\langle I(t)\rangle \approx \frac{2}{\pi\varkappa}\int d^2\delta\mathring{\alpha}\, e^{-\frac{2}{\varkappa}|\delta\mathring{\alpha}|^2}\tilde{I}_c(t) \approx \langle I_c(t)\rangle.$$

В следующем пункте мы увидим, что отброшенные поправки $\sim\varkappa^2$ не дают экспоненциально нарастающих эффектов.

В отличие от $\langle I(t)\rangle$, которое в рассматриваемом приближении не искажается квантовыми эффектами, более высокие степени действия уже в этом приближении отличаются от классических средних. Действительно,

$$\langle I^n(t)\rangle \approx \frac{2}{\pi\varkappa}\int d^2\delta\mathring{\alpha}\, e^{-\frac{2}{\varkappa}|\delta\mathring{\alpha}|^2}\left[\tilde{I}_c(t) - |\delta\mathring{\alpha}|^2\right]^n \approx \langle I_c^n(t)\rangle - \varkappa n b\langle I_c^{n-1}(t)\rangle$$

/константа $b \sim 1$ /. Т.к. все средние $\langle I_c^n(t)\rangle$ при стохастическом движении растут со временем, при $n > 1$ это выражение уже в первом порядке по $\varkappa$ дает нарастающие квантовые поправки. Такое нарастание носит, однако, степенной, а не экспоненциальный характер. К тому же основной член растет со временем быстрее квантовой поправки и поэтому последняя не оказывает влияния на асимптотику при больших t. Следует, впрочем, отметить, что для получения асимптотик квантовомеханических средних необходимо исследовать поведение при $t\to\infty$ отброшенных в (32) членов со временем, что выходит за рамки настоящей работы.

Для перехода к произвольным начальным условиям нужно проинтегрировать (32) с подходящей функцией $\mathcal{P}(\mathring{\alpha}, \mathring{\alpha}^*)$ /см.(13)/. Поскольку, однако, получающиеся из (32) средние при стохастическом движении несущественным образом зависят от $\mathring{\alpha}$ и $\mathring{\alpha}^*$, такое интегрирование не окажет существенного влияния на окончательный результат. Пусть, например,

$$\mathcal{P}(\mathring{\alpha},\mathring{\alpha}^*)=\frac{1}{\pi\sigma}\exp\left(-\frac{1}{\sigma}|\mathring{\alpha}-\alpha_0|^2\right).$$

Тогда с помощью (32) и(I3) получим

$$Z(\xi;t)=\frac{1}{1-i\xi\frac{\varkappa}{2}+\varkappa\frac{\partial}{\partial\omega_0}}\exp\left(\frac{\frac{1}{2}\varkappa}{1-i\xi\frac{\varkappa}{2}+\varkappa\frac{\partial}{\partial\omega_0}}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_0\partial\alpha_0^*}\right)Z_c(\xi;t). \tag{33}$$

Входящая в (33) классическая производящая функция

$$Z_c(\xi;t)=\frac{1}{\pi\sigma}\int d^2\mathring{\alpha}\,\exp\left[-\frac{1}{\sigma}|\mathring{\alpha}-\alpha_0|^2-i\xi I_c(t)\right].$$

При стохастическом движении $Z_c(\xi;t)$ слабо зависит как от ω_0, так и от α_0, α_0^*. Поэтому в разложении по $\varkappa$ выражения (33), в отличие от разложения (32), нет экспоненциально растущих членов. В то же время, несмотря на столь резкое различие в поведении отдельных членов разложения, сами функции $Z_\alpha(\xi;t)$ и $Z(\xi;t)$ при не слишком малых временах, практически, совпадают. Поведение средних значений, таким образом, в рассматриваемом приближении мало чувствительно к выбору начального состояния. В следующем пункте мы увидим, что учет последующих членов разложения по $\varkappa$ не меняет этого результата.

5. Вернемся к точному выражению (22) и воспользуемся представлением (3I), чтобы преобразовать его к виду

$$Z_\alpha(\xi;t)=\frac{2}{\pi\varkappa}\int d^2\delta\mathring{\alpha}\,e^{-\frac{2}{\varkappa}|\delta\mathring{\alpha}|^2}\mathcal{L}_\alpha(\delta\mathring{\alpha},\delta\mathring{\alpha}^*;\xi,t), \tag{34}$$

где с помощью равенств (25) и (26) $\mathcal{L}_\alpha$ можно представить в форме

$$\mathcal{L}_\alpha(\delta\mathring{\alpha},\delta\mathring{\alpha}^*;\xi,t)=\int\prod_\tau\frac{d\mu(\tau)d\nu(\tau)}{2\pi}e^{-i\xi\mu(t)}\exp\Big\{i\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)\Big[\mu(\tau)- \tag{35}$$

$$-|\delta\mathring{\alpha}+a(\tau)|^2+|\delta\mathring{\alpha}|^2\Big]\Big\}\exp\Big\{-i\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)\Big[\mathrm{Re}\,\big(\alpha_{\lambda_1}(\tau)\alpha^*_{\lambda_2}(\tau)-$$

$$-|\alpha(\tau)|^2\big)+2\,\mathrm{Re}\,\Big(\delta\mathring{\alpha}^*e^{i\varphi(\tau)}\frac{1}{2}\big[\alpha_{\lambda_1}(\tau)+\alpha_{\lambda_2}(\tau)-2\alpha(\tau)\big]\Big)\Big]\Big\}$$

Фаза последней экспоненты в этом интеграле разлагается /при фиксированном $\delta\mathring{\alpha}$ / по четным степеням $\varkappa$ начиная с $\varkappa^2$, причем в разложении присутствуют лишь нечетные степени $\nu(\tau)$. Действительно, из (I9) и (27) легко получить интегральные уравнения

$$e^{i\varphi(\tau)}\alpha_{\lambda_1}(\tau)=a(\tau)-\frac{i}{2}\varkappa\int_0^\tau d\tau'\,\nu(\tau')\,e^{i\varphi(\tau')}\alpha_{\lambda_1}(\tau')$$

$$e^{i\varphi(\tau)}\alpha_{\lambda_2}(\tau)=a(\tau)+\frac{i}{2}\varkappa\int_0^\tau d\tau'\,\nu(\tau')\,e^{i\varphi(\tau')}\alpha_{\lambda_2}(\tau'),$$

итерируя которые, найдем требуемое разложение

$$\frac{i}{2}\varkappa^2\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)\int_0^\tau d\tau'\,\nu(\tau')\int_0^{\tau'} d\tau''\,\nu(\tau'')\,\mathrm{Re}\,\{[a(\tau)+a(\tau')+\delta\mathring{\alpha}]a^*(\tau'')\}+\dots$$

После удержания в разложении фазы членов $\sim\varkappa^2$ и выше функциональное интегрирование в (35) уже нельзя произвести точно. Мы можем, однако, построить ряд по $\varkappa^2$, разлагая последнюю экспоненту в (35). Член $\sim\varkappa^{2n}$ в таком разложении содержит в интеграле по $\nu(\tau)$ в качестве дополнительного множителя при экспоненте с линейным по $\nu(\tau)$ показателем произведение $\nu(\tau_1)\nu(\tau_2)\cdots\nu(\tau_{2n+1})$. Функциональные интегралы этого типа вновь вычисляются точно. Рассмотрим для этого вспомогательный интеграл

$$Y\{\eta(\tau)\}=\int\prod_\tau\frac{d\mu(\tau)d\nu(\tau)}{2\pi}F\{\mu(\tau)\}\exp\Big\{i\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)\big[\mu(\tau)- \tag{36}$$

$$-|\delta\mathring{\alpha}+a(\tau)|^2+|\delta\mathring{\alpha}|^2-\eta(\tau)]\},$$

где $F\{\mu(\tau)\}$ – произвольный функционал от $\mu(\tau)$, а $\eta(\tau)$ – действительная функция. Очевидно,

$$\int\prod_\tau \frac{d\mu(\tau)\,d\nu(\tau)}{2\pi} F\{\mu(\tau)\}\nu(\tau_1)\cdots\nu(\tau_{2n+1})\exp\{i\int_0^t d\tau\,\nu(\tau)[\mu(\tau)-$$

$$-|\delta\mathring{\alpha}+a(\tau)|^2+|\delta\mathring{\alpha}|^2]\}=i\frac{\delta}{\delta\eta(\tau_1)}\cdots i\frac{\delta}{\delta\eta(\tau_{2n+1})}Y\{\eta(\tau)\}\Big|_{\eta(\tau)\equiv 0}.$$

С другой стороны, интегрирование в (36) можно выполнить точно

$$Y\{\eta(\tau)\}=F\{\tilde{I}_c^{(\eta)}(\tau)-|\delta\mathring{\alpha}|^2+\eta(\tau)\}, \tag{37}$$

где теперь $\tilde{I}_c^{(\eta)}(t)$ – действие классического осциллятора, функция Гамильтона которого отличается от (I) заменой ω_0 на $\omega_0-2|\delta\mathring{\alpha}|^2+2\eta(t)$, и который движется с теми же начальными условиями, что и в (32). Как и выше квантовые эффекты заключены в флуктуациях частоты малых колебаний ω_0. Однако в отличие от п.4, эти флуктуации теперь зависят от времени.

Для вычисления вариационных производных по $\eta(\tau)$ нужно иметь разложение величин $\tilde{a}_c^{(\eta)}$, $\tilde{I}_c^{(\eta)}$ в ряд по степеням $\eta(\tau)$. Последнее получается явно с помощью решения классических уравнений движения по теории возмущений по параметру η. Таким образом, все члены разложения (35) в ряд по $\varkappa^2$ могут быть явным образом выражены в терминах траектории движения классического осциллятора, описываемого функцией Гамильтона

$$H_c^{(\eta)}(\alpha_c,\alpha_c^*;t)=[\omega_0-2|\delta\mathring{\alpha}|^2+2\eta(t)]|\alpha_c|^2+|\alpha_c|^4-g(t)(\alpha_c+\alpha_c^*)$$

с малым $\eta(t)$.

В силу локальной неустойчивости две стохастические траектории, отвечающие слегка различным $\eta(\tau)$ экспоненциально быстро уходят друг от друга. Тем не менее, после подстановки разложения (35) в (34) экспоненциально растущие члены выпадают. Чтобы убедиться в этом, достаточно произвести усреднение по $\delta\mathring{\alpha}$ до вычисления вариационных производных. Поскольку диффузия классических осцилляторов с различными $\eta(\tau)$ идет одинаковым образом, усредненные выражения уже слабо зависят от η. Отметим, однако, что наличие в (37) явной зависимости от $\eta(\tau)$ все-таки приводит к росту поправок /10/. Но этот рост носит уже степенной, а не экспоненциальный характер. /Ср. с обсуждением роли явной зависимости от $|\delta\mathring{\alpha}|^2$ в конце п.4/. Дополнительное усреднение с функцией $\varrho(\mathring{\alpha},\mathring{\alpha}^*)$ уже не влияет, как и ранее, на этот результат.

Автор благодарен Д.Л.Шепелянскому за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА:

I. Э.В.Шуряк. ЖЭТФ, 1976, 71, 2039.

2. В.В.Соколов. Нелинейный резонанс квантового осциллятора. Препринт 78-50, Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1978.

3. Г.П.Берман, Г.М.Заславский. ДАН, 1978, 240, 1081.

4. Г.П.Берман, Г.М.Заславский. Квантовые отображения и проблема стохастичности в квантовых системах. Препринт 164Ф, Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1981.

5. S.A. Kheifets, V.V. Sokolov. On the quantum corrections to the stochastic motion of non-linear oscillator. Препринт 80-133, Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1980.

6. Ф.М.Израйлев, Дж.Казати, Дж.Форд, Б.В.Чириков. Стохастические колебания квантового маятника под действием периодического возмущения. Препринт 78-46, Новосибирск, ИЯФ СО АН СССР, 1978.

7. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский. Переходная стохастичность в квантовой механике. Препринт 80-210, Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1980.

8. P. Carruthers, M.N. Nieto. Rev.Mod.Phys. 1968, 40, 411.

9. R.J. Glauber. Phys.Rev. 1963, 131, 2766.

10. Д.Л.Шепелянский. ДАН, 1981, 256, 586.

11. B.V. Chirikov. Phys. Rep. 1979, 52, 256.

В.В.Соколов

О ХАРАКТЕРЕ КВАНТОВЫХ ПОПРАВОК ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Препринт
№ 83-144

Работа поступила - 2 ноября 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 28.11-83 г. МН 03428
Формат бумаги 60х90 1/16 Усл.1,1 печ.л., 0,9 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 144.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90