ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

2

В.Н.Доровский, А.М.Искольдский,
Е.И.Роменский

О МОДЕЛИРОВАНИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СТАДИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ НАГРЕВЕ МЕТАЛЛОВ

ПРЕПРИНТ 83-91

НОВОСИБИРСК

О МОДЕЛИРОВАНИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СТАДИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ НАГРЕВЕ МЕТАЛЛОВ
(к теории электрического взрыва)

В.Н.Доровский[*], А.М.Искольдский, Е.И.Роменский[**]

Аннотация

Сформулированы две группы моделей электрического взрыва. В первой группе, как и в известной модели теплового взрыва, имеется безразмерный начальный параметр $\delta_{кр}$, зависящий от скорости энерговыделения, такой, что как только $\delta > \delta_{кр}$, положительные и ограниченные решения соответствующих задач отсутствуют. При этом в системе координат, связанной с поверхностью раздела жидкость-пар за конечное время формируется профиль температуры с бесконечным градиентом.

Во второй группе моделей нет сингулярных особенностей, и ситуация соответствует той, которая имеет место в теории теплового взрыва от ограниченного источника, где критерий взрыва в математическом отношении определяется иначе. Нефизические особенности ликвидируются за счет проведения хотя бы одной из оправданных модификаций моделей первой группы. Это происходит, если учесть: малые проводимость и теплопроводность пара-продукта взрыва; малые поправки (запаздывание) к феноменологическим законам (Фурье, Стокса); не фиксировать строго температуру межфазной границы. В упрощенных – электротехнических – моделях к тому же результату ведет учет паразитной емкости, включенной параллельно проводнику или шунтирующего проводник сопротивления. Межфазная поверхность, отделяющая жидкий металл, по которому течет ток, от пара, неустойчива по отношению к маломасштабным возмущениям.

---

[*] Институт геологии и геофизики СО АН СССР.
[**] Институт математики СО АН СССР.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СТАДИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ НАГРЕВЕ МЕТАЛЛОВ
(к теории электрического взрыва)

В.Н.Доровский, А.М.Искольдский, Е.И.Роменский

(Новосибирск)

В работе рассмотрен ряд вопросов, связанных с появлением особенностей (сингулярностей) в решениях задачи о парообразовании при быстром электрическом нагреве металлов. Стадия парообразования определяет эффективность электровзрывных прерывателей тока, используемых в электрических цепях с энергоемкими индуктивными накопителями [I,2] . На этой стадии формируется неоднородная пространственная структура - "страты", существенно влияющая на ход последующих стадий, - обстоятельство, с которым часто приходится считаться.

Несмотря на то, что при быстром электрическом нагреве металла фазовая траектория (в $p-T$ плоскости) ведет себя необычно [3] , при встрече ее с линией (поверхностью) равновесного фазового превращения начинается процесс интенсивного образования зародышей новой фазы. Мы не затрагиваем микроскопической кинетики зародышеобразования, а рассматриваем последующую - гидродинамическую стадию развития процесса.

Будем считать, что фазовые превращения идут при неизменной температуре, а энергобаланс сводится к тому, что вся энергия,поступившая в объем, контролируемый одиночным зародышем, расходуется на производство новой фазы. В отношении среднего расстояния между активными зародышами, величина которого определяет контролируемый одиночным зародышем объем, вначале примем, что оно меньше характерного теплопроводного размера.

Одна из моделей парообразования, фактически основанная на таких предположениях, - модель поверхностей волны испарения [I,4] . Подобные упрощенные - "электротехнические" - модели можно получить из более общих - "полевых"-положив, что характерный размер, рассматриваемый в задаче, мал, и времена перераспределения на этом размере тепла и магнитного поля существенно меньше времени образования новой фазы.

Оба класса моделей вызывают определенное недоверие по ряду причин.

Одна из них, которую мы и будем рассматривать, состоит в том, что при некоторых начальных условиях разрушаются регулярные (положительные и ограниченные) решения правдоподобно поставленных задач. Например, для модели поверхностной волны испарения это происходит, если прерыватель тока включен в цепь индуктивного накопителя энергии. Здесь такие величины как скорость межфазной границы и напряжение на переключателе могут нарастать во времени сингулярным образом по мере приближения к особой точке – моменту "взрыва" [4].

Похожая ситуация – "градиентный взрыв" [6,7] возникает в соответствующей задаче для уравнения теплопроводности [5,I0] а также в более сложных моделях [8] : при темпе нагрева выше некоторого критического регулярные решения задачи отсутствуют. В связи с появлением подобных нефизических особенностей возникает вопрос – можно ли естественным образом модифицировать модель так, чтобы их устранить. Такой прием преследует, в основном, практические цели и не может заменить анализа задачи в ее первоначальной формулировке [I0].

I. Модель. Рассмотрим (фиг.I) зародыш новой фазы объемом $V = uvw$, находящийся внутри кубика, объемом $V_0 = h_0^3$, где h_0 – среднее расстояние между активными зародышами новой фазы. Для простоты примем V_0 = I, и поместим зародыш в правый нижний угол этого единичного объема. Пусть ток течет вдоль оси z, а все выделившееся в объеме V_0 джоулево тепло сразу расходуется на образование новой фазы.

Полный ток, проходящий через единичное поперечное сечение, равен сумме двух

$$I_0 = I_1 + I_2$$

где I_1 – полный ток в исходной фазе в нижнем сечении V_0, а I_2 – полный ток через поперечное сечение новообразования: $I_1 = j_1(1-uv)$, $I_2 = j_2 uv$, где j_1, j_2 – соответствующие плотности тока в нижнем сечении, а $j_0 = I_0$ – плотность тока в верхнем сечении. Пусть $\sigma_2 = \varepsilon\sigma_1$, σ_1 – проводимость новой и старой фаз. Из непрерывности электрического поля на границе раздела фаз, используя закон Ома

$$j = \sigma E$$

имеем $j_2 = \varepsilon j_1$ и, следовательно, для плотности тока

$$j_1 = j_0 / (1 + uw(\varepsilon - 1)).$$

Выражение для суммарной мощности джоулева нагрева состоит из пяти слагаемых (фиг.I). Для мощности в объеме новой фазы имеем $W_1 = \frac{j_2^2}{\sigma_2} uvw = \frac{\varepsilon j_1^2}{\sigma_1} uvw$. Остальные слагаемые $W_2 = \frac{j_1^2}{\sigma_1} vw(1-u)$, $W_3 = (j_1^2/\sigma_1) uv(1-w)$, $W_4 = (j_1^2/\sigma_1)(1-u)(1-w)v$, $W_5 = (j_0^2/\sigma_1)(1-v)$. Таким образом, имеем модель

$$\sum_{i=1}^{5} W_i = \lambda V_0 \frac{d\,uvw}{dt},$$

где λ – теплота фазового перехода единицы объема. Вводя характерное время процесса $\tau = \lambda V_0 \sigma_1 / j_0^2$, где j_0 – плотность тока в начальный момент, имеем

$$\text{(I.I)} \quad I^2 \left[\frac{\varepsilon uvw + vw(1-u) + uv(1-w) + (1-u)(1-w)v}{(1 + uw(\varepsilon - 1))^2} + (1 - v) \right] = \frac{d\,uvw}{dt},$$

где I^2 – квадрат тока (свободная функция: $I^2\big|_{t=0} = 1$), а дифференцирование идет по безразмерному времени $t = t_\text{ф}/\tau$. Выражение (I.I) связывает три величины u, v, w. Для замыкания модели необходимо задаться еще двумя соотношениями между этими величинами. Отметим, что размеры u и w входят в (I.I) симметрично, а величина $S = uw$ есть площадь поперечного сечения зародыша. Обозначим характерный поперечный размер $l = \sqrt{uw}$, а форму зародыша будем характеризовать отношением поперечного размера к продольному

$$k = l / v.$$

Проблему выбора последнего определяющего соотношения мы здесь не будем обсуждать, заметим лишь, что модель можно замкнуть, положив k = I. Это условие следует, например, из предположения о том, что в процессе роста исходная форма зародыша не изменяется. Поскольку речь идет о фазовых переходах первого рода, сопровождающихся изменением объема, необходимо сделать еще ряд предположений. Будем считать, что в течение характерного времени τ давление внутри V_0 остается постоянным, и что поток массы (тепла) внутрь V_0 со стороны соседей отсутствует. В первом приближении это может быть так, если характерное звуковое время существенно больше τ. Выражение в квадратных скобках в (I.I) есть некоторое эффективное нелинейное сопротивление, изменяющееся в ходе процесса. Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (I.I).

Модель поверхностной волны испарения [I,4], получается из (I.I), если положить $v = w = 1$ и $\varepsilon = 0$. Тогда

(I.2) $$I^2 \frac{1}{1-u} = \frac{du}{dt} .$$

Справа в (I.2) стоит скорость движения межфазной границы, а сопротивление ведет себя как $(1-u)^{-1}$. Из (I.2) с учетом произвольности I^2 следует, что в конце процесса ($u = I$) такие физические характеристики как скорость движения межфазной границы и сопротивление могут расти до бесконечности сингулярным образом, и лишь в некоторых частных случаях, когда квадрат тока уменьшается быстрее, чем $y = 1 - u$ – размер проводника, особенность не возникает. Эта особенность локализована в точке $\varepsilon = 0$, $u = I$ и устраняется как только $\varepsilon \neq 0$.

Поэтому можно сразу модифицировать модель, положив, что новая фаза имеет не строго нулевую проводимость.

Модифицированная модель

(I.3) $$I^2 \frac{1}{1+u(\varepsilon-1)} = \frac{du}{dt}$$

в точке $u = I$ дает конечное значение скорости $du/dt = I^2/\varepsilon$.

Величина тока в (I.2) доопределяется, если рассматриваемое нелинейное сопротивление является элементом электрической цепи с заданными характеристиками. В простейшем случае $I^2 = I$ – режим постоянного тока. В этом режиме для исчезающего поперечного размера исходной фазы $y = 1-u$ из $I^2 - y\dot{y} = 1$ имеем

(I.4) $$y = \sqrt{1-2t}$$

и особенность возникает в момент $t_* = 1/2$ – момент "взрыва". На то, что в режиме постоянного тока решение аналитически непродолжимо, обычно не обращают внимания: появление особенности

связывается с неудачным выбором источника ($I = I$). Однако, ниже будет показано, что это не так.

Другие частные случаи (I.I). Модель двуслойной структуры получается из (I.I) при $u = w = 1$, $\varepsilon \neq 0$

(I.5) $$I^2 \frac{\varepsilon + v(1-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{dv}{dt} .$$

Здесь v – продольный размер слоя новой фазы.

Если рост зародыша происходит лишь за счет энергии, выделяющейся в исчезающем объеме первоначальной фазы (например, когда новая фаза обладает плохой теплопроводностью), то

(I.6) $$I^2 (1-v) = \frac{dv}{dt}$$

случай, обратный (I.2). Менее вырожденной в сравнении с (I.2)–(I.6) является двумерная модель, соответствующая случаю $w = I$:

$$I^2 \left[\frac{\varepsilon u v + v(1-u)}{(1+u(\varepsilon-1))^2} + (1-v) \right] = \frac{duv}{dt} .$$

2. Прерыватель в цепи с ограниченным энергозапасом. Изучим поведение модели (I.2) с более правдоподобными источниками тока [4].

Рассмотрим нелинейный RLC-контур. Уравнение для тока в RLC-контуре имеет вид

(2.I) $$L \frac{dI}{dt} + RI = U_c - \frac{1}{c} \int_0^t I\, dt ,$$

где L – индуктивность, C – емкость, U_c – напряжение на емкости в начальный момент. Возвращаясь к физическому времени, имеем для модели (I.2)

(2.2) $$I = I_0 \sqrt{\tau} \sqrt{-y\dot{y}} ,$$

где I_0 – ток в $t = 0$, а для нелинейного сопротивления справедлива формула

$$R = R_0 / y \qquad (2.3)$$

Подставляя (2.2), (2.3) в (2.I) и дифференцируя еще один раз, получаем исходное уравнение на безразмерную толщину исчезающей фазы $y(t)$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sqrt{-y\dot{y}}\right) + \frac{1}{\tau_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{-y\dot{y}}}{y}\right) + \frac{1}{\tau}\sqrt{-y\dot{y}} = 0 . \qquad (2.4)$$

Здесь $\tau_1 = L/R$. Начальные условия для (2.4) имеют вид

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ \dot{y}(0) &= -1/\tau \\ \ddot{y}(0) &= -(1+2\delta\gamma)/\tau^2 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

где $\gamma = U_c/(I_0 R_0) - 1$, $\delta = \tau/\tau_1$.

Будем искать решение уравнения (2.4) в виде

$$y = C_1 x^{\varepsilon_0}\left(1 + C_2 x^{\varepsilon_1} + C_3 x^{\varepsilon_2} + \ldots\right), \qquad (2.6)$$

где $x = t_0 - t$, $\varepsilon_0, \varepsilon_i, C_i$ – константы; $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_i > 0$. При такой записи сингулярность может возникать при $x = 0$, т.е. при $t = t_0$. Вычисляя $\dot{y}$, $\ddot{y}$, подставляя в (2.4) и ограничиваясь членами главного порядка, находим

$$C_1\sqrt{\varepsilon_0}\left(\varepsilon_0 - 1/2\right)\left(\varepsilon_0 - 3/2\right)x^{\varepsilon_0 - 5/2} + \frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,x^{-3/2}}{2\tau_1} + C_1\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,x^{\varepsilon_0 - 1/2}}{\tau_0^2} = 0, \qquad (2.7)$$

где $\tau_0 = \sqrt{LC}$.

Из анализа соотношения степеней в (2.7) видно, что может существовать три типа решений:

а) $\varepsilon_0 = 0$, C_1 – произвольная,

б) $\varepsilon_0 = I$, $C_1 = 2/\tau_1$

в) $\varepsilon_0 = I/2$, C_1 – произвольная.

Решения типа а) регулярные, т.е. они представляются рядами по целым степеням x и физически соответствуют случаю, когда начальной энергии контура недостаточно для перевода всего прерывателя в пар $y_{t\to\infty} \to const < 1$. Решения типа б) физически соответствуют случаю точного равенства запасенной энергии теплоте перехода. Решения типа в) – случай, когда запасенная энергия превышает теплоту фазового перехода.

После нахождения степеней главного порядка при подстановке (2.6) в уравнение (2.4) последовательно определяются степени ε_i и возникают рекуррентные соотношения для коэффициентов C_i. Анализ этих рекуррентных соотношений для случаев а) и в) показывает, что две константы C_1 и C_3 остаются произвольными, а остальные выражаются через них. Кроме того, произвольной остается и величина t_0.

Таким образом, число произвольных констант в задаче соответствуют порядку уравнения, рекуррентные соотношения непротиворечивы, и решение (2.6) уравнения (2.4) является точным с радиусом сходимости t_0.

Для случая б) имеется только две произвольные константы t_0 и C_3. Это приводит к тому, что такие решения существуют лишь в условиях, когда между τ, γ и δ имеется дополнительная связь, соответствующая равенству $\tau = \tau_1/2$. Выпишем решения для случая в) с четырьмя первыми членами ряда

$$y = C_1 x^{1/2}\left(1 + C_2 x^{1/2} + C_3 x + C_4 x^{3/2} + \ldots\right), \qquad (2.7)$$

где $C_2 = 4/(3\tau_1 C_1)$, C_3 – произвольна, $C_4 = 8\left(C_3 - \frac{8}{9\tau_1^2 C_1^2}\right)/(15\tau_1 C_1)$. Из (2.7) видно, что точка $x = 0$ ($t = t_0$) является сингулярной, а ряд строится по переменной $x^{1/2}$.

Для построения полного решения необходимо найти явный вид C_1, C_3, t_0 из начальных условий (2.5). Приведем окончательные результаты для случая $\delta = \tau/\tau_1 \ll 1$, когда энергия, запасенная только в индуктивности существенно больше теплоты перехода

$$c_1 = \sqrt{2/\tau}\,(1-(1+\gamma)\delta/4)$$

$$c_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\tau}}\,\delta$$

$$c_3 = -\frac{(1+\gamma)}{4}\,\frac{\delta}{\tau}$$

$$t_0 = \frac{\tau}{2}\left(1+\frac{(1-3\gamma)\delta}{6}\right),\ c_4 \sim c_5 \sim \delta^2.$$

В главном порядке по δ имеем

(2.8) $$y = \sqrt{2/\tau}\,\left(\tau/2 - t\right)^{1/2}.$$

Переходя к безразмерному времени, имеем

(2.9) $$y = \sqrt{2}\,(1-2t)^{1/2}$$

и сравнивая (2.9) с (I.4), получаем, что в рассмотренном случае в главном порядке воспроизводится решение, соответствующее режиму постоянного тока.

Рассмотрим индуктивный накопитель ($u_c = 0,\ \gamma = -1$). В этом случае (2.4) переходит в

(2.I0) $$y\ddot{y} + \dot{y}^2 + \frac{2}{\tau_1}\,\dot{y} = 0\ .$$

Решения уравнения (2.I0) с учетом начальных условий таковы

а) – незавершенный переход

(2.II) $$y = \frac{\tau c_1}{2}\left(1+\exp\left(-\frac{4t}{\tau_1^2 c_1}\right)\right).$$

Здесь $c_1 = \frac{2}{\tau_1} - \frac{1}{\tau} > 0$. Асимптотическое значение $y = 1 - \tau_1/2\tau$.

б) – случай точного равенства энергий ($\mathcal{E}_0 = 1$):

$$y = \frac{2}{\tau_1}(t_0 - t),\quad t_0 = \tau = \tau_1/2\ .$$

в) – сингулярный режим ($\mathcal{E}_0 = 1/2$):

$$y - \frac{\tau_1 c_1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\tau_1 c_1}\,y\right) = \frac{2}{\tau_1}(t_0 - t),\ c_1 = \frac{1}{\tau} - \frac{2}{\tau_1} > 0$$

В отличие от (2.II) данное решение существует конечное время и при $\delta = \tau/\tau_1 \ll 1$ снова имеем

(2.I2) $$y = \sqrt{2/\tau}\,\left(\tau/2 - t\right)^{1/2} + \ldots$$

Рассмотрим емкостный накопитель. Уравнение контура имеет вид

$$RI + \frac{1}{c}\int I\,dt = u_c\ ,$$

и для характерного размера y получаем

(2.I3) $$y\ddot{y} - \dot{y}^2 + \frac{2}{\tau_3}\,y^2\dot{y} = 0\ ,$$

где $\tau_3 = R_0 C$. Существует три вида решений (2.I3):

а) – незавершенный переход

$$y = \gamma\,\frac{1}{\gamma + (1/\tau)(1-e^{-\gamma t})}\ ,$$

$$y\big|_{t=\infty} = 1 - \frac{\tau_3}{2\tau},\ u \to 0,\ I \to 0,\ R \to \frac{2R_0}{\tau_3 \gamma} > R_0$$

б) – случай точного равенства энергий

$$y = 1/(1 + t/\tau)\ ,$$

здесь

$$y\big|_{t=\infty} \sim \frac{\tau}{t} \to 0,\ u = u_0 y^{1/2} \to 0,\ I = I_0 y^{3/2} \to 0,\ R \to \infty.$$

Наиболее интересен случай в)

$$y = \frac{|\gamma|}{|\gamma| + (1/\tau)(e^{|\gamma| t} - 1)}\ ,$$

здесь

$$\gamma < 0,\ y\big|_{t=\infty} \sim \tau|\gamma|e^{-|\gamma| t} \to 0,\ R \to \infty.$$

На парообразование расходуется лишь часть запасенной энергии:

напряжение на емкости при $t \to \infty$ выходит на не равное нулю значение

$$u = \sqrt{\tau|\gamma|}\, u_0 < u_0$$

Сравнивая последний результат с (2.9), (2.I2) видим, что у решений уравнений емкостного накопителя (2.I3) нет сингулярных особенностей. Качественная разница между (2.I0), где есть особенность, и (2.I3), где ее нет, состоит в том, что член уравнения $\dot{y}^2$ имеет в (2.I0) положительный, а в (2.I3) – отрицательный знак.

Для индуктивного накопителя мы с самого начала "планируем" особенность: энергопотребление ограничено теплотой парообразования, и если начальная энергия ее превышает, то имеется "излишек", который "негде хранить" (магнитная энергия в обесточенной цепи должна быть равной нулю). Для емкостного накопителя такой проблемы не возникает.

Далее мы рассматриваем физически более правдоподобные модели, в которых имеет место похожая ситуация. Однако здесь теряется наглядность предыдущего рассмотрения.

3. Полевые модели. Если тепло передается к поверхности новой фазы не мгновенно, то вместо (2.4) возникает краевая задача для уравнения теплопроводности (задача Стефана) [5,I0]. Если проводимость новой фазы $\sigma_2 = 0$, то задача сводится к определению динамики профиля температуры внутри $h = y h_0$ – исчезающего объема исходной фазы. В физических переменных задача формулируется следующим образом

(3.I)
$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + j^2/\sigma$$
$$\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=h(t)} = \lambda \frac{dh(t)}{dt} .$$

Последнее равенство выражает энергобаланс на границе. Для плотности тока, определяющей интенсивность источника тепла в (3.I) выберем режим постоянного тока

(3.2)
$$j = j_0 / y ,$$

в котором можно ожидать появления особенностей. Граничные условия задачи таковы:

(3.3)
$$T\big|_{x=h(t)} = 0 .$$

Условие (3.3) отражает изотермический характер процесса, кроме того

(3.4)
$$\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0$$

из условия пространственной симметрии задачи. Начальное распределение температуры считаем заданным. В (3.I)–(3.4) C_p – теплоемкость единицы объема, $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности, $y = h(t)/h_0$.

Для решения задачи перейдем в новую систему координат с неподвижной границей

$$\xi = x / h(t)$$

и с новым безразмерным временем η, определяемым из

$$y^2(\eta)\, d\eta = dt/\tau$$

Безразмерная температура $\theta = C_p T/\lambda$, а режим нагрева характеризуется числом Фурье $F_0 = 1/\delta = \tau/t_\chi$, где как и прежде $\tau = Q\sigma/j^2$, а $t_\chi = h_0^2/\chi$ – характерное теплопроводное время ($\chi = \varkappa/C_p$ – температуропроводность). С уменьшением числа Фурье интенсивность процесса нарастает.

В новых переменных задача принимает следующий вид:

(3.5)
$$\theta_\eta + \frac{2\beta(\eta)}{\delta}\xi\,\theta_\xi = \frac{\theta_{\xi\xi}}{\delta} + 1 ,$$
$$\theta_\xi\big|_{\xi=1} = -2\beta(\eta) ,$$
$$\theta\big|_{\xi=1} = 0 , \quad \theta_\xi\big|_{\xi=0} = 0 .$$

Для безразмерной толщины исходной фазы в этих обозначениях имеем

(3.6)
$$y(\eta) = \exp\left(-\frac{2\int_0^\eta \beta(\eta)\,d\eta}{\delta}\right).$$

В (3.5) и далее для обозначения производных в новых переменных ξ, η используется нижний индекс.

Нетрудно убедиться в существовании стационарных по времени η решений (3.5), (3.6) $\theta = \theta^{\circ}(\xi)$, $\beta = \beta^{\circ}$

(3.7)
$$\theta^{\circ}(\xi) = \frac{\delta}{4\beta} \int_{\beta\xi^2}^{\beta} \frac{e^{x}}{x^{1/2}}\, dx \int_0^{x} \frac{e^{-z}}{z^{1/2}}\, dz , \quad 0 \le \xi \le 1 ,$$
$$y = \exp\left(-\frac{2\beta}{\delta}\eta\right), \quad 0 \le \eta < \infty .$$

В (3.7) максимальный безразмерный температурный градиент определяется по заданному из дисперсионного соотношения

(3.8)
$$\delta = \frac{4\beta^{3/2} e^{-\beta}}{\int_0^{\beta} \frac{e^{-x}}{x^{1/2}}\, dx} .$$

Из (3.8) следует, что область существования стационарных решений ограничена по параметру δ (фиг.2). Максимум кривой расположен в точке $\delta \cong 2$, $\beta \cong 1$.

Рассмотрим устойчивость решений (3.7) относительно одномерных возмущений профиля $\theta^{\circ}(\xi)$. Возмущенные величины представим в виде
$$\theta = \theta^{\circ}(\xi) + \theta^{1}(\xi, \eta), \qquad \theta^{1} \ll \theta^{\circ},$$
$$\beta = \beta^{\circ} + \beta^{1}(\eta), \qquad \beta^{1} \ll \beta^{\circ}.$$

В линейном приближении малые возмущения θ^1, β^1 удовлетворяют следующей системе уравнений

(3.9)
$$\theta^1_{\eta} + \frac{2\beta^{\circ}}{\delta}\xi\theta^1_{\xi} = \frac{\theta^1_{\xi\xi}}{\delta} - \frac{2\beta^1(\eta)\,\theta^{\circ}_{\xi}\,\xi}{\delta} ,$$
$$\theta^1_{\xi}\Big|_{\xi=1} = -2\beta^1(\eta) ,$$
$$\theta^1\Big|_{\xi=1} = 0, \quad \theta^1_{\xi}\Big|_{\xi=0} = 0 .$$

Исследование (3.9) показывает [5], что решения, соответствующие правой (нисходящей) ветви дисперсионного соотношения (3.8) абсолютно неустойчивы по отношению к малым возмущениям начальных условий и, следовательно, как обычно считается, эта ветвь

физически не реализуется. Такое поведение характерно и для более сложной модели [8] , где учитываются эффекты скинирования тока.

Особенность можно ликвидировать за счет выбора подходящего граничного условия. Однако это означает отказ от предположения об изометрическом характере процесса, а мы рассматриваем возможность оставить данное предположение в силе.

Рассмотрим случай $\sigma_2 \neq 0$ и учтем сразу эффекты скинирования тока [9] :

(3.I0)
$$c_{p_1}\frac{\partial T_1}{\partial t} = æ_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{c^2}{16\pi\sigma_1}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)^2 ,$$
$$c_{p_2}\frac{\partial T_2}{\partial t} = æ_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{c^2}{16\pi\sigma_2}\left(\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)^2 .$$

В (3.I0) и далее (фиг.3) индекс I означает принадлежность к исходной, а 2 – к вновь образующейся фазе; c – скорость света. Магнитные поля $H_1(x,t)$, $H_2(x,t)$ удовлетворяют диффузионным уравнениям

(3.II)
$$\frac{4\pi\sigma_1}{c^2}\frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} ,$$
$$\frac{4\pi\sigma_2}{c^2}\frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} .$$

На движущейся границе раздела фаз выполняется условие баланса тепла

(3.I2)
$$æ_1\frac{\partial T_1}{\partial x}\Big|_{x=h(t)} - æ_2\frac{\partial T_2}{\partial x}\Big|_{x=h(t)} = \lambda\frac{dh}{dt} .$$

Остальные граничные условия

(3.I3)
$$T_1\Big|_{x=h(t)} = T_2\Big|_{x=h(t)} = 0 .$$

Из непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей

$$(3.I4)\qquad \frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial H_1}{\partial x}\Big|_{x=h(t)} = \frac{1}{\sigma_2}\frac{\partial H_2}{\partial x}\Big|_{x=h(t)} .$$

Поток тепла через внешнюю границу отсутствует

$$(3.I5)\qquad \frac{\partial T_2}{\partial x}\Big|_{x=h_0} = 0 .$$

Из симметрии задачи

$$(3.I6)\qquad \frac{\partial T_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 .$$

Процесс будем рассматривать при постоянном токе

$$(3.I7)\qquad I_0 = \frac{c}{2\pi} H_2\Big|_{x=h_0}$$

Начальные распределения считаем заданными.

В задаче появляются две константы материала

$$\gamma_i = \frac{4\pi\sigma_i\varkappa_i}{c^2 c_{p_i}}, \qquad i = 1,2$$

$(Fo = \frac{1}{8})$

Темп нагрева здесь удобно характеризовать не числом Фурье, а отношением плотности энергии магнитного поля к удельной теплоте перехода

$$e = \frac{H_0^2}{8\pi\lambda} .$$

Задача (3.II)-(3.I7) решена в [9] (см.Приложение).

Соотношение, играющее роль (3.8), здесь выглядит следующим образом

$$(3.I8)\qquad e = \gamma_2\beta\exp(\beta)\frac{\left(\int_0^1 e^{-\beta\gamma_2\xi^2}d\xi\right)^2}{\int_0^1 e^{\beta(1-2\gamma_2)\xi^2}d\xi} .$$

В отличие от (3.8), (3.I8) представляет собой монотонную функцию. Для каждого начального темпа нагрева e здесь находится своя единственная конечная скорость движения границы. В частности, при малых темпах нагрева имеем

$$\beta \cong e/\gamma_2$$

Величина $\gamma_2 \neq 0$, если $\sigma_2 \neq 0$, $\chi_2 = \varkappa_2/c_{p_2} \neq 0$.

Таким образом, в рассмотренной задаче особенность не возникает,если электропроводность и температуропроводность новой фазы не равны тождественно нулю. При этом градиент температуры на границе может оказаться большим, но конечным, а "градиентный взрыв" [5-8] как таковой отсутствует.

Еще одним достоинством модели (3.II)-(3.I7) является то, что она может представлять одновременно и другие фазовые превращения первого рода, происходящие при электрическом нагреве металлов, в частности, - плавление и полиморфные превращения в твердой фазе в металлах группы титана.

4. ПРИЛОЖЕНИЕ

Исследуем систему (3.II)-(3.I7) [9]. Для температур $\theta_i = T_i c_{p_i}/\lambda$ и магнитных полей $\varphi_i = H_i/H_c$ имеем

$$\frac{1}{\chi_i}\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2} + \frac{2e}{\gamma_i}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)^2 ,$$

$$\frac{\gamma_i}{\chi_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}$$

с условиями

$$\chi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x}\Big|_{x=h} - \chi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}\Big|_{x=h} = \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\Big|_{x=h} = \frac{1}{\sigma_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\Big|_{x=h}$$

$$\varphi_1\Big|_{x=h} = \varphi_2\Big|_{x=h}$$

$$\theta_1\Big|_{x=h} = \theta_2\Big|_{x=h}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial \theta_2}{\partial x}\Big|_{x=h_0} = 0$$

$$\varphi_1\Big|_{x=0} = 0 , \quad \varphi_2\Big|_{x=h} = 1 .$$

Сделаем следующие замены переменных:

$$\xi = x/h(t)$$

для области $0 \le x \le h(t)$ и

$$\xi = \frac{x-h_0}{h-h_0}$$

для области $h \le x \le h_0$.

Введем новые функции для первой фазы

$$\tilde{u} = \theta_1(\xi,\tau)/y^2 , \quad \tilde{\varphi} = \varphi_1(\xi,\tau)/y$$

и переобозначим

$$v = \theta_2 , \quad \psi = \varphi_2$$

для второй фазы. Получим систему

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}\left(y^2 y_\tau \tilde{u}_y + 2yy_\tau \tilde{u} - yy_\tau \xi \tilde{u}_\xi\right) = \tilde{u}_{\xi\xi} + \frac{2e}{\gamma_1}(\tilde{\varphi}_\xi)^2 ,$$

$$\frac{\gamma_1\tau_1}{\tau_2}\left(y^2 y_\tau \tilde{\varphi}_y + yy_\tau \tilde{\varphi} - yy_\tau \xi\right) = \tilde{\varphi}_{\xi\xi}$$

$$(1-y)^2 y_\tau v_y + (1-y) y_\tau \xi v_\xi = v_{\xi\xi} + \frac{2e}{\gamma_2}(\psi_\xi)^2$$

$$\gamma_2 (1-y)^2 y_\tau \psi_y + \gamma_2 (1-y) y_\tau \xi \psi_\xi = \psi_{\xi\xi}$$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} y \tilde{u}_\xi\Big|_{\xi=1} + \frac{1}{(1-y)}\psi_\xi\Big|_{\xi=1} = y_\tau$$

(4.I)
$$\frac{1}{\sigma_1}\tilde{\varphi}_\xi\Big|_{\xi=1} + \frac{1}{\sigma_2(1-y)}\psi_\xi\Big|_{\xi=1} = 0$$

$$\tilde{u}_\xi\Big|_{\xi=0} = v_\xi\Big|_{\xi=0} = 0$$

$$\tilde{\varphi}\Big|_{\xi=0} = 0 , \quad \psi\Big|_{\xi=0} = 1$$

Система (4.I) при малых $y = h(t)/h_0$ (конец процесса) имеет не зависящие от τ решения

(4.2)
$$\tilde{u} = u^\circ(\xi) , \quad \tilde{\varphi} = \varphi^\circ(\xi)$$

$$v = v^\circ(\xi) , \quad \psi = \psi^\circ(\xi)$$

Функции (4.2) удовлетворяют системе

$$u^\circ_{\xi\xi} + \frac{2e}{\gamma_1}(\varphi^\circ_\xi)^2 = 0$$

$$\varphi^\circ_{\xi\xi} = 0$$

(4.3)
$$u^\circ\Big|_{\xi=1} = 0$$

$$u^\circ_\xi\Big|_{\xi=0} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\vartheta^{\circ}_{\xi\xi} + 2\beta^{\circ}\xi\vartheta^{\circ}_{\xi} = -\frac{2e}{\gamma_2}\left(\psi^{\circ}_{\xi}\right)^2 \\
&\psi^{\circ}_{\xi\xi} = -2\beta^{\circ}\gamma_2\xi\psi^{\circ}_{\xi} \\
&\vartheta^{\circ}_{\xi}\Big|_{\xi=1} + 2\beta^{\circ} = 0 \\
&\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\varphi^{\circ}_{\xi}\Big|_{\xi=1} + \psi^{\circ}_{\xi} = 0 \\
&\vartheta^{\circ}\Big|_{\xi=1} = 0, \quad \vartheta^{\circ}_{\xi}\Big|_{\xi=0} = 0 \\
&\psi^{\circ}\Big|_{\xi=0} = 1, \quad \psi^{\circ}\Big|_{\xi=1} = 0 \\
&\varphi^{\circ}\Big|_{\xi=0} = 0 .
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Система (4.3) имеет решения

$$\psi^{\circ}(\xi) = \left(\int_1^{\xi} e^{-\beta^{\circ}\gamma_2\xi^2}d\xi\right) \Big/ \left(\int_0^1 e^{-\beta^{\circ}\gamma_2\xi^2}d\xi\right)$$

$$\vartheta^{\circ}(\xi) = -\frac{2e}{\gamma_2}\frac{\left(\int_1^{\xi} e^{-\beta^{\circ}\xi^2}d\xi \int_0^{\xi} e^{\beta^{\circ}(1-2\gamma_2)\xi^2}d\xi\right)}{\left(\int_0^1 e^{-\beta^{\circ}\xi^2}d\xi\right)^2}$$

$$\varphi^{\circ}(\xi) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\xi e^{-\beta^{\circ}\gamma_2} \Big/ \left(\int_0^1 e^{-\beta^{\circ}\gamma_2\xi^2}d\xi\right)$$

$$u^{\circ}(\xi) = \frac{e}{\gamma_1}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2(1-\xi^2)e^{-2\beta^{\circ}\gamma_2} \Big/ \left(\int_0^1 e^{-\beta^{\circ}\gamma_2\xi^2}d\xi\right)^2 .$$

Литература

1. Bennet F.D., Kahl A.P., Wedemeyer E.H., Changes Caused by Rapaization Waves in Exploding Wires, Exploding Wires, Vol. III, New York, Plenum Press, 1964.

2. Герасимов Л.С., Искольдский А.М., Нестерихин Ю.Е., Пинус В.К. Передача энергии из индуктивного накопителя с помощью электровзрывного размыкания тока, ПМТФ, 1975, № I, с.60–65.

3. Искольдский А.М., Роменский Е.И. Динамическая модель термоупругой сплошной среды с релаксацией давления. Препринт № II–83 ИЯФ СО АН СССР, 1983.

4. Искольдский А.М., Пинус В.К. Сингулярности в решениях уравнений электрического взрыва проводников. Препринт № I7 ИАЭ СО АН СССР, 1974.

5. Искольдский А.М., Пинус В.К., Эпельбаум Я.Г. Электрический взрыв проводников. Препринт № 30, № 32, № 4I ИАЭ СО АН СССР, 1976.

6. Искольдский А.М., Нестерихин Ю.Е., Паташинский А.З., Пинус В.К., Эпельбаум Я.Г. Градиентный взрыв кипящей капли в условиях мощного объемного тепловыделения. ДАН СССР,1977, т.236. № 5.

7. Искольдский А.М., Нестерхин Ю.Е., Паташинский А.З., Пинус В.К., Эпельбаум Я.Г. О неустойчивости градиентного взрыва. ДАН СССР, 1977, т.236, № 6.

8. Доровский В.Н., Искольдский А.М., Пинус В.К., Эпельбаум Я.Г. Скин-эффект при градиентном взрыве. Препринт № 68 ИАЭ СО АН, 1977.

9. Доровский В.Н. Динамика фазовых превращений при ЭВП. Плавление плоского проводника с учетом диффузии магнитного поля. Препринт № 95 ИАЭ СО АН СССР, 1979.

10. Пухначев В.В. О задаче Стефана, возникающей в одной модели электрического взрыва проводников. Труды семинара С.Л.Соболева, Новосибирск, 1976, № 2.

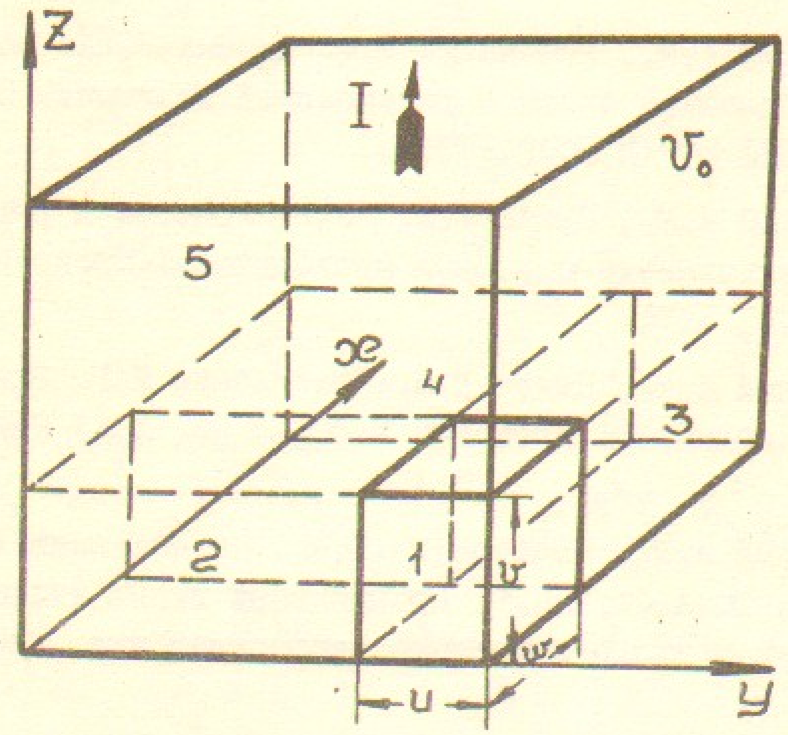

Рис.I

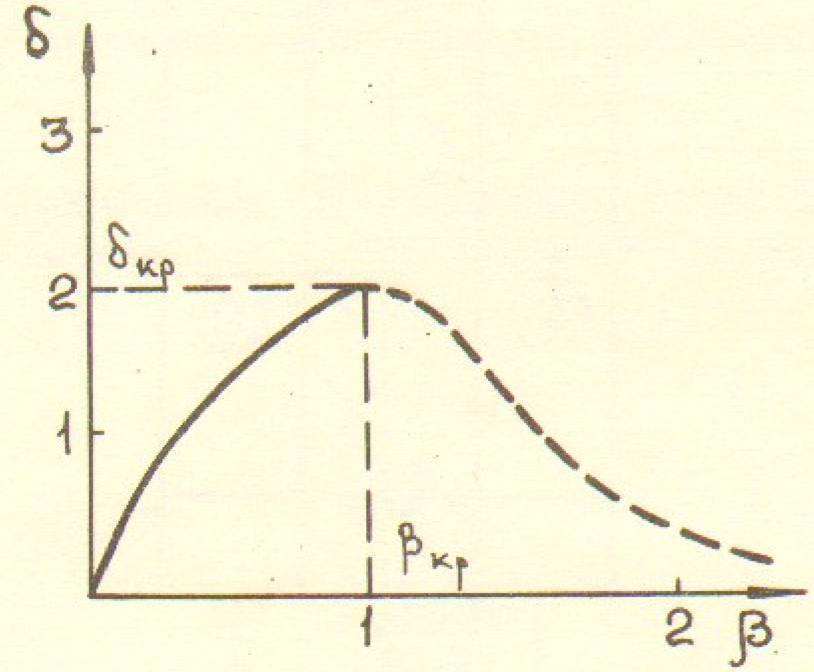

Рис.2

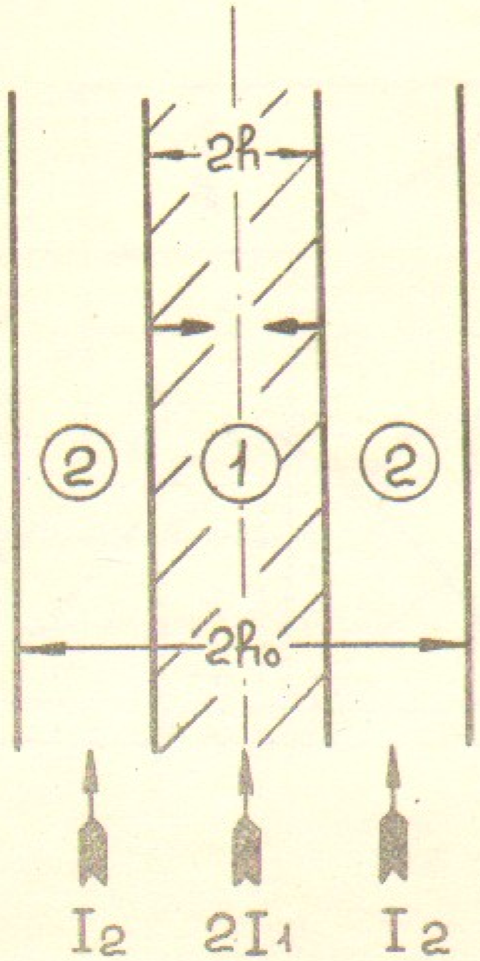

Рис.3

В.Н.Доровский, А.М.Искольдский, Е.И.Роменский

О МОДЕЛИРОВАНИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СТАДИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ НАГРЕВЕ МЕТАЛЛОВ

Препринт
№ 83-91

Работа поступила - 19 июля 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 12.08.1983г. МН 03298
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ №91

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90