

50

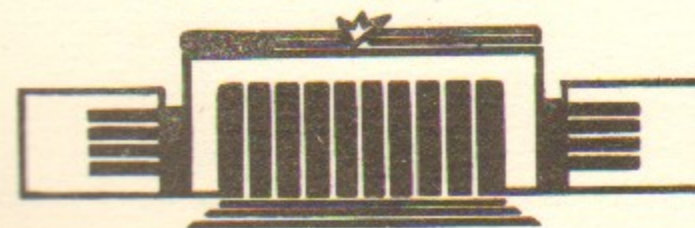


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.В.Мазепус

ПРОВЕРКА МЕТОДА
ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ
В МОДЕЛИ ЭЛЛИОТТА

ПРЕПРИНТ 83—79



НОВОСИБИРСК

ПРОВЕРКА МЕТОДА ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ
В МОДЕЛИ ЭЛЛИОТТА

В. В. Мазепус

АННОТАЦИЯ

Найдены собственные значения обобщенной матрицы плотности для ряда представлений SU_3 - модели Эллиотта. Показано, что нормировочное условие Беляева и Зелевинского выполняется в этой модели в естественной области его применимости.

ПРОВЕРКА МЕТОДА ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ
В МОДЕЛИ ЭЛЛИОТТА

В.В.Мазепус

I. Введение

Существование ярко выраженных коллективных явлений в атомных ядрах требует развития самосогласованного описания этих эффектов в терминах коллективных операторов, но не в первоначальных переменных, соответствующих отдельным частицам. Это обстоятельство делает необходимым выход за рамки представлений теории среднего поля, в которой отдельные частицы движутся в некотором среднем статистическом потенциале. Теория, описывающая коллективные явления, должна рассматривать параметры среднего поля как операторы, действующие в пространстве коллективных состояний, и определять их самосогласованным образом через микроскопические характеристики системы.

В рамках этой программы Керманом и Клейном [1] были получены уравнения движения для матричных элементов фермионных операторов между состояниями соседних ядер, однако этим авторам не удалось получить достаточно конструктивного нормировочного условия, необходимого для замыкания выведенной ими системы уравнений. Беляев и Зелевинский [2] рассмотрели уравнения движения для матричных элементов парных операторов между состояниями коллективных полос и предложили простое эвристическое нормировочное условие, определяющее числа заполнения состояний в обобщенном самосогласованном поле.

Подход Беляева и Зелевинского, получивший название метода обобщенной матрицы плотности (ОМП), представляет собой естественное обобщение приближения Хартри-Фока-Боголюбова (ХФБ) и, в принципе, позволяет единым образом описывать коллективные состояния любой природы—колебательные, вращательные, парные вибрации и т.д. [3-9], а также динамику коллективных возбуждений в столкновениях тяжелых ионов [10]. Эффективность и непротиворечивость метода ОМП очевидны из цитируемых работ, однако приближенный характер метода диктует необходимость его независимой проверки. Такая проверка может быть сделана в прос-

тых модельных системах, где строгое решение можно получить алгебраическими методами. Как уже отмечалось [9], динамические уравнения метода ОМП выполняются тождественно в системах, гамильтонианы которых построены из операторов некоторой алгебры, если коллективная полоса отождествляется с одним из представлений этой алгебры. Таким образом, лишь проверка нормировочного условия нетривиальна в таких системах.

Нормировочное условие метода ОМП проверялось в модели Липкина-Мешкова-Глика [11] и в модели спаривания на двух вырожденных уровнях [12], где оно очевидным образом выполняется в случае, когда число частиц велико. В работе [9] высказано утверждение, что нормировочное условие Беляева и Зелевинского нарушается в модели Эллиотта. Однако это заключение основано на недоразумении, поскольку уравнения метода ОМП имеют приближенный характер и могут выполняться лишь в пределе большого числа частиц, в то время как в работе [9] число частиц выбрано равным 4.

В настоящей статье найдены собственные значения ОМП в модели Эллиотта и показано, что условие нормировки Беляева и Зелевинского выполняется в этой модели в естественной области его применимости.

2. Уравнения метода ОМП

Основное приближение метода ОМП состоит в том, что матричные элементы коллективных операторов, входящих в микроскопический гамильтониан, между состояниями коллективной полосы считаются большими по сравнению с переходами в состояния, не принадлежащие этой полосе.

По определению [2], ОМП в отсутствие спаривания представляет собой совокупность матричных элементов фермионных парных операторов $\langle c_1 | a_{\nu_1}^+ a_{\nu_2} | c_2 \rangle$ между любыми состояниями $|c_1\rangle$ и $|c_2\rangle$, принадлежащими коллективной полосе. Каждый матричный элемент содержит два одночастичных индекса ν_1, ν_2 и два коллективных c_1, c_2 . Удобно объединить одночастичное пространство с коллективным и определить обобщенную матрицу плотности R как оператор в объединенном пространстве:

$$\langle c_1 \nu_1 | R | c_2 \nu_2 \rangle \equiv \langle c_1 | a_{\nu_2}^+ a_{\nu_1} | c_2 \rangle. \quad (2.1)$$

Аналогично, матрицу операторов

$$\hat{R}_{\nu_1 \nu_2} \equiv a_{\nu_2}^+ a_{\nu_1} \quad (2.2)$$

удобно рассматривать как оператор в объединенном пространстве одночастичных и всех многочастичных состояний. Таким образом, обобщенная матрица плотности R является «коллективной частью» оператора плотности \hat{R} , т.е.

$$\langle c_1 \nu_1 | R | c_2 \nu_2 \rangle = \langle c_1 \nu_1 | \hat{R} | c_2 \nu_2 \rangle,$$

если состояния $|c_1\rangle$ и $|c_2\rangle$ принадлежат коллективной полосе.

Уравнения движения метода ОМП имеют вид [2]

$$[R, H + S] = 0, \quad (2.3)$$

где H — коллективный гамильтониан, а самосогласованное поле S функционально зависит от R . Если гамильтониан системы построен из операторов некоторой алгебры, то S также выражается через эти операторы [9].

Для определения ОМП из (2.3) необходимо дополнительное условие, фиксирующее собственные значения R . В качестве такого условия Беляевым и Зелевинским предложено уравнение

$$R^2 = R, \quad (2.4)$$

согласно которому собственные значения R , то есть обобщенные числа заполнения в системе «частица и динамическое самосогласованное поле», равны 0 или 1. Уравнение (2.4) имеет, конечно, приближенный характер. Предполагается, что оно справедливо при следующих естественных условиях:

(I) число частиц (и дырок, если одночастичное пространство имеет конечный объем) в системе велико;

(II) число состояний коллективной полосы очень мало по сравнению с числом всех многочастичных состояний в системе;

(III) состояния полосы сильно коллективизированы; набор квантовых чисел, определяющих коллективную полосу, не содержит квантовых чисел одночастичной природы.

При нарушении условия (II) собственные значения ОМП могут быть отрицательными и большими по абсолютной величине. Например, если «коллективная полоса» включает все многочастичные состояния системы с фиксированным числом частиц A , то ОМП совпадает с оператором плотности \hat{R} , нормированным, как это тривиально следует из фермионных антикоммутирующих соотношений, условием

$$(\hat{R} + A)(\hat{R} - 1) = 0. \quad (2.5)$$

Нарушение условия (III) также приводит к появлению отрицательных собственных значений ОМП. Рассмотрим, например, нечетное ядро, в котором одна частица движется в среднем поле магического остова. В пренебрежении поляризацией остова естественно определить «коллективную полосу» как набор состояний

$$|i\rangle = a_i^+ |\Phi\rangle, \quad (2.6)$$

где $|\Phi\rangle$ — волновая функция остова, a_i^+ — оператор рождения фермиона в незаполненное одночастичное состояние $|i\rangle$. Если $|\Phi\rangle$ — хартри-фоковское состояние с числами заполнения n_i , то $a_i |\Phi\rangle = 0$, и

$$\langle i | R | i' \rangle = \langle i | a_i^+ a_{i'} | i' \rangle = n_i \delta_{i i'} + \delta_{i i'} \delta_{i' i}, \quad (2.7)$$

откуда следует, что $R^2 = I$, т.е. собственные числа ОМП равны I и $-I$. Учет коллективных возбуждений остова восстанавливает, вообще говоря, и нулевое собственное значение, так что в этом случае нормировочное условие для R имеет вид

$$R^3 = R. \quad (2.8)$$

Ниже будет показано, что это уравнение выполняется в модели Эллиотта в ситуации, аналогичной рассмотренной.

Нельзя ожидать выполнения равенства (2.4) и в системах, в которых основано хартри-фоковское состояние точно или приближенно вырождено. В этом случае даже малое остаточное взаимодействие сильно смешивает близкие по энергии хартри-фоковские конфигурации, вследствие чего уравнение (2.4), генетически связанное с аналогичным уравнением метода Хартри-Фока, оказывается плохим приближением. При этом, фактически, нарушается условие (III), поскольку состояния, смешиваемые остаточным взаимодействием и, таким образом, подлежащие включению в «коллективную полосу», не являются вполне коллективизированными и не различаются никакими коллективными квантовыми числами^{ж)}.

Следует отметить, что нормировочное условие типа (2.4) не всегда является необходимым. Например, в задаче об изолированной вращательной полосе четного ядра с $K = 0$ лишь нулевой порядок матрицы плотности по адиабатике нуждается в нормировке; в первом порядке роль нормировочного уравнения играет условие согласования углового момента [4], причем найденное решение согласуется с (2.4).

Более общая (и, по-видимому, более точная) нормировочная процедура рассмотрена в [8]. Ее результат также согласуется с (2.4). Кроме того, нормировка, основанная на фермионных перестановочных соотношениях, использовалась в [9].

3. Модель Эллиотта

Гамильтониан модели Эллиотта [13,14] запишем в форме

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_m (-)^m Q_m Q_{-m}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2;$$

$$Q_m = \sum_{ij} (q_m)_{ij} a_i^+ a_j \equiv \text{Tr } q_m \hat{R}; \quad (3.1)$$

$$(q_m)_{ij} = \langle i | \sqrt{\frac{4\pi}{5}} r^2 Y_{2m} | j \rangle \quad (\text{в безразмерных единицах}),$$

^{ж)} Возможность такого рода была указана Д.Ф.Смирновым, которому автор пользуется случаем выразить глубокую признательность.

где символ Tr означает суммирование только по одночастичным индексам, и пространство одночастичных состояний ограничено единственной осцилляторной оболочкой с главным квантовым числом n . Предположим для общности, что каждое одночастичное состояние Ω -кратно вырождено по некоторому дополнительному квантовому числу $z = 1, 2, \dots, \Omega$. Матрицы q_{zm} диагональны по z и не зависят от него. В стандартной модели Эллиотта обычно полагают $\Omega = 4$, что соответствует вырождению по спину и изоспину.

Компоненты операторов квадрупольного момента Q_m и орбитального углового момента \vec{L} образуют алгебру SU_3 . Неприводимые представления SU_3 , характеризуемые парой натуральных чисел (λ, μ) , естественно интерпретируются как "коллективные полосы" системы, описываемой гамильтонианом (3.1). Энергии состояний, принадлежащих полосе (λ, μ) , суть

$$E = -2\kappa G_{\lambda\mu} + \frac{3}{2}\kappa L(L+1), \quad (3.2)$$

где $G_{\lambda\mu}$ - собственное значение оператора Казимира

$$G = \frac{3}{4}\vec{L}^2 + \frac{1}{4}\sum_m Q_m(Q_{-m})^m \quad (3.3)$$

в представлении (λ, μ) :

$$G_{\lambda\mu} = \lambda^2 + \mu\lambda + \mu^2 + 3(\lambda + \mu). \quad (3.4)$$

Таким образом, яраст-полосе отвечает представление с максимальным $G_{\lambda\mu}$.

Вместо операторов Q_m и \vec{L} удобно рассматривать операторы $A_{\alpha\beta}$, образующие алгебру GL_3 и удовлетворяющие простым соотношениям [15]:

$$[A_{\alpha\beta}, A_{\gamma\delta}] = \delta_{\beta\gamma} A_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\delta} A_{\gamma\beta}, \quad (3.5)$$

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}^+; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3.$$

Операторы Q_m и \vec{L} линейно связаны с $A_{\alpha\beta}$ [13,14]. Например,

$$iL_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\gamma}, \quad (3.6)$$

где $e_{\alpha\beta\gamma}$ - единичный антисимметрический тензор,

$$Q_0 = 2A_{33} - A_{22} - A_{11}, \quad (3.7)$$

и т.д. Аналогично определим одночастичные матрицы $d_{\alpha\beta}$:

$$d_{\alpha\beta} = 2d_{00} - d_{22} - d_{11} \quad (3.8)$$

и т.д. Таким образом,

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{ij} (d_{\alpha\beta})_{ij} a_i^+ a_j \equiv \text{Tr} d_{\alpha\beta} \hat{R}. \quad (3.9)$$

Матрицы $d_{\alpha\beta}$ также удовлетворяют соотношениям (3.5), поскольку из фермиевских антикоммутиционных соотношений следует, что

$$[\hat{R}, A_{\alpha\beta} + d_{\alpha\beta}] = 0, \quad (3.10)$$

и, кроме того, оператор плотности \hat{R} эрмитов в объединенном пространстве. Восемь операторов SU_3 определяют лишь восемь линейных комбинаций операторов $A_{\alpha\beta}$, так что скаляры $A_{\gamma\gamma}$ и $d_{\gamma\gamma}$ остаются неопределенными. Удобно положить

$$d_{\gamma\gamma} = n, \quad A_{\gamma\gamma} = n \hat{A}, \quad (3.11)$$

где n - главное квантовое число одночастичной осцилляторной оболочки, $\hat{A} \equiv \text{Tr} \hat{R}$ - оператор числа частиц.

Базис состояний с определенным орбитальным угловым моментом L , диагонализующий гамильтониан (3.1), не удобен для вычисления собственных значений ОМП. Более предпочтителен декар-

тов базис [I4, I6] состояний $|\varepsilon \lambda \nu\rangle$ с определенными A_{11} , A_{22} , A_{33} :

$$Q_0 |(\lambda \mu) \varepsilon \lambda \nu\rangle = \varepsilon |(\lambda \mu) \varepsilon \lambda \nu\rangle$$

$$\Lambda_0 |(\lambda \mu) \varepsilon \lambda \nu\rangle = \frac{\nu}{2} |(\lambda \mu) \varepsilon \lambda \nu\rangle \quad (3.12)$$

$$\vec{\Lambda}^2 |(\lambda \mu) \varepsilon \lambda \nu\rangle = \Lambda(\Lambda+1) |(\lambda \mu) \varepsilon \lambda \nu\rangle,$$

где оператор

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} (A_{11} - A_{22}) = \frac{1}{2\sqrt{6}} (Q_2 + Q_{-2})$$

вместе с $\Lambda_+ = A_{12}$, $\Lambda_- = A_{21}$ образует подалгебру SU_2 , и

$$\vec{\Lambda}^2 = \Lambda_+ \Lambda_- + \Lambda_0^2 - \Lambda_0.$$

Для заданного представления (λ, μ) допустимые значения ε , Λ и ν определяются соотношениями

$$\varepsilon = 2\lambda + \mu - 3(p+q),$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\mu + p - q),$$

$$\frac{\nu}{2} = -\Lambda, -\Lambda+1, \dots, \Lambda, \quad (3.13)$$

$$p = 0, 1, \dots, \lambda; \quad q = 0, 1, \dots, \mu.$$

В конкретных вычислениях квантовые числа p и q более удобны, чем ε и Λ . Матричные элементы инфинитезимальных операторов SU_3 в декартовом базисе хорошо известны (см., напр., [I6]). Операторы Λ_{\pm} не изменяют ε , и их матричные элементы определяются перестановочными соотношениями алгебры SU_2 . Операторы A_{31} и A_{32} увеличивает ε на 3 и заменяют Λ на $\Lambda \pm 1/2$, причем A_{31} уменьшает, а A_{32} увеличивает ν на 1. Состояние с $p=q=0$, $\nu=\mu$ представляет собой состояние с максимальным весом

[I5] данного неприводимого представления (λ, μ) .

4. Одночастичное пространство и допустимые представления SU_3

Проблема определения всех неприводимых представлений SU_3 , т.е. всех полос в модели Эллиотта, разрешенных принципом Паули при данных n , Ω и числе частиц A , весьма сложна. Для небольших значений n и Ω она может быть решена перебором всех многочастичных конфигураций [I3], но в общем случае достаточно конструктивная процедура ее решения отсутствует. В настоящей работе допустимые представления, имеющие физический интерес, будут определяться явно построением соответствующих состояний с максимальным весом.

Рассмотрим кэрри-фоковское среднее поле w , ассоциированное с микроскопическим гамильтонианом (3.1). В пренебрежении обменными членами оно может быть представлено в виде

$$w = -\alpha [\langle Q_0 \rangle q_0 + \langle Q_2 + Q_{-2} \rangle (q_2 + q_{-2})], \quad (4.1)$$

если система координат выбрана так, что

$$\langle Q_{\pm 1} \rangle = 0, \quad \langle Q_2 \rangle = \langle Q_{-2} \rangle.$$

Среднее поле (4.1) диагонально в декартовом базисе (3.12). Одночастичные матрицы $d_{\alpha\beta}$ (или их линейные комбинации q_m и т.д.) образуют представление

$$(n, 0)^{\Omega} = \underbrace{(n, 0) \times (n, 0) \times \dots \times (n, 0)}_{\Omega \text{ раз}}$$

алгебры SU_3 . Согласно (3.13), базисные векторы представления $(n, 0)$ характеризуются только двумя квантовыми числами p и ν . В дальнейшем, чтобы не путать одночастичные и многочастичные квантовые числа, вместо p и ν , относящихся к одночастичному базису, будут использоваться символы π и η . Таким образом, одночастичные состояния, диагонализующие сред-

нее поле (4.1), определяются квантовыми числами π , η , z :

$$\pi = 0, 1, \dots, n;$$

$$\eta = \pi, \pi-2, \dots, -\pi;$$

$$z = 1, 2, \dots, \Omega.$$

Одночастичные энергии вырождены по z и эквидистантны по π и η :

$$E_{\pi\eta} = -\varepsilon [\varepsilon(2n-3\pi) + 6\gamma\eta]. \quad (4.2)$$

Здесь ε и γ - квантовые числа хартри-фоковской многочастичной конфигурации, порождающей среднее поле (4.1):

$$\sum (2n-3\pi) = \varepsilon, \quad \sum \eta = \gamma \quad (4.3)$$

(суммирование по заполненным состояниям). Из сравнения с (4.1) ясно, что величины ε и γ определяют, соответственно, β - и γ -деформацию данной конфигурации.

Рассмотрим конфигурацию $|\Phi_0\rangle$, в которой заполнены только одночастичные состояния с $\pi \leq \pi_m$ ($0 \leq \pi_m < n$). Число частиц, а также квантовое число ε в такой конфигурации определяются величиной π_m :

$$A = \frac{1}{2} \Omega (\pi_m + 1)(\pi_m + 2), \quad (4.4)$$

$$\varepsilon = 2\lambda_0, \quad (4.5)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \Omega (\pi_m + 1)(\pi_m + 2)(n - \pi_m), \quad (4.6)$$

в то время как $\gamma = 0$ (γ - деформация отсутствует). Очевидно, что

$$A_{31}|\Phi_0\rangle = A_{32}|\Phi_0\rangle = L_+|\Phi_0\rangle = 0, \quad (4.7)$$

откуда следует, что $|\Phi_0\rangle$ есть вектор с максимальным весом представления (λ, μ) , где

$$\lambda = \frac{\varepsilon - \gamma}{2} = \lambda_0, \quad (4.8)$$

$$\mu = \gamma = 0.$$

Таким образом, если число частиц совпадает с одним из "магических чисел" (4.4), то симметричное представление $(\lambda_0, 0)$ допустимо. При не слишком больших π_m представление $(\lambda_0, 0)$ отвечает максимальному оператору Казимира и, таким образом, описывает ирраст-полосу системы. Однако, при увеличении числа частиц это утверждение, вообще говоря, перестает быть справедливым (γ - деформация становится энергетически выгодной). Для иллюстрации рассмотрим случай $n = 2$, $A = 3\Omega$. Симметричному представлению $(3\Omega, 0)$ отвечает оператор Казимира

$$G_{3\Omega, 0} = 9\Omega^2 + 9\Omega. \quad (4.9)$$

Максимальное значение орбитального момента L в этом случае равно 3Ω . Поскольку [13] для произвольного представления (λ, μ)

$$L_{\max} = \lambda + \mu, \quad (4.10)$$

не существует допустимого представления с $\lambda + \mu > 3\Omega$. Следовательно, для всякого допустимого представления (λ, μ)

$$G_{\lambda\mu} = (\lambda + \mu)^2 + 3(\lambda + \mu) - \lambda\mu \leq (\lambda + \mu)^2 + 3(\lambda + \mu) \leq L_{\max}^2 + 3L_{\max}, \quad (4.11)$$

откуда следует, что при $n = 2$, $A = 3\Omega$ не существует представлений с оператором Казимира, большим, чем (4.9), т.е. симметричное представление определяет ирраст-полосу системы. Однако уже в этом случае допустимо представление $(0, 3\Omega)$ с тем же значением G и ненулевой γ -деформацией. Действительно, конфигурация $|\Phi_1\rangle$, в которой заполнены одночастичные состояния $\pi = \eta = 0$; $\pi = \eta = 1$ и $\pi = \eta = 2$, представляет собой вектор с максимальным весом представления

$$(\lambda, \mu) = (0, 3\Omega) \quad (4.12)$$

поскольку

$$A_{31}|\Phi_1\rangle = A_{32}|\Phi_1\rangle = \Lambda_+|\Phi_1\rangle = 0$$

и

$$\varepsilon = 3\Omega, \quad \nu = 3\Omega.$$

В случае $n = 3$, $A = 6\Omega$ симметричному представлению $(6\Omega, 0)$ соответствует значение

$$G_{6\Omega, 0} = 36\Omega^2 + 18\Omega.$$

Рассмотрим конфигурацию $|\Phi_2\rangle$ с заполненными одночастичными состояниями $\pi = \eta = 0; 1; 2; 3$, а также $\eta = -\pi = -1$, и $\pi = 2$, $\eta = 0$. Состояние $|\Phi_2\rangle$ представляет собой вектор с максимальным весом представления

$$(\lambda, \mu) = (2\Omega, 5\Omega)^* \quad (4.13)$$

поскольку

$$A_{31}|\Phi_2\rangle = A_{32}|\Phi_2\rangle = \Lambda_+|\Phi_2\rangle = 0,$$

$$\varepsilon = 9\Omega, \quad \nu = 5\Omega.$$

В представлении $(2\Omega, 5\Omega)$

$$G_{2\Omega, 5\Omega} = 39\Omega^2 + 21\Omega > G_{6\Omega, 0},$$

т.е. энергетические уровни соответствующей коллективной полосы с ненулевой γ -деформацией ($\nu \neq 0$) лежат ниже уровней полосы симметричного представления $(6\Omega, 0)$.

В качестве примера системы с "немагическим" числом частиц рассмотрим случай $n = 2$, $A = 4\Omega$. Конфигурация $|\Psi_1'\rangle$ с заполненными состояниями $\pi = \eta = 0$; $\pi = 1$, $\eta = \pm 1$; $\pi = 2$, $\eta = 2$ представляет собой вектор с максимальным весом представления

$$(\lambda, \mu) = (\Omega, 2\Omega). \quad (4.14)$$

Существенно более сложный случай числа частиц, не кратного Ω , мы исследуем в двух простейших вариантах. В первом из них

$$n = 1,$$

$$A = N + 2M, \quad N + M = \Omega,$$

$$N > 0, \quad M > 0;$$

(4.15)

$$\Omega < A < 2\Omega.$$

Рассмотрим конфигурацию $|\Psi_1\rangle$, построенную заполнением одночастичных состояний $\pi = \eta = 0$ при $z \leq N$ и $\pi = \eta = 0$, $\pi = \eta = 1$ при $z > N$. Это состояние является вектором с максимальным весом представления

$$(\lambda, \mu) = (N, M), \quad (4.16)$$

так как

$$A_{31}|\Psi_1\rangle = A_{32}|\Psi_1\rangle = \Lambda_+|\Psi_1\rangle = 0$$

и

$$\varepsilon = 2N + M, \quad \nu = M.$$

Поскольку исходная алгебра не содержит операторов, изменяющих квантовое число z , все неприводимые представления системы (4.15), разрешенные принципом Паули, определяются редукцией прямого произведения

$$D_{NM} = (1, 0)^N \times (0, 1)^M,$$

где представления $(1, 0)$ и $(0, 1)$ описывают, соответственно, частицу и дырку в оболочке $n = 1$. Легко показать, что представление (N, M) , содержащееся в D_{NM} , отвечает максимальному значению оператора Казимира. Таким образом, коллективная полоса, соответствующая этому представлению, является ирраст-полосой системы.

Второй вариант модели с числом частиц, не кратным Ω , определяется условиями

$$n = 2, \quad A = 3\Omega + 1. \quad (4.17)$$

В этом случае конфигурация $|\Psi_2\rangle$, в которой заполнены состояния с $\pi \leq 1$, а также состояние $\pi = \eta = 2, z = 1$, является состоянием с максимальным весом представления

$$(\lambda, \mu) = (3\Omega - 2, 2). \quad (4.18)$$

Следует отметить, что вариант (4.17) аналогичен случаю нечетного ядра с коллективной полосой (2.6).

Ниже для каждого из построенных в этом разделе представлений будут найдены собственные значения ОМЛ.

5. Симметричное представление

Рассмотрим коллективную полосу, ассоциированную с симметричным представлением (4.8). ОМЛ в этом случае определена в пространстве прямого произведения

$$(n, 0)^{\Omega} \times (\lambda_0, 0).$$

Пользуясь тем, что зависимость одночастичных операторов алгебры от квантового числа $z = 1, \dots, \Omega$ тривиальна, структуру ОМЛ можно упростить.

Введем оператор F , такой, что

$$F = \sum_{\alpha z z'} f_{zz'} a_{z\alpha}^+ a_{z'\alpha} = \text{Tr} \hat{f} \hat{R}, \quad (5.1)$$

$$(\hat{f})_{z\alpha, z'\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'} f_{zz'},$$

где α обозначает пару одночастичных индексов π, η ; $f_{zz'}$ — произвольная матрица размерности $\Omega \times \Omega$. По определению кэрри-фоковской конфигурации $|\Phi_0\rangle$, данному в разделе 4,

$$F|\Phi_0\rangle = \sum_{z\alpha} f_{zz} a_{z\alpha}^+ a_{z\alpha} |\Phi_0\rangle = \frac{A}{\Omega} f |\Phi_0\rangle, \quad (5.2)$$

$$f = \sum_z f_{zz}.$$

Оператор F коммутирует со всеми операторами SU_3 , поскольку матрица \hat{f} представляет собой единицу в одночастичном представлении $(n, 0)$. С другой стороны, произвольный базисный вектор пространства представления $(\lambda_0; 0)$ может быть получен действием операторов алгебры (например, Λ_- и A_{13}) на $|\Phi_0\rangle$. Поэтому для всякого вектора $|c\rangle$, принадлежащего пространству представления $(\lambda_0, 0)$,

$$F|c\rangle = \frac{A}{\Omega} f |c\rangle. \quad (5.3)$$

Из алгебраического тождества

$$[\hat{R}, F + \hat{f}] = 0 \quad (5.4)$$

с учетом (5.3) получаем:

$$[\langle c|R|c'\rangle, \hat{f}] = \langle c|F\hat{R}|c'\rangle - \langle c|\hat{R}F|c'\rangle = 0,$$

где $|c\rangle$ и $|c'\rangle$ - векторы, принадлежащие пространству представления $(\lambda_0, 0)$. Таким образом,

$$[R \hat{f}] = 0, \quad (5.5)$$

откуда в силу произвольности $f_{zz'}$ следует, что

$$R_{z\alpha, z'\alpha'} = \delta_{zz'} r_{\alpha\alpha'}. \quad (5.6)$$

Матрица r определена в пространстве произведения $(n, 0) \times (\lambda_0, 0)$. Вместо r удобно рассматривать матрицу $r' = 1 - r$:

$$\langle c; \alpha | r' | c'; \alpha' \rangle = \langle c | a_{z\alpha} a_{z'\alpha'}^+ | c' \rangle. \quad (5.7)$$

Пусть квантовое число z фиксировано. Из определения [17] коэффициентов Вигнера для группы SU_3 следует, что

$$a_{z\alpha}^+ | c \rangle = \sum_{(\lambda\mu) \in \Lambda_V} \alpha_{\lambda\mu} \langle (\lambda_0, 0) c; (n, 0) \alpha | (\lambda\mu) \in \Lambda_V \rangle | (\lambda\mu) \in \Lambda_V \rangle. \quad (5.8)$$

Соотношения (5.7) и (5.8) дают представление матрицы r' в форме

$$r' = \sum_{\lambda\mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 P_{\lambda\mu}, \quad (5.9)$$

где $P_{\lambda\mu}$ - оператор проектирования в пространство представления (λ, μ) . Таким образом, ненулевые собственные значения r' матрицы r' определяются приведенными матричными элементами фермионных операторов рождения:

$$r'_{\lambda\mu} = |\alpha_{\lambda\mu}|^2. \quad (5.10)$$

Для того, чтобы найти величины $r'_{\lambda\mu}$, рассмотрим совокупность векторов

$$|k, \eta\rangle = a_{z, \pi_m+k, \eta}^+ | \Phi_0 \rangle, \quad (5.11)$$

$$k = 1, 2, \dots, n - \pi_m; \quad \pi_m < n.$$

Вектор $|k, \eta\rangle$ принадлежит представлению группы SU_2 с "моментом"

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\pi_m + k).$$

Кроме того,

$$A_{zx} |k, \eta\rangle \sim |k-1, \eta-1\rangle,$$

$$A_{zy} |k, \eta\rangle \sim |k-1, \eta+1\rangle.$$

Так как операторы алгебры A_{zx} и A_{zy} не меняют представления, отсюда следует, что вектор $|k, \eta\rangle$ может быть представлен в виде

$$|k, \eta\rangle = | (A) k, \eta \rangle + | (B) k, \eta \rangle, \quad (5.12)$$

где $| (A) k, \eta \rangle$ принадлежит пространству тех же представлений, что и $|k-1, \eta\rangle$, а вектор $| (B) k, \eta \rangle$ удовлетворяет тождествам

$$A_{zx} | (B) k, \eta \rangle = A_{zy} | (B) k, \eta \rangle = 0. \quad (5.13)$$

Поскольку

$$Q_0 |k, \eta\rangle = (2\lambda_0 + 2n - 3\pi_m - 3k) |k, \eta\rangle, \quad (5.14)$$

вектор $| (B) k, \eta \rangle$ лежит в пространстве представления

$$(\lambda_k, \mu_k) = (\lambda_0 + n - 2\pi_m - 2k, \pi_m + k). \quad (5.15)$$

Очевидно, что тождества (5.13) справедливы также для векторов $|1, \eta\rangle$, поэтому они принадлежат пространству представления (λ_1, μ_1) . Таким образом, каждый вектор $|k, \eta\rangle$ мо-

жет быть разложен по базисам представлений $(\lambda_s, \mu_s), s=1, \dots, k$.
Рассматривая векторы

$$A_{ij}|k, \eta\rangle, A_{ij}A_{kl}|k, \eta\rangle, \dots; i, j, k, l=1, 2, 3,$$

после коммутации A_{ij} и фермионных операторов рождения нетрудно заключить, что любой вектор $a_{z\alpha}^+ |c\rangle$, где $|c\rangle$ принадлежит пространству $(\lambda_0, 0)$, может быть разложен по базисным векторам представлений $(\lambda_k, \mu_k), k=1, 2, \dots, n-\bar{\pi}_m$.

Таким образом, только по этим представлениям идет суммирование в правой части (5.8) и, следовательно, только собственные значения

$$\rho'_{\lambda_k \mu_k} \equiv \rho'_k$$

отличны от нуля. Поэтому разложение (5.8) для векторов $|k, \eta\rangle$ может быть представлено в форме

$$|k, \eta\rangle = \sum_{s=1}^k G_s^k |(\lambda_s, \mu_s) 2\lambda_k + \mu_k, \frac{\mu_k}{2}, \eta\rangle, \quad (5.16)$$

$$G_s^k = \alpha_s \langle (\lambda_0, 0) 2\lambda_0, 0, 0; (n_0) 2n - 3\bar{\pi}_m - 3k, \frac{\mu_k}{2}, \eta | (\lambda_s, \mu_s) 2\lambda_k + \mu_k, \frac{\mu_k}{2}, \eta \rangle \quad (5.17)$$

$(\alpha_s \equiv \alpha_{\lambda_s \mu_s}).$

В последнем равенстве явно выписаны все индексы коэффициентов Вигнера группы SU_3 [16]; величины G_s^k не зависят от квантового числа η .

Из рекуррентных соотношений [16] для коэффициентов Вигнера следует, что

$$G_s^k = \left[\frac{(\bar{\pi}_m + k)(n - \bar{\pi}_m - k + 1)}{(k-s)(\lambda_0 + n - 2\bar{\pi}_m - k - s + 1)} \right]^{1/2} G_s^{k-1}, \quad s=1, \dots, k-1. \quad (5.18)$$

Это уравнение позволяет выразить G_s^k через G_s^s :

$$G_s^k = [\mathcal{M}_s^k]^{1/2} G_s^s, \quad (5.19)$$

где

$$\mathcal{M}_s^k = \frac{1}{(k-s)!} \frac{(\bar{\pi}_m + k)! (n - \bar{\pi}_m - s)! (\lambda_0 + n - 2\bar{\pi}_m - s - k)!}{(\bar{\pi}_m + s)! (n - \bar{\pi}_m - k)! (\lambda_0 + n - 2\bar{\pi}_m - 2s)!}. \quad (5.20)$$

Из определения (5.11) очевидно, что все векторы $|k, \eta\rangle$ нормированы. Поэтому величины G_s^k удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{s=1}^k |G_s^k|^2 = 1. \quad (5.21)$$

Комбинируя (5.17), (5.19) и (5.21), получаем систему уравнений, определяющую собственные значения ρ'_k :

$$\sum_{s=1}^k \mathcal{D}_s \mathcal{M}_s^k \rho'_s = 1, \quad (5.22)$$

где величины

$$\mathcal{D}_k = \left| \langle (\lambda_0, 0) 2\lambda_0, 0, 0; (n_0) 2n - 3\bar{\pi}_m - 3k, \frac{\mu_k}{2}, \eta | (\lambda_k, \mu_k) 2\lambda_k + \mu_k, \frac{\mu_k}{2}, \eta \rangle \right|^2 \quad (5.23)$$

можно найти из рекуррентных соотношений и нормировочного условия для коэффициентов Вигнера [16]:

$$\frac{1}{\mathcal{D}_k} = \frac{(\bar{\pi}_m + k)!}{\lambda_0! (n - \bar{\pi}_m - k)!} \sum_{p=0}^{\bar{\pi}_m + k} \frac{(\lambda_0 - p)! (n - \bar{\pi}_m - k + p)!}{p! (\bar{\pi}_m + k - p)!}. \quad (5.24)$$

Пусть число частиц A велико. Тогда, согласно (4.4) и (4.6), параметр λ_0 также будет большим. С точностью до членов второго порядка малости получаем из (5.22):

$$\rho'_1 = \frac{1}{\mathcal{D}_1} \approx 1 + \frac{1}{\lambda_0} (\bar{\pi}_m + 1)(n - \bar{\pi}_m) = 1 + \frac{2}{\Omega(\bar{\pi}_m + 2)}, \quad (5.25)$$

$$\rho'_k \approx 1, \quad 2 \leq k \leq n - \bar{\pi}_m.$$

Таким образом, при $A \gg 1$ ненулевые собственные значения матрицы r' стремятся к 1. Поэтому, согласно (5.6) и (5.7), асимптотические собственные значения обобщенной матрицы плотности R равны 0 или 1.

Приведем точные выражения для ненулевых собственных значений матрицы r' в некоторых частных случаях.

При $n = 1$, $\pi_m = 0$, $A = \Omega$, $\lambda_0 = \Omega$ ненулевое собственное значение единственно:

$$\rho'_1 = 1 + \frac{1}{\Omega}, \text{ т.е. } \rho_1 = -\frac{1}{\Omega}. \quad (5.26)$$

При $n = 2$, $\pi_m = 0$, $A = \Omega$, $\lambda_0 = 2\Omega$ два ненулевых собственных значения определяются соотношениями

$$\rho'_1 = 1 + \frac{1}{\Omega}, \quad \rho'_2 = 1 - \frac{1}{\Omega(2\Omega-1)}, \text{ т.е.} \quad (5.27)$$

$$\rho_1 = -\frac{1}{\Omega}, \quad \rho_2 = \frac{1}{\Omega(2\Omega-1)}.$$

Если $\Omega = 4$, то

$$\rho'_1 = \frac{5}{4}, \quad \rho'_2 = \frac{27}{28}. \quad (5.28)$$

Именно эти собственные значения были получены в [9] (третье и четвертое собственные значения, найденные в этой работе, относятся к модифицированной матрице плотности, рассмотрение которой необходимо лишь при наличии сил спаривания). Из (5.27) очевидно, что в случае большого числа частиц, т.е. при $\Omega \gg 1$,

$\rho'_1 \rightarrow 1$ и $\rho'_2 \rightarrow 1$.
Наконец, при $\pi_m = n-1$, $A = \lambda_0 = \frac{1}{2} \Omega n(n+1)$ для единственного ненулевого собственного значения ρ'_1 получаем:

$$\rho'_1 = 1 + \frac{2n}{\Omega n(n+1) - 2n + 2}. \quad (5.29)$$

Решения (5.26), (5.27) и (5.29) согласуются с асимптотической оценкой (5.25).

6. Другие представления при A , кратном Ω

Схема вычисления собственных значений ОМГ для симметричного представления $(\lambda_0, 0)$ пригодна, с небольшими модификациями, и в других случаях. Для всех представлений, рассматриваемых в этом разделе, справедливо соотношение (5.6) и, так же, как и раньше, удобно искать сначала собственные значения матрицы r' .

В случае представления (4.12) при $n = 2$, $A = 3\Omega$ вместо векторов $|k, \eta\rangle$ введем вспомогательные векторы типа $a_{z, \pi, \eta}^+ |\Phi_1\rangle$, где конфигурация $|\Phi_1\rangle$ определена в разделе 4:

$$\begin{aligned} |1, -1\rangle &= a_{z, 1, -1}^+ |\Phi_1\rangle, \\ |2, 0\rangle &= a_{z, 2, 0}^+ |\Phi_1\rangle, \\ |2, -2\rangle &= a_{z, 2, -2}^+ |\Phi_1\rangle. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Исходя из определения $|\Phi_1\rangle$, легко заключить, что $|1, -1\rangle$ представляет собой вектор с максимальным весом представления $(1, 3\Omega - 1)$. С точностью до фазового множителя он может быть записан как стандартный базисный вектор $|(\lambda, \mu) \in \Lambda \vee\rangle$:

$$|1, -1\rangle = |(1, 3\Omega - 1) 3\Omega + 1, \frac{1}{2}(3\Omega - 1), 3\Omega - 1\rangle. \quad (6.2)$$

Вектор $|2, 0\rangle$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} A_{3z} |2, 0\rangle = \Lambda_+ |2, 0\rangle = 0, \quad A_{31} |2, 0\rangle \sim |1, -1\rangle \\ Q_0 |2, 0\rangle = (3\Omega - 2) |2, 0\rangle, \quad \Lambda_0 |2, 0\rangle = \frac{3}{2} \Omega |2, 0\rangle. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Так как в данном случае

$$\frac{Q_0}{2} < \Lambda_0 ,$$

вектор $|2,0\rangle$ лежит, как и $|1,-1\rangle$, в пространстве представления $(1,3\Omega-1)$. Именно,

$$|2,0\rangle = |(1,3\Omega-1)3\Omega-2, \frac{3\Omega}{2}, 3\Omega\rangle . \quad (6.4)$$

Вектор $|2,-2\rangle$ удовлетворяет условиям

$$A_{32} |2,-2\rangle \sim |1,-1\rangle , \quad (6.5)$$

$$\Lambda_+ |2,-2\rangle \sim |2,0\rangle ,$$

$$A_{31} |2,-2\rangle = 0 ,$$

$$Q_0 |2,-2\rangle = (3\Omega-2) |2,-2\rangle ,$$

$$\Lambda_0 |2,-2\rangle = \frac{1}{2} (3\Omega-2) |2,-2\rangle ,$$

поэтому, помимо представления $(1,3\Omega-1)$, он содержит еще и представление $(0,3\Omega-2)$. Таким образом, только два собственных значения матрицы r' , соответствующие представлениям $(1,3\Omega-1)$ и $(0,3\Omega-2)$, отличны от нуля, так что справедливо соотношение

$$r' = \rho'_{1,3\Omega-1} P_{1,3\Omega-1} + \rho'_{0,3\Omega-2} P_{0,3\Omega-2} , \quad (6.6)$$

аналогичное (5.9). Сравнивая (6.2) с общей формой (5.8), легко

найти $\rho'_{1,3\Omega-1}$:

$$\rho'_{1,3\Omega-1} = |\alpha_{1,3\Omega-1}|^2 \quad (6.7)$$

$$= |\langle (0,3\Omega)3\Omega, \frac{3\Omega}{2}, 3\Omega; (20)1, \frac{1}{2}, -1 | (1,3\Omega-1)3\Omega+1, \frac{3\Omega-1}{2}, 3\Omega-1 \rangle|^{-2}$$

$$= 1 + \frac{1}{\Omega} .$$

Уравнение для определения второго собственного значения можно получить, взяв след по всем матричным индексам (одночастичным и коллективным) от обеих частей равенства (6.6):

$$3 \dim(0,3\Omega) = \rho'_{1,3\Omega-1} \dim(1,3\Omega-1) + \rho'_{0,3\Omega-2} \dim(0,3\Omega-2) , \quad (6.8)$$

где $\dim(\lambda, \mu)$ — размерность представления (λ, μ) :

$$\dim(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} (\lambda+1)(\mu+1)(\lambda+\mu+2) .$$

Из (6.8) и (6.7) получаем:

$$\rho'_{0,3\Omega-2} = \frac{3\Omega-3}{3\Omega+1} . \quad (6.9)$$

Возвращаясь к ОМЛ, для собственных чисел, отличных от 1, находим:

$$\rho_{1,3\Omega-1} = -\frac{1}{\Omega},$$

$$\rho_{0,3\Omega-2} = \frac{4}{3\Omega+1}.$$
(6.I0)

Если число частиц велико, т.е. $\Omega \gg 1$, эти собственные числа малы.

Для представления (4.I3) при $n = 3$, $A = 6\Omega$ решение может быть найдено аналогичным способом. В этом случае существуют четыре собственных значения ОМГ, отличных от 1. Опуская громоздкие выкладки, приведем лишь окончательный результат в первом порядке по $1/\Omega$:

$$\rho_{2\Omega+1,5\Omega-2} \approx -\frac{34}{35} \frac{1}{\Omega},$$

$$\rho_{2\Omega-2,5\Omega+1} \approx -\frac{61}{35} \frac{1}{\Omega},$$
(6.II)

$$\rho_{2\Omega-1,5\Omega-1} \approx -\frac{2}{7} \frac{1}{\Omega},$$

$$\rho_{2\Omega,5\Omega-3} = O\left(\frac{1}{\Omega^2}\right).$$

Как пример "немагического" числа частиц, рассмотрим представление (4.I4) при $n = 2$, $A = 4\Omega$. Ход решения в этом случае вполне аналогичен схеме нахождения собственных значений для представления (4.I2). Два собственных значения ОМГ, отличных от 1, суть

$$\rho_{\Omega-1,2\Omega} = -\frac{7\Omega^2+7\Omega+2}{\Omega^2(3\Omega+1)} \approx -\frac{7}{3} \frac{1}{\Omega},$$
(6.I2)

$$\rho_{\Omega,2\Omega-2} = -\frac{4\Omega^2-5\Omega-2}{3\Omega^2(2\Omega-1)} \approx -\frac{2}{3} \frac{1}{\Omega}.$$

7. Случай A, не кратного Ω

Для представлений (4.I6) и (4.I8) с числом частиц, не кратным Ω , соотношение (5.5) справедливо лишь в частном случае диагональных $f_{zz'}$, т.е. при $f_{zz'} = f_z \delta_{zz'}$. Отсюда следует, что

$$R_{zz'} = r_z \delta_{zz'}. \quad (7.I)$$

Таким образом, множество собственных значений матрицы R является объединением множеств собственных значений всех матриц r_z . Схема вычисления собственных значений r_z (или $r'_z = 1 - r_z$) не отличается принципиально от схем, рассмотренных выше.

Для представления (4.I6), по построению вектора с максимальным весом $|\psi_1\rangle$, достаточно рассмотреть матрицу r'_z в двух случаях: при $z > N$ и при $z \leq N$. При $z > N$ единственный вектор $|\psi'_1\rangle$, аналогичный векторам (5.II), определяется соотношением

$$|\psi'_1\rangle = a_{z>N,1,-1}^+ |\psi_1\rangle. \quad (7.2)$$

Очевидно, что конфигурация $|\psi'_1\rangle$ является вектором с максимальным весом представления $(N, M-1)$, поскольку в этом состоянии

$$Q_0 = 2N + M - 1, \quad \Lambda_0 = \frac{1}{2}(M-1). \quad (7.3)$$

Таким образом, соотношение, аналогичное (5.9), принимает вид

$$r'_{z>N} = \rho'_{z>N} P_{N,M-1}. \quad (7.4)$$

Вычисляя след по всем матричным индексам, кроме z , обеих частей равенства (7.4), находим собственное значение $\rho'_{z>N}$:

$$\rho'_{z > N} = \frac{\dim(N, M)}{\dim(N, M-1)} = \frac{M+1}{M} \frac{\Omega+2}{\Omega+1} \quad (7.5)$$

При $z \leq N$ существуют два "промежуточных состояния":

$$|\psi_1''\rangle = a_{z \leq N, 1, 1}^+ |\psi_1\rangle,$$

$$|\psi_1'''\rangle = a_{z \leq N, 1, -1}^+ |\psi_1\rangle.$$

Состояние $|\psi_1''\rangle$ является вектором с максимальным весом представления $(N-1, M+1)$, поэтому его можно представить в виде

$$\begin{aligned} |\psi_1''\rangle &= \alpha_{N-1, M+1} \times \\ &\times \langle (NM)2N+M, \frac{M}{2}, M; (10)-1, \frac{1}{2}, 1 | (N-1, M+1)2N+M-1, \frac{M+1}{2}, M+1 \rangle \\ &\times |(N-1, M+1)2N+M-1, \frac{M+1}{2}, M+1 \rangle. \end{aligned} \quad (7.6)$$

С учетом нормированности вектора $|\psi_1''\rangle$ отсюда следует выражение для собственного значения ρ' , отвечающего представлению $(N-1, M+1)$:

$$\begin{aligned} \rho'_{z \leq N, N-1, M+1} &= |\alpha_{N-1, M+1}|^2 \\ &= \frac{N+1}{N}. \end{aligned}$$

(7.7)

Состояние $|\psi_1'''\rangle$ содержит, кроме представления $(N-1, M+1)$, компоненту, принадлежащую представлению $(N, M-1)$. Поэтому

$$\rho'_{z \leq N} = \rho'_{z \leq N, N-1, M+1} P_{N-1, M+1} + \rho'_{z \leq N, N, M-1} P_{N, M-1}. \quad (7.8)$$

Вычисляя след обеих частей равенства (7.8), находим последнее ненулевое собственное значение:

$$\rho'_{z \leq N, N, M-1} = \frac{\Omega+2}{\Omega+1}. \quad (7.9)$$

Таким образом, три отличных от единицы собственных значения матрицы R суть

$$\rho_1 = -\frac{M+\Omega+2}{M(\Omega+1)},$$

$$\rho_2 = -\frac{1}{N}, \quad (7.10)$$

$$\rho_3 = -\frac{1}{\Omega+1}.$$

При $N \gg 1$ и $M \gg 1$ эти собственные значения малы, однако при небольших N или M одно из них остается конечным. Условие (2.4) в этом случае нарушается, если даже $-\Omega$ (и вместе с ним A) велико. Это нарушение связано с нарушением условия (III), сформулированного в разделе 2. Например, при $N=1$ или $M=1$ одно из собственных значений OMI становится равным -1 (при $\Omega \gg 1$), что согласуется с (2.8).

Представление (4.18), моделирующее случай нечетного ядра, рассмотренный в разделе 2, с числом частиц $A = 3\Omega + 1$ можно исследовать аналогичным способом. Для четырех собственных значений OMI , отличных от единицы, легко найти следующие выражения ($\Omega > 1$):

$$\rho_1 = - \frac{9\Omega^2 + 9\Omega - 2}{(3\Omega - 2)(3\Omega + 1)},$$

$$\rho_2 = - \frac{6\Omega}{(3\Omega - 2)(3\Omega + 1)},$$

(7.II)

$$\rho_3 = - \frac{2}{3\Omega},$$

$$\rho_4 = - \frac{2}{3\Omega - 3}.$$

При $\Omega \gg 1$ первое из этих собственных значений стремится к -1 , тогда как остальные становятся малыми, что находится в согласии с (2.8).

8. Заключение

Собственные значения ОМП, найденные в этой статье, свидетельствуют о том, что нормировочное условие Беляева-Зелевинского (2.4) справедливо в рамках модели Эллиотта в естественной области его применимости, то есть при выполнении условий (I)-(III), сформулированных в разделе 2. Проверка уравнений метода ОМП в какой-либо точно решаемой модели не является, конечно, их строгим доказательством, но, тем не менее, показывает, что эвристические представления о коллективных состояниях, лежащие в основе метода ОМП, по-видимому, соответствуют действительности. Особенно показательны с этой точки зрения те случаи, когда условия применимости (I)-(III) нарушаются. В настоящей работе это нарушение демонстрируют представления (4.I6) и (4.I8), которые содержат пары состояний, отличающихся лишь положением одной частицы (или небольшого числа частиц), что противоречит условию (III). Как и следовало ожидать, соотношение (2.4) в этом случае не выполняется, причем на примере представления (4.I6) можно проследить, как, по мере "коллективизации" выделенной полосы, т.е. возрастания параметров N

или M , нормировочное условие (2.4) становится все более точным.

Примером нарушения условия (III) является практически важный случай нечетного ядра. Уравнение (2.4) для такой системы неприменимо, но физически осмысленным и полезным становится нормировочное условие (2.8). Представления (4.I6) и (4.I8) демонстрируют выполнение этого условия в модели Эллиотта.

Автор благодарен В.Ф.Дмитриеву, В.Г.Зелевинскому и В.Б.Телицыну за стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- I. A.K.Kerman, A.Klein. Phys. Lett., 1 (1962) 136; Phys. Rev. 132 (1963) 1326.
2. С.Т.Беляев, В.Г.Зелевинский. ЯФ, 16 (1972) 1195.
3. S.T.Belyaev. In: Developments and borderlines of nuclear physics (Academic Press, NY, 1972) p. 60.
4. С.Т.Беляев, В.Г.Зелевинский. ЯФ, 17 (1973) 525.
5. М.И.Штокман. ЯФ, 22 (1975) 479; припринт ИЯФ 88-73.
6. В.Г.Зелевинский, М.И.Штокман. Изв.АН СССР (сер.физ.), 36 (1972) 2577.
7. V.G.Zelevinsky. Nucl. Phys., A344 (1980) 109.
8. V.G.Zelevinsky. Nucl. Phys., A337 (1980) 40.
9. D.Janssen. Nucl. Phys., A331 (1979) 311.
10. П.Н.Исаев. ЯФ, 32 (1980) 978.
11. S.T.Belayev, I.M.Pavlichenkov. Nucl. Phys., A388 (1982) 505.
12. В.В.Мазепус. ТМФ, 22 (1975) 406.
13. J.P.Elliott. Proc. Roy. Soc., 245 (1958) 128, 562.
14. J.P.Elliott. In: Selected topics in nuclear theory. (Vienna, 1963) p. 157.
15. А.Барут, Р.Рончка. Теория представлений групп и ее приложения, т.1., М.: Мир, 1980.
16. K.T.Neicht. Nucl. Phys., 62 (1965) 1.
17. A.P.Stone. Proc. Cambridge Phil. Soc., 57 (1961) 460.

В.В.Мазепус

ПРОВЕРКА МЕТОДА ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ
В МОДЕЛИ ЭЛЛИОТТА

Препринт
№ 83-79

Работа поступила - 30 июня 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 8.07-1983 г. МН 17632
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,0 печ.л., 1,6 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 79.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90