

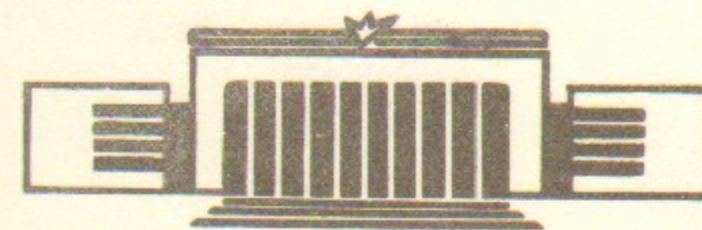
46



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.П. Нагорный, Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков  
ВЛИЯНИЕ ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ НА  
ЖЕЛОБКОВУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

ПРЕПРИНТ 83—74



НОВОСИБИРСК

EFFECT OF PLASMA FLOW ON FLUTE INSTABILITY

V.P.Nagorny, D.D.Ryutov, G.V.Stupakov

Institute of Nuclear Physics,  
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

The effect of plasma flow along magnetic field lines on flute instability in a periodic array of axisymmetric mirror cells is studied. Using the MHD equations the potential energy of flute oscillations is derived, the positive definiteness of which gives a sufficient condition for stability. For two limiting cases - paraxial mirror cells and cells with the point mirrors - the stability problem is completely solved and the growth rate of the instability is found. For the cells with point mirrors a full spectrum of oscillations having  $m = \infty$  ( $m$  is an azimuthal number) is obtained.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению влияния течения плазмы на устойчивость желобковых колебаний. Такая задача возникает в связи с анализом условий стабилизации плазмы в газодинамической ловушке, где, в отличие от "классического" пробкотрона, за пробкой имеется поток плотной плазмы [1]. При исследовании устойчивости газодинамической ловушки, однако, приходится принимать во внимание ряд дополнительных осложняющих факторов: инжекцию нейтралов, поддерживающую стационарное состояние в ловушке; сверхзвуковой характер течения за пробкой; наличие торцевых поверхностей, на которых рекомбинирует истекающая плазма. В полном объеме эта задача решается в нашей работе [2]. Цель же настоящей статьи заключается в изучении более простой модельной системы<sup>\*)</sup>, в которой влияние течения проявляется, так сказать, в чистом виде, — периодической системы связанных пробкотронов (см. рис. I).

Отметим, что применительно к токамакам влияние медленного течения плазмы на желобковую неустойчивость изучалась ранее в работе [3].

Анализ устойчивости в настоящей работе основан на уравнениях идеальной магнитной гидродинамики и ограничен случаем малого давления плазмы. Более точно, предполагается, что параметры

$$\beta_p \equiv \frac{8\pi p}{B^2}, \quad \beta_v \equiv \frac{4\pi \rho v^2}{B^2} \quad (I.I)$$

малы по сравнению с единицей, хотя скорость  $v$  может быть сравнима со скоростью звука. Это означает, что единственно возможными являются только возмущения, не искажающие магнитного

<sup>\*)</sup> Отметим, впрочем, что рассматриваемая система может имитировать ситуацию в многопробочной ловушке или в системе типа BUMPY TORUS, если в них по какой-либо причине создается течение плазмы вдоль силовых линий.

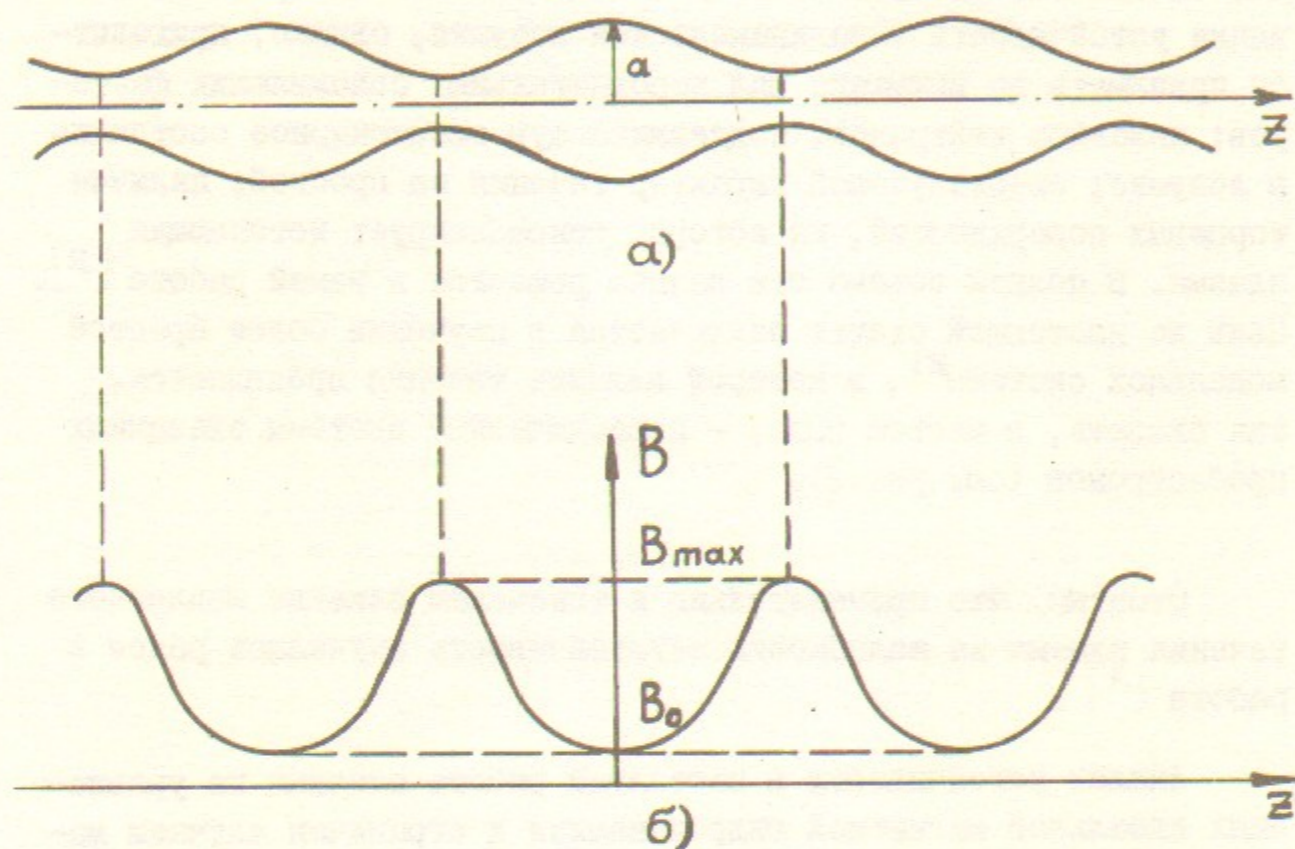


Рис. I. Периодическая система связанных пробкотронов

а) Силовые линии магнитного поля;

б) Напряженность магнитного поля на оси системы как функция координаты  $z$ .

Через  $B_{max}$  и  $B_0$  - обозначены поле в пробках и в экваториальной плоскости пробкотрона, соответственно;  $a$  - радиус плазмы в экваториальной плоскости пробкотрона; координата  $z$  отсчитывается вдоль оси системы.

поля, то есть совмещающие одну силовую трубку с другой. В случае же, когда хотя бы один из параметров ( $I, I$ ) сравнивается с единицей, важным становится учет баллонных эффектов в колебаниях.

Особенностью рассматриваемой задачи является то обстоятельство, что в рамках идеальной магнитной гидродинамики к ней неприменим энергетический принцип [4,5], сводящий определение границы устойчивости к вычислению минимального значения функционала потенциальной энергии. Некоторым аналогом энергетического принципа для плазмы с течением является утверждение, связывающее достаточный критерий устойчивости плазмы с положительной определенностью потенциальной энергии возмущений [6]. К сожалению, этот критерий, будучи достаточным, вообще говоря, не гарантирует, что область, где он нарушается, соответствует неустойчивости. Поэтому в настоящей работе, наряду с использованием этого критерия, мы, там, где это оказывается возможным, проводим полный анализ задачи на основе дисперсионного соотношения для колебаний.

Дальнейший план изложения следующий. В разделе 2 описано стационарное течение в периодической системе пробкотронов, а в разделе 3 получены уравнения желобковых колебаний. Несмотря на то, что анализ баллонных мод в системе с течением лежит вне рамок настоящей работы, в третьем разделе выведены также уравнения, справедливые при  $\beta_r, \beta_v \sim 1$ , с помощью которых могут быть, в принципе, исследованы колебания, возмущающие магнитное поле. Четвертый раздел посвящен общему анализу уравнений, основанному на исследовании потенциальной энергии системы. Здесь получен также достаточный критерий устойчивости желобковых возмущений. В разделе 5 рассмотрена ситуация, когда в пробкотронах области магнитных пробок разделяются длинной вставкой с однородным магнитным полем. Для такой системы найден полный спектр колебаний и получен необходимый и достаточный критерий устойчивости. Наконец, в заключительном, шестом разделе обсуждаются основные результаты работы.

## 2. СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ

Анализ устойчивости в настоящей работе проводится на основе уравнений идеальной магнитной гидродинамики с изотропным давлением:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div } p \vec{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{1}{4\pi\rho} [\vec{B}, \text{rot } \vec{B}], \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) S = 0, \quad (2.3)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot} [\vec{v} \vec{B}], \quad (2.4)$$

где  $\rho$ ,  $p$ ,  $\vec{v}$  - плотность, давление и скорость течения плазмы, соответственно,  $\vec{B}$  - напряженность магнитного поля, а  $S$  обозначает энтропию, приходящуюся на одну частицу,

$$S = \frac{1}{\gamma-1} \ln p \rho^{-\gamma}. \quad (2.5)$$

В рассматриваемом случае плазмы малого давления искажением вакуумного магнитного поля системы можно пренебречь. Форма силовых линий отдельного пробкотрона и система координат изображены на рис.2; максимальное значение поля в пробке равно  $B_{\max}$ , минимальное значение  $B_0$  достигается в экваториальной плоскости ловушки. Для дальнейшего удобно маркировать каждую силовую линию радиусом  $r_0$  точки ее пересечения с экваториальной плоскостью  $z = 0$ .

В стационарном состоянии предполагается, что скорость плазмы направлена вдоль магнитного поля:

$$\vec{v} = v \vec{h},$$

где  $\vec{h} = \vec{B}/B$  - единичный вектор в направлении магнитного поля. При этом уравнения (2.1), (2.3) и проекция (2.2) на  $\vec{h}$  легко интегрируются и дают:

$$\left. \begin{aligned} \rho v / B &= j(r_0) \\ S &= S(r_0) \\ \omega + v^2/2 &= q(r_0) \end{aligned} \right\}, \quad (2.6)$$

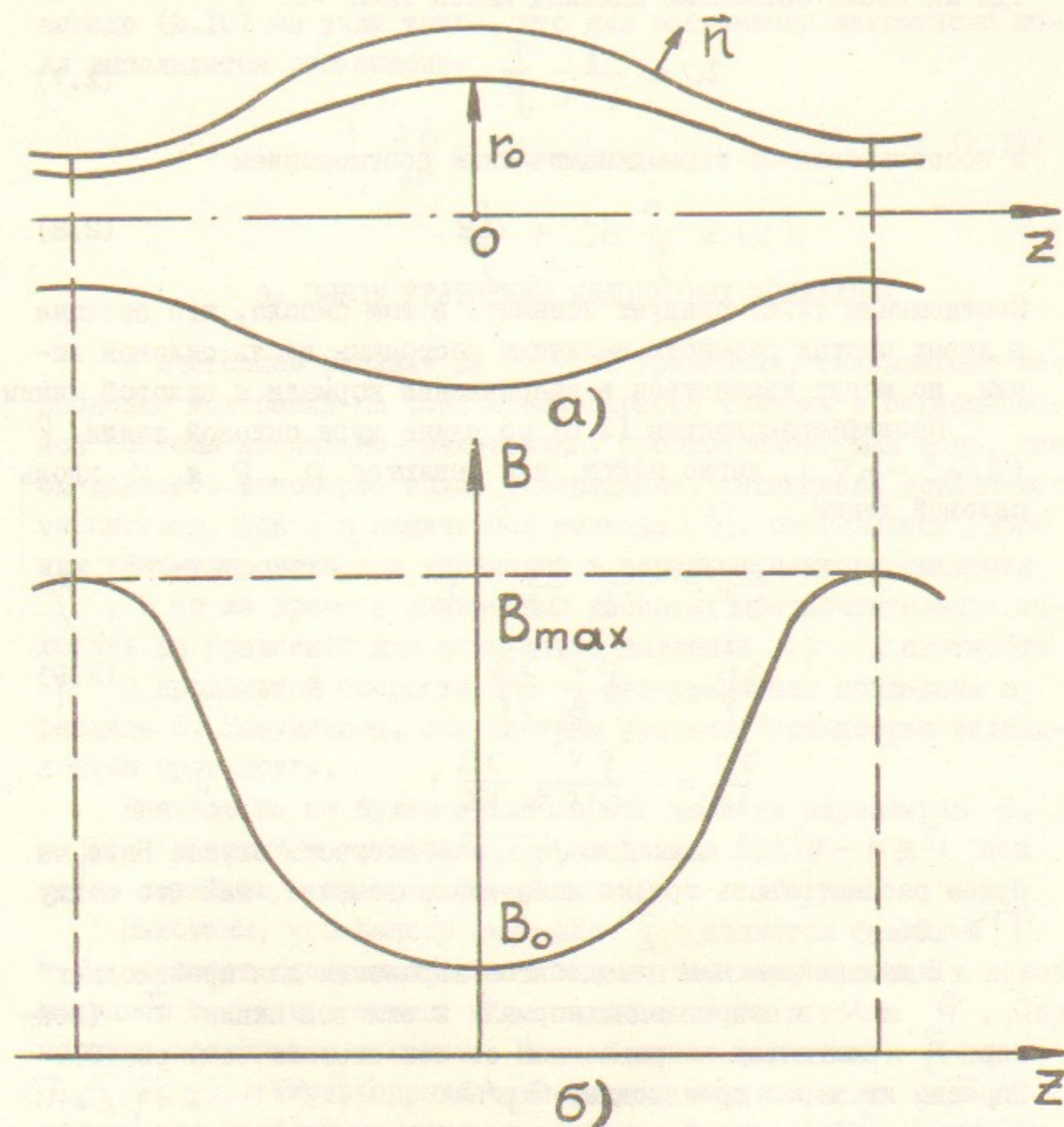


Рис.2. а) Форма силовых линий в пробкотроне; "0" - обозначает экваториальную плоскость, соответствующую  $z = 0$ ,  $r_0$  - расстояние от оси системы до силовой линии в экваториальной плоскости,  $\vec{n}$  - вектор нормали к силовой линии (положительным считается направление от оси системы); б) Напряженность магнитного поля на осевой силовой линии.  $B_{\max}$  - значение поля в пробке,  $B_0$  - поле в точке  $z = 0$ .

где мы ввели энтальпию единицы массы газа  $w$  :

$$w = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \quad (2.7)$$

и воспользовались термодинамическим соотношением

$$dw = \frac{p}{\rho} dS + \frac{dp}{\rho}. \quad (2.8)$$

Соотношения (2.6) следует понимать в том смысле, что стоящие в левых частях равенств величины постоянны вдоль силовой линии, но могут изменяться в направлении нормали к силовой линии.

Продифференцировав (2.6) по длине дуги силовой линии  $l$  ( $\partial/\partial l = \vec{h}\nabla$ ), легко найти, как меняются  $p$ ,  $\rho$  и  $v$  вдоль силовой линии

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial l} &= \frac{v}{\Gamma B} \frac{\partial B}{\partial l}, \\ \frac{\partial p}{\partial l} &= -\frac{\rho v^2}{\Gamma B} \frac{\partial B}{\partial l}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial l} &= -\frac{\rho v^2}{c^2 \Gamma B} \frac{\partial B}{\partial l}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $\Gamma \equiv 1 - v^2/c^2$ , а  $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$  - скорость звука. Ниже мы будем рассматривать только дозвуковое течение, так что всюду  $\Gamma > 0$ .

В дальнейшем нам понадобятся выражения для производных  $p$ ,  $\rho$  и  $v$  в направлении нормали к силовой линии  $\vec{n}$  (вектор  $\vec{n}$  считается направленным от оси системы, см. рис.2). Выразим их через производные  $\partial j/\partial n$ ,  $\partial S/\partial n$ ,  $\partial q/\partial n$  ( $\partial/\partial n = \vec{n}\nabla$ ), подействовав оператором ( $\vec{n}\nabla$ ) на уравнения (2.6) и воспользовавшись (2.5), (2.7). В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{\rho}{c^2 \Gamma} \frac{\partial q}{\partial n} - \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial n} - \frac{Bv}{c^2 \Gamma} \left( \frac{\partial j}{\partial n} + \alpha_n j \right), \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial q}{\partial n} - \rho \left( 1 + \gamma \frac{v^2}{c^2 \Gamma} \right) \frac{\partial S}{\partial n} - \frac{Bv}{\Gamma} \left( \frac{\partial j}{\partial n} + \alpha_n j \right), \quad (2.10) \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= -\frac{v}{c^2 \Gamma} \frac{\partial q}{\partial n} + \frac{v}{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial n} + \frac{B}{\Gamma \rho} \left( \frac{\partial j}{\partial n} + \alpha_n j \right), \end{aligned}$$

где  $\alpha_n = \vec{n}(\vec{h}\nabla)\vec{h}$  - проекция вектора кривизны на нормаль. При выводе (2.10) мы учли также, что для вакуумного магнитного поля выполняется соотношение

$$\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial n} = \alpha_n. \quad (2.11)$$

### 3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ЖЕЛОБКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

В настоящем разделе мы получим уравнения, описывающие желобковые колебания на фоне стационарного течения в периодической системе аксиально-симметричных пробкотронов. Для того, чтобы доказать некоторые общие утверждения, касающиеся устойчивости системы, как и в задаче без течения [4], оказывается удобным сформулировать эти уравнения в терминах вектора смещения  $\vec{\xi}$ . В то же время в конкретных расчетах предпочтительнее исходить из уравнений для возмущений давления  $\delta p$ , плотности  $\delta \rho$  и продольной скорости  $\delta v_{||}$ ; эти уравнения приведены в разделе 5. Разумеется, обе системы уравнений полностью эквивалентны друг другу.

Вначале мы не будем предполагать малости параметров  $\beta_p$  и  $\beta_v$  и получим уравнения, справедливые при  $\beta_p, \beta_v \sim 1$ , а затем перейдем к пределу  $\beta_p, \beta_v \rightarrow 0$ .

Напомним, что вектор смещения  $\vec{\xi}$  является функцией  $\vec{r}$  и  $t$  и имеет следующий смысл: жидкая частица, которая в невозмущенном течении в момент  $t$  находилась бы в точке  $\vec{r}$ , при наличии возмущения в момент  $t$  будет находиться в точке  $\vec{r} + \vec{\xi}(\vec{r}, t)$ . Через определенное таким образом поле  $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$  возмущение магнитного поля, давления и плотности плазмы в точке  $\vec{r}$  выражаются так же, как и в задаче без течения:

$$\begin{aligned} \delta B(\vec{r}, t) &= \text{rot} [\vec{\xi} \vec{B}], \\ \delta p(\vec{r}, t) &= -\vec{\xi} \nabla p - \rho \text{div} \vec{\xi}, \\ \delta \rho(\vec{r}, t) &= -\vec{\xi} \nabla \rho - \gamma \rho \text{div} \vec{\xi}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

а возмущение скорости находится из соотношения

$$\delta \vec{v}(\vec{r} + \vec{\xi}, t) = d\vec{\xi}/dt.$$

Разлагая левую часть последнего выражения по  $\vec{\xi}$ , найдем:

$$\delta \vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{\xi} - (\vec{\xi} \nabla) \vec{v}. \quad (3.2)$$

Линеаризованное уравнение движения запишем в следующем виде:

$$\rho \left[ \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + (\delta \vec{v} \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \nabla) \delta \vec{v} \right] + \delta \rho (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla \delta p + \vec{F}_M, \quad (3.3)$$

где магнитная сила

$$\vec{F}_M = \frac{1}{4\pi} \left[ -\nabla (\vec{B} \delta \vec{B}) + (\vec{B} \nabla) \delta \vec{B} + (\delta \vec{B} \nabla) \vec{B} \right]. \quad (3.4)$$

Если подставить выражения для  $\delta \rho$ ,  $\delta p$  и  $\delta \vec{v}$  из (3.1), (3.2) в (3.3), то уравнение малых колебаний примет вид [5]:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} + 2\rho (\vec{v} \nabla) \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} - \hat{F} \{ \vec{\xi} \} = 0, \quad (3.5)$$

где линейный оператор  $\hat{F} \{ \vec{\xi} \}$  задается выражением:

$$\begin{aligned} \hat{F} \{ \vec{\xi} \} = & \nabla (\gamma \rho \operatorname{div} \vec{\xi} + \vec{\xi} \nabla \rho) + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \cdot \operatorname{div} \rho \vec{\xi} + \rho (\vec{\xi} \nabla) (\vec{v} \nabla) \vec{v} - \\ & - \rho (\vec{v} \nabla) (\vec{v} \nabla) \vec{\xi} + \frac{1}{4\pi} \left\{ -\nabla (\vec{B} \delta \vec{B}) + (\vec{B} \nabla) \delta \vec{B} + (\delta \vec{B} \nabla) \vec{B} \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Дальнейшие упрощения выражений (3.1)–(3.6) основаны на предположении, что смещение  $\vec{\xi}(\vec{r})$  локализовано вблизи некоторой силовой линии  $\mathcal{L}$  и обращается в нуль при удалении от  $\mathcal{L}$  на расстояние, малое по сравнению со всеми характерными масштабами задачи. Кроме того считается, что размер желобка в азимутальном направлении  $\Delta \varphi$  мал по сравнению с масштабом изменения функции  $\vec{\xi}$  по радиусу (формально этому соответствует переход к пределу  $\xi_\varphi \rightarrow 0$ ,  $\Delta \varphi \rightarrow 0$ ). В результате, в уравнении (3.5) остаются только члены, содержащие проекции смещения на магнитное поле,  $\xi_{||}$ , и на вектор нормали,  $\xi_n$ , а также их производные вдоль силовой линии. Продольная и нормальная компоненты уравнения (3.5) при этом имеют вид (см. вывод в Приложении I):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_{||}}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial \xi_{||}}{\partial t} - 2v \alpha_n \frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial l} - \frac{\delta p}{\rho} v \frac{\partial v}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial l} \left[ v^2 \frac{\partial \xi_{||}}{\partial l} - v \xi_{||} \frac{\partial v}{\partial l} - \xi_n v \left( \alpha_n v + \frac{\partial v}{\partial n} \right) \right] + \\ + \frac{\delta B_n}{\rho B} \left( \frac{\partial p}{\partial n} + \alpha_n \rho v^2 \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial \xi_n}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial l} v \frac{\partial \xi_n}{\partial l} - v \frac{\xi_n}{\xi_{ж}} \frac{\partial}{\partial l} v \frac{\partial \xi_{ж}}{\partial l} + \\ + 2\alpha_n \frac{1}{\rho} (\delta p + \frac{v^2}{2} \delta \rho + \rho v \delta v_{||}) = \frac{B}{4\pi r \xi_{ж}} \frac{\partial}{\partial l} \xi_{ж} \delta B_n, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где все величины рассматриваются как функции длины силовой линии  $l$  и времени  $t$ .

Возмущение давления  $\delta p$ , плотности  $\delta \rho$ , продольной скорости  $\delta v_{||}$  и нормальной составляющей магнитного поля  $\delta B_n$  выражаются через компоненты вектора смещения следующим образом (для упрощения записи мы приводим выражения, справедливые при  $\beta_p, \beta_v \ll 1$ ; общий случай см. в Приложении I):

$$\delta p = -\xi_{||} \frac{\partial p}{\partial l} - \xi_n \frac{\partial p}{\partial n} - \gamma \rho B \frac{\partial}{\partial l} \frac{\xi_{||}}{B} + 2\gamma \rho \alpha_n \xi_n, \quad (3.9)$$

$$\delta \rho = -\xi_{||} \frac{\partial \rho}{\partial l} - \xi_n \frac{\partial \rho}{\partial n} - \rho B \frac{\partial}{\partial l} \frac{\xi_{||}}{B} + 2\rho \alpha_n \xi_n, \quad (3.10)$$

$$\delta v_{||} = \frac{\partial \xi_{||}}{\partial t} + v \frac{\partial \xi_{||}}{\partial l} - \xi_{||} \frac{\partial v}{\partial l} - 2v \alpha_n \xi_n, \quad (3.11)$$

$$\delta B_n = B \xi_{ж} \frac{\partial}{\partial l} \frac{\xi_n}{\xi_{ж}}, \quad (3.12)$$

где через  $\xi_{ж}$  обозначено смещение, совмещающее одну силовую линию с другой:

$$\xi_{ж}(l, t) = \xi_0(t) \frac{r_0 B_0}{r(l) B(l)}, \quad (3.13)$$

$r(l)$  – расстояние от оси ловушки до силовой линии, как функция длины дуги силовой линии, а индекс "0" указывает, что соответствующая величина берется в экваториальной плоскости пробирона.

Преобразуем дальше уравнения (3.7), (3.8), предположив теперь дополнительно, что  $\beta_p, \beta_v \ll 1$ . Рассмотрим сначала уравнение (3.8). Формально в нем главным становится слагаемое в правой части, содержащее возмущение магнитного поля  $\delta B_n$ . В нулевом приближении по параметру  $\beta_p + \beta_v$  оно должно обратиться в нуль, что означает  $\delta B_n = O(\beta_p + \beta_v)$ , или

$$\xi_n = \xi_{ж} + O(\beta_p + \beta_v).$$

Условие разрешимости следующего приближения получается, если в левой части уравнения (3.8) положить  $\xi_n = \xi_{ж}$  и проинтегрировать уравнение по периоду системы с весом  $\rho \xi_{ж} / B$ . Легко видеть, что при этом слагаемое, содержащее  $\partial \xi_n / \partial t$ , выпадает, и в результате получаем

$$B_0 \int_0^{2\pi} \xi_0 \left( \frac{\rho dl}{r^2 B^3} + \int \frac{dl}{r B^2} \alpha_n \delta(2\rho + \rho v^2) \right) = 0. \quad (3.14)$$

Обратимся теперь к уравнению (3.7). Во-первых, отбросим в нем последнее слагаемое в правой части, пропорциональное  $\delta B_n$ , и, следовательно, имеющее порядок малости  $O(\beta_p + \beta_v)$  по отношению к остальным членам уравнения. Далее, подставим в уравнение (3.7) выражения для  $\delta\rho$  и  $\delta v$  (3.9), (3.10) (с учетом (2.11)) и соберем в правой части слагаемые, содержащие  $\xi_n$ , перенеся в левую сторону члены с  $\xi_{||}$ . Тогда правая часть уравнения примет вид:

$$2v\alpha_n \frac{\partial \xi_{ж}}{\partial t} - \frac{2\gamma}{\rho} \frac{\partial}{\partial l} \rho \xi_{ж} \alpha_n - v \frac{\partial v}{\partial l} 2\alpha_n \xi_{ж} + \frac{\partial}{\partial l} \xi_{ж} \alpha_n v^2 + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial l} \xi_{ж} \frac{\partial \rho}{\partial n} + \frac{1}{\rho} v \frac{\partial v}{\partial l} \xi_{ж} \frac{\partial \rho}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial l} \xi_{ж} \frac{\partial v^2}{\partial n} \right].$$

Первое и последнее слагаемые в квадратных скобках можно преобразовать, воспользовавшись формулой (П2.1). В результате содержимое квадратных скобок примет вид

$$\left[ \frac{1}{\rho} \xi_{ж} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \rho}{\partial l} + \rho v \frac{\partial v}{\partial l} \right) - \alpha_n \xi_{ж} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial l} + v \frac{\partial v}{\partial l} \right) \right] = 0,$$

где мы воспользовались уравнением

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial l} + v \frac{\partial v}{\partial l} = 0.$$

Окончательно уравнение (3.7) можно записать так

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \xi_{||}}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial \xi_{||}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial l} \left( -\xi_{||} \frac{\partial \rho}{\partial l} - \gamma \rho B \frac{\partial}{\partial l} \frac{\xi_{||}}{B} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} v \frac{\partial v}{\partial l} \left( -\xi_{||} \frac{\partial \rho}{\partial l} - \rho B \frac{\partial}{\partial l} \frac{\xi_{||}}{B} \right) + \frac{\partial}{\partial l} \left( v^2 \frac{\partial \xi_{||}}{\partial l} - v \xi_{||} \frac{\partial v}{\partial l} \right) = \quad (3.15) \\ & = 2v\alpha_n \frac{\partial \xi_{ж}}{\partial t} - 2 \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial}{\partial l} \rho \xi_{ж} \alpha_n + v^2 \frac{\partial}{\partial l} \xi_{ж} \alpha_n. \end{aligned}$$

Достоинство такой записи заключается в том, что из нее явно видно, что правая часть уравнения становится малой в параки-альном приближении, когда кривизна  $\alpha_n$  мала.

#### 4. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЖЕЛОБКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Как отмечалось во Введении, особенностью рассматриваемой задачи является то обстоятельство, что для ее решения нельзя воспользоваться энергетическим принципом [4,5], стандартно применяемым для анализа равновесных конфигураций с  $\vec{V} = 0$ . Причина заключается в том, что хотя оператор  $\hat{F}$ , как можно показать [6], является самосопряженным, однако, наличие в уравнении (3.5) члена с первой производной по времени от  $\vec{\xi}$  (обращающегося в нуль вместе с  $\vec{V}$ ) не позволяет сформулировать для этого уравнения энергетический принцип. Тем не менее, анализ функционала

$$W \equiv - \frac{1}{2} \int \vec{\xi} \hat{F} \{ \vec{\xi} \} dV, \quad (4.1)$$

играющего роль потенциальной энергии возмущения, оказывается полезным. В частности, условие его положительной определенности является достаточным для устойчивости системы [6]. Удастся сформулировать и некоторые более тонкие утверждения об устойчивости, основанные только на изучении функционала  $W$  [7].

Применительно к задаче о желобковых возмущениях функционал (4.1) можно значительно упростить и записать его в терминах продольного смещения  $\xi_{||}$  и желобкового смещения  $\xi_{ж}$  (3.13). Опуская вывод, мы приведем сразу окончательное выражение для  $W$ :

$$W = W_{||}^{(1)} + W_{||}^{(2)} + W_{\perp}, \quad (4.2)$$



$$W_{||}^{(1)} = -\frac{1}{2} \varphi \int \frac{dl}{B} \left\{ (\rho v^2 - \gamma P) \left( \frac{\partial \xi_{||}}{\partial l} \right)^2 + 2 \left( \frac{\gamma P}{B} \frac{\partial B}{\partial l} - \frac{\partial P}{\partial l} - \rho v \frac{\partial v}{\partial l} \right) \xi_{||} \frac{\partial \xi_{||}}{\partial l} + \xi_{||}^2 \left[ \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial l} \frac{\partial P}{\partial l} - \frac{\gamma P}{B^2} \left( \frac{\partial B}{\partial l} \right)^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial l} \frac{\partial P}{\partial l} \right] \right\}, \quad (4.3)$$

$$W_{||}^{(2)} = -\varphi \int \frac{dl}{B} \xi_{||} \alpha_n \left\{ 2 \gamma P B \frac{\partial \xi_{||}}{\partial l} + \xi_{||} \frac{\partial P}{\partial l} - \rho v^2 \frac{\partial \xi_{||}}{\partial l} \right\}, \quad (4.4)$$

$$W_{\perp} = -\varphi \int \frac{dl}{B} \alpha_n \xi_{||}^2 \left( \frac{\partial P}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \rho \frac{v^2}{2} - 2 \gamma P \alpha_n \right), \quad (4.5)$$

где  $\varphi$  обозначает поток внутри силовой трубки, по объему которой проводится интегрирование. Поскольку зависимость функции  $\xi_{||}$  от  $l$  определена формулой (3.13), то выражение (4.2) является функционалом от функции продольного смещения  $\xi_{||}(l)$ .

Проведем минимизацию суммы  $W_{||}^{(1)} + W_{||}^{(2)}$ , входящей в (4.2), по  $\xi_{||}$ . Для этого преобразуем выражения (4.3), (4.4), выразив производные вдоль силовой линии от  $P$ ,  $\rho$  и  $v$  по формулам (2.9). После выделения полного квадрата, получим:

$$W_{||}^{(1)} + W_{||}^{(2)} = \frac{1}{2} \gamma \int \frac{dl}{B} P \Gamma \left( v \frac{\partial \xi_{||}}{\partial l} \frac{1}{v} - \frac{1+\Gamma}{\Gamma} \alpha_n \xi_{||} \right)^2 - \frac{1}{2} \gamma \int \frac{dl}{B} P \frac{(1+\Gamma)^2}{\Gamma} \alpha_n^2 \xi_{||}^2. \quad (4.6)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа для функции  $\xi_{||}$ , минимизирующей (4.6), имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial l} \frac{v P \Gamma}{B} \left( v \frac{\partial \xi_{||}}{\partial l} \frac{1}{v} - \frac{1+\Gamma}{\Gamma} \alpha_n \xi_{||} \right) = 0,$$

откуда находим:

$$v \frac{\partial \xi_{||}}{\partial l} \frac{1}{v} = C_* \frac{B}{\Gamma P v} + \frac{1+\Gamma}{\Gamma} \alpha_n \xi_{||}. \quad (4.7)$$

Константа интегрирования  $C_*$  найдется, если умножить формулу (4.7) на  $\rho/B$  и, пользуясь постоянством  $\rho v/B$  вдоль силовой линии (2.6), проинтегрировать (4.7) по периоду системы. В силу периодичности левая часть обратиться в нуль, и в результате получим:

$$C_* = - \left( \int \frac{dl}{B} \alpha_n \xi_{||} \rho \frac{1+\Gamma}{\Gamma} \right) \left( \int dl \frac{\rho}{\Gamma P v} \right)^{-1}. \quad (4.8)$$

Наконец, подставляя (4.7), (4.8) в (4.6), найдем:

$$\min (W_{||}^{(1)} + W_{||}^{(2)}) = \frac{1}{2} \gamma \left\{ \left( \int \frac{dl}{B} \alpha_n \xi_{||} \rho \frac{1+\Gamma}{\Gamma} \right)^2 \left( \int \frac{dl}{B} \frac{\rho^2}{\Gamma P} \right)^{-1} - \int \frac{dl}{B} P \frac{(1+\Gamma)^2}{\Gamma} \xi_{||}^2 \alpha_n^2 \right\}. \quad (4.9)$$

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$\left( \int f g dx \right)^2 \leq \left( \int f^2 dx \right) \left( \int g^2 dx \right),$$

выражение, стоящее в правой части (4.9), отрицательно.

Вместе с (4.5) выражение (4.9) дает достаточный критерий устойчивости желобковых колебаний в периодической системе:

$$W_{\perp} + \min (W_{||}^{(1)} + W_{||}^{(2)}) > 0. \quad (4.10)$$

В соответствии со сказанным выше, последние два слагаемые в (4.10) вносят отрицательный вклад, и в этом смысле учет продольного смещения приводит к ухудшению устойчивости системы. Отметим также, что критерий (4.10) является обобщением на случай течения хорошо известного условия

$$\frac{dP}{dU} > -\gamma \frac{P}{U}, \quad U = \int \frac{dl}{B}, \quad (4.11)$$

причем, как легко проверить, при  $v = 0$  (4.10) сводится к (4.11).

В параксиальном приближении, когда характерный радиус плазмы  $a$  мал по сравнению с масштабом  $l$ , на котором меняется магнитное поле (при этом  $|\alpha_n| \sim a/l^2$ ), неравенство (4.10) значительно упрощается. Пренебрегая в  $W$  членами, квадратичными по  $\alpha_n$ , находим, что

$$\min W = W_{\perp} + O(a^2/l^2),$$

причем в  $W_{\perp}$  можно также пренебречь последним слагаемым в интеграле (4.5). В результате (4.10) переходит в следующий простой критерий:

$$\int \frac{d\ell}{B} \alpha_n \xi_{ж}^2 \frac{\partial}{\partial n} (2\rho + \rho v^2) < 0, \quad (4.12)$$

совпадающий с критерием устойчивости Розенблюта-Лонгмайра для анизотропной плазмы [8]:

$$\int \frac{d\ell}{B} \alpha_n \xi_{ж}^2 \frac{\partial}{\partial n} (\rho_{\parallel} + \rho_{\perp}) < 0, \quad (4.13)$$

в котором в качестве  $\rho_{\perp}$  подставлено  $\rho$ , а роль  $\rho_{\parallel}$  играет величина  $\rho + \rho v^2$ . Напомним, однако, что неравенство (4.13) получено в [8] с помощью энергетического принципа и является необходимым и достаточным условием устойчивости, тогда как соотношение (4.12) выведено выше только как достаточное условие. На самом деле, как мы сейчас покажем, неравенство (4.12) является также и необходимым для устойчивости в параксиальном приближении.

Доказательство основано на анализе уравнения (3.15) для  $\xi_{\parallel}$ . Из него легко оценить, что в параксиальном приближении в желобковых колебаниях

$$\xi_{\parallel} \sim \xi_{ж} \frac{a}{\ell}, \quad (4.14)$$

и поэтому вклад слагаемых, содержащих  $\xi_{\parallel}$  в  $\delta\rho$ ,  $\delta\rho$ ,  $\delta v_{\parallel}$  (см. формулы (3.9), (3.11)) мал по параметру  $a^2/\ell^2$ . Пренебрегая им, получим, что дисперсионное уравнение (3.14) принимает следующий вид

$$\omega^2 = - \left( \int \frac{d\ell}{r^2 B^3} \alpha_n \frac{\partial}{\partial n} (2\rho + \rho v^2) \right) \left( \int \frac{\rho d\ell}{r^2 B^3} \right)^{-1}. \quad (4.15)$$

Отсюда явно видно, что критерий (4.12) является в параксиальном приближении как необходимым так и достаточным для устойчивости.

В связи с оценкой (4.14) сделаем следующее замечание. Помимо желобковых колебаний в рассматриваемой системе имеются звуковые моды (а также энтропийные колебания, см. следующий

раздел), для которых (4.14) не выполняется. Связь между  $\xi_{\parallel}$  и  $\xi_{ж}$  в них находится с помощью уравнения (3.14) и приводит (вместо (4.14)) к следующему соотношению

$$\xi_{ж} \sim \frac{a}{\ell} \xi_{\parallel}.$$

Однако учет этих мод не может изменить вывода об устойчивости системы в случае, когда частота (4.15) положительна, поскольку этот вывод основан на строгом критерии (4.10), учитывающем всевозможные колебания в ловушке.

## 5. ЖЕЛОБКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ДЛИННЫХ ПРОБКОТРОНОВ

В предыдущем разделе было получено достаточное условие устойчивости плазмы относительно желобковых возмущений. Недостатком его, как и всякого достаточного критерия, является то, что он не дает возможности ответить на вопрос об устойчивости плазмы в случае, когда этот критерий не удовлетворяется. Поэтому ниже мы рассмотрим систему, в которой удастся найти аналитически весь спектр колебаний и, таким образом, прямым путем получить необходимое и достаточное условие устойчивости. Эта система представляет собой последовательность пробкотронов, каждый из которых имеет длинный участок однородного поля и симметричные короткие пробки (см. рис.3), так что длина пробки  $L_{np}$  мала по сравнению с длиной однородного участка  $L_0$ .

$$L_{np}/L_0 \ll 1. \quad (5.1)$$

Не будучи принципиально важным, это ограничение, однако, сильно упрощает вычисления и позволяет решить задачу о колебаниях плазмы до конца.

С помощью условия (3.14) оценим характерные частоты колебаний в пробкотроне, удовлетворяющем условию (5.1). В соответствии с (3.9)-(3.11)

$$\delta(2\rho + \rho v^2) \sim \rho \frac{\xi_0}{a},$$

а кривизна силовых линий в области пробки по порядку величины равна  $\alpha \sim a/L_{np}^2$  (см. обозначения на рис.3). Таким образом, из (3.14) имеем

$$\frac{\rho L}{B^2 a} \xi_0 \omega^2 \sim \frac{L_{np}}{B^2 a} \alpha \xi_0 \frac{\rho}{a} \sim \frac{\xi_0}{B^2 a} \frac{\rho}{L_{np}},$$

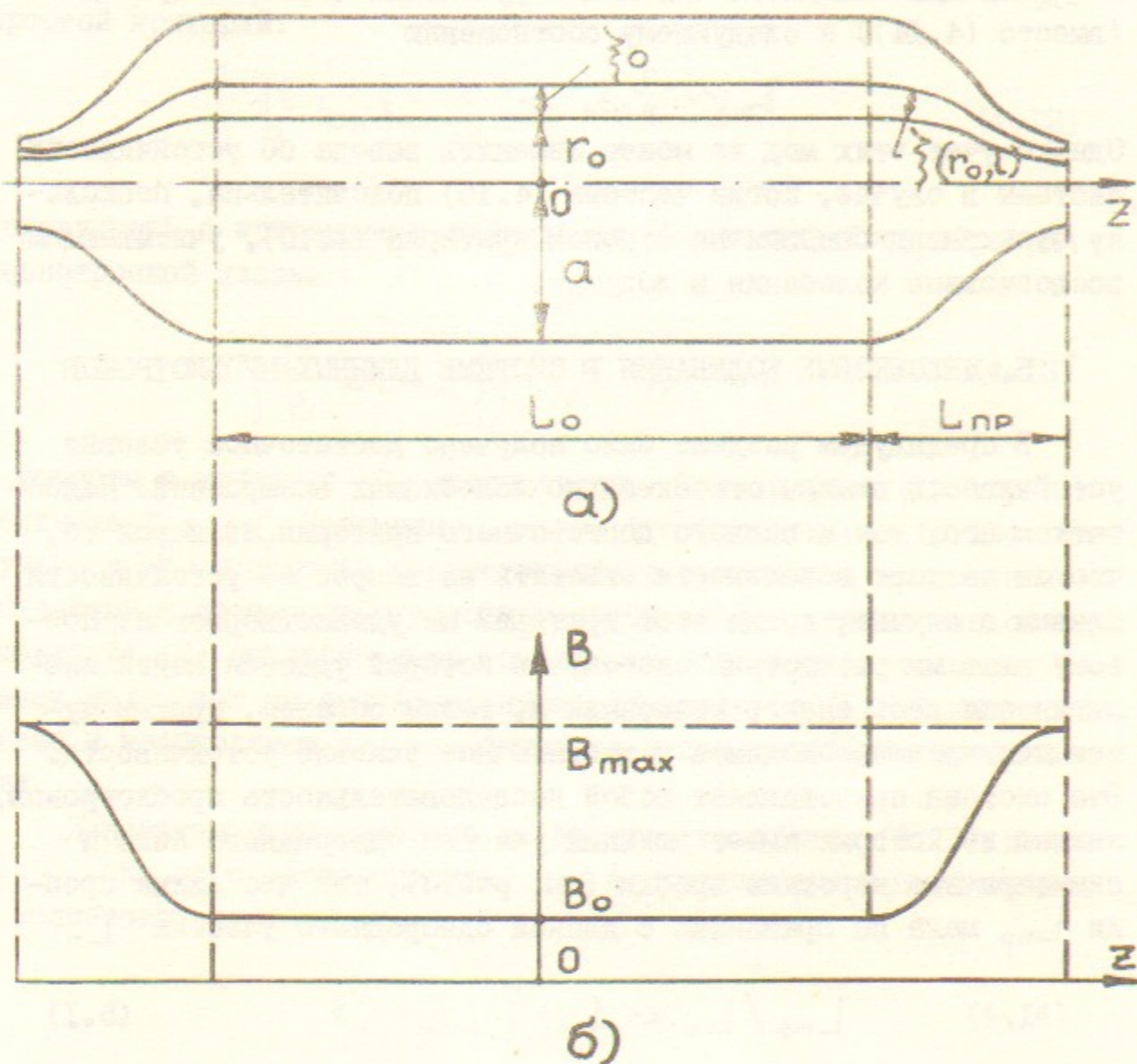


Рис.3. а) Геометрия магнитного поля длинного пробкотрона. Магнитные пробки длины  $L_{пр}$  разделены областью однородного магнитного поля длины  $L_0$ ,  $L_0 \gg L_{пр}$ .  
 - радиус плазмы на однородном участке,  $r_0$  и  $\xi_0$  - расстояние от оси системы до силовой линии и ее смещение в экваториальной плоскости ( $z = 0$ );  $\xi(r_0, l)$  - величина смещения как функция  $r_0$  и длины силовой линии, отсчитываемой от экваториальной плоскости;  $\xi(r_0, 0) = \xi_0$ .  
 б) Напряженность магнитного поля на осевой силовой линии в длинном пробкотроне. Через  $B_{max}$  и  $B_0$  обозначены поля, соответственно, в пробке и на однородном участке.

откуда

$$\omega \sim \frac{c}{\sqrt{L L_{пр}}}, \quad (5.2)$$

где  $L$  - длина участка силовой линии между соседними максимумами магнитного поля (учитывая неравенство (5.1) в дальнейшем мы не будем делать различия между  $L_0$  и  $L$ ). Поскольку эта частота (при  $v \sim c$ ) много меньше обратного времени пролета частицы через пробку

$$\frac{\omega}{c} L_{пр} \sim \frac{\omega}{c \pm v} L_{пр} \ll 1,$$

то в процессе колебаний возмущенное течение в пробке является квазистационарным. Это обстоятельство будет существенно использовано ниже при решении задачи.

Как уже отмечалось в разделе 3, при нахождении спектра колебаний удобнее исходить не из уравнения (3.15) для  $\xi_{||}$ , а из уравнений для возмущений плотности  $\delta\rho$ , давления  $\delta p$  и скорости  $\delta v_{||}$ . Чтобы получить эти уравнения, представим возмущение скорости при желобковом смещении в виде

$$\delta \vec{v} = \delta v_{||} \vec{h} + \xi_{ж} \vec{n}. \quad (5.3)$$

Полагая, что  $\xi_0$ ,  $\delta\rho$ ,  $\delta p$  и  $\delta v_{||}$  зависят от времени как  $e^{-i\omega t}$ , линеаризуем уравнения (2.1), (2.3) и проекцию на  $\vec{h}$  уравнения (2.2). Рассматривая при этом все величины как функции  $r_0$  и  $l$ , получим (см. также [2])

$$-i\omega \delta S + v \frac{\partial \delta S}{\partial l} = i\omega \xi_0 \frac{\partial S}{\partial r_0}, \quad (5.4)$$

$$-i\omega \delta p + \rho v \frac{\partial}{\partial l} \frac{\rho \delta v_{||} + v \delta p}{\rho v} = i\omega \xi_0 B^2 \frac{\partial}{\partial r_0} \frac{\rho}{B^2}, \quad (5.5)$$

$$-i\omega \delta v_{||} + \frac{\partial}{\partial l} (\delta w + v \delta v_{||}) = \frac{\rho}{r} \frac{\partial \delta S}{\partial l} - i\omega \xi_0 B \frac{\partial}{\partial r_0} \frac{v}{B}. \quad (5.6)$$

При выводе (5.4)-(5.6) были использованы формулы (2.6), (2.II), (III.2I) и соотношение

$$\frac{1}{rB} \frac{\partial}{\partial l} = \frac{1}{r_0 B_0} \frac{\partial}{\partial r_0}.$$

Условие (3.14) замыкает полученную систему уравнений, решение которой дает дисперсионное уравнение желобковых колебаний.

Уравнение (5.4) легко решается:

$$\delta S = -\xi_0 \frac{\partial S}{\partial r_0} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(\omega - \omega_n) e^{-i\omega_n \int_{-L/2}^L \frac{dl'}{v}}, \quad (5.7')$$

где

$$\omega_n = 2\pi n \left( \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dl}{v} \right)^{-1}. \quad (5.7'')$$

Сумма, стоящая в правой части (5.7'), описывает энтропийные волны. Эта часть спектра характеризуется действительными частотами  $\omega_n$  и не имеет отношения к желобковой неустойчивости. При  $\omega \neq \omega_n$ ,  $\delta S$  - постоянно вдоль силовой линии:

$$\delta S = -\xi_0 \frac{\partial S}{\partial r_0} = \text{const}. \quad (5.8)$$

Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  безразмерные возмущения величин  $j$  и  $q$ :  $\alpha = \delta j / j$ ,  $\beta = \delta q / v_0^2$  (напомним, что  $j = \rho v / B$ ,  $q = \omega + v^2/2$ , а индекс "0" означает, что данная величина берется в точке пересечения силовой линии с экваториальной плоскостью) и введем вместо  $\delta \rho$  и  $\delta v$  функции  $z_{1,2}$ , связанные с  $\alpha$  и  $\beta$  соотношениями:

$$z_{1,2} = \alpha \pm \frac{v_0}{c_0} \beta. \quad (5.9)$$

Очевидно  $\alpha = (z_1 + z_2)/2$ ,  $\beta = (c_0/2v_0)(z_1 - z_2)$ . В пределе, когда частота возмущений  $\omega$  стремится к нулю, функции  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $z_{1,2}$  являются постоянными вдоль линий тока. Переменные  $z_{1,2}$  удобны тем, что, как будет видно, система уравнений, из которых они определяются, имеет диагональный вид на однородном участке.

Возмущения  $\delta \rho$ ,  $\delta p$  и  $\delta v$ , выражаются через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta S$  (или через  $\delta S$  и  $z_{1,2}$ ) с помощью простых алгебраических соотношений

$$\frac{\delta v_{||}}{v} = \frac{1}{c^2 \Gamma} \left[ (\alpha + \delta S) c^2 - \beta v_0^2 \right], \quad (5.10)$$

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{1}{c^2 \Gamma} (\beta v_0^2 - \alpha v^2 - c^2 \delta S), \quad (5.11)$$

$$\frac{\delta p}{\rho} = \gamma \frac{\delta \rho}{\rho} + (\gamma - 1) \delta S. \quad (5.12)$$

Соответственно,

$$\delta(2\rho + \rho v^2) = \left(2\rho + \frac{\rho v^2}{\Gamma}\right) \xi_0 \frac{\partial S}{\partial r_0} + \rho v_0 c_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2 \Gamma}\right) (z_1 - z_2) - \frac{1}{2} \frac{\rho v^4}{c^2 \Gamma} (z_1 + z_2). \quad (5.13)$$

Подставив (5.8)-(5.12) в (5.5)-(5.6), получим уравнение, определяющее  $z_{1,2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_{1,2}}{\partial l} - i \frac{\omega}{v_0 \pm c_0} z_{1,2} = i \frac{\omega \xi_0}{v_0 \pm c_0} \left( \frac{1}{j} \frac{\partial j}{\partial r_0} \pm \frac{1}{c_0 v_0} \frac{\partial q}{\partial r_0} \right) + \\ + i \omega \sigma_{1,2} \left( \alpha + \frac{\xi_0}{j} \frac{\partial j}{\partial r_0} \right) + i \omega \gamma_{1,2} \left( \beta + \frac{\xi_0}{v_0^2} \frac{\partial q}{\partial r_0} \right) - \\ - i \omega \xi_0 \frac{B_0 \Gamma_0}{B r v} \propto \left( 1 + \Gamma \mp \frac{v^4}{v_0 c_0 c^2} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Коэффициенты  $\sigma_{1,2}$  и  $\gamma_{1,2}$  определяются параметрами невозмущенного течения и отличны от нуля только в области пробок, где  $v \neq v_0$ :

$$\sigma_{1,2} = \frac{v_0 \mp c_0}{\Gamma_0 c_0^2} - \frac{v}{c^2 \Gamma} \pm \frac{v}{v_0 c_0 \Gamma},$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{v_0}{c_0} \frac{v_0 \mp c_0}{c_0^2 \Gamma_0} + \frac{v_0^2}{c^2 \Gamma v} \mp \frac{v v_0}{c^2 \Gamma c_0}.$$

При получении (5.14) мы воспользовались формулами (2.10) и соотношением

$$\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r_0} = \frac{\Gamma_0 B_0}{r B} \propto.$$

Представим  $z_i$  в виде

$$z_i = z_{0i} + \tilde{z}_i, \quad (5.15)$$

$$z_{0i} = -\xi_0 \left( \frac{1}{j} \frac{\partial j}{\partial r_0} \pm \frac{1}{c_0 v_0} \frac{\partial q}{\partial r_0} \right). \quad (5.16)$$

При этом  $\alpha = -\frac{\xi_0}{j} \frac{\partial j}{\partial r_0}$ ,  $\beta_0 = -\frac{\xi_0}{v_0^2} \frac{\partial q}{\partial r_0}$ , а  $\tilde{z}_i$  находится из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{z}_i}{\partial \ell} - i \frac{\omega}{v_0 \pm c_0} \tilde{z}_i &= \psi_i(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ell) \equiv \\ &\equiv i\omega \frac{\sigma_i + \frac{c_0}{v_0} \gamma_i}{2} \tilde{z}_i + i\omega \frac{\sigma_i - \frac{c_0}{v_0} \gamma_i}{2} \tilde{z}_2 - i\omega \xi_0 \frac{2r_0 B_0^2}{\rho_0 v_0^2 c_0} \varphi_i, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где

$$\varphi_{1,2} = \frac{\rho v}{r B^2} \left[ v_0 c_0 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2 \Gamma} \right) \mp \frac{v^4}{2c^2 \Gamma} \right]. \quad (5.18)$$

Отметим, что  $z_{0i}$  не зависит от  $\omega$ , а  $\tilde{z}_i$  - от производных  $\partial j / \partial r_0$ ,  $\partial q / \partial r_0$ ,  $\partial S / \partial r_0$ . После подстановки (5.15)-(5.16) в формулу (5.13) последняя принимает вид:

$$\delta(2\rho + \rho v^2) = \left\{ \left( 2\rho + \frac{\rho v^2}{\Gamma} \right) \xi_0 \frac{\partial S}{\partial r_0} - 2\rho \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2 \Gamma} \right) \xi_0 \frac{\partial q}{\partial r_0} + \frac{\rho v^4}{c^2 \Gamma} \xi_0 \frac{\partial j}{\partial r_0} \right\} + \quad (5.19)$$

$$+ \left[ \rho v_0 c_0 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2 \Gamma} \right) - \frac{\rho v^4}{2c^2 \Gamma} \right] \tilde{z}_1 - \left[ \rho v_0 c_0 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2 \Gamma} \right) + \frac{\rho v^4}{2c^2 \Gamma} \right] \tilde{z}_2.$$

Выражение в фигурных скобках есть не что иное, как  $\xi_0 \frac{\partial}{\partial r_0} (2\rho + \rho v^2)$ , поэтому ниже, для краткости, будет использоваться именно это обозначение.

Для нахождения  $\tilde{z}_i$  удобно от уравнения (5.17) перейти к эквивалентному ему интегральному уравнению. Используя условие периодичности:

$$\tilde{z}_i \left( -\frac{L}{2} \right) = \tilde{z}_i \left( \frac{L}{2} \right), \quad (5.20)$$

находим

$$\tilde{z}_i = e^{ik_i L} \left( \int_{-L/2}^{\ell} e^{-ik_i \ell'} \psi_i d\ell' + \frac{e^{ik_i L}}{1 - e^{ik_i L}} \int_L^{\ell} e^{-ik_i \ell'} \psi_i d\ell' \right), \quad (5.21)$$

где  $k_i = \omega / (v_0 \pm c_0)$ .

Итерируя уравнение (5.21) по параметру  $L_{np} \omega / c_0$ , можно найти  $\tilde{z}_i$ . Пользуясь тем, что  $\sigma_i \sim \gamma_i c_0 / v_0 \sim 1/c_0$  и, следовательно, в правой части (5.21)  $\tilde{z}_i$  входит с коэффициентом, равным по порядку величины  $\omega L_{np} / c_0$ , пренебрежем  $\tilde{z}_i$  в подынтегральном выражении, т.е. положим

$$\psi_i^{(1)} = -i\omega \xi_0 \frac{2r_0 B_0^2}{\rho_0 v_0^2 c_0} \varphi_i. \quad (5.22')$$

Поправка к  $\psi_i^{(1)}$  мала по параметру  $kL_{np}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i &= -i\omega \xi_0 \frac{2r_0 B_0^2}{\rho_0 v_0^2 c_0} e^{ik_i L} \left( \int_{-L/2}^{\ell} e^{-ik_i \ell'} \varphi_i d\ell' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{ik_i L}}{1 - e^{ik_i L}} \int_L^{\ell} e^{-ik_i \ell'} \varphi_i d\ell \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Для справки приведем выражение для  $\psi_i^{(n)}$  в последующих приближениях:

$$\psi_i^{(n)} = i \frac{\omega}{2} \left( \sigma_i + \frac{c_0}{v_0} \gamma_i \right) \tilde{z}_1^{(n-1)} + i \frac{\omega}{2} \left( \sigma_i - \frac{c_0}{v_0} \gamma_i \right) \tilde{z}_2^{(n-1)}. \quad (5.22'')$$

Подставляя (5.19) и (5.23) в условие (3.14), получим дисперсионное уравнение:

$$\Omega^2 A(j, S, q; \frac{\partial j}{\partial r_0}, \frac{\partial S}{\partial r_0}, \frac{\partial q}{\partial r_0}) = \omega^2 - \nu \omega F(j, S, q; \omega), \quad (5.24)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{\rho_0}{\rho_0 L L_{np}}, \quad \nu = \frac{c_0}{L} \left( \frac{a}{L_{np}} \right)^2, \quad (5.25)$$

$$A = 2 \frac{B_0^2 r_0 L_{np}}{\rho_0} \int_{L_{np}} \frac{d\ell}{B^2 \Gamma} \approx \frac{\partial}{\partial r_0} (2\rho + \rho v^2), \quad (5.26)$$

$$F(\omega) = 8 \left( \frac{\Gamma_0}{a} \right)^2 \left( \frac{L_{np} B_0^2}{\rho_0 v_0 c_0} \right)^2 \sum_{i=1,2} \left( \int_{L_{np}} \varphi_i d\ell \right)^2 \text{ctg} \frac{\omega L}{2v_i}, \quad (5.27)$$

а,  $v_i = c_0 \pm v_0$ ; для краткости все аргументы кроме  $\omega$  в коэффициентах  $A$  и  $F$  опущены. Поскольку  $L_{np}/L \ll 1$ , мы в (5.24)-(5.27) заменили  $\int \frac{\rho_0 dl}{B^2 r^2} \approx \rho_0 L / (B^2 r^2)$  и воспользовались тем, что при  $k_i L_{np} \ll 1$  для любых двух функций  $f$  и  $g$ , отличных от нуля только в области пробок, справедливо следующее соотношение:

$$\int_L f e^{ik_i l} dl \left[ \int_{-L/2}^L e^{-ik_i l'} g_i dl' + \frac{e^{ik_i L}}{1 - e^{ik_i L}} \int_L e^{-ik_i l} g dl \right] =$$

$$= 2i \left( \text{ctg} \frac{k_i L}{2} \right) \int_{L_{np}} f dl \cdot \int_{L_{np}} g dl.$$

Строго говоря, разложение (5.22')-(5.22'') несправедливо в окрестности резонансов  $k_i L = 2\pi n$ , однако, более аккуратные вычисления показывают, что уравнение (5.24)-(5.27) сохраняет свой вид, только особенности в  $F(\omega)$  сдвигаются из точек  $\omega L / (c_0 \pm v_0) = 2\pi n$  в точки  $\omega \int \frac{dl}{c \pm v} = 2\pi n$ , что несущественно для рассматриваемой задачи.

График правой части уравнения (5.24) для действительных значений  $\omega$  приведен на рис.4; решениям уравнения соответствуют точки пересечения ветвей функции  $\omega^2 - \nu \omega F(\omega)$  с прямой  $\Omega^2 A = \text{const}$ , параллельной оси  $\omega$ . Из (5.7) и рис.4 можно заключить, что спектр колебаний состоит из трех компонент. Две из них всегда устойчивы. Это энтропийные волны с частотами

$$\omega_n = 2\pi n \left( \int_0^L \frac{dl}{v} \right)^{-1}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

и звуковые - с частотами, близкими к

$$\Omega_n^\pm \approx 2\pi n \frac{c_0 \pm v_0}{L}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Третья компонента соответствует желобковой моде; ее частота приблизительно равна

$$\Omega_{жк} \approx \pm A^{1/2} \Omega.$$

Эта мода может быть как устойчивой, так и неустойчивой в зависимости от соотношения между  $A$  и  $F(\omega)$ . Условие устойчивости системы имеет вид:

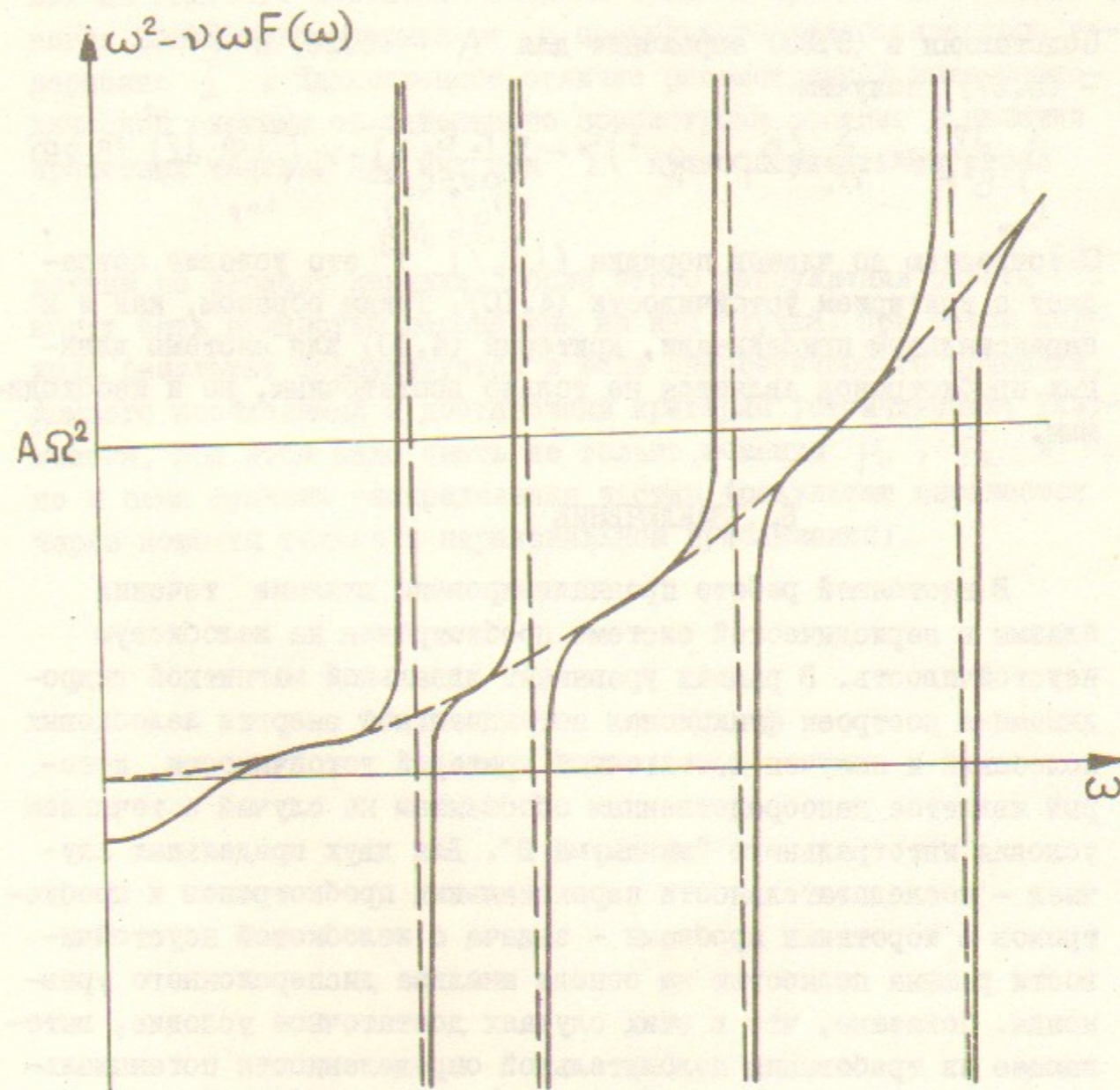


Рис.4. График функции  $G(\omega) \equiv \omega^2 - \nu \omega F(\omega)$  при  $\omega > 0$  ( $G(-\omega) = G(\omega)$ ). Функция  $G(\omega)$  обращается в  $\pm \infty$  в точках  $\omega = \pm \Omega_n^\pm$ , где  $\Omega_n^\pm = 2\pi n (c_0 \pm v_0) / L$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Выведем уравнения колебаний тонкой силовой трубки, не предполагая малости параметров  $\beta_p \equiv 8\pi P/B^2$  и  $\beta_v \equiv 4\pi \rho v^2/B^2$ .

Обозначим  $\xi_n = \vec{n} \vec{\xi}$ ,  $\xi_{||} = \vec{h} \vec{\xi}$ ,  $\xi_\varphi = \vec{e}_\varphi \vec{\xi}$ , где  $\vec{e}_\varphi$  - единичный вектор в азимутальном направлении. Введем также вектор  $\vec{\xi}_\perp = \vec{\xi} - \vec{h} \xi_{||}$  и, пользуясь формулой для возмущения магнитного поля:

$$\delta \vec{B} = \text{rot} [\vec{\xi}_\perp \vec{B}] = (\vec{B} \nabla) \vec{\xi}_\perp - (\vec{\xi}_\perp \nabla) \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{\xi}_\perp,$$

найдем компоненты  $\delta \vec{B}$ :

$$\delta B_{||} = \vec{h} \delta \vec{B} = \xi_n (B \alpha_n + \frac{\partial B}{\partial n}) - B \text{div} \vec{\xi}_\perp, \quad (\text{П.1})$$

$$\delta B_n = \vec{n} \delta \vec{B} = B \frac{\partial \xi_n}{\partial \ell} - \xi_n B \vec{n} \frac{\partial \vec{h}}{\partial n}, \quad (\text{П.2})$$

$$\delta B_\varphi = \vec{e}_\varphi \delta \vec{B} = B \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \ell} - \frac{\xi_\varphi}{r} B_r. \quad (\text{П.3})$$

Через эти компоненты выражаются составляющие магнитной силы  $\vec{F}_m$  (3.4):

$$F_{m||} = - \frac{\delta B_n}{B} \left( \frac{\partial p}{\partial n} + \alpha_n \rho v^2 \right), \quad (\text{П.4})$$

$$4\pi F_{mn} = - \frac{\partial}{\partial n} B \delta B_{||} + B \frac{\partial \delta B_n}{\partial \ell} + 2 \alpha_n B \delta B_{||} + B \delta B_n \vec{n} \frac{\partial \vec{h}}{\partial n}, \quad (\text{П.5})$$

$$4\pi F_{m\varphi} = - \frac{B}{r} \frac{\partial \delta B_{||}}{\partial \varphi} + B \frac{\partial \delta B_\varphi}{\partial \ell} + \delta B_\varphi \frac{B_r}{r}. \quad (\text{П.6})$$

При выводе (П.4) мы воспользовались проекцией на  $\vec{n}$  уравнения равновесия (2.2) для невозмущенного течения:

$$\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial n} - \alpha_n = - \frac{4\pi}{B^2} \left( \frac{\partial p}{\partial n} + \rho v^2 \alpha_n \right). \quad (\text{П.7})$$

Далее, по формулам (3.1) находим  $\delta p$  и  $\delta p$ , пользуясь тем, что

$$\text{div} \vec{\xi} = \text{div} \vec{\xi}_\perp + \text{div} \xi_{||} \vec{h} = \text{div} \vec{\xi}_\perp + B \frac{\partial \xi_{||}}{\partial \ell}.$$

Имеем

$$\delta p = - \xi_{||} \frac{\partial p}{\partial \ell} - \xi_n \frac{\partial p}{\partial n} - \rho B \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\xi_{||}}{B} - \rho \text{div} \vec{\xi}_\perp, \quad (\text{П.8})$$

$$\delta p = - \xi_{||} \frac{\partial p}{\partial \ell} - \xi_n \frac{\partial p}{\partial n} - \gamma \rho B \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\xi_{||}}{B} - \gamma \rho \text{div} \vec{\xi}_\perp. \quad (\text{П.9})$$

Наконец, из (3.2) получаем выражения для компонент возмущения скорости  $\delta \vec{v}$ :

$$\delta v_n = \frac{\partial \xi_n}{\partial t} - v \xi_n \vec{n} \frac{\partial \vec{h}}{\partial n} + v \frac{\partial \xi_n}{\partial \ell}, \quad (\text{П.10})$$

$$\delta v_{||} = \frac{\partial \xi_{||}}{\partial t} + v \frac{\partial \xi_{||}}{\partial \ell} - \xi_{||} \frac{\partial v}{\partial \ell} - \xi_n (v \alpha_n + \frac{\partial v}{\partial n}), \quad (\text{П.11})$$

$$\delta v_\varphi = \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \ell} - \frac{\xi_\varphi}{r} v_r. \quad (\text{П.12})$$

Запишем теперь азимутальную компоненту уравнения (3.5):

$$\rho \frac{\partial \delta v_\varphi}{\partial t} + \delta v_\varphi \frac{v_r}{r} + v \frac{\partial \delta v_\varphi}{\partial \ell} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \delta p}{\partial \varphi} + F_{m\varphi} \quad (\text{П.13})$$

и перейдем к пределу, когда  $\xi_\varphi$  и азимутальный размер желобка  $\Delta \varphi$  стремятся к нулю, причем производная  $\partial \xi_\varphi / \partial \varphi$ , входящая в  $\text{div} \vec{\xi}_\perp$ , остается конечной. Вместе с  $\xi_\varphi$  стремятся к нулю  $\delta v_\varphi$  и  $\delta B_\varphi$ , а уравнение (П.13) сводится к

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \delta p + \frac{B \delta B_{||}}{4\pi} \right) = 0. \quad (\text{П.14})$$

Так как при удалении от опорной силовой линии  $\mathcal{L}$  все возмущения должны обращаться в нуль, то из (П.14) следует, что

$$\frac{1}{4\pi} B \delta B_{||} + \delta p = 0. \quad (\text{П.15})$$

Это уравнение, переписанное с помощью соотношений (П.1), (П.9), позволяет выразить  $\text{div} \vec{\xi}_\perp$  через  $\xi_n$ ,  $\xi_{||}$  и их производные:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{4\pi} B (B \xi_n \alpha_n + \xi_n \frac{\partial B}{\partial n} + B \text{div} \vec{\xi}_\perp) = \\ = \xi_{||} \frac{\partial p}{\partial \ell} + \xi_n \frac{\partial p}{\partial n} + \gamma \rho B \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\xi_{||}}{B} + \gamma \rho \text{div} \vec{\xi}_\perp. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Перейдем к выводу уравнений для  $\xi_{||}$  и  $\xi_{\perp}$ . Спроектируем уравнение (3.5) на вектор нормали  $\vec{n}$  и воспользуемся (П1.10), (П1.16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial l \partial t} + v \frac{\partial}{\partial l} v \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial t} = & - \frac{\alpha_n}{\rho} (2\delta\rho + \delta\rho \cdot v^2 + 2\rho v \delta v_{||}) + \\ & + \frac{B}{4\pi\rho} \left( \frac{\partial \delta B_n}{\partial l} + \delta B_n \vec{n} \frac{\partial \vec{h}}{\partial n} \right) - \\ & - v \vec{n} \frac{\partial \vec{h}}{\partial n} \left( v \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial l} - v \vec{n} \frac{\partial \vec{h}}{\partial n} \xi_{\perp} \right) + v \frac{\partial}{\partial l} \xi_{\perp} \vec{n} v \frac{\partial \vec{h}}{\partial n}. \end{aligned} \quad (\text{П1.17})$$

Имея в виду соотношение (П1.2), удобно ввести функцию  $\xi_{ж}(l)$ , которая (с точностью до численного множителя) определяется из уравнения

$$\frac{\partial \xi_{ж}}{\partial l} = \xi_{ж} \vec{n} \frac{\partial \vec{h}}{\partial n}, \quad (\text{П1.18})$$

тогда (П1.2) можно записать в следующем виде:

$$\delta B_n = B \xi_{ж} \frac{\partial}{\partial l} \frac{\xi_{\perp}}{\xi_{ж}}. \quad (\text{П1.19})$$

Как видно из (П1.19), если  $\xi_{\perp} = \text{const} \cdot \xi_{ж}$  то  $\delta B_n = 0$ , т.е. представляет собой желобковое смещение, совмещающее одну силовую линию с другой. Для аксиально-симметричной ловушки  $\xi_{ж}$ , как известно, задается формулой

$$\xi_{ж}(l) = \frac{\text{const}}{r(l)B(l)}, \quad (\text{П1.20})$$

где  $r(l)$  — расстояние от оси системы до силовой линии (разумеется, это выражение можно получить и формальным интегрированием (П1.18)). С помощью функции  $\xi_{ж}(l)$  последние слагаемые в (П1.17) можно несколько упростить:

$$-v \vec{n} \frac{\partial \vec{h}}{\partial n} \left( v \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial l} - \xi_{\perp} v \vec{n} \frac{\partial \vec{h}}{\partial n} \right) + v \frac{\partial}{\partial l} \xi_{\perp} \vec{n} v \frac{\partial \vec{h}}{\partial n} = v \frac{\xi_{\perp}}{\xi_{ж}} \frac{\partial}{\partial l} v \frac{\partial \xi_{ж}}{\partial l}.$$

В результате уравнение (П1.17) переходит в (3.7). Продольная составляющая уравнения (3.5) при учете (П1.11) дает (3.8).

До сих пор мы не предполагали малости  $\beta_p$ ,  $\beta_v$ . Рассмотрим теперь случай  $\beta_p \ll 1$ , тогда в (П1.16) можно пренебречь

правой частью и найти  $\text{div} \vec{\xi}_{\perp}$ :

$$\text{div} \vec{\xi}_{\perp} = -\xi_{\perp} \left( \alpha_n + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial n} \right). \quad (\text{П2.1})$$

Подставляя это в (П1.8), (П1.9), с учетом (2.11), получим соотношения (3.9), (3.10).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Докажем соотношение, которое позволяет менять порядок дифференцирования в операторе  $\frac{\partial}{\partial l} \xi_{ж} \frac{\partial}{\partial n}$ :

$$\frac{\partial}{\partial l} \xi_{ж} \frac{\partial}{\partial n} = \xi_{ж} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial l} - \alpha_n \xi_{ж} \frac{\partial}{\partial l}. \quad (\text{П2.1})$$

Исходим из легко проверяемого тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial}{\partial n} & \equiv (\vec{n} \nabla)(\vec{h} \nabla) - (\vec{h} \nabla)(\vec{n} \nabla) = \\ & = ((\vec{n} \nabla) \vec{h}) \nabla - ((\vec{h} \nabla) \vec{n}) \nabla. \end{aligned} \quad (\text{П2.2})$$

Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} (\vec{h} \nabla) \vec{n} & = \frac{\partial \vec{h}}{\partial l} = -\alpha_n \vec{h}, \\ (\vec{n} \nabla) \vec{h} & = \frac{\partial \vec{h}}{\partial n} = \vec{n} \frac{1}{\xi_{ж}} \frac{\partial \xi_{ж}}{\partial l} \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

(относительного второго соотношения см. формулу (П1.18)). С помощью (П2.2), (П2.3), меняя порядок дифференцирования, устанавливаем справедливость (П2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} \xi_{ж} \frac{\partial}{\partial n} & = \frac{\partial \xi_{ж}}{\partial l} \frac{\partial}{\partial n} + \xi_{ж} \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial}{\partial n} = \\ & = \xi_{ж} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial l} - \alpha_n \xi_{ж} \frac{\partial}{\partial l}. \end{aligned}$$



#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мирнов В.В., Рютов Д.Д. - Вопросы атомной науки и техники, серия "Термоядерный синтез", вып. I(5), 57 (1980).
2. Нагорный В.П., Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. - Препринт ИЯФ СО АН СССР 83-73 (1983).
3. Соловьев Л.С. ЖЭТФ, 54, 666 (1968).
4. Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud R.M., Proc. Roy. Soc. A244, 17 (1958).
5. Кадомцев Б.Б. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.2, М., Госатомиздат, 1963, стр.132.
6. Frieman E., Rotenberg M. Rev. Mod. Phys. 32, 898 (1960).
7. G.Laval, R.Pellat, M.Cotsaftis, M.Trocheris. Nuclear Fusion 4, 25 (1964).
8. Rosenbluth M.N., Longmire C.L. Ann. Phys. 1, 120 (1957).
9. Freidberg J.P. Rev. Mod. Phys., 54, 801 (1982).
10. Kruskal M.D., Oberman C.R. Phys. Fluids, 1, 275 (1958).

В.П.Нагорный, Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

ВЛИЯНИЕ ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ НА ЖЕЛОБКОВУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Препринт  
№ 83-74

Работа поступила - 31 мая 1983 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 14.07-1983 г. МН 17640  
Формат бумаги 60x90 Усл.2,0 печ.л., 1,6 учетно-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 74.

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90