27

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

А.А.Жоленц, Н.И.Иноземцев, А.Б.Темных.

ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ НА ВЭПП-4

ПРЕПРИНТ 83-44

НОВОСИБИРСК

ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ НА ВЭПП-4

А.А.Жоленц, Н.И.Иноземцев, А.Б.Темных

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе проанализированы основные причины появления нелинейностей в зависимости бетатронных частот и декрементов радиационного затухания от равновесного импульса частиц в накопителе. Получены аналитические выражения для расчета этих нелинейностей. Результаты вычислений сравниваются с экспериментальными данными, полученными на накопителе ВЭПП-4.

В в е д е н и е

В циклических ускорителях и накопителях при изменении частоты обращения частиц или равновесного импульса меняются частоты бетатронных колебаний. Рассчитанный в линейном приближении, этот эффект, называемый хроматизмом, обычно хорошо совпадает с экспериментальным наблюдением. Компенсируют хроматизм с помощью секступольных линз, фокусирующие силы которых зависят от положения равновесной орбиты в них. Расположение секступольных линз в кольце ускорителя и режим их включения выбирается таким образом, чтобы связанное с изменением равновесного импульса смещение орбиты в линзах приводило к появлению необходимой дополнительной фокусировки. Таким образом добиваются постоянства частот бетатронных колебаний частиц во всем диапазоне перестройки частоты обращения, что является оптимальным условием с точки зрения устранения некогерентных (синхробетатронные резонансы) и когерентных (head-tail) неустойчивостей.

Иное положение вещей складывалось на ВЭПП-4. Измерения зависимостей бетатронных частот от частоты обращения, проведенные на ВЭПП-4, показали, однако, наличие в них больших нелинейных компонент. Это вызывало определенные трудности при настройке установки, которые состояли в том, что нелинейности в зависимостях для горизонтальных и вертикальных бетатронных частот имели разные знаки. Поэтому, если, например, в некотором режиме в рабочей точке по частоте обращения занулялся как горизонтальный, так и вертикальный хроматизм, то уже при небольших смещениях частоты обращения в одну сторону мы попадали в область отрицательного вертикального хроматизма, а при смещениях в другую сторону - отрицательного горизонтального хроматизма. При токах пучка выше пороговых для head-tail неустойчивости это приводило к появлению либо вертикальной, либо горизонтальной неустойчивости и потери пучка. В результате, приходилось работать с заведомо более сильными, чем это требовалось, секступольными линзами в режимах, когда в рабочей точке по частоте обращения и всюду вблизи нее горизонтальный и вертикальный хроматизм были положительными. Ситуация еще более усугублялась тем, что сама нелинейность в хроматизме менялась при попытках управлять линейным хроматизмом и зависела от режима включения секступольных линз и способа управления хроматизмом.

Цель настоящей работы дать объяснение наблюдаемым эффектам и выработать рекомендации по их устранению. Исходной посылкой в наших исследованиях было предположение, что нелинейность в зависимостях бетатронных частот от частоты обращения, которая хорошо описывается параболой, связана с нелинейными поправками к дисперсионной и бета-функциям накопителя. Считая, что эти поправки сравнительно невелики, мы находили их последовательными итерациями. Для того, чтобы не загромождать основной текст препринта, вывод необходимых формул для этих вычислений вынесен в приложение, где они получены при возможно более общих предположениях с тем, чтобы их можно было применить не только для наших целей, но и в других случаях, требующих более точного вычисления дисперсионной и бета-функций.

В разделе I препринта собственно и рассматривается, как возникает квадратичная нелинейность в зависимостях бетатронных частот от частоты обращения (равновесного импульса). Этой нелинейности здесь дано название – нелинейный хроматизм. На основании количественного анализа полученных формул показывается, что для ускорителей и накопителей с жесткой фокусировкой наибольший вклад в нелинейные поправки к дисперсионной и бета-функциям дают секступольные и октупольные линзы. Этим и объясняется экспериментально наблюдаемая зависимость нелинейного хроматизма от режима включения секступольных линз и способа управления обычным линейным хроматизмом.

В разделе 2 приводится сравнение результатов расчета нелинейного хроматизма с экспериментальными данными.

Возможные методы устранения нелинейного хроматизма обсуждаются в разделе 3.

Другое проявление влияния нелинейности дисперсионной функции на параметры пучка в накопителе было обнаружено при измерении зависимости декремента горизонтальных бетатронных колебаний от частоты обращения (равновесного импульса). Здесь вместо при-

вычной линейной характеристики была тоже обнаружена нелинейность. Теоретическому и экспериментальному изучению этого вопроса посвящены разделы 4,5.

Все эффекты, упомянутые выше, рассматриваются в настоящем препринте в приближении отсутствия связи бетатронных колебаний и вертикальной дисперсионной функции, то есть для циклических ускорителей и накопителей с равновесной орбитой частиц, лежащей в одной плоскости, магнитная структура которых не включает повернутых квадрупольных, секступольных, октупольных линз и соленоидов.

Остановимся кратко на системе обозначений, используемой ниже. Согласно общепринятому подходу, будем присваивать переменным индексы x или z, когда данная величина относится к горизонтальным или вертикальным колебаниям (направлению). Эти же переменные без индексов будут употребляться в том случае, когда выражения и формулы, в которые они входят одинаково справедливы и для горизонтальных и для вертикальных колебаний. Без индексов будем записывать переменные, обозначающие линейную и нелинейную дисперсионные функции, поскольку в нашем рассмотрении они всегда будут относится только к горизонтальному направлению.

I. Нелинейный хроматизм (теория)

Представим частоты бетатронных колебаний частицы с неравновесным импульсом в виде:

$$\Delta\nu = C\delta + \chi\delta^2$$

Здесь $\Delta\nu$ – сдвиг частоты, $\delta = \Delta p/p$ – относительное изменение импульса частицы, C – обычный линейный хроматизм, χ – нелинейный (квадратичный) хроматизм. Для вывода формул, позволяющих вычислить C и χ, воспользуемся вариацией интеграла

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{ds}{\beta} \qquad (I.I.)$$

определяющего частоту бетатронных колебаний ν через параметры орбиты. При вариации будем учитывать как изменение β бета-функции

$$\Delta\beta = \Delta\beta_1(\delta) + \Delta\beta_2(\delta^2) \qquad (I.2)$$

так и изменение длины дуги траектории

$$d\tau = \{x'^2 + (1+Kx)^2\}^{1/2} ds$$

Здесь x описывает горизонтальное смещение орбиты частиц с неравновесным импульсом. С точностью до квадратичных по $\frac{\Delta p}{p}$ членов x можно представить в виде:

$$x = \psi\delta + R\delta^2, \qquad (I.3)$$

где ψ – обычная линейная дисперсионная функция /I/, R – нелинейная (квадратичная) дисперсионная функция. В жесткофокусирующих ускорителях. R – функция подчиняется уравнению (см. приложение А):

$$R'' + g_x R = \frac{1}{\overline{BR}}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\psi - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\psi^2\right), \qquad (I.4)$$

где $g_x = \frac{1}{\overline{BR}}\left(KB_z + \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$, K – кривизна, $\overline{BR}$ – жесткость, B_z, $\frac{\partial B_z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 B_z}{\partial x^3}$ – компоненты разложения магнитного поля на равновесной орбите. Решение уравнения (I.4) при условии периодичности R – функции записывается:

$$R(s) = \frac{\beta_x^{1/2}(s)}{2\sin\pi\nu_x}\int\limits_s^{s+\Pi}\frac{ds'}{\overline{BR}}\left[\frac{\partial B_z}{\partial x}\psi - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\psi^2\right]\beta_x^{1/2}(s')\cos\left[\pi\nu + \phi_x(s) - \phi_x(s')\right] \qquad (I.5)$$

Здесь s – текущий азимут, Π – период магнитной структуры, ϕ_x – бетатронная фаза. Отметим, что определяющий вклад в величину R – функции дают секступольные линзы.

В выражении (I.2) $\Delta\beta_1$ – описывает изменение β -функции в первом порядке по δ, $\Delta\beta_2$ – во втором. Воспользовавшись, как и в приложении А, для определения $\Delta\beta_1$, $\Delta\beta_2$ вспомогательными переменными ξ_1, ξ_2

$$\Delta\beta_1 = 2\beta\xi_1\delta \qquad , \qquad \Delta\beta_2 = \beta(\xi_1^2 + 2\xi_2)\delta^2$$

и учитывая (I.3), представим вариацию интеграла (I.I) в виде:

$$\Delta\nu = \frac{\delta}{2\pi}\oint\left\{\frac{K\psi}{\beta} - 2\frac{\xi_1}{\beta}\right\}ds + \frac{\delta^2}{2\pi}\oint\left\{\frac{KR}{\beta} + \frac{3\xi_1^2}{\beta} + \frac{\psi'^2}{2\beta} - \frac{2K\xi_1\psi}{\beta} - \frac{2\xi_2}{\beta}\right\}ds \qquad (I.6)$$

Чтобы отсюда найти линейный и нелинейный хроматизм, нужно определить ξ_1, ξ_2. Алгоритм их вычисления подробно рассмотрен в приложении А. Здесь же только уточним значения величин ξ_1, ξ_2, μ_1, μ_2, Δg_1, Δg_2, входящих в выражения (П.IO), (П.II). В случае, когда возмущение горизонтальной орбиты частиц задано выражением (I.3), эти величины равны:

$$\gamma_1 = -2K\psi\delta \qquad , \qquad \gamma_2 = (-2KR - \psi'^2 + 3K^2\psi^2)\delta^2$$

$$\mu_1 = -(K\psi' + K'\psi)\delta \qquad , \qquad \mu_2 = (-\psi''\psi' - K'R + 3KK'\psi^2 - KR' + 3K^2\psi\psi')\delta^2 \qquad (I.7)$$

$$\Delta g_{1x} = -\left(\frac{1}{\overline{BR}}\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{\overline{BR}}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\psi\right)\delta = \Delta G_{1x}\delta$$

$$\Delta g_{2x} = \left\{\frac{1}{\overline{BR}}\frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{1}{\overline{BR}}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}(R - \psi) + \psi^2\left[\left(\frac{1}{\overline{BR}}\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 B_z}{\partial x^3}\right]\right\}\delta^2 = \Delta G_{2x}\delta^2$$

$$\Delta g_{1z} = \left(\frac{1}{\overline{BR}}\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{\overline{BR}}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\psi\right)\delta = \Delta G_{1z}\delta$$

$$\Delta g_{2z} = -\Delta G_{2x}\delta^2 \equiv \Delta G_{2z}\delta^2$$

Здесь Δg_1, Δg_2 (изменение фокусировки в первом и втором порядке малости по δ на новой орбите по отношению к исходной орбите) записано для жесткофокусирующих ускорителей с учетом соотношений $KB_z \ll \frac{\partial B_z}{\partial x}$, $K\frac{\partial B_z}{\partial x} \ll \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$; символы ΔG_1, ΔG_2 введены для сокращения записи последующих формул:

Подставляя (I.7) в (П.IO), (П.II) получим:

$$\xi_1 = \frac{1}{4\sin 2\pi\nu}\int\limits_s^{s+\Pi}\frac{C_1}{\beta}\cos\left[4\pi\nu + 2\phi(s) - 2\phi(s')\right]ds' \qquad (I.8)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{4\sin 2\pi\nu}\int\limits_s^{s+\Pi}\frac{ds'}{\beta}\left\{(C_1 - 8K\psi)\xi_1 + (K'\psi + K\psi')\frac{d\xi_1}{d\phi} + 6\xi_1^2 + 2K\psi C_1 + C_2\right\}\cos\left[4\pi\nu + 2\phi(s) - 2\phi(s')\right]$$

где

$$C_1 = \Delta G_1\beta^2 + 2K\psi(1 - g\beta^2) - (K'\psi + K\psi')\alpha\beta$$

$$(I.9)$$

$$C_2 = \Delta G_2\beta^2 + (2KR + \psi'^2 - 3K^2\psi^2)(1 - g\beta^2) + (-\psi''\psi' - K'R - KR' + 3KK'\psi + 3K^2\psi\psi')\alpha\beta$$

Заметим, что в случае периодических с периодом П функций справедлива следующая запись:

$$\oint\frac{ds}{\beta}\int\limits_s^{s+\Pi}f(s')\cos\left[4\pi\nu + 2\phi(s) - 2\phi(s')\right]ds' = \sin 2\pi\nu\oint f(s)\,ds,$$

где $\phi(s) = \int\limits_0^s\frac{ds}{\beta}$, $f(s)$ – любая функция, удовлетворяющая условию $f(s) = f(s+\Pi)$. Поэтому, подставляя выражения (I.8), (I.9) в (I.6) и взяв соответствующие интегралы, получим:

$$\Delta\nu = \frac{\delta}{4\pi}\oint Q_1\,ds + \frac{\delta^2}{4\pi}\oint\left[\left(Q_1 + \frac{2K\psi}{\beta}\right)\xi_1 - (K'\psi + K\psi')\frac{d\xi_1}{d\phi} + Q_2\right]ds,$$

где $Q_1 = \Delta G_1\beta + (K'\psi + K\psi')\alpha + 2Kg\beta\psi$

$$Q_2 = (\Delta G_2 + 2K\psi\Delta G_1)\beta - \alpha(K\psi' - g\psi\psi' - K'R - KR' + KK'\psi^2 + K^2\psi\psi') -$$

$$- K^2\psi^2\left(\frac{1}{\beta} - g\beta\right) + 2KRg\beta + \psi'^2 g\beta \qquad (I.IO)$$

Таким образом линейный и нелинейный хроматизм равны:

$$C = \frac{1}{4\pi}\oint Q_1\,ds \qquad (I.II)$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\oint\left\{\left(Q_1+\frac{2K\psi}{\rho}\right)\xi_1-(K'\psi+K\psi')\frac{d\xi_1}{d\phi}+Q_2\right\}ds$$

Отметим, что в определение нелинейного хроматизма входят квадратичные по δ поправки к дисперсионной функции накопителя и линейные по δ поправки к β -функции, а также квадратичная и кубичная нелинейности.

Сравнительный анализ вклада различных членов в (I.IO), (I.II) в общую сумму аналитическими методами для жесткофокусирующих ускорителей довольно сложен. Поэтому, чтобы выделить основные члены, на примере магнитной структуры ВЭПП-4 были проделаны численные расчеты, которые показали, что для расчета линейного и нелинейного хроматизма с 98% точностью можно пользоваться выражениями:

$$C = \frac{1}{4\pi}\oint \Delta G_1\beta\,ds$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\oint\left(\Delta G_1\xi_1+\Delta G_2\beta+\psi'^2 g\beta\right)ds$$

где

$$\xi_1 = \frac{1}{4\sin 2\pi\nu}\int_s^{s+\Pi}\Delta G_1\beta\cos\left[4\pi\nu+2\phi(s)-2\phi(s')\right]ds'$$

2. Нелинейный хроматизм (эксперимент)

Как было показано выше, нелинейный хроматизм обязан своим происхождением наряду с нелинейностями ведущего магнитного поля, нелинейностям в дисперсионной и β - функциях накопителя. Поэтому, в первую очередь нам интересно было узнать реальные величины этих нелинейностей. Для этого на накопителе ВЭПП-4 было проведено измерение R -функции. С помощью системы пикап-станций измерялось положение равновесной орбиты пучка электронов в зависимости от $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ или, как это делалось в наших экспериментах, от частоты обращения f, поскольку $\frac{\Delta\rho}{\rho}=-\frac{1}{\varkappa}\frac{\Delta f}{f}$, где $\varkappa$ - коэф-

фициент уплотнения орбит, Δf - смещение частоты обращения. Данные по каждому пикапу запоминались и аппроксимировались полиномом второй степени (см.рис.I)

$$a_i+\psi_i\frac{\Delta\rho}{\rho}+R_i\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^2, \qquad (I.3)$$

в котором коэффициенты ψ_i и R_i, согласно определению равнялись значениям линейной и нелинейной дисперсионным функциям в месте расположения i -го пикапа, а коэффициент a_i являлся подгоночным параметром. Точность измерения ψ и R -функции таким методом составляла $\Delta\psi/\psi = 5\%$ и $\Delta R/R = 20\%$. По сумме данных от различных пикапов можно было судить о ψ и R функциях во всем кольце накопителя. Типичная R -функция, измеренная на ВЭПП-4, показана точками на рис.2. Как это видно из графика, в R - функции существенно подчеркнута гармоника, соответствующая ближайшему целому резонансу (для ВЭПП-4 это 9-я гармоника). То же самое заключение можно сделать из анализа формулы (I.5). Расчетное значение R -функции представлено на этом же рисунке сплошной линией. Сравнение демонстрирует хорошее совпадение расчетных и реально измеренных величин.

Провести аналогичные измерения зависимости β -функций от $\Delta\rho/\rho$ на накопителе оказалось невозможным из-за недостаточной точности измерения β -функций, сравнимой с ожидаемым эффектом $\Delta\beta/\beta \approx 20\%$. Поэтому, на рис.3а показаны только расчетные значения величины $\frac{\Delta\beta}{\beta}/\frac{\Delta\rho}{\rho}$.

Зависимость частоты горизонтальных бетатронных колебаний от $\Delta\rho/\rho$ (хроматизм), измеренная на ВЭПП-4, показана на рис.4. Все три графика, представленные на этом рисунке были сняты в режимах с одними и теми же нелинейностями магнитного поля и различаются только значением горизонтальной бетатронной частоты при $\Delta\rho/\rho=0$. (Рис.4а $\nu_x = 9{,}28$, рис.4б $\nu_x = 9{,}14$, рис.4 $\nu_x = 9{,}08$). Это было сделано с целью продемонстрировать вклад в нелинейный хроматизм, который дают нелинейности в дисперсионной и β -функциях накопителя. Поскольку, как это следует из формул (I.5), (I.8), эти нелинейности существенно возрастают с приближением частоты бетатронных колебаний к целому резонансу, то, соответственно, должен увеличиваться и их вклад в нелинейный хроматизм, что мы реально и наблюдали в эксперименте. Для определения численного значения нелинейного хроматизма по экспериментальным точкам по критерию χ^2 проводилась парабола (см. (рис.4).

$$\Delta\nu = \Delta\nu_0 + C\frac{\Delta p}{p} + \chi\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2$$

в которой коэффициенты C и χ как раз и равнялись линейному и нелинейному хроматизму, а коэффициент $\Delta\nu_0$ являлся подгоночным параметром. Полученные результаты приведены в Таблице I. Здесь же указаны результаты расчетов нелинейного хроматизма по формулам (I.I0), (I.II) и значения частоты горизонтальных бетатронных колебаний.

Таблица I

	Рис.4а	Рис.4б	Рис.4в	Примечание
ν_x	9,28	9,I4	9.08	
χизм.	390 ±23	436 ±65	828 ±53	измерение
χрасч.	420	440	8I0	расчет

3. Коррекция нелинейного хроматизма

Обсудим вкратце возможные способы компенсации нелинейного хроматизма. Поскольку определяющую роль в этом эффекте играют нелинейности в дисперсионной и бета-функциях, то наиболее простой способ компенсации основан на их уменьшении. Рабочим инструментом в ускорителях и накопителях для этих целей могут быть секступольные линзы, так как они наиболее активно воздействуют как на R -функцию, так и на $\Delta\beta_1$ -функцию.

Задача коррекции R -функции внешне очень похожа на задачу коррекции равновесной орбиты. В обоих случаях системой корректоров (у нас это секступольные линзы) требуется занулить некоторую величину (в данном случае это R -функция) в местах наблюдения. Естественно, для решения этой задачи подходит все многообразие методов, развитых для коррекции равновесной орбиты. Однако на практике может оказаться вполне достаточным применить самый простой из них – устранение резонансной гармоники, что может быть сделано одной (двумя) секступольными линзами, расположенными в определенных местах по фазе горизонтальных бетатронных колебаний. Пример такой коррекции показан на рис.5. Здесь цифрой I отмечена исходная R -функция, а цифрой 2 – R -функция, полученная после коррекции с использованием двух секступольных линз.

В равной степени все сказанное выше относится и к коррекции $\Delta\beta_1$ -функции. Единственное отличие здесь состоит в том, что резонансная гармоника у $\Delta\beta_1$ -функции вдвое выше резонансной гармоники R -функции. Пример коррекции $\Delta\beta_1$ -функции на ВЭПП-4 с помощью секступольной линзы показан на рис.3. Рис.3а – исходная $\frac{\Delta\beta_1}{\beta}\cdot\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^{-1}$ – функция, рис.3б – результат коррекции.

Практическое решение задачи компенсации большого нелинейного хроматизма на накопителе ВЭПП-4 было осуществлено другим путем. Во-первых, был сделан переход от магнитной структуры с большими биениями бета-функции в экспериментальном промежутке и более "гладкой" структуре, что позволило ослабить секступольные коррекции вследствие уменьшения естественного линейного хроматизма. Во-вторых, рабочая точка по частотам бетатронных колебаний была смещена как можно дальше от целых резонансов в район параметрических резонансов, что значительно уменьшило вклад резонансной гармоники в R -функцию. В сумме два этих действия позволили получить уже приемлемый уровень нелинейности в хроматизме χ = I46.

4. Нелинейная зависимость декрементов радиационного затухания от импульса (теория)

Измерения зависимости декрементов радиационного затухания на ВЭПП-4 от равновесного импульса частиц в накопителе обнаружили в этой зависимости заметную нелинейность, которая, как будет показано ниже, в значительной степени объясняется нелинейностью дисперсионной функции накопителя.

Запишем выражения для безразмерных декрементов радиационного затухания в виде /I/:

$$G_z = \frac{1}{\bar{B}_z^2}\langle B_z^2\rangle \qquad (4.I)$$

$$G_x = \frac{1}{\bar{B}_z^2}\langle B_z^2\cdot\frac{B_z^3}{\overline{BR}}\psi - 2B_z\frac{\partial B_z}{\partial x}\psi\rangle$$

$$G_s = 3G_z - G_x\ , \qquad (4.2)$$

где величины G_z , G_x , G_s обозначают соответственно декременты вертикальных, горизонтальных и продольных колебаний, B_z , $\frac{\partial B_z}{\partial x}$ – поле и градиент магнитного поля, $\overline{BR}$ – жесткость, $\bar{B}_z$ – среднее магнитное поле, $\bar{R}$ – средний радиус кривизны, скобки $\langle\cdots\rangle$ – усреднение по периметру накопителя. Так как при изменении равновесного импульса частиц $\delta = \frac{\Delta p}{p}$ происходит смещение положения равновесной орбиты по закону

$$x = \psi\delta + R\delta^2,$$

где ψ – линейная, R – квадратичная дисперсионная функции, то вследствие зависимости B_z и $\frac{\partial B_z}{\partial x}$ от x

$$B_z = B_z\Big|_0 + \frac{\partial B_z}{\partial x}\Big|_0 x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\Big|_0 x^2 = B_z\Big|_0 + \frac{\partial B_z}{\partial x}\Big|_0 \psi\delta + \left(R\frac{\partial B_z}{\partial x}\Big|_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\Big|_0 \psi^2\right)\delta^2 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial x}\Big|_0 + \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\Big|_0 \cdot x = \frac{\partial B_z}{\partial x}\Big|_0 + \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\Big|_0 \psi\delta + \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\Big|_0 R\delta^2$$

возникает зависимость декрементов от δ. В (4.3) $B_z|_0$, $\frac{\partial B_z}{\partial x}\Big|_0$, $\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\Big|_0$ являются компонентами разложения магнитного поля на равновесной орбите. В дальнейшем в их записи мы будем опускать индекс 0 и вертикальные черточки. Подставляя (4.3) в (4.I), (4.2), нетрудно найти изменения декрементов, зависящие от δ. Мы сделаем это для случая жесткофокусирующего ускорителя, когда выполняются условия: $\langle B_z \frac{\partial B_z}{\partial x}\psi\rangle \sim \bar{B}_z^2$, $\langle (\frac{\partial B_z}{\partial x})^2\psi^2\rangle \gg \bar{B}_z^2$, $\psi \ll R$.
В итоге будем иметь:

$$\Delta G_z = a_z\delta + b_z\delta^2 \quad (4.4)$$

$$\Delta G_x = a_x\delta + b_x\delta^2 \quad (4.5)$$

$$\Delta G_s = 3\Delta G_z - \Delta G_x,$$

где ΔG_z, ΔG_x, ΔG_s – изменения декрементов, а коэффициенты перед δ и δ^2 равны:

$$a_z = 2(\bar{B}_z)^{-2}\langle B_z\frac{\partial B_z}{\partial x}\psi\rangle$$

$$a_x = -2(\bar{B}_z)^{-2}\langle (\frac{\partial B_z}{\partial x})^2\psi^2 + B_z\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\psi^2 - B_z\frac{\partial B_z}{\partial x}R\rangle \quad (4.6)$$

$$b_z = (\bar{B}_z)^{-2}\langle 2B_z\frac{\partial B_z}{\partial x}R + (\frac{\partial B_z}{\partial x})^2\psi^2 + B_z\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\psi^2\rangle$$

$$b_x = (\bar{B}_z)^{-2}\langle -6(\frac{\partial B_z}{\partial x})^2\psi R + (\frac{\partial B_z}{\partial x})^2\psi^2 - 3\frac{\partial B_z}{\partial x}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\psi^3 + B_z\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\psi^2 - \frac{3}{2}\frac{B_z^2}{BR}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\psi^3 - 6B_z\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\psi R\rangle$$

В большинстве практических случаев, как показали конкретные расчеты для ВЭПП-4, при вычислениях a_x и b_x вместо (4.6) можно пользоваться более простыми выражениями:

$$a_x = -\frac{2}{\bar{B}_z^2}\langle (\frac{\partial B_z}{\partial x})^2\psi^2 - B_z\frac{\partial B_z}{\partial x}R\rangle$$

$$b_x \approx -\frac{6}{\bar{B}_z^2}\langle (\frac{\partial B_z}{\partial x})^2\psi R\rangle$$

Отметим, что в жесткофокусирующих ускорителях $|a_z| \ll |a_x|$ и $|b_z| \ll |b_x|$, в результате чего, при изменениях равновесного импульса частиц, обычно не превышающих $\delta = 0{,}0I$, наблюдается только изменение горизонтального и продольного декремента затухания ($\Delta G_s = -\Delta G_x$), а $\Delta G_z \approx 0$.

Наличие в зависимости (4.5) достаточно большого, как мы увидим ниже, нелинейного члена открывает интересную возможность расширения области изменения равновесного импульса частиц, в которой присутствует одновременное затухание горизонтальных и продольных колебаний. Согласно известной теореме о сумме декрементов радиационного затухания /I/, всегда строго выполняется соотношение $G_x + G_s = 3G_z$, поэтому, если потребовать одновременного затухания горизонтальных и продольных колебаний, то есть выполнения условия $G_x, G_s > 0$, то изменение декремента ΔG_x при смещениях равновесного импульса не должно превышать $3G_z$. Это означает, что при учете в (4.5) только линейного по δ члена область изменения равновесного импульса частиц δ не может превышать величину

$$\delta = \frac{3G_z}{a_x}$$

С учетом нелинейного члена, в принципе, становится возможным иметь

$$\delta = \frac{a_x}{b_x},$$

если $-\frac{a_x^2}{4b_x} < 3G_z$, или

$$\delta = \frac{a_x}{2b_x} - \sqrt{\frac{a_x^2}{4b_x^2} + \frac{3G_z}{b_x}}$$

при $-\frac{a_x^2}{4b_x} \geqslant 3G_z$

5. Нелинейная зависимость декрементов радиационного затухания от импульса (эксперимент)

Для измерения времени радиационного затухания горизонтальных бетатронных колебаний использовалась схема, представленная на рис.6. Сигнал с генератора шума /I/ подавался на магнит /2/ с вертикальным направлением поля, который использовался для возбуждения некогерентных горизонтальных колебаний частиц пучка. Отсутствие когерентной моды колебаний, которая возможно могла бы оказывать заметное влияние на времена затухания, контролировалось по сигналу с пластин /3/. Ширина вертикальной щели диафрагмы /4/ была много меньше размера пучка. Поэтому, при совмещении щели с центром пучка, сигнал с ФЭУ [5] был пропорционален плотности частиц в центре. После прихода импульса от генератора [6] выключался шум и запускалась АЦП [7]. При этом за счет радиационного затухания амплитуда радиальных бетатронных колебаний уменьшалась и плотность частиц в центре ρ нарастала со временем t :

$$\rho(t) = \mathrm{Const}\cdot\left(Be^{-t/\tau_x} + \sigma_x\right)^{-1}$$

Здесь B – константа, зависящая от силы шумовой раскачки, τ_x – время затухания горизонтальных бетатронных колебаний, σ_x – невозмущенный радиальный размер. Сигнал с ФЭУ запоминался АЦП. Последующая обработка сигнала позволяла находить τ_x . Эта же схема использовалась для измерения времени радиационного затухания вертикальных бетатронных колебаний τ_z. Для этого необходимо было лишь только повернуть магнит [2] и диафрагму [4] вокруг оси на угол 90°. Отношение величин $\tau_z/\tau_x = \sigma_x/\sigma_z$ позволяло судить об относительной величине декремента горизонтальных бетатронных колебаний.

Описанной выше методикой, было проведено измерение $\frac{\sigma_x}{\sigma_z}$ при разных значениях равновесного импульса частиц в накопителе ВЭПП-4. По экспериментальным точкам по критерию χ^2 была проведена парабола:

$$\sigma_x = \sigma_{x0} + a_x\left(\frac{\Delta p}{p}\right) + b_x\cdot\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2,$$

показанная графиком на рис.7. Экспериментальное значение коэффициента b_x = –73610 ± 9560, определяющего величину нелинейности в зависимости декрементов радиационного затухания от импульса, хорошо совпало с результатами вычислений по формулам (4.6), в которых для b_x было получено: b_x = – 71520.

Авторы выражают свою искреннюю признательность И.Я.Протопопову, Г.М.Тумайкину и Е.А.Переведенцеву за полезные обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе.

Приложение А

Расчет дисперсионной и β-функций накопителя с учетом нелинейности магнитного поля

А.I. Дисперсионная функция

Горизонтальное отклонение частицы от равновесной орбиты при изменении ее импульса с точностью до членов второго порядка описывается уравнением:

$$x'' + g_x x = k\delta - k\delta^2 + (g_x + k^2)x\delta - \left(\frac{1}{2}\varepsilon_x + kg_x\right)x^2 + k'xx' + \frac{1}{2}x'^2 k \qquad (\text{П.I})$$

Здесь $\delta = \frac{\Delta p}{p}$ – относительное изменение импульса, k – кривизна орбиты, g_x, ε_x – периодические с периодом магнитной структуры П. функции:

$$g_x = \frac{1}{\overline{BR}}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x} + kB_z\right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\overline{BR}}\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + 2k\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

$$k = \frac{B_z}{\overline{BR}} \quad ,$$

где $\overline{BR}$ – жесткость, B_z , $\frac{\partial B_z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$ – компоненты разложения магнитного поля на равновесной орбите. Частное периодическое решение (П.I) определяет орбиту x_0 для неравновесных по энергии частиц. Представим $x_0\left(\frac{\Delta p}{p}\right)$ в виде:

$$x_0 = \psi\cdot\frac{\Delta p}{p} + R\cdot\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2,$$

где ψ – обычная линейная дисперсионная функция /I/, а R –интересующая нас к ней поправка – квадратичная дисперсионная функция. Из (П.I) для ψ и R – функций легко получить уравнения:

$$\psi'' + g_x\psi = k \qquad (\text{П.2})$$

$$R'' + g_x R = -k + (g_x + k^2)\psi - \left(\frac{\varepsilon_x}{2} + kg_x\right)\psi^2 + k\psi\psi' + \frac{1}{2}k\psi'^2 \qquad (\text{П.3})$$

Последовательное интегрирование (П.2) и (П.3) с учетом периодичности магнитной структуры дает:

$$\psi = \frac{\beta_x^{1/2}}{2\sin\pi\nu_x}\int_s^{s+\Pi} k\beta_x^{1/2}\cos\left[\pi\nu_x + \phi_x(s) - \phi_x(s')\right]ds' \qquad (\text{П.4})$$

$$R = \frac{\beta_x^{1/2}}{2\sin\pi\nu_x}\int_s^{s+\Pi}\left[-k + (g_x + k^2)\psi - \left(\frac{\varepsilon_x}{2} + kg_x\right)\psi^2 + k\psi\psi' + \frac{1}{2}k\psi'^2\right]\beta_x^{1/2}\cos\left[\pi\nu_x + \phi_x(s) - \phi_x(s')\right]ds'$$

где β_x – бета-функция, $\phi_x = \int_0^s \frac{ds}{\beta_x}$ – бетатронная фаза, ν_x – частота горизонтальных бетатронных колебаний.

Наиболее простой вид линейная и квадратичная дисперсионные функции имеют в азимутально-симметричном ускорителе

$$\psi = \frac{1}{K\nu^2} \qquad \text{(см. также /I/)}$$

$$R = -\frac{g_x}{2K^4\nu^6}$$

В случае жесткофокусирующих ускорителей, где, как правило, $KB_z \ll \frac{\partial B_z}{\partial x}$ и $K\frac{\partial B_z}{\partial x} \ll \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$, можно вместо (П.4) пользоваться более простым выражением:

$$R(s) = \frac{\beta_x^{1/2}(s)}{2\sin\pi\nu_x}\int_s^{s+\Pi}\left(g_x\psi - \frac{g_x}{2}\psi^2\right)\beta_x^{1/2}(s')\cos\left[\pi\nu_x + \phi_x(s) - \phi_x(s')\right]ds'$$

А.2. Бета-функция

Найдем теперь поправки к бета-функциям ускорителя, возникающие при изменении положения горизонтальной орбиты частиц. Воспользуемся для этого уравнением для функций Флоке $\omega = \beta^{1/2}$ /I/.

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} + g\omega - \frac{1}{\omega^3} = 0 \qquad (П.5)$$

Здесь ds – элемент дуги равновесной орбиты. На новой орбите функция Флоке $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$ будет описываться уравнением того же вида, но с ds, замененным на элемент дуги новой орбиты $d\tau = \{x'^2 + (1+Kx)^2\}^{1/2}ds$, и g, замененным на $g + \Delta g$, где Δg учитывает изменение фокусировки на новой орбите

$$\frac{d^2\omega_1}{d\tau^2} + (g + \Delta g)\omega_1 - \frac{1}{\omega_1^3} = 0 \qquad (П.6)$$

Для того, чтобы выразить $\Delta\omega$ через функции и параметры исходной орбиты, перейдем в (П.6) от дифференцирования по $d\tau$ к дифференцированию по ds

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2s}{d\tau^2}\frac{d}{ds}$$

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \simeq 1 - 2Kx - x'^2 + 3K^2x^2$$

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} \simeq -x''x' - K'x - Kx' + 3KK'x^2 + 3K^2xx'$$

Для упрощения записи последующих формул введем обозначения:

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = 1 + \gamma \quad ; \quad \frac{d^2s}{d\tau^2} = \mu$$

Вычитая из уравнения (П.6) уравнение (П.5), найдем

$$\Delta\omega'' + \mu\omega' + \mu\Delta\omega' - \mu\gamma\omega' - \gamma g\omega + \gamma^2 g\omega + \Delta g\omega - \gamma\Delta g\omega + \Delta g\Delta\omega +$$
$$+ \gamma\frac{1}{\omega^3} - \gamma^2\frac{1}{\omega^3} + 3\frac{\Delta\omega}{\omega^4} - 3\gamma\frac{\Delta\omega}{\omega^4} - 6\frac{\Delta\omega^2}{\omega^5} + g\Delta\omega - \gamma g\Delta\omega = 0$$

Отсюда, переходя к новым переменным

$$\xi = \frac{\Delta\omega}{\omega} \qquad \text{и} \qquad \phi = \int_0^s \frac{ds}{\beta}$$

получим уравнение для ξ с точностью до членов второго порядка малости по переменным x, x', входящим в Δg, μ, γ.

$$\frac{d^2\xi}{d\phi^2} + 4\xi = \mu\left(\alpha\beta - \beta\frac{d\xi}{d\phi} + \alpha\beta\xi - \gamma\alpha\beta\right) + \gamma\left(g\beta^2 + \Delta g\beta^2 - 1 + \right. \qquad (П.7)$$
$$\left. + g\beta^2\xi + \Delta\xi\right) - \gamma^2(g\beta^2 - 1) - \Delta g\beta^2 - \Delta g\xi\beta^2 + 6\xi^2$$

Здесь $\alpha = -\omega\omega'$.

Уравнение (П.7) будем решать последовательными итерациями. Представим для этого ξ в виде суммы решений первого и второго приближения: $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Кроме того введем обозначения: $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, $\Delta g = \Delta g_1 + \Delta g_2$, где индексом I отмечены величины первого порядка малости, входящие в μ, γ, Δg, а индексом 2 – второго порядка малости. Тогда для ξ_1 и ξ_2 получим уравнения:

$$\frac{d^2\xi_1}{d\phi^2} + 4\xi_1 = f_1 \qquad (П.8)$$

$$\frac{d^2\xi_2}{d\phi^2} + 4\xi_2 = (f_1 + 4\gamma_1)\xi_1 - \mu_1\beta\frac{d\xi_1}{d\phi} + 6\xi_1^2 - \gamma_1 f_1 + f_2 \qquad (П.9)$$

Здесь f_1, f_2 – периодические функции:

$$f_1 = -\Delta g_1\beta^2 - \gamma_1 + \gamma_1 g\beta^2 + \mu_1\alpha\beta$$

$$f_2 = -\Delta g_2\beta^2 - \gamma_2 + \gamma_2 g\beta^2 + \mu_2\alpha\beta$$

Последовательно решая (П.8), (П.9), получим:

$$\xi_1 = \frac{1}{4\sin 2\pi\nu}\int_s^{s+\Pi}\frac{f_1}{\beta}\cos\left[4\pi\nu + 2\phi(s) - 2\phi(s')\right]ds' \qquad (П.I0)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{4\sin 2\pi\nu} \int\limits_{s}^{s+\Pi} \frac{1}{\beta}\left\{ (\dot{\zeta}_1 + 4\gamma_2)\xi_2 - \mu_1\beta\frac{d\xi_1}{d\varphi} + 6\xi_1^2 - \gamma_1\dot{\xi}_1 + \xi_2 \right\} * \quad \text{(П.II)}$$

$$* \cos\left[4\pi\nu + 2\varphi(s) - 2\varphi(s')\right] ds'$$

Для того, чтобы из (П.IO) и (П.II) найти $\Delta\beta_1$, $\Delta\beta_2$ – изменения бета-функций в первом и втором приближении нужно воспользоваться следующими очевидными соотношениями:

$$\Delta\beta_1 = 2\beta\xi_1 \quad \text{(П.I2)}$$

$$\Delta\beta_2 = \beta\left(\xi_1^2 + 2\xi_2\right) \quad \text{(П.I3)}$$

В случае азимутально-симметричного ускорителя (П.I2), (П.I3) преобразуются в выражения:

$$\Delta\beta_1 = -\frac{\beta^3 \Delta G_1}{2}$$

$$\Delta\beta_2 = -\frac{\beta^3 \Delta G_2}{2} + \frac{3}{8}\Delta G_1^2 \beta^5$$

Л и т е р а т у р а

I. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. "Теория циклических ускорителей", ФМ, М., I962 г.

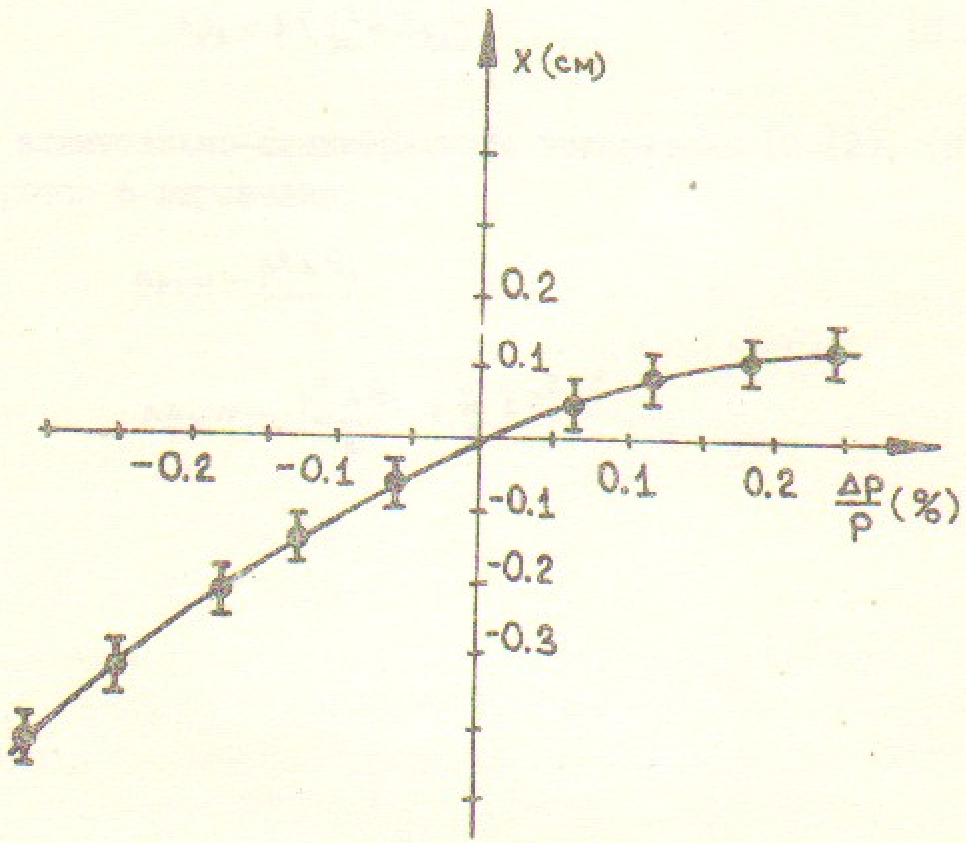

Рис.I. Положение равновесной орбиты в зависимости от $\frac{\Delta P}{P}$ на пикапе.

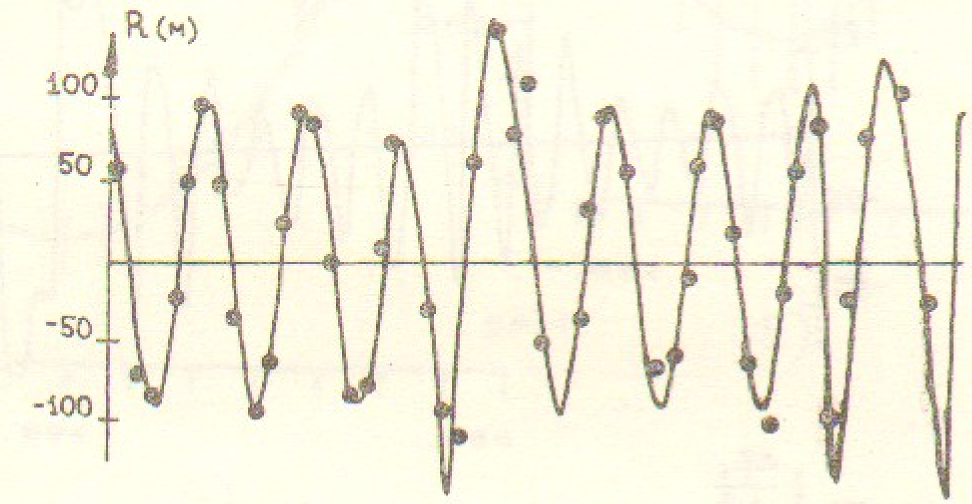

Рис.2 R -функция ВЭПП-4. Сплошная линия - расчетная R -функция. Точками на ней отмечены результаты измерений. По оси абсцисс развернут периметр ВЭПП-4.

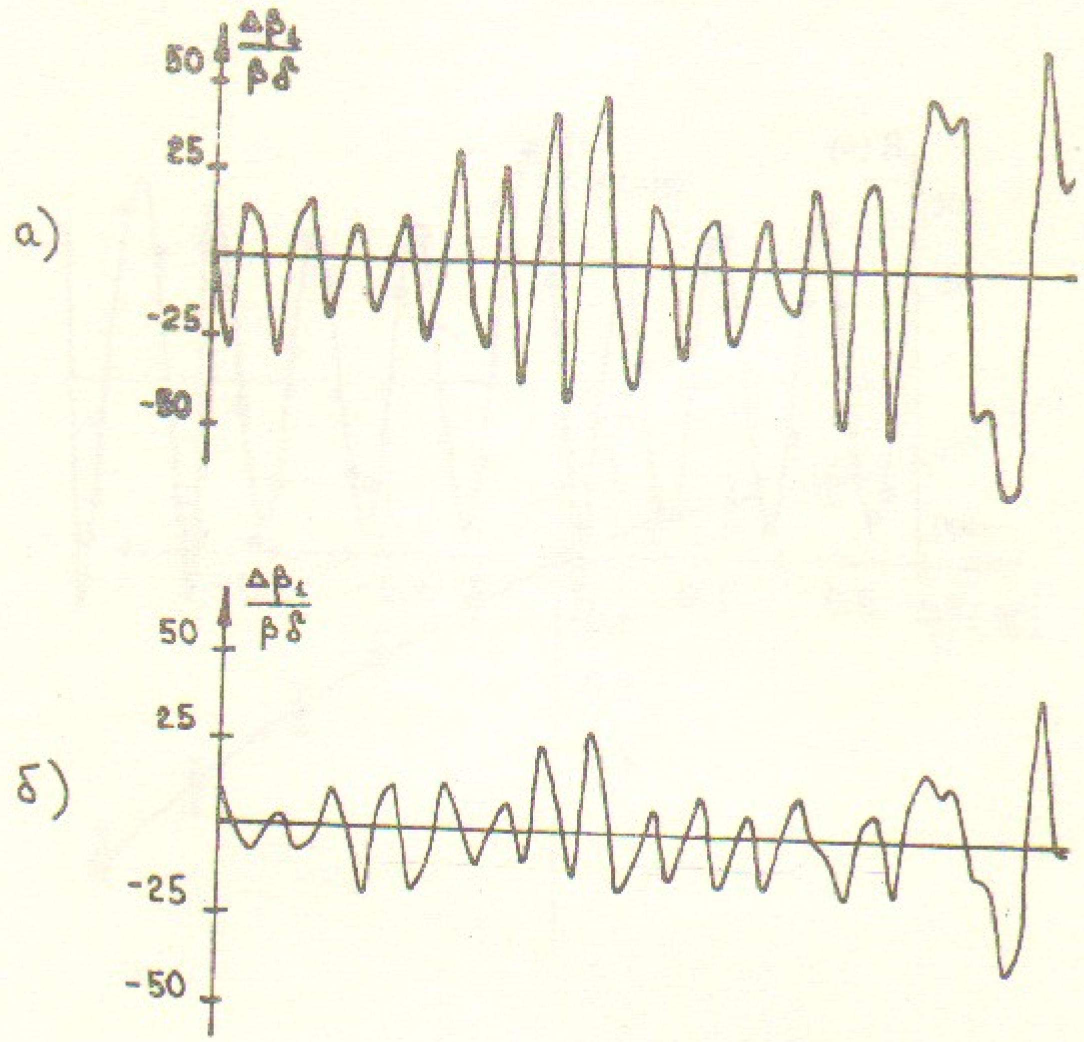

Рис.3 Расчетное значение $\frac{\Delta\beta_i}{\beta}$ / $\frac{\Delta P}{P}$ -функции ВЭШ-4. Рис.3 а – исходная функция. Рис.3 б – результат коррекции . По оси абсцисс развернут периметр ВЭШ-4.

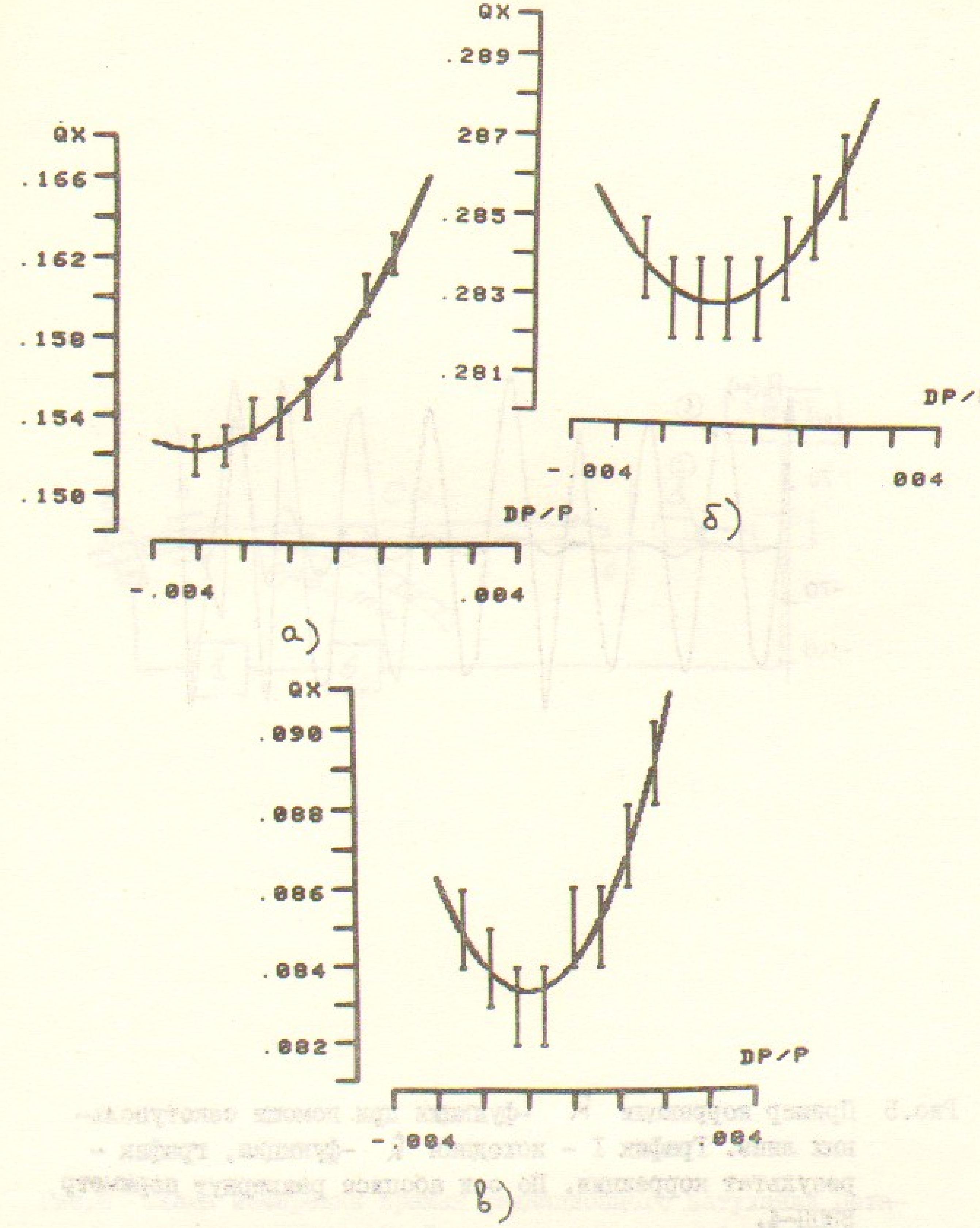

Рис.4 Зависимость частоты горизонтальных бетатронных колебаний от $\frac{\Delta P}{P}$ (хроматизм). Рис.4 а – ν_x = = 9.28, Рис. 4 б – ν_x = 9.I4, Рис.4 в – ν_x = = 9.08.

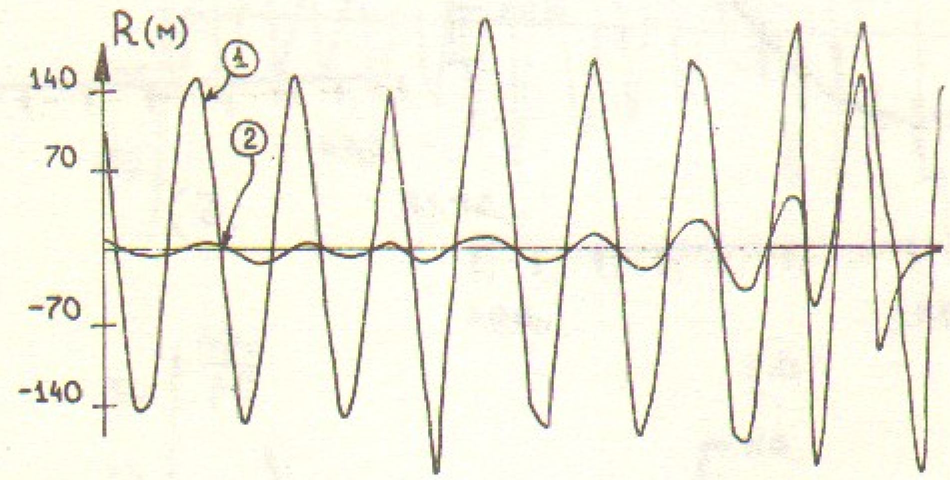

Рис.5 Пример коррекции R -функции при помощи секступольных линз. График I - исходная R -функция, график - результат коррекции. По оси абсцисс развернут периметр ВЭПП-4.

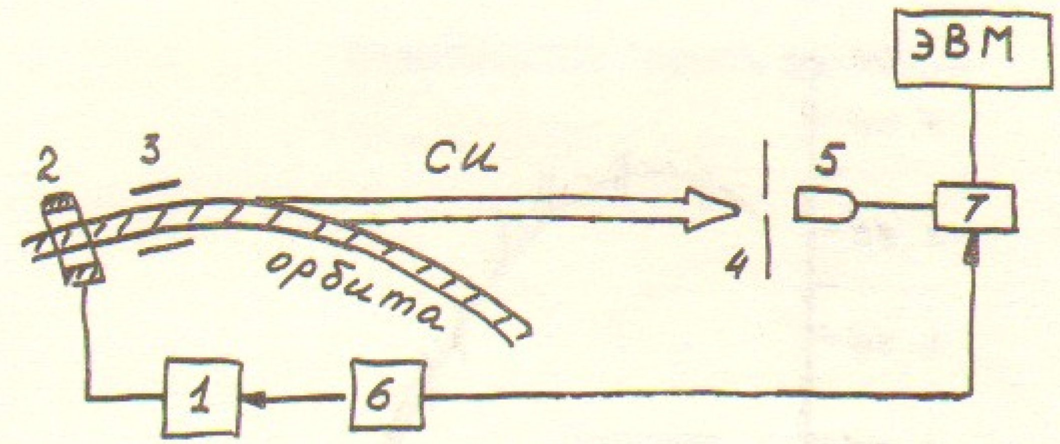

Рис.6 Схема измерения времен радиационного затухания бетатронных колебаний. I - генератор шума, 2 - магнит, 3 - пластины, 4 - диафрагма, 5 - ФЭУ, 6 - генератор импульсов, 7 - многоканальное АЦП.

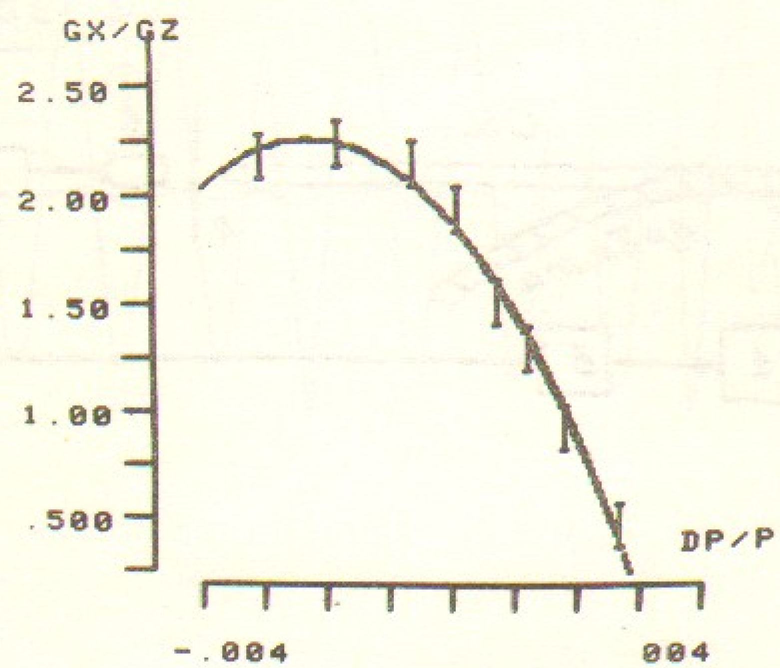

Рис.7 Относительная величина декремента горизонтальных бетатронных колебаний G_x/G_z в зависимости от $\frac{\Delta p}{p}$.

А.А.Жоленц, Н.И.Иноземцев, А.Б.Темных

ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ НА ВЭПП-4

Препринт
№ 83-44

Работа поступила - 18 марта 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 13.04-1983г. МН 17517
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,6 печ.л., 1,3 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ №44.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90