20

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

ИЯФ

Б.Н.Брейзман, Я.Вейланд

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

ПРЕПРИНТ 83-32

НОВОСИБИРСК

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Препринт

Б.Н.Брейзман, Я.Вейланд[ж)]

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

Новосибирск
1983

ж) Институт теории электромагнитного поля
Чалмерского технологического университета
(Швеция, Гетеборг)

При выводе уравнений квазилинейной теории [I,2] обычно исходят из предположения о том, что электрическое поле в плазме представляет собой ансамбль монохроматических волн со случайными фазами. Отыскав линейную по этому полю поправку к функции распределения, можно затем усреднить уравнение Власова по случайным фазам волн и получить для частиц уравнение квазилинейной диффузии. С другой стороны, известно, что квазилинейные уравнения могут быть выведены с помощью квантовой аналогии из условий баланса числа частиц и квазичастиц (плазмонов) в процессах индуцированного излучения и поглощения [3]. Второй подход очень удобен и нагляден, но не вполне последователен, поскольку сама возможность использования квантовой аналогии для вычисления вероятности излучения заранее не очевидна и оправдывается лишь получающимся результатом. Поэтому возникает методический вопрос о том, как вывести уравнение квазилинейной диффузии, сохранив основное преимущество квантового подхода – наглядное представление о столкновениях частиц с плазмонами – и не выходя вместе с тем за рамки чисто классического описания.

Чтобы избежать непринципиальных вычислительных усложнений, мы проведем все рассуждения на примере одномерной задачи о взаимодействии электронов с ленгмюровскими волнами. Рассмотрим прежде всего отдельный волновой пакет, электрическое поле которого $E(x;t)$ имеет вид ж)

$$E(x;t) = A(x)\cos(\kappa x - \omega_p t + \varphi),$$

где через $A(x)$, κ и φ обозначены, соответственно, огибающая, волновое число и фаза пакета, и найдем в линейном приближении изменение скорости электрона ΔV при столкновении с этим пакетом. Интегрирование уравнения движения электрона

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{e}{m} E(x;t) \qquad (I)$$

ж) Поскольку групповая скорость ленгмюровских волн мала, огибающая $A(x)$ считается здесь не зависящей от времени.

$$\Delta V = -\frac{e}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} A(x_0+V_0t)\cos(kx_0+\varphi-\Omega t)\,dt -$$

$$-\frac{e^2}{m^2}k\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{t}d\tau\; A(x_0+V_0t)\,A(x_0+V_0\tau)\,\cdot \qquad (8)$$

$$\cdot(t-\tau)\sin(kx_0+\varphi-\Omega t)\cos(kx_0+\varphi-\Omega\tau)$$

Выражение (8) для ΔV получено из уравнения (I) по теории возмущений. При этом учтено, что амплитуда $A(x)$ меняется вдоль траектории частицы медленно, по сравнению с функцией $\cos(kx-\omega_p t)$. Использование теории возмущений налагает очевидное ограничение на время пролета частицы сквозь пакет: это время должно быть малым по сравнению с периодом колебаний захваченных частиц в поле монохроматической волны с амплитудой порядка A. Иначе говоря, должно выполняться соотношение

$$\frac{L}{V} \ll \left(\frac{m}{ekA}\right)^{1/2}, \qquad (9)$$

где L - размер пакета.

При усреднении ΔV по фазам первое слагаемое в правой части формулы (8) исчезает, так что вклад в среднее значение ΔV вносит только квадратичная добавка. Результат усреднения записывается в следующем виде:

$$\langle\Delta V\rangle = \frac{e^2}{4m^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\; A(x_0+V_0t)\,A(x_0+V_0\tau)\,\cdot \qquad (I0)$$

$$\cdot\, k(t-\tau)\sin\Omega(t-\tau).$$

Подобно тому, как это было сделано при вычислении $\langle(\Delta V)^2\rangle$, величину $\langle\Delta V\rangle$ нетрудно выразить через $\delta(\omega_p-kV_0)$:

$$\langle\Delta V\rangle = \frac{4\pi^2e^2}{m^2|V_0|}\,\mathcal{E}_k\,\frac{\partial}{\partial V_0}\delta(\omega_p-kV_0)$$

Усреднив теперь $\langle\Delta V\rangle$ по функции распределения пакетов, с которыми частица сталкивается за время Δt, получим

$$\left\langle\frac{\Delta V}{\Delta t}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial V_0}\frac{1}{2}\left\langle\frac{(\Delta V)^2}{\Delta t}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial V_0}D(V_0) \qquad (II)$$

С учетом формул (5), (6) и (II) уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v}D(v)\frac{\partial}{\partial v}f$$

и полностью совпадает с уравнением квазилинейной диффузии.

Литература:

1. Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. Ядерный синтез, 1961, 1, 82.
2. Drummond W.E., Pines D. Nucl. Fusion Suppl., 1962, part 3, 1049.
3. Веденов А.А. В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. Леонтовича М.А. М.: Госатомиздат, 1963, вып.3, с.203.
4. Шафранов В.Д. В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. Леонтовича М.А. М.: Госатомиздат, 1963, вып.3, с.127.