

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

6



А.М.Искольдский, Е.И.Роменский.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ТЕРМОУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С
РЕЛАКСАЦИЕЙ ДАВЛЕНИЯ

ПРЕПРИНТ 83-11

Новосибирск

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУТОЙ СПЛОШНОЙ
СРЕДЫ С РЕЛАКСАЦИЕЙ ДАВЛЕНИЯ

А.М.Искольдский, Е.И.Роменский ^{*)}
(Новосибирск)

А Н Н О Т А Ц И Я

Сформулирована модель с релаксацией объемных деформаций в жидкости. Рассмотрена задача об импульсном нагреве элемента среды. Показано, что в рамках данной модели удается естественно интерпретировать электрический взрыв проводника, как явление, возникающее при необъяснимо высоком уровне удельного энергосодержания среды.

^{*)} Институт математики СО АН СССР

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ
СРЕДЫ С РЕЛАКСАЦИЕЙ ДАВЛЕНИЯ

А.М.Искольдский, Е.И.Роменский

(Новосибирск)

В [1] на основе максвелловской модели нелинейноупругой среды с релаксацией касательных напряжений [2] рассмотрена динамика импульсного нагрева металла электрическим током до предплавильных температур. При этом было дано разумное объяснение ряду экспериментальных закономерностей, которые в рамках упрощенных моделей представлялись как аномальные. В [1] принималось, что объемные деформации происходят упруго.

В настоящей работе сформулирована модель с релаксацией объемных деформаций в жидкости (сдвиговые напряжения не учитываются), которая позволяет дать естественную интерпретацию электрического взрыва, как явления, возникающего при необъяснимо высоком уровне удельного энергосодержания среды. В частности, при нагреве медного проводника в электрическом контуре, обеспечивающем скорость роста температуры $dT/dt \sim 1,5 \cdot 10^{10}$ град/с, начальная точка электрического взрыва приходится на энергию $Q_* \sim 3,2$ кДж/г ($T \sim 6000^\circ\text{K}$), тогда как кипение в равновесных условиях ($p = 1$ атм) начинается при $Q_{\text{кип}} \sim 1,35$ кДж/г ($T \sim 2900^\circ\text{K}$).

Подобный результат нельзя объяснить в рамках теории метастабильных состояний (в частности, теории нуклеации Зельдовича-Фольмера, см. также [3]), если использовать правдоподобные оценки для работы образования критического зародыша и величины предэкспоненты в универсальном выражении для потока зародышей в область размеров больших критического.

Учет объемной релаксации представляется необходимым расширением модели со сдвиговой релаксацией для области и более низких (предплавильных) температур.

I. Рассмотрим сплошную среду, деформации в которой сопровождаются только изменением объема. Тензор напряжений в данном случае описывается скаляром — давлением. В состоянии термодинамического равновесия такая среда описывается двумя термодина-

мическими параметрами, например, плотностью ρ и энтропией S .

Предположим теперь, что в среде может происходить необратимое изменение объема, связанное с рождением и исчезновением дефектов. Введем значение плотности ρ_* , которое примет элемент среды после установления термодинамического равновесия, имеющий в данный момент времени плотность ρ . Характерное время установления равновесия обозначим τ . Таким образом, введена новая термодинамическая переменная φ_* , и в соответствии с этим для внутренней энергии имеет место тождество

$$dE = -p dv + T dS + q dv_* \quad (I.1)$$

где $v = 1/\rho$ - удельный объем,

$v_* = 1/\rho_*$ - удельный объем в равновесном состоянии,

$p = -E_v$ - давление, $T = E_s$ - температура.

Уравнения динамики такой среды вытекают из законов сохранения массы, импульса, энергии, и дополняются также релаксационным уравнением

$$\begin{aligned} \rho \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= 0, \\ \rho \frac{dE}{dt} + p \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= 0, \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= 0, \\ \frac{d\rho_*}{dt} &= -\rho_* \frac{\ln \rho_*/\rho}{\tau}, \end{aligned} \quad (I.2)$$

где u_i - вектор скорости, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ - производная вдоль траектории движения.

В последнем уравнении системы (I.2), как обычно делается при рассмотрении процессов релаксации, постулируется, что в отсутствие источника уровень неравновесности экспоненциально уменьшается во времени.

Отметим, что для параметра $\xi = \ln \rho_*/\rho$ из (I.2) следует релаксационное уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\xi}{\tau}.$$

Теперь не v_* , а ξ характеризует отклонение среды от термодинамического равновесия: $E = E(\rho, S, \xi)$.

Из (I.2) следует уравнение эволюции энтропии

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\xi E_\xi}{E_s \tau}.$$

Таким образом, здесь энтропия не сохраняется и процесс становится необратимым. Требование неубывания энтропии накладывает ограничения на зависимость E от ξ в виде неравенства ($E_s = T > 0, \tau > 0$)

$$\xi E_\xi \geq 0. \quad (I.3)$$

Необходимо выбрать зависимость E от ξ таким образом, чтобы в какой-то мере описать экспериментальные факты, которые будут обсуждаться ниже. В качестве простейшей такой зависимости возьмем

$$E(\rho, S, \xi) = E^0(\rho, S) + \frac{1}{2} M(\rho, S) \xi^2. \quad (I.4)$$

Очевидно, (I.4) удовлетворяет (I.3) если $M(\rho, S) > 0$, что в дальнейшем и будет предполагаться. Давление и температура, вычисленные по (I.4), имеют вид

$$\begin{aligned} p &= \rho^2 E_\rho = \rho^2 E_\rho^0 + \frac{1}{2} \rho^2 M_\rho \xi^2 - \rho M \xi, \\ T &= E_s = E_s^0 + \frac{1}{2} M_s \xi^2. \end{aligned} \quad (I.5)$$

В данной работе в первую очередь рассматривается поведение металлов при импульсном нагреве. Рассматриваемая модель соответствует физической ситуации, в которой характерное время формирования термодинамически равновесной атомной конфигурации, связанное с динамикой (рождением и взаимной ориентацией) дефектов существенно больше фононного. При этом возникает неравновесное "промежуточное" поле деформаций, характеризующееся новой термодинамической координатой ξ . В отсутствие внешних воздействий поле ξ релаксирует, а запасенная в нем энергия перераспределяется по равновесным степеням свободы. Данная модель является моделью сплошной среды, если каждый ее элемент содержит значительное число дефектов, а размер элемента превышает расстояние между дефектами.

Модель предназначена в частности для описания металлов в области предплавленных температур. В этой области основным

типом термодинамически равновесных дефектов являются вакансии, на которые приходится до нескольких процентов удельного объема. Степень дефектности жидкости еще выше.

2. Для замыкания модели необходимо определить внутреннюю энергию $E(\rho, S, \xi)$ и время релаксации τ . Рассмотрим некоторые примеры, которые позволяют получить предварительную информацию о модуле M в формуле (I.4) и о времени τ , которое может быть функцией состояния среды.

Рассмотрим задачу об импульсном нагреве элемента среды. Предположим, что элемент достаточно мал, так что градиентами всех параметров, описывающих состояние среды, можно пренебречь. Пусть внешнее давление равно нулю, а температура внутри элемента меняется по заданному закону. Этот процесс можно описать уравнениями (предполагаем, что модуль M в (I.4) не зависит от ρ и S):

$$\begin{aligned} T(\rho, S) &= T(t), \\ p(\rho, S, \xi) &= 0, \\ \frac{d \ln \rho^*/\rho_0}{dt} &= -\frac{\ln \rho^*/\rho_0}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь ρ_0 начальная плотность среды при $t=0$, $T(t)$ - заданная функция, $p = \rho^2 E_\rho(\rho, S, \rho^*)$ - давление, определяемое по (I.5).

Дифференцируя первые два уравнения (2.1) по t , используя вытекающее из (I.5) с $M = \text{const}$ соотношение

$$\frac{\rho^*}{\rho} p_{\rho^*} = -M,$$

систему (2.1) перепишем в виде

$$\frac{d \ln \rho/\rho_0}{dt} = -\alpha \dot{T} - \frac{M}{K} \frac{\xi}{\tau}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha \dot{T} - \frac{K-M}{K} \frac{\xi}{\tau}, \quad (2.3)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{c_p}{T} \dot{T} + \alpha M \frac{\xi}{\tau}, \quad (2.4)$$

где c_p, α, K - соответственно, теплоемкость при постоянном

давлении, коэффициент объемного расширения, изотермический модуль объемного сжатия, вычисленные при помощи (I.1) при $\rho^* = \text{const}$, т.е. в среде с равновесной концентрацией дефектов. В первом приближении их можно считать соответствующими бездефектной среде.

Далее будем считать $\dot{T} = \text{const}$, $\tau = \text{const}$. Вначале рассмотрим случай "сверхбыстрого" нагрева элемента, предполагая, что время нагрева $t_n \ll \tau$. Обозначим $T_{\text{max}} = \dot{T} t_n$. Из уравнений (2.2), (2.3) получим при $t = t_n$

$$\xi_{\text{max}} = \alpha T_{\text{max}}, \quad \ln \rho_{\text{max}}/\rho_0 = -\alpha T_{\text{max}},$$

откуда $\rho^*|_{t=t_n} = \rho_0$, т.е. быстрый нагрев не приводит к рождению дефектов.

Теперь мгновенно прекратим нагрев, считая $\dot{T} = 0$, и будем следить за процессом релаксации - процессом установления равновесной концентрации дефектов.

Из (2.2)-(2.4) следует

$$\xi = \xi_{\text{max}} \exp\left(\frac{K-M}{K} \frac{t_n - t}{\tau}\right),$$

$$\ln \rho/\rho_0 = \ln \rho_{\text{max}}/\rho_0 - \xi_{\text{max}} \frac{M}{K-M} \left(1 - \exp\left(\frac{K-M}{K} \frac{t_n - t}{\tau}\right)\right),$$

$$S = S|_{t=t_n} + \xi_{\text{max}} \frac{\alpha MK}{K-M} \left(1 - \exp\left(\frac{K-M}{K} \frac{t_n - t}{\tau}\right)\right).$$

Отсюда можно вычислить коэффициент объемного расширения α' и теплоемкость c'_p в процессе релаксации. Варьируя T_{max} за счет изменения скорости нагрева

$$\delta T_{\text{max}} = (\delta \dot{T}) t_n,$$

получим

$$\alpha' = -\frac{\delta \ln \rho/\rho_0}{\delta T_{\text{max}}} = \alpha + \frac{\alpha M}{K-M} \left(1 - \xi/\xi_{\text{max}}\right), \quad (2.5)$$

$$c'_p = T_{\text{max}} \frac{\delta S}{\delta T_{\text{max}}} = c_p + \frac{\alpha^2 MK T_{\text{max}}}{K-M} \left(1 - \xi/\xi_{\text{max}}\right). \quad (2.6)$$

Таким образом, получены выражения для добавок к коэффициенту объемного расширения α и теплоемкости c_p , связанных с образованием равновесной концентрации дефектов при релаксации.

Из (2.5), (2.6) следует, что необходимо проявлять известную осторожность при интерпретации результатов динамических измерений той доли теплового расширения и теплоемкости, которая контролируется дефектами: при статических измерениях $\dot{\xi} = 0$, а при динамических — устанавливается отличный от нуля уровень неравновесности.

Рассмотрим теперь процесс нагрева со скоростью \dot{T} роста температуры.

Предположим, что в некотором интервале изменение термодинамических параметров τ как функция состояния среды мало меняется. В этом случае возможна ситуация, когда $d\xi/dt$ в уравнении (2.3) малая величина, тогда

$$\dot{\xi} = \tau \dot{T} \frac{\alpha K}{K-M} \quad (2.7)$$

В этом приближении для плотности и энтропии из (2.2), (2.4) получим

$$\frac{d \ln \rho / \rho_0}{dt} = -\alpha \dot{T} \left(1 + \frac{M}{K-M}\right),$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{c_p}{T} \dot{T} \left(1 + \frac{\alpha^2 T M K}{c_p (K-M)}\right).$$

Исключая из этих уравнений dt получим

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = \alpha + \frac{\alpha M}{K-M} = \alpha + \Delta \alpha,$$

$$T \frac{dS}{dT} = c_p + \frac{\alpha^2 M K T}{K-M} = c_p + \Delta c_p.$$

Таким образом, для установившегося процесса ($d\xi/dt = 0$) получены добавки объемного коэффициента теплового расширения и теплоемкости

$$\Delta \alpha = \frac{\alpha M}{K-M}, \quad (2.8)$$

$$\Delta c_p = \frac{\alpha^2 M K T}{K-M} = (c_p - c_v) \frac{M}{K-M}. \quad (2.9)$$

Заметим, что в данном случае формируется неравновесное давление, связанное с полем ξ : из (2.7), (1.5) следует

$$p = p^0(\rho, S) - \rho \tau \dot{T} \frac{\alpha M K}{K-M}. \quad (2.10)$$

Второе слагаемое в этом выражении связано с эффективной объемной вязкостью.

Формулы (2.8) и (2.9) для добавок к коэффициенту объемного расширения α и теплоемкости c_p при условиях $p = \text{const}$, $\xi = \text{const}$ могут быть получены из выражений (1.5) для ρ и T при $M = \text{const}$.

Таким образом, задача об импульсном нагреве в рассматриваемом приближении дает возможность получить описание таких характеристик среды как коэффициент теплового расширения, теплоемкость при постоянном давлении, неравновесное давление. Эти характеристики можно использовать для замыкания модели. Приведем некоторые экспериментальные данные, которые позволяют оценить интервалы изменения параметров (в частности M и τ) нужных для замыкания модели. Полученные ниже цифры при необходимости можно уточнить, подбирая разумные функциональные зависимости $M(\rho, S)$, $\tau(\rho, S)$.

Для металлов в предплавильной области при оценке величины модуля M можно использовать данные прецизионных измерений, например, температурной зависимости суммарного теплового расширения и той его доли, которая связана только с увеличением размеров решетки (см. формулу (2.5)) или аналогичной зависимости для теплоемкости вакансий (см. формулу (2.6)).

При нагреве тугоплавких металлов до температуры плавления около половины приращения коэффициента теплового расширения контролируется дефектами [4, 5]. Существует ряд методов определения нужных зависимостей. В частности, рентгеновские измерения позволяют определить непосредственно характерный размер решетки [6]. В соответствии с имеющимися данными в твердой фазе у металлов $M/(K-M) = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_0^2 < 1$ (определение c_∞ и c_0 будет дано ниже). Например, по данным различных методик для меди вблизи температуры плавления в твердой фазе $\Delta \alpha / \alpha = \frac{M}{K-M} = 0,1+0,2$.

Время релаксации τ контролируется целым рядом релаксационных процессов с участием термодинамических равновесных дефектов [7]. Это время можно рассматривать как время "жизни" дефекта. Величина τ существенным образом зависит от температуры и может быть найдена, например, из экспериментов по закалке вакансий (закалка в данной модели происходит, если харак-

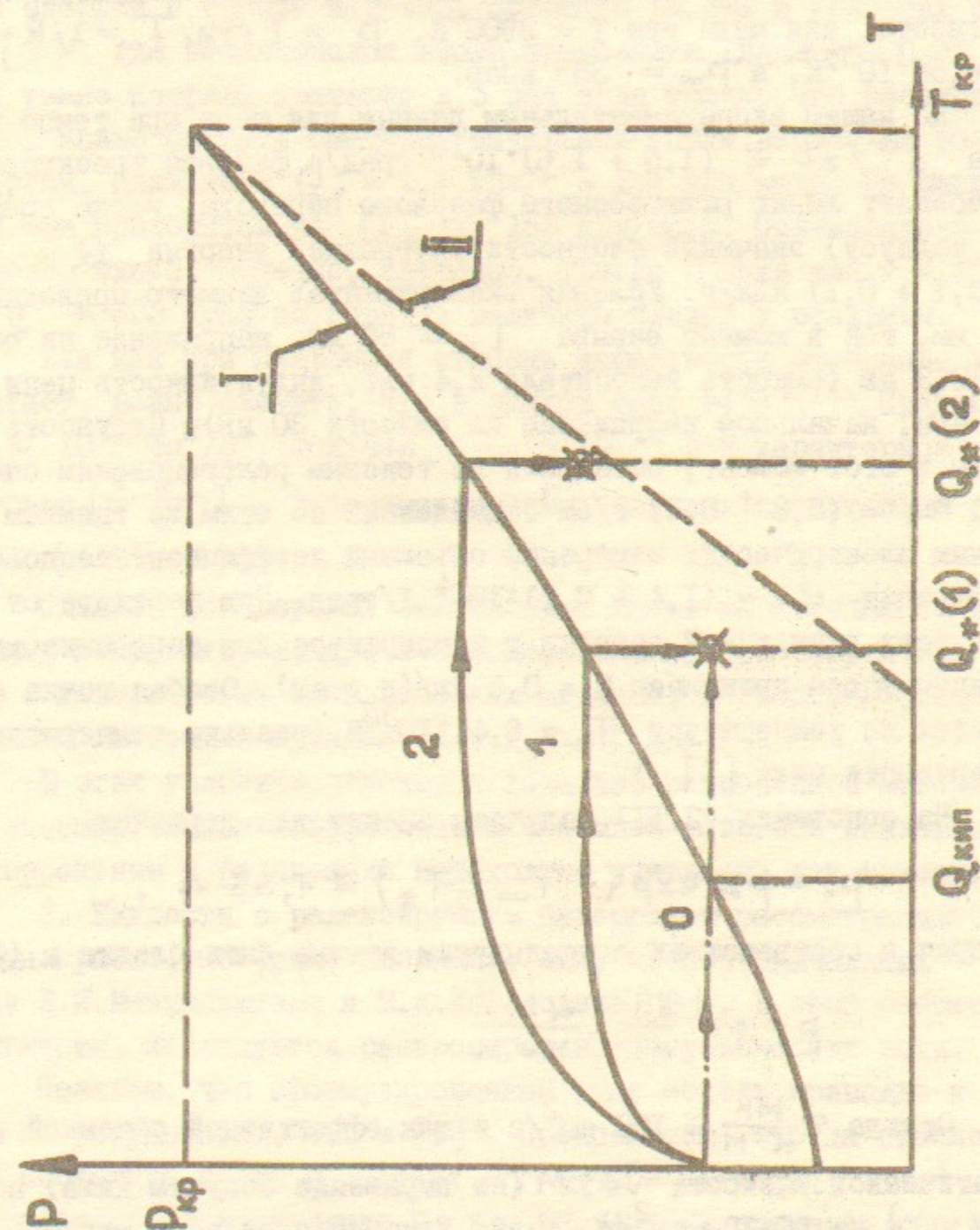
терное время охлаждения образца меньше релаксационного). Для оценки можно положить $\tau \gg 10^{-6}$ с, так как по данным эксперимента темп охлаждения $\sim 10^6$ град/с достаточен для того, чтобы плотность вакансий по окончании процесса несущественно отличалась от исходной.

Приняв для меди в предплавильной области $\tau \sim 10^{-5}$ с, $M \sim 2 \cdot 10^{10}$ дин/см², имеем оценку величины эффективной объемной вязкости $\eta \cong 10^6$ пуаз.

Неравновесное давление (см. (2.10)), развивающееся в процессе нагрева жидкости приводит к смещению фазовой траектории нагреваемого элемента в область устойчивых состояний (рис.1), лежащую на $p-T$ диаграмме выше кривой равновесного фазового перехода жидкость - пар. После выхода ξ на стационарный уровень (2.7) указанная точка из-за продолжающегося нагрева движется вправо почти параллельно оси температур до момента встречи с равновесной кривой. Дальнейший нагрев приводит к кипению. Этот момент хорошо фиксируется в эксперименте: наблюдается резкое увеличение скорости роста поперечного размера проводника на теньевых рентгеновских снимках; с поверхности проводника стартуют струи высокотемпературного плотного газа, которые, догнав ушедшую вперед границу воздух - пар, обнаруживаются в виде ярких областей на снимках, сделанных с помощью СФР и электронно-оптических фотокамер; электрические измерения показывают, что в этот момент начинается процесс эффективного прерывания тока.

На рисунке представлены фазовые траектории точки, соответствующей поверхности проводника в $p-T$ плоскости: I - линия равновесного фазового превращения жидкость - пар, II - спинодаль, $(p_{кр}, T_{кр})$ - координаты критической точки, $Q_{кип}$ - точка начала кипения при атмосферном давлении, $Q_*(1), Q_*(2)$ - начальные точки электрического взрыва, 0 - нереализуемая траектория, I - истинная траектория при том же темпе нагрева, что и для случая 0, 2 - то же, при более высоком темпе нагрева.

Зная уравнение равновесной кривой и положение начальной точки электрического взрыва на оси температур (энергий) можно определить амплитуду неравновесного давления и на основании (2.10) - оценить эффективную объемную вязкость жидкого металла при температурах, превышающих температуру равновесного ки-



пения. Вдали от критической точки уравнение кривой равновесного фазового перехода жидкость - пар имеет вид

$$p = p_{\infty} \exp(-\lambda/RT), \quad (2.11)$$

где λ - теплота перехода, а p_{∞} определяется по известному давлению насыщения паров при фиксированной температуре. В частности, для меди при $T = 2900^{\circ}\text{K}$, $p = 1$ атм, $T_{\infty} = \lambda/R = 36,56 \cdot 10^3 \text{K}$, а $p_{\infty} \cong 335$ кбар.

По нашим экспериментальным данным для меди при темпе нагрева $dT/dt \cong (1,5 + 1,6) \cdot 10^{10}$ град/с фазовая траектория пересекает линию равновесного фазового перехода, когда среднее (по радиусу) значение плотности внутренней энергии $Q_* = (3,1 + 0,1)$ кДж/г. Условия эксперимента: диаметр проводника 0,4 мм, ток в момент взрыва $I_* \cong 50$ кА, напряжение на образце 13,3 кВ (емкость накопителя 2,4 мкФ, индуктивность цепи 430 нГн, начальное напряжение на емкости 30 кВ). Плотность среды в этот момент, оцененная по теневым рентгеновским снимкам, $\rho_* = (5,8 \pm 0,2)$ г/см³. Найденный по этим же снимкам и данным электрических измерений объемный коэффициент теплового расширения $\alpha = (1,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}$ 1/град. При переходе от плотности внутренней энергии к температуре для теплоемкости единицы массы принимаем $C = 0,5$ Дж/(г град). Особая точка приходится на температуру $T_* = 6,44 \cdot 10^3 \text{K}$ (реально температура поверхности ниже [1]).

На основании (2.11) получаем оценку для давления

$$p_* = p_{\infty} \exp(-T_{\infty}/T_*) \cong 1,35 \text{ кб},$$

которая в соответствии с предыдущим должна быть близка к (2.10)

$$p = \rho \tau \frac{dT}{dt} \frac{\alpha MK}{K-M}$$

Отсюда $\tau \frac{MK}{K-M} \cong 100$ см²/с и для эффективной объемной кинематической вязкости $\nu = \tau M$ (ее выражение получим ниже) получаем $\nu = 50+100$ см²/с, а для динамической вязкости η соответственно получим $\eta = 300+600$ пуаз (здесь предполагаются следующие границы изменения M : от $K \cong K-M$ до $M \cong K-M$).

Из $p = p_*$ следует экспериментально проверяемое соотношение (предполагаем $K \cong K-M$):

$$T \cong T_{\infty} / \ln(p_{\infty} / \rho \tau \alpha M \dot{T}) \quad (2.12)$$

связывающее положение начальной точки электрического взрыва на оси энергий с темпом нагрева. Согласно (2.12) в условиях работы [8], где исследовался взрыв проводника диаметром 0,31 мм при темпе нагрева примерно в 5 раз ниже только что рассмотренного, можно ожидать смещения начальной точки взрыва на область энергий, близкую к $Q_* = 2,4$ кДж/г = 152 кДж/моль. По данным [8] она приходится на $\hat{Q}_* \cong 152$ кДж/моль. Совпадение в третьем знаке, конечно, случайно. Однако стенки для $\nu \cong 50$ см²/с и $\eta \cong 300$ пуаз по порядку величины близки к реальным.

Так как при плавлении степень дефектности материала возрастает, можно ожидать, что в жидкой фазе $M \cong K-M$. Принимая $K \sim 10^{11}$ см²/с², получим $\tau \sim 5 \cdot 10^{-10}$ с и характерное время нагрева $(\frac{1}{T} \frac{dT}{dt})^{-1}$ в рассматриваемых случаях значительно больше τ ($\omega \tau \ll 1$).

Однако, при взрывах эмиссионных пятен на катодах сильноточных коммутаторов, при взаимодействии пучков энергичных частиц с поверхностью металлических мишеней, в экспериментах с мощными лазерными пучками, и т.д. $\omega \tau \geq 1$.

В этих условиях переход к локально равновесной модели с перенормированным коэффициентом объемной вязкости оказывается некорректным и релаксацию необходимо учитывать как таковую.

3. Жидкости с релаксирующим параметром рассматривались неоднократно. Отметим, например, одну из первоначальных - работу Л.И.Мандельштама и М.А.Леонтовича [9]. В этой работе, в частности, исследуется распространение акустических волн.

Покажем, что сформулированная выше модель приводит к таким же результатам, что и [9]. Предположим, что на стационарное состояние среды $\rho^{\circ} = \text{const}$, $\rho_*^{\circ} = \rho$, $S^{\circ} = \text{const}$, $u_i^{\circ} = \text{const}$ наложено малое возмущение $\delta \rho, \delta \rho_*, \delta S, \delta u_i$. Линеаризуем систему (1.2) относительно малых возмущений. Получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varrho^0 \frac{d\delta u_i}{dt} + \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{d\delta \varrho}{dt} + \varrho^0 \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_3} \right) &= 0, \\ \frac{d\delta \varrho^*}{dt} &= -\frac{\delta \varrho^* - \delta \varrho}{\tau^0}, \\ \frac{d\delta \xi}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha^0 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_{\xi, \delta} \delta \varrho + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\varrho, \delta} \delta \xi + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\varrho, \delta} \delta \xi.$$

Для $\delta \xi$ получим уравнение

$$\frac{d\delta \xi}{dt} = \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_3} - \frac{\delta \xi}{\tau^0}.$$

Предположим вначале, что $u_\alpha^0 = 0$. Пусть возмущения во времени меняются по гармоническому закону $e^{i\omega t}$. Из уравнения для $\delta \xi$ найдем

$$\delta \xi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{i\omega\tau^0}{1+i\omega\tau^0} \frac{\delta \varrho}{\varrho^0},$$

следовательно, т.к. $\delta \xi(x_1, x_2, x_3) = 0$,

$$\delta p(x_1, x_2, x_3) = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_{\xi, \delta} - \frac{1}{\varrho^0} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\varrho, \delta} \frac{i\omega\tau^0}{1+i\omega\tau^0} \right) \delta \varrho(x_1, x_2, x_3). \quad (3.2)$$

Ищем теперь решения вида $e^{ik_\alpha x_\alpha}$.

Из условия разрешимости системы (3.1) с $u_\alpha^0 = 0$ получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_{\xi, \delta} - \frac{1}{\varrho^0} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\varrho, \delta} \frac{i\omega\tau^0}{1+i\omega\tau^0} \right) (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2). \quad (3.3)$$

Можно показать, что для случая $u_\alpha^0 \neq 0$ справедлива та же формула (3.3), в которой ω заменено на $\omega + u_\alpha^0 k_\alpha$.

Итак, получено выражение для комплексной скорости звука (3.3), совпадающее с формулой работы [9].

Рассмотрим теперь предельные случаи для (3.3). Считаем, что время релаксации τ может изменяться в широких пределах и фиксируем частоту ω . Пусть $\tau \gg 1/\omega$, т.е. время релаксации велико, среда "почти упругая". Из (3.3) следует

$$\omega^2 = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_{\xi, \delta} - \frac{1}{\varrho^0} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\varrho, \delta} \right) |k|^2,$$

где $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$.

Скорость звука c_∞ , определяемая как

$$c_\infty^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_{\xi, \delta} - \frac{1}{\varrho^0} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\varrho, \delta}$$

соответствует скорости звука в среде без релаксации.

При $\tau \ll 1/\omega$ (малое время релаксации) имеем

$$\omega^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_{\xi, \delta} |k|^2.$$

Скорость звука $c_0 = \sqrt{(\partial p / \partial \varrho)_{\xi, \delta}}$ соответствует "мгновенно релаксирующей" среде.

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\varrho, \delta} = -\varrho^0 (c_\infty^2 - c_0^2).$$

Для случая малых времен релаксации ($\tau \ll 1/\omega$) используя $i\omega\tau\delta\varrho + \varrho^0 \operatorname{div} \delta u = 0$ получим из (3.2)

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_{\xi, \delta} \delta \varrho - (c_\infty^2 - c_0^2) \tau^0 \operatorname{div} \delta u. \quad (3.4)$$

Для давления получили формулу с объемной вязкостью.

Эффективная объемная кинематическая вязкость выражается формулой (используя (1.5) с $M = \operatorname{const}$)

$$\nu = \tau^0 (c_\infty^2 - c_0^2) = -\frac{\tau^0}{\varrho^0} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\varrho, \delta} = \tau^0 M. \quad (3.5)$$

Отметим, что формула для давления (3.4) с объемной вязкостью (3.5) справедлива только для достаточно медленных по сравнению с временем релаксации τ процессов. Следовательно, для быстропротекающих процессов модель с вязкостью Навье-Стокса, определяемой по (3.5) неприменима.

Существенным обстоятельством является также и то, что система уравнений (1.2) с релаксацией плотности является гиперболической (все процессы имеют конечную скорость распространения).

Л и т е р а т у р а

1. Доровский В.Н., Искольдский А.М., Роменский Е.И. Динамика импульсного нагрева металла током и электрический взрыв проводников, Препринт № 174 ИАЭ СО АН СССР, 1982.
2. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды, М., Наука, 1978.
3. Паташинский А.З., Шумило Б.И. Теория релаксации метастабильных состояний, ЖЭТФ, 1979, т.77, № 4, с.1417-1428.
4. Дамаск А., Динс Дж. Точечные дефекты в металлах, М., Мир, 1966.
5. Крафтмахер Я.А. Экспериментальное исследование теплоемкости металлов при высоких температурах (образование вакансий и фазовые переходы второго рода). Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Свердловск, 1975.
6. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела, М., Наука, 1978.
7. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах, М., Атомиздат, 1975.
8. Каримходжаев И., Мартынюк М.М. Осциллографическое исследование электрического взрыва меди и золота, ПМТФ, 1974, № 3, с.54-58.
9. Мандельштам Л.И., Леонтович М.А. К теории поглощения звука в жидкостях, ЖЭТФ, 1937, № 7, с.436-449.

А.М.Искольдский, Е.И.Роменский

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ
СРЕДЫ С РЕЛАКСАЦИЕЙ ДАВЛЕНИЯ

Препринт
№ 83- II

Работа поступила - 12 января 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 24.1-1983 г. МН 03019
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,0 печ.л., 0,8 учетно-изд.л
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № II.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90