

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

М.М.Карлинер, Ю.А.Сокулин, В.П.Яковлев

РАСЧЁТ АЗИМУТАЛЬНО-ОДНОРОДНЫХ
КОЛЕБАНИЙ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ
РЕЗОНАТОРАХ С НЕОДНОРОДНЫМ
ФЕРРОМАГНИТНЫМ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ
ЗАПОЛНЕНИЕМ

ПРЕПРИНТ 82-149



РАСЧЕТ АЗИМУТАЛЬНО-ОДНОРОДНЫХ
КОЛЕБАНИЙ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РЕЗОНАТОРАХ
С НЕОДНОРОДНЫМ ФЕРРОМАГНИТНЫМ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

М.М.Карлинер, А.Ю.Сокулин, В.П.Яковлев

I. ВВЕДЕНИЕ

В ускорительной технике применяются резонаторы с ферромагнитным и диэлектрическим заполнением. В частности, такие резонаторы используются в синхротронах, где перестройка резонансной частоты осуществляется путем изменения диэлектрических или ферромагнитных характеристик вещества, заполняющего резонатор [1].

Для проектирования подобного рода резонаторов необходимо заранее знать их основные параметры: резонансную частоту, добротность, распределение электромагнитных полей в объеме и на поверхности резонатора. Единственным инструментом, позволяющим предсказывать с необходимой точностью указанные параметры, являются численные методы.

В настоящей работе предлагается численный метод расчета симметричных ТМ-колебаний в аксиально-симметричных резонаторах с частичным заполнением. Заполнение предполагается азимутально-однородным и кусочно-однородным в аксиальной плоскости симметрии.

Данный метод применим также для расчета критических длин волн в продольно-однородных волноводах с диэлектрическим и ферромагнитным заполнением.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Свободные колебания в резонаторе описываются однородными уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (I)$$

Исключая из уравнений (1) \vec{E} , можно получить волновое уравнение относительно \vec{H} :

$$\text{rot rot } \vec{H} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

В случае гармонической зависимости полей от времени, то есть если $\vec{H} = \vec{H}_0 \cdot e^{-i\omega t}$, имеем:

$$\text{rot rot } \vec{H}_0 = k^2 \vec{H}_0 \quad (2)$$

где $k^2 = k_0^2 \cdot \epsilon\mu$, $k_0 = \omega/c$.

Для рассматриваемых симметричных ТМ-мод, $H_r = H_z = 0$ и $E_\varphi = 0$, так что уравнение (2) сводится к виду:

$$\text{rot rot } \vec{H}_\varphi - k^2 \vec{H}_\varphi = 0 \quad (3)$$

На идеально проводящей поверхности поля \vec{E} и \vec{H} удовлетворяют граничным условиям:

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0 \quad (4)$$

$$\vec{H} \cdot \vec{n} = 0$$

где \vec{n} - вектор нормали к поверхности.

На границе диэлектрика должны выполняться граничные условия:

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n} = 0 \quad (5)$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n} = 0 \quad (6)$$

(здесь индексами 1 и 2 помечены поля слева и справа от границы соответственно).

2. ДИСКРЕТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Для дискретной аппроксимации уравнения (3) с граничными условиями (4) - (6) применяется метод конечных элементов, использующий неравномерную регулярную треугольную сетку [2,3]. Это дает высокую степень аппроксимации исходного уравнения и позволяет достаточно точно учитывать геометрию стенок резонаторов.

Предполагается, что искомое магнитное поле в каждом из шести треугольников, расположенных вокруг некоторого узла сетки (рис.1), линейно зависит от координат r и z .

Уравнение (3) интегрируется по площади двенадцатиугольника, образованного прямыми, соединяющими середины сторон треугольников с их "центрами масс" (рис.1).

$$\int \text{rot rot } \vec{H}_\varphi d\vec{S} - k^2 \int \epsilon\mu \vec{H}_\varphi d\vec{S} = 0$$

Применяя теорему Стокса, можно переписать:

$$\oint \text{rot } \vec{H}_\varphi d\vec{l} - k^2 \int \epsilon\mu \vec{H}_\varphi d\vec{S} = 0 \quad (7)$$

Интегрирование по контуру в левой части уравнения (7) ведется по границе двенадцатиугольника. В результате интегрирования с учетом вышеупомянутой линейной зависимости магнитного поля от координат r и z , уравнение (7) для i -го узла сетки сводится к уравнению:

$$\sum_{p=1}^6 H_{ip} (\omega_{ip} - k_0^2 v_{ip}) = 0 \quad (8)$$

где коэффициенты ω_{ip} и v_{ip} зависят от координат вершин треугольников, а H_{ip} - значения магнитного поля в вершинах треугольников.

Уравнение (8) справедливо во всех внутренних точках, а также в случаях, когда центральная точка шестиугольника лежит на идеально проводящей поверхности или в плоскости симметрии, где $H_\varphi = 0$. Однако, если центр шестиугольника лежит на границе раздела двух сред с разными диэлектрическими проницаемостями, то уравнение (8) неверно, поскольку не учитывает граничное условие (5).

Граничное условие (5) можно учесть следующим образом. Запишем уравнение (3) в виде:

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}_\varphi - k_0^2 \mu \vec{H}_\varphi = 0 \quad (9)$$

Проинтегрируем уравнение (9) по областям S_1 и S_2 , образующим двенадцатиугольник (рис.2) и воспользуемся теоремой Стокса:

$$\int_{\delta_1} \frac{1}{\varepsilon_1} \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{\ell} + \int_a^b \frac{1}{\varepsilon_1} \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{\ell} - k_0^2 \int_{S_1} \mu_1 \vec{H} d\vec{S} = 0 \quad (10)$$

$$\int_{\delta_2} \frac{1}{\varepsilon_2} \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{\ell} + \int_b^a \frac{1}{\varepsilon_2} \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{\ell} - k_0^2 \int_{S_2} \mu_2 \vec{H} d\vec{S} = 0 \quad (11)$$

Заметим, что из условия (5) и уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{i\omega\varepsilon}{c} \vec{E}$$

следует равенство

$$\int_a^b \frac{1}{\varepsilon_1} \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{\ell} = -\int_b^a \frac{1}{\varepsilon_2} \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{\ell} \quad (12)$$

Складывая уравнения (10) и (11), с учетом (12), получим:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{\ell} - k_0^2 \int_S \mu(\vec{r}) \vec{H} d\vec{S} = 0 \quad (13)$$

где $\varepsilon(\vec{r})$ принимает значения ε_1 и ε_2 в областях S_1 и S_2 соответственно; (аналогично и для $\mu(\vec{r})$).

В результате интегрирования уравнение (13) для i -го узла принимает вид:

$$\sum_{p=0}^6 H_{ip} \cdot (\omega'_{ip} - k_0^2 v'_{ip}) = 0 \quad (14)$$

где коэффициенты ω'_{ip} и v'_{ip} зависят от координат вершин треугольника и значений диэлектрической и магнитной проницаемостей в этих точках.

Очевидно, что уравнение (14) справедливо и в случае, если в области $S = S_1 \cup S_2$ параметры ε и μ постоянны.

Уравнение (14) справедливо также в случае, когда центральная точка шестиугольника лежит на идеально проводящей поверхности. Тогда интегрирование по площади ведется по той части двенадцатиугольника, которая принадлежит внутренней области резонатора. Интегрирование по контуру должно производиться по границе $0-1'-2'-3'-4'-0$ (рис.3).

Таким образом, уравнение (14) выполняется во всех точках сетки.

Поиск резонансных частот и вычисление электромагнитных полей производится по методу, используемому в программе LANS [2].

3. ТЕСТИРОВАНИЕ И ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА

Для проверки правильности и точности вычисления собственных частот был произведен расчет цилиндрического резонатора, частично заполненного ферритом (рис.4). Будем рассматривать азимутально-однородные ТМ-моды без вариации по оси Z в цилиндрической системе координат. Для таких мод зависимость азимутальной компоненты магнитного поля от координаты r имеет следующий вид:

$$H_{\varphi I} = A \cdot J_1(k_0 r)$$

$$H_{\varphi II} = B \cdot J_1(k r) + C \cdot N_1(k r)$$

здесь индексами I и II обозначены свободная и заполненная области соответственно; $J_1(kr)$ - функция Бесселя, $N_1(kr)$ - функция Неймана, $k^2 = k_0^2 \epsilon \mu$, A - нормировочная константа, а коэффициенты B и C даются равенствами:

$$B = A \cdot \frac{J_1(k_0 b) \cdot N_0(k b) - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} J_0(k b) \cdot N_1(k b)}{J_1(k b) \cdot N_0(k b) - J_0(k b) \cdot N_1(k b)}$$

$$C = A \cdot \frac{J_1(k_0 b) \cdot J_0(k b) - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} J_0(k_0 b) \cdot J_1(k b)}{-J_1(k b) \cdot N_0(k b) + J_0(k b) \cdot N_1(k b)}$$

Резонансные частоты k_0 определяются из уравнения:

$$B \cdot J_0(k a) + C \cdot N_0(k a) = 0 \quad (II)$$

Ниже приведены первые четыре корня уравнения (II) и результаты численного расчета по предлагаемому методу (в 1/см):

	корни уравнения	расчетные значения
1.	0.1164	0.118
2.	0.310	0.315
3.	0.510	0.519
4.	0.712	0.711

Результаты совпадают в пределах 2%. (Вычисления производились при следующих значениях параметров: $a = 1$ см, $b = 0.5$ см, $\epsilon = 15$, $\mu = 60$).

С помощью предлагаемого метода был произведен расчет ма-

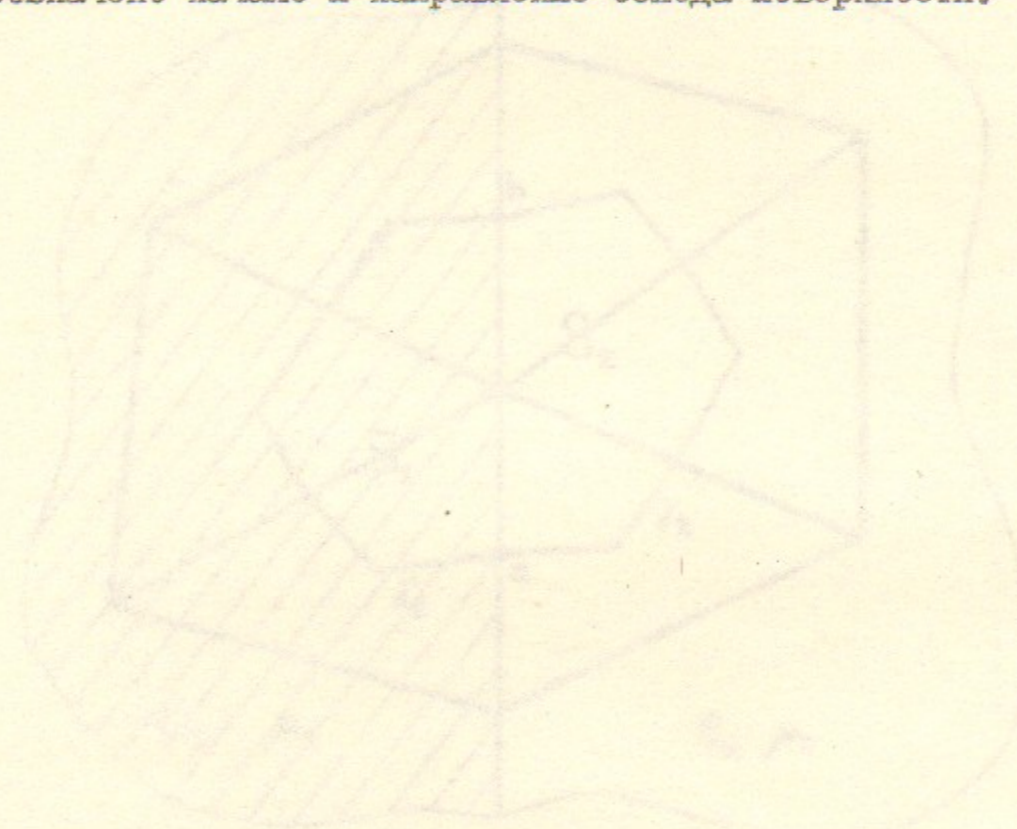
кетного резонатора, изображенного на рис.5. Феррит, заполняющий резонатор, имеет следующие характеристики: диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 15$, магнитная проницаемость $\mu = 60$.

По результатам измерений, частота основной моды этого резонатора равна 47 МГц, расчетное значение 43 МГц. Различие в частоте порядка 10% обусловлено неточностью измерения характеристик феррита.

Был также произведен расчет проектируемого резонатора синхротрона Б-4. Его конфигурация показана на рис.6. Характеристики феррита: $\epsilon = 15$, $\mu = 60$.

Расчетная частота основной моды 35,9 МГц.

На рис.7 показан характер изменения полей вдоль поверхности резонатора, в аксиальной плоскости симметрии. Стрелкой обозначено начало и направление обхода поверхности.



Л и т е р а т у р а :

1. Авербух И.И. "Разработка и исследование ускоряющей системы, перестраиваемой с большой скоростью в широком диапазоне частот, для протонно-ионного синхротрона Б-5". Кандидатская диссертация. Новосибирск, 1981.
2. В.М.Фомел, V.P.Jackovlev, M.M.Karliner, P.B.Lysyansky, *Particle Accelerators*, 11, pp. 173-179, (1981).
3. K.Halbach, R.F.Holsinger, *Particle Accelerators*, 7, pp. 213-222, (1976).

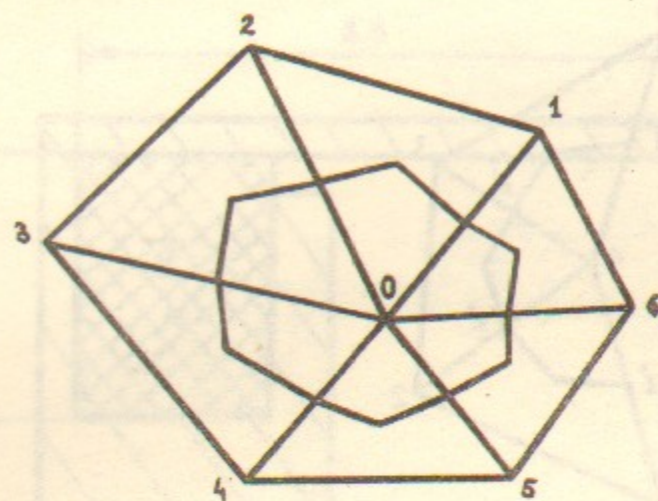


Рис. 1

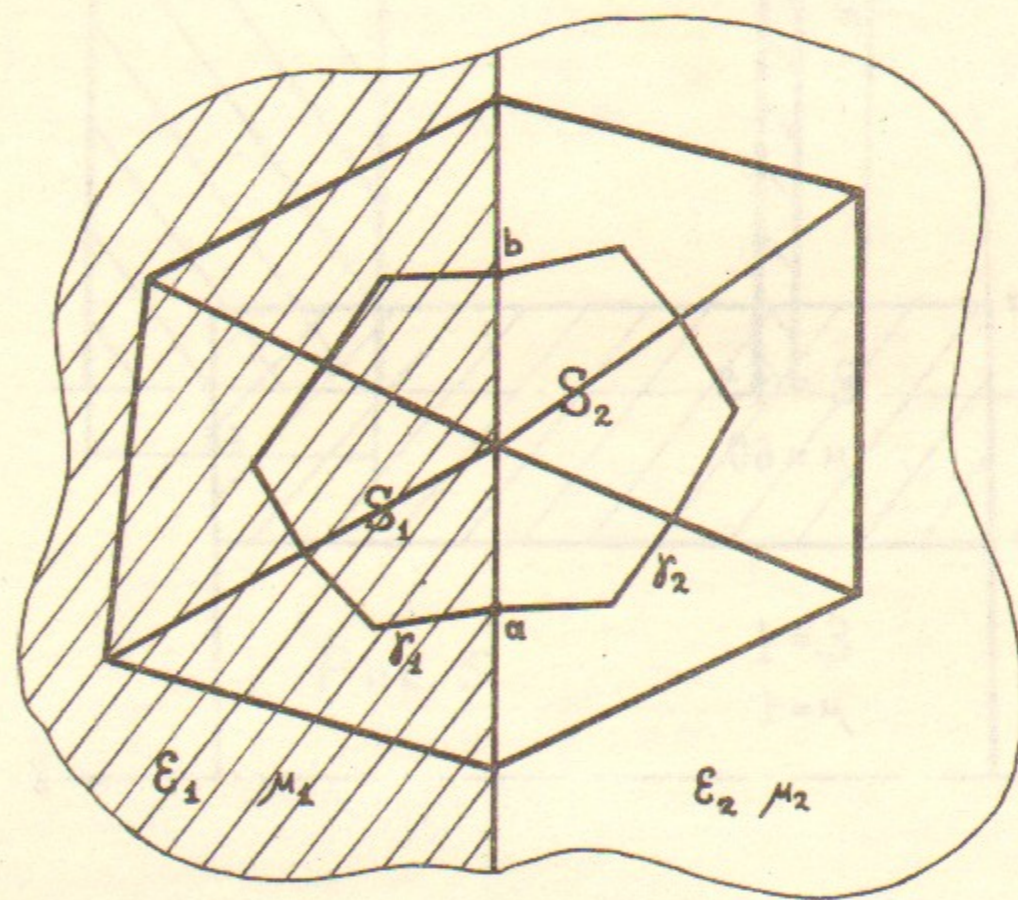


Рис. 2

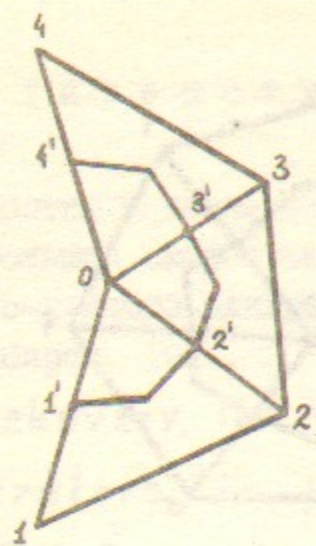


Рис. 3

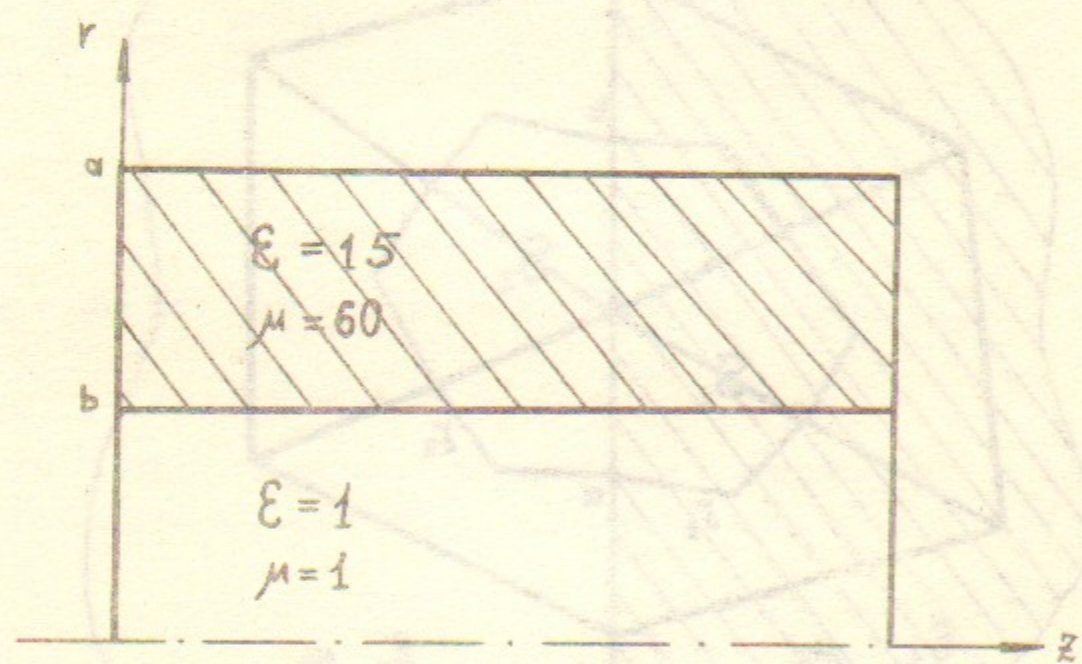


Рис. 4

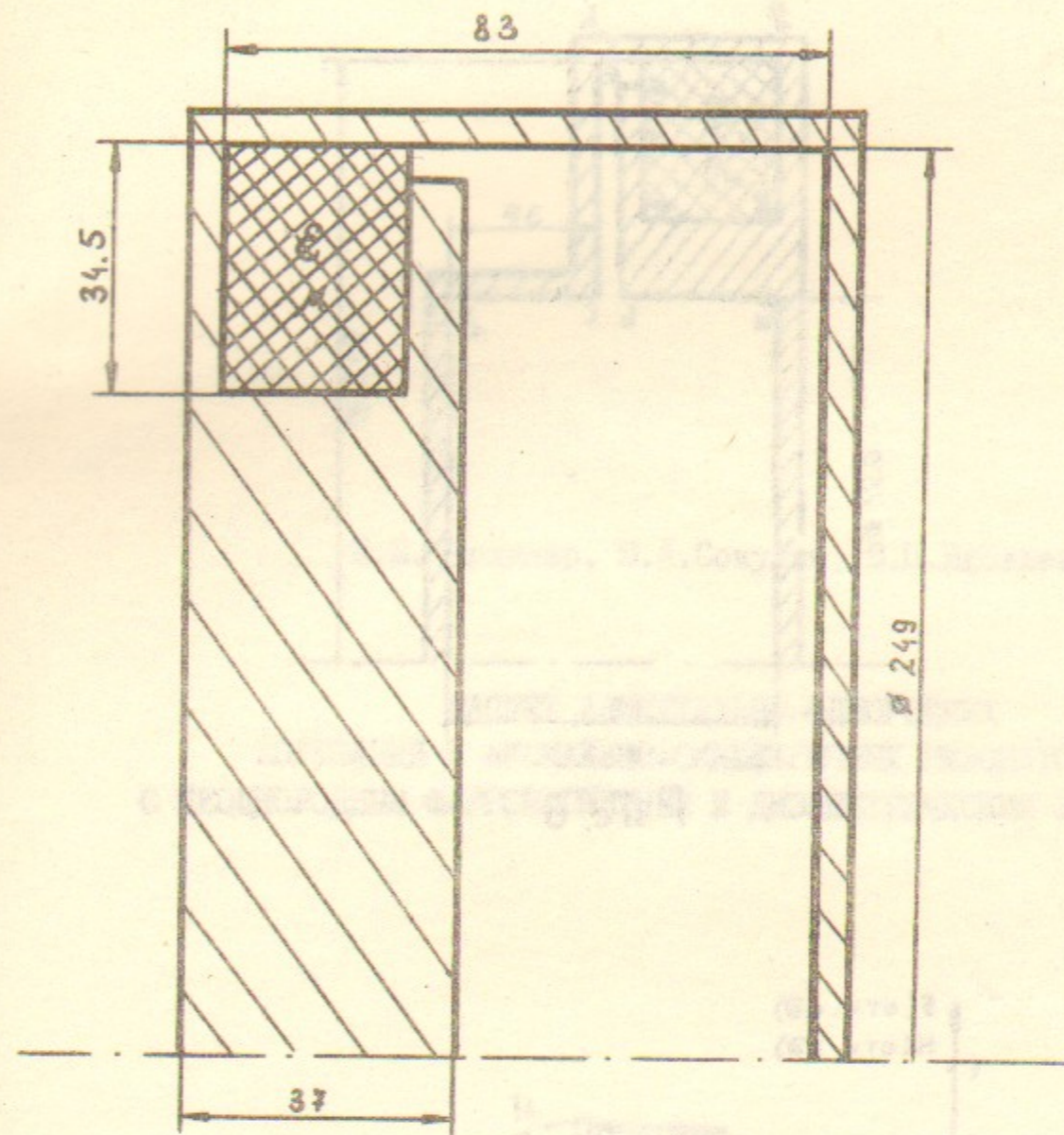


Рис. 5

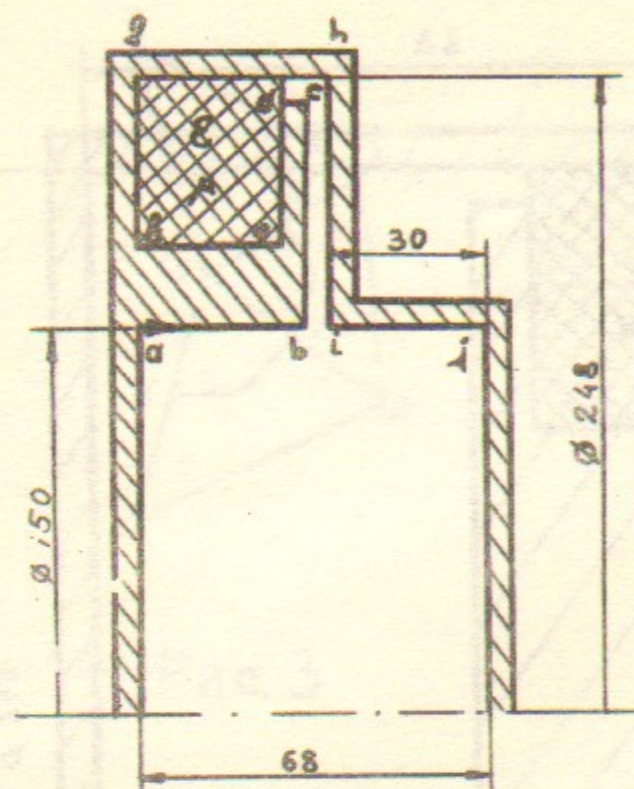


Рис. 6

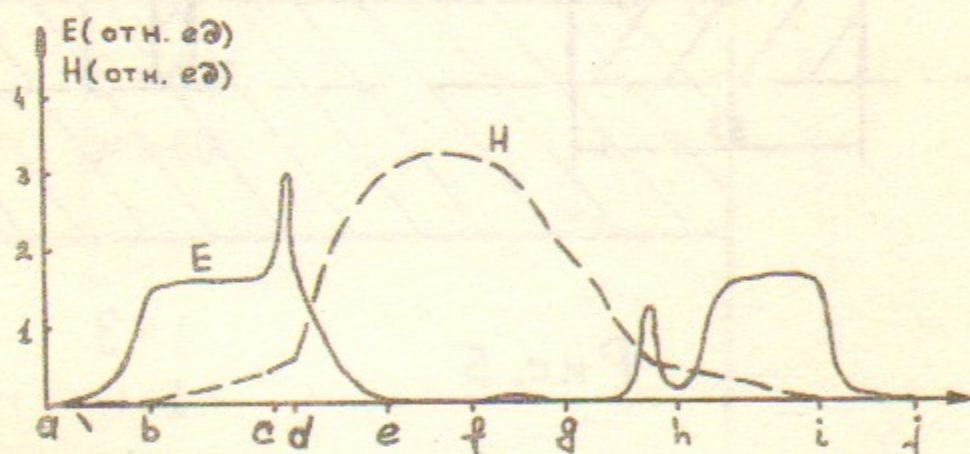


График изменения электрического (E) и магнитного (H) полей вдоль поверхности резонатора синхротрона Б-4. Точки а, б, с, d, e, f, g, h, i, j соответствуют указанным на рис. 6.

Рис. 7

М.М.Карлинер, Ю.А.Сокулин, В.П.Яковлев

РАСЧЕТ АЗИМУТАЛЬНО-ОДНОРОДНЫХ
КОЛЕБАНИЙ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РЕЗОНАТОРАХ
С НЕОДНОРОДНЫМ ФЕРРОМАГНИТНЫМ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Препринт
№ 82-149

Работа поступила - 19 ноября 1982 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано в печать 3.XII-1982 г. МН 03644
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.0,5 печ.л., 0,4 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 149.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90