

40

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

В.М.Малкин

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОСИ ХОЛЕСТЕРИЧЕСКОГО
ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ПРЕПРИНТ 82-139



THE INSTABILITY OF A CHOLESTERIC LIQUID
CRYSTAL AXIS IN A MAGNETIC FIELD

V.M.Malkin

Institute of Nuclear Physics,
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

The simplest stationary structures stability for a sufficiently large sample of cholesteric liquid crystal (with a positive magnetic susceptibility anisotropy $\Delta\chi = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$) placed in an uniform magnetic field is considered. It is shown that the state with the cholesteric axis parallel to magnetic field is stable if an angle between the director and axis Θ is smaller than some critical value Θ_c (i.e. "helical distortion" is sufficiently strong) and unstable in the opposite case.

In addition, it is established that the cholesteric axis orientation perpendicular to the field direction (the most favourable for the weak fields) may become unstable even prior to the field-induced transition of the cholesteric to nematic.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОСИ ХОЛЕСТЕРИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.М.Малкин

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрен вопрос об устойчивости простейших стационарных структур достаточно большого образца холестерического жидкого кристалла с положительной анизотропией магнитной восприимчивости $\Delta\chi = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$ в однородном магнитном поле. Показано, что состояние с холестерической осью, параллельной магнитному полю, устойчиво, если угол наклона Θ директора к оси меньше некоторого критического значения Θ_c (т.е. при достаточно сильной "конической деформации"), и неустойчиво в противном случае. Кроме того, установлено, что наиболее выгодная в слабых полях ориентация холестерической оси поперек поля при его увеличении может становиться неустойчивой еще до перехода холестерика в нематик.

ВВЕДЕНИЕ

В статьях [1,2] была предложена теория, описывающая поведение холестерического жидкого кристалла в магнитном поле и вызванный полем переход из холестерической фазы в нематическую. Расчеты проводились для достаточно больших образцов вещества с положительной анизотропией магнитной восприимчивости ¹⁾ $\Delta\chi = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$, помещенных в однородное магнитное поле \vec{H} , направленное параллельно либо перпендикулярно холестерической оси \vec{h} . В случае $\vec{h} \parallel \vec{H}$ из расчетов [1] следовало, что угол наклона Θ директора \vec{h} к холестерической оси должен уменьшаться с увеличением поля и обращаться в нуль при некотором поле $H = H_c$: для веществ с модулем продольного изгиба K_3 , превосходящим модуль кручения K_2 , — скачком от $\pi/2$ до нуля, в противном случае, — непрерывно, с образованием так называемой "конической деформации". Шаг спирали при $K_2 > K_3$ должен был уменьшаться обратно пропорционально напряженности поля. Экспериментальное исследование соответствующих этому уменьшения оптической активности [3] и "синего" сдвига зоны селективного отражения света холестериком [4] обнаружило сильные отклонения от предсказаний теории. Отклонение, наблюдавшееся в [4], связывалось в [5] с поликристаллической структурой образца. В настоящей статье будет показано, что даже для идеального кристалла согласия эксперимента с теорией конической деформации можно ожидать лишь в интервале углов $0 < \Theta < \Theta_c$. Угол Θ_c зависит от модулей упругости, но всегда заключен между 45° и $\arcsin \sqrt{2/3} \approx 55^\circ$. При $\Theta > \Theta_c$ коническая деформация неустойчива относительно малых возмущений. Режим нелинейной стабилизации данной неустойчивости оказывается жестким: коническая структура сильно искажается сразу после перехода через порог неустойчивости, — поэтому должен наблюдаться гистерезис. В частности, приблизиться к найденному ниже значению Θ_c можно лишь уменьшая магнитное поле. Не исключено, что и попросту получить в чистом виде коническую деформацию

¹⁾ Распределение директора в веществах с $\Delta\chi < 0$ при наиболее выгодной для них ориентации холестерической оси вдоль магнитного поля, очевидно, не зависит от напряженности поля.

удастся лишь таким способом.

Помимо устойчивости стационарной структуры с $\vec{h} \parallel \vec{H}$, мы обсудим случай $\vec{h} \perp \vec{H}$. В этом случае в [1,2] предсказывалось искажение холестерической спирали магнитным полем и обращение ее шага в бесконечность при некотором поле $H = H_c$. Последующие эксперименты (см., например, [6-9]) количественно подтвердили эти предсказания. Однако, как будет показано ниже, для ряда веществ должны наблюдаться отклонения от теории [2]. Их причина также состоит в неустойчивости холестерической оси. Достаточным (но не необходимым) условием такой неустойчивости является, например, неравенство $k_2 > \frac{\pi^2}{4} k_3$. Это неравенство выполнялось в экспериментах [3], и, хотя их согласие с [2] было признано хорошим, на имеющемся в [3] графике зависимости шага спирали от напряженности поля заметно различие между экспериментальной и теоретической кривыми. Более точные измерения, вероятно, позволят надежно зафиксировать это различие и определить порог неустойчивости.

Отметим, что обсуждаемые здесь и далее неустойчивости холестерической оси, в отличие от исследованных ранее теоретически в [10-12] и экспериментально в [13-15], связаны не с конкуренцией между ориентационными воздействиями поля и границ образца, а с зависимостью от напряженности поля самого характера его ориентационного воздействия на ось. В связи с этим мы будем обсуждать все эффекты на примере достаточно больших образцов жидкого кристалла, в которых влияние границ несущественно.

2. Основные уравнения

Свободная энергия деформированного жидкого кристалла в магнитном поле имеет вид

$$F = \int dV w, \quad w = \frac{1}{2} \left\{ k_1 (\operatorname{div} \vec{n})^2 + k_2 (\vec{n} \operatorname{rot} \vec{n} + q, a)^2 + k_3 [(\vec{n} \nabla) \vec{n}]^2 - \Delta \chi (\vec{n} \vec{H})^2 \right\} \quad (1)$$

Для уменьшения числа параметров, от которых зависит F , будем измерять расстояние в единицах $a = \left(\frac{k_2}{\Delta \chi H^2} \right)^{1/2}$ и плотность энергии в единицах $\Delta \chi H^2$. Тогда выражение для w окажется следующим:

$$w = \frac{1}{2} \left\{ R_1 (\operatorname{div} \vec{n})^2 + (\vec{n} \operatorname{rot} \vec{n} + q, a)^2 + R_3 [(\vec{n} \nabla) \vec{n}]^2 - \left(\frac{\vec{n} \vec{H}}{H} \right)^2 \right\}; \quad R_1 \equiv \frac{k_1}{k_2}, \quad R_3 \equiv \frac{k_3}{k_2}. \quad (2)$$

Пусть θ и φ - полярный и азимутальный углы направления \vec{n} в системе координат с осями $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$:

$$\vec{n} = \vec{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_z \cos \theta.$$

Введя единичные векторы

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\vec{e}_z \times \vec{n}}{\sin \theta} = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi,$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \times \vec{n} = \vec{e}_x \cos \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \cos \theta \sin \varphi - \vec{e}_z \sin \theta,$$

можно представить плотность свободной энергии в виде

$$w = \frac{1}{2} \left\{ R_1 (\vec{e}_\theta \nabla \theta + \sin \theta \vec{e}_\varphi \nabla \varphi)^2 + (\sin \theta \vec{e}_\theta \nabla \varphi - \vec{e}_\varphi \nabla \theta + q, a)^2 + R_3 [(\vec{n} \nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\vec{n} \nabla \varphi)^2] - \left(\frac{\vec{n} \vec{H}}{H} \right)^2 \right\}. \quad (3)$$

Форма записи (3) позволяет явно учесть единичную длину директора, что облегчает отыскание стационарных состояний, - они даются экстремалами функционала F :

$$\frac{\delta F}{\delta \theta} = 0, \quad \frac{\delta F}{\delta \varphi} = 0.$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости стационарного состояния $\vec{n}^0 = \vec{n}(\varphi^0, \theta^0)$ относительно малых возмущений состоит в положительной определенности второй вариации функционала F на этом состоянии.

3. Холестерическая ось, параллельная магнитному полю

Стационарное состояние с $\vec{h} \parallel \vec{H}$ было найдено в статье [1]. Направив ось z по полю, это состояние можно представить в виде

$$\theta^0 = \text{const}, \quad \varphi^0 = \psi z, \quad \psi = \frac{q a}{\sin^2 \theta^0 + R_3 \cos^2 \theta^0}. \quad (4)$$

Если $R_3 < 1$, то постоянная θ^0 , минимизирующая свободную энергию на классе распределений (4), задается соотношениями:

$$\begin{aligned} \theta^0 &= 0 && \text{при } H > H_{11} \\ R_3 \psi^2 &= 1 && \text{при } H_{11} > H > R_2 H_{11} \\ \theta^0 &= \frac{\pi}{2} && \text{при } H < R_2 H_{11} \end{aligned} \quad (5)$$

Критическое поле $H_{||}$, при котором холестерик превращается в нематик, определяется из условия

$$q^2 a^2 = R_3 \quad (q^2 k_2^2 = \Delta \chi H^2 k_3) \quad (6)$$

Если $R_3 > 1$, то: $\theta^0 = 0$ при $H > R_3 H_{||}$.

$\theta^0 = \frac{\pi}{2}$ при $H < H_{||}$, а в интервале полей $H_{||} < H < R_3 H_{||}$ свободная энергия имеет на классе распределений (4) два минимума - $\theta^0 = 0$ и $\theta^0 = \frac{\pi}{2}$, причем меньшая энергия соответствует состоянию с $\theta^0 = 0$, если $H > R_3^{\frac{1}{2}} H_{||}$, и состоянию с $\theta^0 = \frac{\pi}{2}$ в противном случае.

Положим в (3)

$$\theta = \theta^0 + \theta', \quad \varphi = \varphi^0 + \varphi'$$

и выразим параметр $q a$ через $\dot{\varphi}$ с помощью (4). Усовершенствовав далее выбор единиц измерения длины и энергии заменами

$$\vec{z} \rightarrow \dot{\varphi}^{-1} \vec{z}, \quad W \rightarrow \dot{\varphi}^2 W,$$

получим

$$W = \frac{1}{2} \left\{ R_1 (\vec{e}_0 \nabla \theta' + \sin \theta \vec{e}_\varphi \nabla \varphi')^2 + (\sin \theta \vec{e}_0 \nabla \varphi' - \vec{e}_\varphi \nabla \theta')^2 + \sin^2 \theta - \sin^2 \theta^0 + R_3 [(\vec{H} \nabla \theta')^2 + \sin^2 \theta (\vec{H} \nabla \varphi' + \cos \theta)^2 + 2 \cos^2 \theta (\sin \theta \vec{e}_0 \nabla \varphi' - \vec{e}_\varphi \nabla \theta') - (\cos^2 \theta - \cos^2 \theta^0)^2 + \cos^4 \theta - (1 - R_3) \cos^4 \theta^0] - \dot{\varphi}^{-2} \cos^2 \theta \right\}. \quad (7)$$

Эта формула справедлива при любых θ' и φ' . Для исследования устойчивости стационара \vec{H}^0 относительно малых возмущений нужна вторая вариация F_2 функционала F :

$$F_2 = \int dV W_2; \quad 2W_2 = R_1 (\vec{e}_0 \nabla \theta' + \sin \theta^0 \vec{e}_\varphi \nabla \varphi')^2 + (\sin \theta^0 \vec{e}_0 \nabla \varphi' - \vec{e}_\varphi \nabla \theta' - \sin 2\theta^0 \theta')^2 + R_3 [(\vec{H}^0 \nabla \theta')^2 + \sin^2 \theta^0 (\vec{H}^0 \nabla \varphi')^2 + 2 \sin^2 \theta^0 (\cos \theta^0 \vec{e}_0 - \sin \theta^0 \vec{H}^0) \theta' \nabla \varphi' - \sin^2 2\theta^0 \theta'^2] + (\dot{\varphi}^{-2} - R_3) \cos 2\theta^0 \theta'^2. \quad (8)$$

Если $\theta^0 = 0$, то наиболее опасными являются возмущения с $\varphi' = \text{const}$, $\theta' = \text{const}$. Для них

$$W_2 = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^{-2} - R_3) \theta'^2,$$

откуда следует устойчивость состояния с $\theta^0 = 0$ при $H > H_{||}$ ($\dot{\varphi}^{-2} > R_3$) и его неустойчивость при $H < H_{||}$.

Если $\theta^0 = \frac{\pi}{2}$, то для пробного возмущения

$$\varphi' = c \cos \rho x, \quad \theta' = -c \rho \cos z \sin \rho x$$

среднее по объему значение W_2 оказывается при достаточно малом ρ отрицательным:

$$\overline{W_2} = \frac{1}{32} \rho^2 c^2 [(3R_3 + 1)\rho^2 - 4\dot{\varphi}^{-2}].$$

Следовательно, состояние с $\theta^0 = \frac{\pi}{2}$ неустойчиво.

Рассмотренные два случая исчерпывают возможности, имеющиеся при $R_3 > 1$. Остается исследовать устойчивость при $R_3 < 1$ в интервале полей $R_3 H_{||} < H < H_{||}$, где имеется коническая деформация. В силу инвариантности F_2 относительно сдвигов и поворотов в плоскости x, y можно без потери общности считать, что на пороге неустойчивости возбуждаются возмущения вида

$$\varphi' = \frac{\xi_1 e^{i\rho x}}{\sin \theta^0} + \text{к.с.}; \quad \theta' = \xi_2 e^{i\rho x} + \text{к.с.}$$

Учитывая второе из соотношений (5), получим для таких возмущений:

$$\begin{aligned} \overline{W_2} = & \left\langle R_1 \left| -\frac{d\xi_2}{dz} \sin \theta^0 + i\rho (\xi_2 \cos \theta^0 \cos z - \xi_1 \sin z) \right|^2 + \right. \\ & \left. + \left| -\frac{d\xi_1}{dz} \sin \theta^0 + i\rho (\xi_1 \cos \theta^0 \cos z + \xi_2 \sin z) - \xi_2 \sin 2\theta^0 \right|^2 + \right. \\ & \left. + R_3 \left[\left| \frac{d\xi_2}{dz} \cos \theta^0 + i\rho \xi_2 \sin \theta^0 \cos z \right|^2 + \left| \frac{d\xi_1}{dz} \cos \theta^0 + i\rho \xi_1 \sin \theta^0 \cos z \right|^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \operatorname{Re} \left(-\xi_2^* \frac{d\xi_1}{dz} \sin 2\theta^0 + i\rho \xi_2^* \xi_1 \cos 2\theta^0 \cos z \right) \sin \theta^0 - \right. \right. \\ & \left. \left. - |\xi_2|^2 \sin^2 2\theta^0 \right] \right\rangle = \langle \xi | \hat{L} | \xi \rangle. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по z ; $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ - двухкомпонентный вектор;

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{L}_{11} & \hat{L}_{12} \\ \hat{L}_{21} & \hat{L}_{22} \end{pmatrix} = \hat{L}_0 + i\rho \hat{L}' + \rho^2 \hat{L}''$$

- матричный эрмитов оператор:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{11} &= \hat{L}_1 + i\rho \hat{L}'_1 + \rho^2 \hat{L}''_1; & \hat{L}_{22} &= \hat{L}_2 + i\rho \hat{L}'_2 + \rho^2 \hat{L}''_2; \\ \hat{L}_{21} &= \hat{L}_{12}^+ = \hat{L} + i\rho \hat{L}' + \rho^2 \hat{L}''; \\ \hat{L}_1 &= -(\sin^2 \theta^0 + R_3 \cos^2 \theta^0) \frac{d^2}{dz^2}; & \hat{L}_2 &= -(R_1 \sin^2 \theta^0 + R_3 \cos^2 \theta^0) \frac{d^2}{dz^2} + \\ &+ (1-R_3) \sin^2 2\theta^0; & \hat{L}' &= (1-R_3) \sin \theta^0 \sin 2\theta^0 \frac{d}{dz}; \\ L'_1 &= \frac{1}{2} (1-R_3) \sin 2\theta^0 \left(\cos z \frac{d}{dz} + \frac{d}{dz} \cos z \right); \\ L'_2 &= \frac{1}{2} (R_1-R_3) \sin 2\theta^0 \left(\cos z \frac{d}{dz} + \frac{d}{dz} \cos z \right); \\ e' &= \sin \theta^0 \left(-R_1 \frac{d}{dz} \sin z + \sin z \frac{d}{dz} \right) + (R_3 \sin \theta^0 \cos 2\theta^0 - \sin 2\theta^0 \cos \theta^0) \cos z; \\ L''_1 &= R_1 \sin^2 z + (\cos^2 \theta^0 + R_3 \sin^2 \theta^0) \cos^2 z; \\ L''_2 &= \sin^2 z + (R_1 \cos^2 \theta^0 + R_3 \sin^2 \theta^0) \cos^2 z; \\ e'' &= \frac{1}{2} (1-R_1) \cos \theta^0 \sin z. \end{aligned} \quad (10)$$

Оператор \hat{L} зависит от четырех параметров:

$$R_1, R_3, \theta, \rho.$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости конической деформации относительно малых возмущений состоит в положительной определенности \hat{L} при всех значениях ρ . На пороге неустойчивости (каковой в рассматриваемом случае обязательно существует, поскольку коническая деформация с $\theta^0 \rightarrow +0$ ($H \rightarrow H_0 - 0$) устойчива, а с $\theta^0 = \frac{\pi}{2} - 0$ ($H \rightarrow R_3 H_0 + 0$) - нет) θ^0 является функцией от R_1 и R_3 :

$$\theta^0 = \theta_c(R_1, R_3). \quad (11)$$

Критическое поле H_c однозначно связано с θ_c соотношениями (4), (5). Некоторые заключения о функции $\theta_c(R_1, R_3)$ можно сделать без вычислений. Так, например, ввиду того, что первое слагаемое в (9) положительно, а последнее на пороге неустойчивости отрицательно, θ_c является возрастающей функ-

цией от R_1 и убывающей - от R_3 . Наибольшее и наименьшее значения θ_c на отрезке $0 < R_3 \leq 1$, $R_1 = \text{const}$ достигаются при $R_3 \rightarrow 0$ и $R_3 = 1$ соответственно. В случае $R_3 \rightarrow 0$ опасность для устойчивости представляют лишь возмущения, обращающие в нуль два первых слагаемых в (9). Из точного равенства этих слагаемых нулю вытекает соотношение

$$\sin \theta^0 \frac{d}{dz} \xi_1 \xi_2^* = i\rho (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) \sin z - |\xi_2|^2 \sin 2\theta^0,$$

с помощью которого легко убедиться в том, что такое равенство возможно только при

$$\rho = 0, \quad \xi \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Приближенное равенство возможно при $\rho \rightarrow 0$. Для наиболее опасных возмущений -

$$\xi = \begin{pmatrix} \sin \theta^0 - i\rho \cos \theta^0 \sin z \\ i\rho \cos z \end{pmatrix}. \quad (12)$$

первые два слагаемых в (9) пропорциональны ρ^4 . Подставив (12) в (9) и опустив члены порядка ρ^4 , получим

$$\bar{W}_2 = R_3 \rho^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta^0 \right)$$

откуда следует

$$\max_{R_3} \sin^2 \theta_c = \sin^2 \theta_c \Big|_{R_3 \rightarrow 0} = \frac{2}{3}. \quad (13)$$

В противоположном предельном случае ($R_3 = 1$) допустим сначала, что R_1 также равно единице. В одноконстантном приближении ($R_1 = R_3 = 1$) оператор \hat{L} предельно упрощается:

$$\hat{L}_{11} = \hat{L}_{22} = -\frac{d^2}{dz^2} + \rho^2; \quad \hat{L}_{21} = \hat{L}_{12}^+ = -2i\rho \sin \theta^0 \cos z \quad (14)$$

Замена $\xi_2 \rightarrow i\xi_2$ делает оператор (14) вещественным, поэтому его собственные функции можно выбрать в виде $\xi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ i\varphi_2 \end{pmatrix}$ с вещественными φ_1 и φ_2 . Уравнения для функций φ_1, φ_2 не меняются при перестановке индексов "1" и "2", что позволяет, не теряя общности, считать $\varphi_1 = \varphi_2$ или $\varphi_1 = -\varphi_2$. В действительности достаточно рассмотреть один из этих случаев, поскольку каждый из них сводится к другому заменой $z \rightarrow z + \pi$. Полагая $\xi = \begin{pmatrix} \varphi \\ i\varphi \end{pmatrix}$, получим для φ хорошо изученное уравнение Матве:

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + \rho^2 - 2\rho \sin \theta^0 \cos z \right) \varphi = \lambda \varphi.$$

С помощью таблиц или графиков (см., например, [16]) нетрудно установить, что на пороге неустойчивости возбуждаются длинноволновые ($\rho \rightarrow 0$) периодические по z возмущения, для которых $\eta = 1 + 2\rho \sin \theta^\circ \cos z + O(\rho^2)$, $\lambda = \rho^2 \cos 2\theta^\circ + O(\rho^4)$.

Следовательно, $\theta_c |_{R_1=R_3=1} = \frac{\pi}{4}$.
Поскольку θ_c является возрастающей функцией от R_1 ,

$$\theta_c |_{R_3=1, R_1 > 1} \geq \frac{\pi}{4}. \quad (15)$$

С другой стороны, полагая в (9) $R_3=1$, $\rho \rightarrow 0$, $\xi = \begin{pmatrix} \sin \theta^\circ \\ i\rho \cos z \end{pmatrix}$, находим $\bar{W}_2 = \frac{1}{2} \rho^2 \cos 2\theta^\circ$, откуда следует

$$\theta_c |_{R_3=1} \leq \frac{\pi}{4}. \quad (16)$$

Неравенства (15) и (16) совместны только при

$$\theta_c |_{R_3=1, R_1 > 1} = \frac{\pi}{4}. \quad (17)$$

Во всех рассмотренных выше частных случаях на пороге неустойчивости возбуждались длинноволновые возмущения ($\rho \rightarrow 0$). Если это свойство сохраняется в общем случае, то порог неустойчивости можно найти аналитически. Действительно, при $\rho = 0$ оператор \hat{L} положительно определен — это ясно без вычислений, так как решение (4), (5) минимизирует свободную энергию на классе распределений директора, зависящих лишь от z . Наименьшее из имеющихся у \hat{L} при $\rho = 0$ собственных значений равно нулю и соответствует собственной моде $\xi^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. При $\rho \rightarrow 0$ наименьшее собственное значение $\lambda(\rho, \theta, R_1, R_3)$ оператора \hat{L} соответствует моде, близкой к ξ^0 , и может быть найдено по теории возмущений. Первый исчезающий член разложения пропорционален ρ^2 :

$$\frac{\lambda}{\rho^2} |_{\rho \rightarrow 0} = \lambda_1 = \langle \xi^0 | \hat{A} | \xi^0 \rangle, \quad \hat{A} = \hat{L}'' + \hat{L}' \hat{L}_0^{-1} \hat{L}' \quad (18)$$

Обратив оператор L_0 , находим

$$\lambda_1 = \frac{R_3(1-R_3)(R_1 \sin^2 \theta^\circ + R_3 \cos^2 \theta^\circ) \cos^2 \theta^\circ + (R_1 + R_3)(\sin^2 \theta^\circ + R_3 \cos^2 \theta^\circ) \cos 2\theta^\circ}{2(\sin^2 \theta^\circ + R_3 \cos^2 \theta^\circ)(R_1 \sin^2 \theta^\circ + R_3 \cos^2 \theta^\circ) + R_3(1-R_3) \sin^2 2\theta^\circ}$$

²⁾ Безразличная устойчивость этой моды связана с инвариантностью свободной энергии относительно сдвигов распределения директора по z .

Уравнение $\lambda_1 = 0$ имеет единственный корень $\theta^\circ = \theta_c$:

$$\sin^2 \theta_c = \frac{2R_3(1-2R_3) - R_3(1+R_3) + \left\{ [2R_3(1-2R_3) - R_3(1+R_3)]^2 + 4R_3(1-R_3)(1+R_3)(3R_1+R_3) \right\}^{1/2}}{2(1-R_3)(R_3+3R_1)} \quad (19)$$

В соответствии со сказанным выше, $\sin^2 \theta_c$ возрастает с ростом R_1 , убывает с ростом R_3 и может принимать значения из интервала $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, причем минимум достигается на прямой $R_3 = 1$, а максимум — при $R_3 \rightarrow 0$.

Итак, длинноволновые возмущения устойчивы в области $0 < \theta < \theta_c$ и неустойчивы в области $\theta_c < \theta < \frac{\pi}{2}$. При θ , близком к θ_c , величина $\lambda(\rho, \theta, R_1, R_3)$ может быть представлена в виде

$$\lambda \approx \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_c} (\theta - \theta_c) \rho^2 + \lambda_2 \rho^4 \quad (20)$$

где

$$\lambda_2 = \langle \hat{L}_0^{-1} \hat{L}' \xi^0 | \hat{L}'' | \hat{L}_0^{-1} \hat{L}' \xi^0 \rangle - \langle \hat{A} \xi^0 | \hat{L}_0^{-1} | \hat{A} \xi^0 \rangle \quad (21)$$

Все операторы в правой части (21) берутся на поверхности $\theta^\circ = \theta_c$. Расчет показывает, что в интересующей нас полуполосе $0 < R_3 < 1$, $R_1 > 0$ величина λ_2 положительна. Линии уровня функции $\lambda_2(R_1, R_3)$ в этой полуполосе изображены на рисунке.

Из положительности λ_2 и формулы (20) следует, что возмущения с $\rho \rightarrow 0$ являются наиболее неустойчивыми из возмущений с $\rho \ll 1$ (для которых только и применимо разложение (20)). Возмущения с $\rho \gg 1$, как нетрудно показать, устойчивы при любых значениях R_1, R_3, θ . Все это подтверждает предположение о длинноволновом характере неустойчивости.

На ее пороге возбуждаются возмущения

$$\begin{pmatrix} \psi' \sin \theta^\circ \\ \theta' \end{pmatrix} = c \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \rho x + \begin{pmatrix} \beta_1 \sin z \\ \beta_2 \cos z \end{pmatrix} \rho \sin \rho x + O(\rho^2) \right\} \quad (22)$$

Здесь

$$\beta_1 = \frac{1}{2} (1-R_3) \sin 2\theta^\circ [(R_1+3R_3) \sin^2 \theta^\circ - R_3] / D,$$

$$\beta_2 = -\sin\theta^0 [R_3(R_1+1) + (1-R_3)(R_3\cos^2\theta^0 + R_1\sin^2\theta^0)] / D,$$

$$D = (R_3\cos^2\theta^0 + \sin^2\theta^0)(R_3\cos^2\theta^0 + R_1\sin^2\theta^0) + R_3(1-R_3)\sin^2 2\theta^0.$$

Формула (22) справедлива только в линейном приближении по амплитуде возмущения C . Однако анализ точного выражения (7) для свободной энергии показывает, что после замены $\bar{z} \rightarrow \bar{z} + C \cos \rho x$ формула (22) становится справедливой во всех порядках по C . В соответствии с этим, нелинейная поправка к \bar{W} в первом приближении по ρ^2 тождественно равна нулю:

$$W = -\frac{1}{2} R_3(1-R_3)\cos^4\theta^0 + \frac{1}{2} C^2 (\lambda_1 \rho^2 + \lambda_2 \rho^4 + O(\rho^6)) + O(\rho^4 C^4) \quad (23)$$

Из (23) ясно, что нелинейность не влияет на развитие неустойчивости до тех пор, пока $C \ll I$, - режим нелинейной стабилизации является жестким.

4. Холестерическая ось, перпендикулярная магнитному полю

В достаточно слабом магнитном поле, практически не искажающем идеальную форму холестерической спирали, стационарное состояние с $\vec{h} \perp \vec{H}$ является энергетически наиболее выгодным, поскольку усредненный по витку спирали жидкий кристалл обладает отрицательной анизотропией магнитной восприимчивости "по отношению к холестерической оси": $\Delta\chi_h = -\frac{1}{2} \Delta\chi$ (см., например, [17]). В более сильном магнитном поле устойчивость найденного в [2] стационарного состояния с холестерической осью, перпендикулярной полю, не очевидна. Направив ось X по \vec{H} , а ось Z по \vec{h} , это состояние можно представить в виде

$$\theta^0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi^0 = \frac{\pi}{2} + \text{am}\left(\frac{z}{\alpha}, \alpha\right) \quad (24)$$

Здесь am - эллиптическая амплитуда Якоби, α - корень уравнения

$$\frac{2}{\pi} E(\alpha) = \alpha q a, \quad (25)$$

E - полный эллиптический интеграл второго рода. Функция φ^0 минимизирует свободную энергию на классе зависящих лишь от \bar{z} распределений директора с $\theta = \frac{\pi}{2}$. Минимальное значение средней плотности энергии равно

$$\bar{W} = \frac{1}{2} (q^2 a^2 - \frac{1}{\alpha^2}).$$

Уравнение (25) имеет корень при $H < H_1$, где H_1 определяется из условия $\alpha \rightarrow 1 - 0$:

$$q a_1 = \frac{2}{\pi} \quad (\Delta\chi H_1^2 = \frac{\pi^2}{4} K_2 q^2). \quad (26)$$

При $H \rightarrow H_1 - 0$ шаг спирали обращается в бесконечность. В полях, превышающих критическое, энергетически выгодно нематическое состояние. Ему соответствует средняя плотность энергии

$$\bar{W} = \frac{1}{2} (q^2 a^2 - 1).$$

Такая же средняя плотность энергии соответствует деформации (24) с $\alpha = 1$, которую можно назвать "солитонем кручения":

$$\theta^0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi^0 = 2 \arctg e^z. \quad (27)$$

Однако энергия, приходящаяся на единицу площади в плоскости X, Y для солитона кручения больше, чем для нематического состояния, на величину $\pi q a (\frac{H}{H_1} - 1)$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости стационарного состояния (24) при произвольной напряженности магнитного поля. Усовершенствовав выбор единиц измерения длины и энергии заменами

$$\bar{z} \rightarrow \alpha \bar{z}, \quad W \rightarrow \alpha^{-2} W,$$

получим следующее выражение для второй вариации свободной энергии на состоянии (24):

$$\begin{aligned} F_2 = \int dV W_2; \quad 2W_2 = R_1 \left(-\frac{\partial \theta'}{\partial z} + \vec{e}_\varphi^0 \nabla \varphi' \right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \vec{e}_\varphi^0 \nabla \theta' \right)^2 + 2(g - dnz) (\theta'^2 dnz - 2\theta' \vec{n}^0 \nabla \varphi') + \\ + R_3 [(\vec{n}^0 \nabla \varphi' - \theta' dnz)^2 + (\vec{n}^0 \nabla \theta')^2] + \alpha^2 (\varphi'^2 \cos 2\varphi^0 + \theta'^2 \cos^2 \varphi^0) \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $\theta' = \theta - \theta^0$, $\varphi' = \varphi - \varphi^0$; $dnz = (1 - \varepsilon^2 \operatorname{sn}^2 z)^{1/2}$ и $\operatorname{sn} z = \operatorname{sn} am z = -\cos \varphi^0$ — эллиптические функции Якоби; $g = \varepsilon q a$ — вспомогательный параметр, однозначно связанный с напряженностью магнитного поля: при увеличении H от нуля до бесконечности g монотонно убывает от единицы до нуля.

В силу инвариантности F_2 относительно сдвигов в плоскости X, y можно, не теряя общности, считать, что на пороге неустойчивости (если таковой существует³⁾) возбуждаются возмущения вида

$$\varphi' = \xi_1 e^{i\vec{p}\vec{z}} + \text{к.с.}, \quad \theta' = i\xi_2 e^{i\vec{p}\vec{z}} + \text{к.с.}; \quad (29)$$

$$\vec{p} = \rho (\vec{e}_x \cos \alpha + \vec{e}_y \sin \alpha), \quad \alpha = \text{const}, \quad \rho = \text{const}.$$

Для них

$$\begin{aligned} \overline{W}_2 = & \left\langle R_1 \left| \frac{d\xi_2}{dz} + \rho \xi_2 \sin(\varphi^0 - \alpha) \right|^2 + \left| \frac{d\xi_1}{dz} + \rho \xi_1 \sin(\varphi^0 - \alpha) \right|^2 + \right. \\ & + 2(g - dnz) \left[|\xi_2|^2 dnz - \rho (\xi_1 \xi_2^* + \xi_2 \xi_1^*) \cos(\varphi^0 - \alpha) \right] + \\ & + R_3 \left[|\rho \xi_1 \cos(\varphi^0 - \alpha) - \xi_2 dnz|^2 + \rho^2 |\xi_2|^2 \cos^2(\varphi^0 - \alpha) \right] + \\ & \left. + \varepsilon^2 (|\xi_1|^2 \cos 2\varphi^0 + |\xi_2|^2 \cos^2 \varphi^0) \right\rangle = \langle \xi | \hat{L} | \xi \rangle \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по z , $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ — двухкомпонентный вектор, $\hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{L}_{11} & \hat{L}_{12} \\ \hat{L}_{21} & \hat{L}_{22} \end{pmatrix}$ — матричный эрмитов оператор:

$$\hat{L}_{11} = \hat{L}_1 + \rho^2 \hat{L}_1, \quad \hat{L}_{22} = \hat{L}_2 + \rho^2 \hat{L}_2, \quad \hat{L}_{21} = \hat{L}_{12}^+ = -\rho \hat{e};$$

$$\hat{L}_1 = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 \cos 2\varphi^0,$$

$$\hat{L}_2 = -R_1 \frac{d^2}{dz^2} + 2(g - dnz) dnz + R_3 dn^2 z + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi^0,$$

³⁾ В дальнейшем, во избежание подобных оговорок, будем считать пороговое поле H_s равным бесконечности в тех случаях, когда состояние (24) устойчиво при всех H .

$$\hat{e} = R_1 \frac{d}{dz} \sin(\varphi^0 - \alpha) + \sin(\varphi^0 - \alpha) \frac{d}{dz} + [2(g - dnz) + R_3 dnz] \cos(\varphi^0 - \alpha),$$

$$\hat{L}_1 = R_1 \sin^2(\varphi^0 - \alpha) + R_3 \cos^2(\varphi^0 - \alpha),$$

$$\hat{L}_2 = \sin^2(\varphi^0 - \alpha) + R_3 \cos^2(\varphi^0 - \alpha). \quad (31)$$

Оператор \hat{L} зависит от пяти параметров:

$$R_1; R_3; g; \rho; \alpha.$$

(ε является функцией от g). Необходимое и достаточное условие устойчивости стационара (24) относительно малых возмущений состоит в положительной определенности \hat{L} при всех значениях ρ и α . Порог неустойчивости задается некоторой функцией

$$g = g_s(R_1, R_3). \quad (32)$$

Зная g_s , можно вычислить по формуле

$$H_s = \left(\frac{k_2}{\Delta \chi} \right)^{1/2} \frac{q \varepsilon(g_s)}{g_s} \quad (33)$$

критическое поле; оно тем больше, чем меньше g_s . Поскольку при увеличении параметров R_1, R_3 функционал F_2 возрастает и область устойчивости расширяется, g_s является убывающей функцией от R_1 и R_3 . Условие устойчивости оказывается наиболее жестким при $R_1 \ll 1, R_3 \ll 1$ и наиболее мягким при $R_1 \gg 1, R_3 \gg 1$.

Пусть $R_1 \ll 1, R_3 \ll 1$. Тогда при $\varepsilon^2 \gg R_1, R_3$ нарушается необходимое условие устойчивости: оператор \hat{L}_2 не является положительно определенным. Напротив, при $\varepsilon^2 \ll R_1, R_3$ состояние (24) устойчиво, так как применима аргументация, приведенная в начале раздела. Порог неустойчивости лежит в области $\varepsilon^2 \ll 1$, где

$$g \approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad dnz \approx g - \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2\varphi^0$$

Возбуждающиеся вблизи порога возмущения обращают в нуль второе слагаемое в (30), поэтому в критерий устойчивости фактически входят лишь отношения $R_1/R_3, \varepsilon^2/R_3$, и критическое значение ε^2 дается функцией вида

$$R_3 \rho \left(\frac{R_1}{R_3} \right) = \alpha_s^2 \approx 4(1-g_s). \quad (34)$$

В случае $R_1 \gg 1, R_3 \gg 1$ опасность для устойчивости представляют лишь возмущения ⁴⁾

$$\xi = c \begin{pmatrix} dnz \\ \rho \cos(\varphi^0 - \alpha) \end{pmatrix}, \quad \rho \rightarrow 0,$$

обращающие в нуль первое и четвертое слагаемые в (30). Однако и эти возмущения оказываются устойчивыми при всех значениях g .

Таким образом, в зависимости от соотношения между модулями упругости жидкого кристалла стационарное состояние (24) может как становиться неустойчивым в полях, меньших H_{\perp} , так и оставаться устойчивым в любых полях ⁵⁾. Если значения параметров R_1 и R_3 (от которых только и зависит отношение H_s/H_{\perp}) таковы, что $H_s > H_{\perp}$, то предсказания статьи [2] должны выполняться вплоть до перехода холестерика в нематик. Если $H_s < H_{\perp}$, то, вследствие неустойчивости холестерической оси, в интервале полей $H_s < H < H_{\perp}$ должны наблюдаться отклонения от теории [2]. Надежно также отклонения, по-видимому, пока не фиксировались, хотя для использования в работе [3] вещества с $R_3 \approx \frac{1}{4}$ условие $H_s < H_{\perp}$ заведомо выполнялось. В последнем проше всего убедываясь, заметив, что в случае

$$H_{\parallel} > H_{\perp} \quad \left(R_3 < \frac{4}{\pi^2} \right) \quad (35)$$

состояние (24) не может оставаться устойчивым при $H \rightarrow H_{\perp} - 0$. Действительно, при $H \rightarrow H_{\perp} - 0$ оно переходит в солитон кручения, для которого в подавляющей доле объема $\vec{n} \parallel \vec{H}$. Состояние же с $\vec{n} \parallel \vec{H}$, как было показано в разделе 3, при $H < H_{\parallel}$ неустойчиво. Критерий неустойчивости (35) (и даже более сильный критерий) можно получить формальным путем, под-

⁴⁾ Отметим, что в исследовании устойчивости возмущений с $\rho \rightarrow 0$ можно заметно продвинуться при произвольных R_1 и R_3 , используя вместо $\xi = c \begin{pmatrix} dnz \\ \rho \cos(\varphi^0 - \alpha) \end{pmatrix}$ при $\rho = 0$ безразлично устойчивую моду $\xi \propto \begin{pmatrix} dnz \\ 0 \end{pmatrix}$. Однако, теперь, в отличие от случая $\vec{n} \parallel \vec{H}$ такое исследование не исчерпывает задачи, поскольку возмущения с $\rho \rightarrow 0$, вообще говоря, не являются самыми опасными.

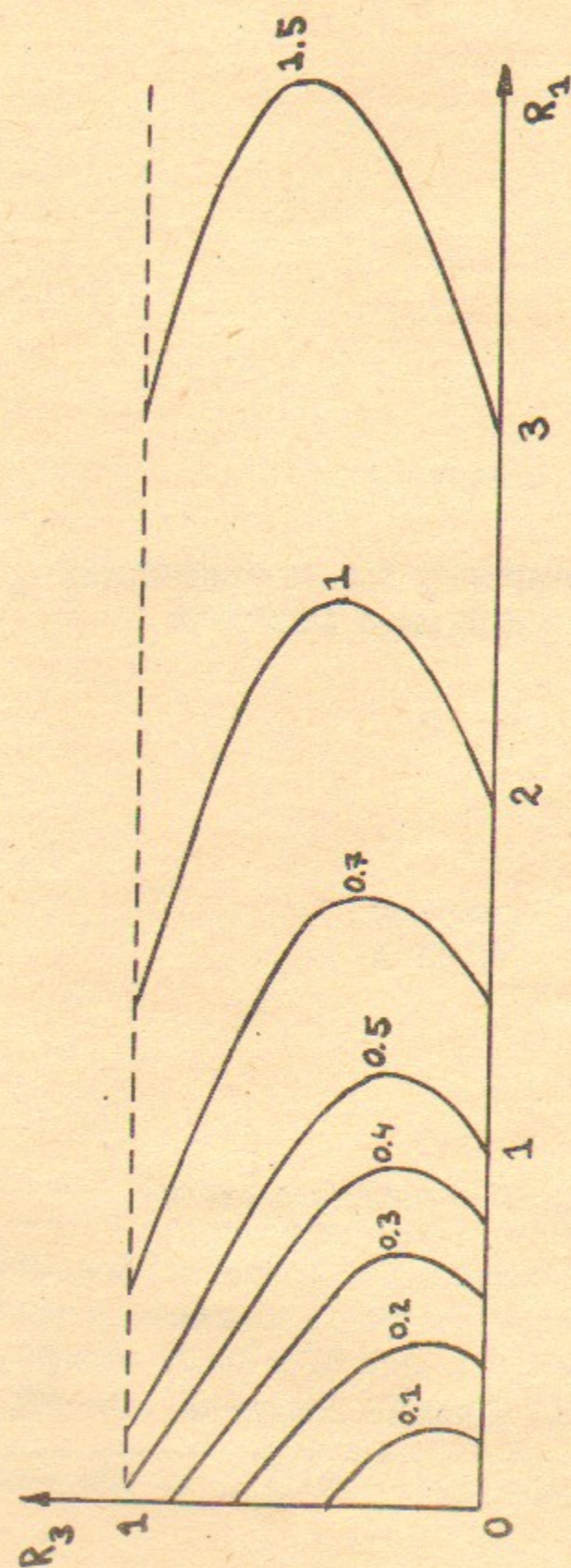
⁵⁾ В которых применимо исходное выражение для свободной энергии.

ставив в F_2 пробную функцию $\xi = \begin{pmatrix} \cos \varphi^0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

В заключение отметим устойчивость солитонов кручения при $H_{\perp} < H < H_s$. Речь идет об устойчивости относительно малых возмущений, - солитоны кручения могут разрушаться, например, дисклинационными петлями достаточно большого размера, - возможно поэтому такие солитоны пока не наблюдались экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА :

1. Meyer R.B. Appl. Phys. Lett., 1968, v. 12, p. 281.
2. De Gennes P.G. Sol. State Comm., 1968, v. 6, p. 163.
3. Baessler H., Lorange T.M., Labes M.M. J. Chem. Phys., 1969, v. 51, p. 3213.
4. Gerritsma C.J., Van Zanten P. Mol. Cryst., 1971, v. 15, p. 257.
5. Gerritsma C.J., Van Zanten P. Phys. Lett., 1972, v. 42A, p. 329.
6. Meyer R.B. Appl. Phys. Lett., 1969, v. 14, p. 208.
7. Durand G., Leger L., Rondelez F., Veyssie M. Phys. Rev. Lett., 1969, v. 22, p. 227.
8. Kahn F.J. Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 209.
9. Беляев С.В., Блинов Л.М., Кизель В.А. - Письма в ЖЭТФ, 1979, т.29, с.344.
10. Helfrich W. Appl. Phys. Lett., 1970, v. 17, p. 531.
11. Hurault J.P. J. Chem. Phys., 1973, v. 59, p. 2068.
12. Delrieu J.M. J. Chem. Phys., 1974, v. 60, p. 1081.
13. Gerritsma C.J., Van Zanten P. Phys. Lett., 1971, v. 37A, p. 47.
14. Scheffer T.J. Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 593.
15. Rondelez F., Hulin J.P. Sol State Comm., 1972, v. 10, p. 1009.
16. Справочник по специальным функциям. По ред. Абрамовица М., Стиган И. - Наука, М., 1979 - гл.20.
17. Блинов Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. - Наука, М., 1978. - гл.VI.



Линии уровня функции $\lambda_2(R_1, R_3)$ в полуэллипсе $0 < R_3 < 1, R_1 > 0$.