

29

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

ДИНАМИКА НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ
МОДЕЛЕЙ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ
ЯНГА—МИЛЛСА

ПРЕПРИНТ 82-120



Новосибирск

ДИНАМИКА НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ
КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ЯНГА-МИЛЛСА

Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л.

Институт ядерной физики СО АН СССР

Аннотация

Обсуждается место пространственно однородных моделей в теории классических полей ЯМ. Исследована динамика некоторых из таких моделей. Показано, что хаотическое движение является типичным для их временной эволюции. В частности, взаимодействие с полями Хиггса не всегда ведет к стабилизации движения.

Введение

Поля Янга-Миллса (ЯМ) были введены /1/ для калибровочного описания изотопической инвариантности сильного взаимодействия. В настоящее время они находят все более широкое применение в теории элементарных частиц. Поэтому изучение их свойств, в частности, динамики, т.е. различных типов временной эволюции этих полей, остается интересной и важной задачей. Изучение классических полей ЯМ, помимо общего ознакомления с их свойствами, и применения в некоторых задачах квантования /2/, представляет особый интерес в связи с тем, что существенно нелинейные процессы в этих полях лежат в квазиклассической области обычного (псевдоэвклидова) или эвклидова (мнимое время) пространства-времени. В последнем случае классические решения описывают сильные флуктуации вакуума полей ЯМ /3-5/. Существенная нелинейность полей ЯМ приводит к очень интересной и необычной динамике, но, в то же время, значительно затрудняет ее изучение. В этих условиях естественно обратиться к простым моделям, которые могут прояснить те или иные свойства полей ЯМ. Важный класс моделей был введен и изучается Матиньяном и сотрудниками /6-8/. В этих моделях поле зависит только от времени и мы будем называть их однородными моделями. Существенное упрощение задачи достигается здесь за счет конечномерности модели, число степеней свободы которой $N = 3(n^2 - 1)$ определяется группой симметрии $SU(n)$. Число различных полей в присоединенном представлении группы $(n^2 - 1)$ определяет размерность внутреннего пространства поля ЯМ. Однородные модели как бы выделяют в "чистом виде" внутреннюю динамику полей ЯМ. В общем случае эта динамика оказывается хаотической (стохастической), или случайной (для классических полей ЯМ) /7-9/. Ее изучению и посвящена, в основном, настоящая работа. Ниже мы ограничимся простейшим, но нетривиальным случаем группы $SU(2)$ и будем рассматривать почти исключительно свободные (без источников) поля ЯМ.

I. Однородные модели полей ЯМ

Однородные модели можно рассматривать, конечно, просто как специальный, крайний случай полей ЯМ. Полезно, однако, представить себе, в каких ситуациях эти модели приближенно соответству-

ют более реальным неоднородным полям. Для группы $SU(2)$ внутреннее пространство поля трехмерно, и каждая внешняя¹⁾ компонента поля (потенциала) представляется внутренним вектором \vec{A}_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) или, эквивалентно, каждая внутренняя компонента описывается внешним (обычным) 4-вектором \vec{A}^a ($a = 1, 2, 3$). Соответственно, каждая внешняя компонента тензора напряженности поля есть внутренний вектор ($\hbar = c = 1$),

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \quad (I.1)$$

Запишем плотность лагранжиана поля ЯМ с источниками в виде /10/:

$$g^2 L = \vec{E}_k \cdot \dot{\vec{A}}_k - \frac{1}{2} (E_k^2 + B_k^2) + \vec{A}_k \cdot \vec{j} - \vec{A}_0 \cdot \vec{C} \quad (I.2)$$

где латинские индексы пробегает значения 1, 2, 3. Здесь "электрические" поля

$$\vec{E}_k = \dot{\vec{A}}_k + \partial_k \vec{A}_0 + \vec{A}_k \times \vec{A}_0 \quad (I.3)$$

играют роль канонических импульсов, сопряженных координатам \vec{A}_k ; "магнитные" поля $\vec{B}_k = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \vec{F}_{lm}$, а вектор

$$\vec{C} = D_k \vec{E}_k + \vec{j}_0 = \partial_k \vec{E}_k + \vec{A}_k \times \vec{E}_k + \vec{j}_0 \equiv 0 \quad (I.4)$$

Последнее равенство следует, например, из того, что член $\vec{A}_0 \cdot \vec{C}$ может быть устранен калибровочным преобразованием ($\vec{A}_0 \rightarrow 0$). Уравнение $\vec{C} = 0$ выражает (обобщенный на поля ЯМ) закон Кулона, который не имеет характера уравнений движения для поля. Уравнение $\vec{C} = 0$ можно (формально) рассматривать как связь /10/. Однако для наших целей более удобно (и более естественно) интерпретировать уравнение (I.4) как закон сохранения, отличающийся от обычных лишь тем, что значение этого интеграла движения фиксировано (ограничение на начальные условия)²⁾. Явное

1) т.е. в обычном пространстве-времени с псевдоэвклидовой метрикой.

2) Упомянем простую механическую модель такого типа связи (или закона сохранения): пусть одна из взаимодействующих частиц имеет массу $m \rightarrow 0$, тогда в силу уравнений движения действующая на нее сила $f \rightarrow 0$.

исключение этого интеграла не обязательно и даже нежелательно (во всяком случае поскольку это касается классических полей), так как редуцированное фазовое пространство (интегральное многообразие) так же как и гамильтониан на нем могут оказаться черезчур сложными /11, 12/. Кроме того, при этом будет потеряна симметрия исходной системы, что затрудняет качественный анализ ее динамики.

В дальнейшем нам будет удобно использовать калибровку $\vec{A}_0 = 0$. Тогда $\vec{E}_k = \dot{\vec{A}}_k$ (I.3), а плотность гамильтониана ($\vec{j}_\mu = 0$):

$$H(\vec{E}_k, \vec{A}_k) = \frac{1}{2} E_k^2 + \frac{1}{4} \sum_{k,l} |(\partial_k \vec{A}_l - \partial_l \vec{A}_k) + \vec{A}_k \times \vec{A}_l|^2 \quad (I.5)$$

где мы произвели замену $g^2 H \rightarrow H$ и $t/g \rightarrow t$.

При $\vec{A}_k \rightarrow 0$ гамильтониан (I.5) описывает линейную систему плоских волн, слабо связанных нелинейным возмущением $\vec{A}_k \times \vec{A}_l$. В обратном предельном случае ($\partial_k = 0$) мы приходим к однородной модели, которая описывает, таким образом, внутреннюю нелинейную динамику локально по отношению к внешнему пространству. Приближение однородной модели соответствует длинным волнам (λ) и сильным полям: $\lambda A \gg 1$, или, в более наглядной форме

$$g^2 n_g \lambda^3 \gg 1 \quad (I.6)$$

где n_g - плотность (безмассовых) квантов поля ЯМ.

Рассмотрим одну плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси X_1 ($\partial_1 \equiv \partial$; $\partial_2 = \partial_3 = 0$):

$$H = \frac{1}{2} E_k^2 + \frac{1}{2} [|\partial \vec{A}_\perp|^2 + \vec{A}_\perp \cdot (\vec{A}_\perp \times \partial \vec{A}_\perp) + \frac{1}{2} |\vec{A}_\perp \times \vec{A}_\perp|^2] \quad (I.7)$$

где $\perp = 2, 3$. В отличие от линейных полей (например, классическая электродинамика) продольное поле \vec{A}_1 не может быть, вообще говоря, отделено от поперечных. Можно, конечно, перейти к калибровке $A_1 = 0$, однако, это не устраняет продольных компонент напряженности поля. Более того, если даже в начальный момент $\vec{A}_1 = 0$ и $\dot{\vec{A}}_1 = 0$, продольные компоненты возникают, вообще говоря, из-за наличия линейного по \vec{A}_1 члена в гамильтониане (I.7). Этот эффект, однако, отсутствует в однородной мо-

деле. Для специальных, симметричных начальных условий плоская волна может быть тем не менее чисто поперечной ($\vec{A}_0 = \vec{A}_1 = 0$) /13/.

Гамильтониан однородной модели имеет вид /6,7/:

$$H_{YM} = \frac{1}{2} E_k^2 + \frac{1}{4} |\vec{A}_k \times \vec{A}_k|^2 = \frac{1}{2} (E^a)^2 + \frac{1}{4} |\vec{A}^a \times \vec{A}^a|^2 \quad (I.8)$$

Его характерной особенностью является однородность потенциальной энергии U (полином 4-й степени). Поэтому структура энергетической поверхности не зависит от величины H , которая определяет лишь временной масштаб $T \propto H^{-3/4}$ (раздел 3).

В силу изотропности как внешнего, так и внутреннего пространства (U зависит только от углов между векторами \vec{A}^a или \vec{A}_k) сохраняются два "момента"

$$\vec{M} = \vec{A}^a \times \vec{E}^a = const$$

$$\vec{M}_g = \vec{A}_k \times \vec{E}_k = 0 \quad (I.9)$$

Последнее выражение есть частный случай общего соотношения (I.4) при $\vec{j}_0 = 0$ и $\vec{j}_k = 0$. Заметим, что для поля ЯМ с источниками $\vec{M}_g = -\vec{j}_0 \neq 0$. Если кроме того $\vec{j}_k = 0$, то гамильтониан (I.8), а, следовательно, и уравнения движения не изменяются.

Отметим, что однородные модели не описывают заряженные состояния свободного поля ЯМ, для которых $M_g \neq 0$ (см. (I.4)).

Гамильтониан (I.8) симметричен также относительно транспонирования матрицы A_k^a , т.е. относительно внутреннего и внешнего подпространств поля. Поскольку гамильтониан является к тому же четной функцией величин A_k^a , то существуют (частные) симметричные и антисимметричные решения (поля). В первом случае $A_k^a = A_k^a$, т.е. матрица симметрична и поворотом координатных осей может быть приведена к диагональной. Для свободного поля ЯМ $M = M_g = 0$ в этом случае, откуда следует, что главные оси матрицы A_k^a неподвижны, и гамильтониан (I.8) принимает следующий простой вид:

$$H_s = \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + (A_1 A_2)^2 + (A_1 A_3)^2 + (A_2 A_3)^2) \quad (I.10)$$

Эта система имеет всего три степени свободы.

В антисимметричном случае ($A_k^a = -A_k^a$) поворотом координатных осей можно исключить два из трех независимых элементов матрицы A_k^a . Пусть, например, $A_1^a = -A_2^a \equiv A$, тогда гамильтониан (I.8) принимает вид:

$$H_a = E^2 + \frac{1}{2} A^4 \quad (I.11)$$

т.е. остается всего одна степень свободы.

Эта симметрия сохраняется и в некоторых неоднородных полях, например, в плоской поперечной волне. В этом случае $\vec{A}_e \times \partial \vec{A}_e = 0$ и симметричное решение с двумя внутренними степенями свободы ($A_2^a \equiv A_2, A_3^a \equiv A_3$) описывается гамильтонианом

$$H_s = \frac{1}{2} [E_2^2 + E_3^2 + (\partial A_2)^2 + (\partial A_3)^2 + (A_2 A_3)^2] \quad (I.12)$$

тогда как антисимметричное решение имеет одну внутреннюю степень свободы ($A_2^a = -A_3^a \equiv A$):

$$H_a = E^2 + (\partial A)^2 + \frac{1}{2} A^4 \quad (I.13)$$

Другой класс однородных моделей, также введенных и рассмотренных в /8/, получается при учете калибровочного взаимодействия поля ЯМ с полем Хиггса. В последнем случае в гамильтониане (I.8) появляются квадратичные по A члены (массы)

$$H = H_{YM} + \frac{1}{2} \omega^2 (A^a)^2 \quad (I.14)$$

Существенно, что в силу изотропии внутреннего пространства дополнительная потенциальная энергия также сферически симметрична. Поэтому, по-прежнему, $M_g = 0$ и сохраняется симметрия при транспонировании матрицы A_k^a . Вообще говоря, при этом появляется дополнительная степень свободы, соответствующая динамике самого поля Хиггса. Ниже мы ограничимся только моделью (I.14), которая описывает взаимодействие поля ЯМ с хиггсовским вакуумом.

2. Локальная неустойчивость движения и хаос

Из упомянутых в предыдущем разделе "простых" моделях только динамика системы (I.11) оказывается действительно прос-

той, даже проще, чем это можно было бы ожидать в случае сильно нелинейного уравнения движения. Именно /14/:

$$\frac{A(t)}{A_{\max}} \approx 0.96 \cdot \cos \omega t + e^{-x} \cdot \cos 3\omega t + \dots \quad (2.1)$$

т.е. колебания являются почти гармоническими, хотя их частота $\omega \approx 0,85 A_{\max}$ существенно зависит от амплитуды. Для полей ЯМ такой режим движения рассмотрен в /6,7/.

Динамика остальных моделей с более чем одной степенью свободы оказывается, вообще говоря, очень сложной, в некотором смысле предельно сложной. Механизм этой сложности связан с сильной локальной неустойчивостью траекторий, характерной для нелинейных колебаний вообще и для классических полей ЯМ — в частности. Поясним это на примере модели (I.Ю) в частном случае $A_1 \equiv 0$. Уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{A}_2 = -A_2 A_3^2; \quad \ddot{A}_3 = -A_3 A_2^2 \quad (2.2)$$

Пусть $A_i^0(t)$ некоторое решение этой системы. Рассмотрим поведение близких траекторий в линейном приближении. Полагая $A_i = A_i^0(t) + a_i$ получим линеаризованное уравнение для $a_i(t)$ в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_2 &= -[A_3^0(t)]^2 a_2 - 2A_2^0(t) \cdot A_3^0(t) \cdot a_3 \\ \ddot{a}_3 &= -[A_2^0(t)]^2 a_3 - 2A_2^0(t) \cdot A_3^0(t) \cdot a_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим, что мы ставим в этих уравнениях знак точного, а не приближенного равенства, ибо оказывается, что достаточно выяснить только строго локальное поведение близких траекторий. На первый взгляд кажется, что задача таким образом существенно упростилась, поскольку она сведена к линейной. И это было бы действительно так, если бы функции $A_i^0(t)$ были периодическими или хотя бы почти периодическими, т.е. с дискретным Фурье-спектром. Однако этого то мы как раз и не знаем. Более того, именно этот вопрос мы и хотим (и можем) решить с помощью линейных уравнений (2.3). А именно, хаос (весьма умеренный по своему беспорядку) соответствует во всяком случае непрерывному спектру функций $A_i^0(t)$ /15/.

Введем "расстояние" между близкими траекториями в фазовом пространстве:

$$\rho^2 = a_2^2 + a_3^2 + \dot{a}_2^2 + \dot{a}_3^2 \quad (2.4)$$

и рассмотрим величину

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(\rho(t)/\rho(0))}{t} \quad (2.5)$$

которая называется показателем Ляпунова и обобщает соответствующее понятие для периодической траектории $A_i^0(t)$. В силу эргодической теоремы Биркгофа-Хинчина (см., например, /15/) этот предел всегда существует, но зависит, вообще говоря, от начальных условий как в основном фазовом пространстве (A_i, \dot{A}_i) , так и в касательном пространстве (a_i, \dot{a}_i) . Из линейности уравнений (2.3) вытекает, что существует $2N$ показателей Ляпунова (λ) и соответствующих им собственных направлений в касательном пространстве. Одно из них идет вдоль траектории, причем соответствующее $\lambda_1 = 0$. Смещение вдоль траектории эквивалентно смещению по времени, которое можно рассматривать как циклическую координату (для замкнутой системы), сопряженную гамильтониану. Смещение вдоль любой другой циклической координаты также соответствует собственное направление с $\lambda = 0$. Пусть система имеет m независимых циклических координат (включая время). Тогда размерность интегральной поверхности равна $2N - m$ и число собственных направлений с $\lambda = 0$ равно $2m$ (m — перпендикулярно интегральной поверхности и m вдоль циклических координат). Но в силу сохранения фазового объема $\sum \lambda_i = 0$. Более того, из обратимости по времени следует, что все λ_i разбиваются на пары $\lambda_{\pm}^{(k)}$, так что для каждой пары $\lambda_{+}^{(k)} + \lambda_{-}^{(k)} = 0$ ($k = 1, \dots, N$). Поэтому положительные $\lambda_{+} > 0$, соответствующие экспоненциальной локальной неустойчивости движения, возможны лишь при условии $2N - 2m \geq 2$ или $N \geq m + 1$. Так, для замкнутой системы с единственным интегралом энергии ($m = 1$) $N \geq 2$. Рассматриваемый пример (2.2) имеет как раз минимальную размерность.

Величина λ не зависит от начальных условий в основном фазовом пространстве в пределах каждой из эргодических компонент движения, на которые расслаивается все фазовое простран-

во для любой динамической системы с интегральным инвариантом (фазовый объем для гамильтоновых систем как замкнутых, так и незамкнутых). Эргодическая компонента может охватывать как всю энергетическую поверхность (для замкнутой системы) — эргодичность в обычном смысле, откуда и происходит сам термин, так и (в другом крайнем случае) только, например, периодическую траекторию. В последнем случае, разумеется, $\lambda = 0$.

В любом случае траектория (хаотическая или регулярная) равномерно распределяется по всей эргодической компоненте, т.е. среднее время пребывания системы в любом элементе эргодической компоненты пропорционально инвариантной (сохраняющейся при движении) мере этого элемента (эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина). Для гамильтоновых систем инвариантной мерой является фазовый объем (теорема Лиувилля), а при наличии интегралов движения (I_k) — наведенная (на интегральной поверхности) мера

$$d\mu = \prod_k \delta(I_k - I_k^0) d\Gamma \quad (2.6)$$

где I_k^0 — значения интегралов, фиксирующие интегральную поверхность, а $d\Gamma$ — элемент полного фазового объема. Заметим, что μ пропорционально объему "трубки" в фазовом пространстве, заданной величинами dI_k .

Показатели Ляпунова определяют одну из наиболее важных характеристик движения — метрическую энтропию /15/: $h = \sum \lambda_+$, где $\lambda_+ > 0$. При численном моделировании наиболее просто находится максимальный показатель λ_{max} , так как начальный касательный вектор (a_i, \dot{a}_i) можно выбирать при этом произвольно, не заботясь об отыскании собственных направлений. При $\lambda_{max} > 0$ практически любой начальный вектор будет быстро приближаться к собственному направлению с $\lambda = \lambda_{max}$. С другой стороны, знание λ_{max} достаточно, так как существенно не точное значение h , а то, что $h \geq \lambda_{max} > 0$ при $\lambda_{max} > 0$, т.е. факт экспоненциальной локальной неустойчивости траекторий. Для рассматриваемого примера (2.2) $h = \lambda_{max}$.

Значение величины h состоит прежде всего в том, что согласно современной теории динамических систем условие $h > 0$ необходимо и достаточно для случайности почти всех траекторий /16/. Наглядно, это связано с тем, что понятие траектории теряет смысл в условиях сильной локальной неустойчивости движения,

подобно тому, как мы говорим об отсутствии неустойчивого состояния равновесия, хотя такое решение уравнений движения и существует. Если встать на несколько более формальную точку зрения, то можно значительно полнее представить себе природу этого любопытного феномена динамической случайности. Именно, будем считать, что наша система движется строго по определенной траектории, полностью заданной начальными условиями. Тогда при экспоненциальной локальной неустойчивости траектория будет с течением времени существенно зависеть от все более и более мелких деталей точно заданных начальных условий, деталей, которыми в устойчивом движении можно полностью пренебречь. Следовательно, источник случайности заключен в начальных условиях движения, тогда как роль собственно динамической системы сводится лишь к обеспечению локальной неустойчивости. В таком качестве сама по себе динамическая система может быть и очень простой — факт, казавшийся еще недавно столь парадоксальным. Нетривиальным здесь является доказательство того, что почти все начальные условия соответствуют именно случайному движению. Наглядно это можно представить себе так: любые регулярности траектории резко суживают меру соответствующих начальных условий. Популярное изложение этих вопросов можно найти в /17/.

Помимо фундаментального значения для динамики системы локальная неустойчивость оказывается наиболее удобным критерием динамического хаоса (или его отсутствия) при численном моделировании. Именно так была открыта /18/ интегрируемость так называемой цепочки Тода — сильно нелинейной многомерной системы связанных осцилляторов.

Практическое вычисление λ_{max} производится путем совместного численного интегрирования основных (2.2) и линеаризованных (2.3) уравнений. Чтобы избежать слишком больших значений ρ , необходимо периодически сокращать длину касательного вектора, не изменяя его направления. Другой метод состоит в интегрировании сразу двух очень близких траекторий системы (2.2), также с периодическим сокращением расстояния между ними.

Следует иметь в виду, что для квазипериодического движения (полностью интегрируемая система) локальная неустойчивость все же возникает за счет зависимости частот от начальных условий, однако, при этом $\rho \propto t$ (в среднем) (см., например, /19/). В пределе $t \rightarrow \infty$ $\lambda = h = 0$ но численный счет необходимо про-

должать достаточно долго, чтобы уверенно отличить экспоненту от линейной зависимости. Отсюда также следует, что вывод о хаотичности движения более надежен, чем об ее отсутствии (h может оказаться слишком малым).

Остановимся кратко на необходимой точности счета при численном моделировании. Если хаотическая компонента является сплошной (без устойчивых областей), точность счета может быть относительно невысока. В консервативных системах ее удобно контролировать по сохранению энергии. Наш опыт подсказывает, что точность $(\Delta H/H) \leq 1\%$ является, вообще говоря, достаточной. Существенно, однако, чтобы схема счета была канонической, т.е. точно сохраняла фазовый объем. Заметим также, что совершенно нереально (и не нужно) добиваться точности, обеспечивающей возврат траектории при обращении скоростей. Из-за экспоненциальной неустойчивости интервал времени движения, на котором возможен возврат, оказывается во всех случаях непривлимо коротким ($\sim m/\lambda_{\max}$, где m - число разрядов мантиссы ЭВМ). Переход к двойной точности лишь удвоит этот интервал.

На границе с устойчивой областью структура хаотической компоненты очень сложна (см., например, /14/ и ниже, раздел 4). При желании выявить детали этой структуры точность счета необходимо соответственно повышать. Следует, однако, иметь в виду, что структура эта является иерархической /14/, так что при любой конечной точности можно "рассмотреть" лишь часть ее более крупных масштабов.

3. Безмассовые поля ЯМ

Мы начнем с модели (I.10) с $N = 3$ (степени свободы), в которой хаос оказывается более простым, чем в ее частном случае $A_1 \equiv 0$ ($N = 2$) /9/. Как отмечалось выше, для этой модели изменение величины H приводит лишь к изменению масштаба времени $t \propto H^{-1/4}$, в частности, $\lambda \propto H^{1/4}$. В данном случае интегральная поверхность $H = \text{const}$ является 5-мерной (оба момента (I.9) тождественно равны нулю), так что h может превышать максимальный показатель Ляпунова λ .

Численное моделирование показывает /9/, что предел в (2.5) достигается достаточно быстро (за время $\sim 10^3$), а разброс значений $\lambda H^{-1/4}$ для отдельных траекторий относительно невелик:

лик: $\langle \lambda H^{-1/4} \rangle = 0,38 \pm 0,04$ (по 22 траекториям со случайно выбранными начальными условиями). Малый разброс свидетельствует в пользу существования единой хаотической компоненты движения на каждой энергетической поверхности.

Рассмотрим некоторые специальные траектории. Пусть, например, $A_2 = A_3 = \dot{A}_2 = \dot{A}_3 = 0$. Такие начальные условия соответствуют равномерному движению вдоль оси A_1 и постоянному E_1 /7/. Рассмотрим близкую траекторию: $A_1^2 \gg A_2^2 + A_3^2 \equiv A_1^2$. Гамильтониан (I.10) принимает вид

$$H \approx \frac{1}{2} (E_1^2 + E_1^2 + A_1^2 \cdot A_1^2) \approx \frac{E_1^2}{2} + A_1 \cdot J_1 \quad (3.1)$$

Последнее выражение справедливо в адиабатическом приближении, когда поперечное действие $J_1 = H_1/A_1 \approx \text{const}$ (продольная координата A_1 играет здесь роль переменной частоты поперечного движения). Из (3.1) ясно, что для любого $J_1 > 0$ произойдет отражение траектории при $A_1 = A_m = H/J_1$. После отражения $A_1 = A_m - J_1 t^2/2$ и условие адиабатичности $|\dot{A}_1| \ll A_1^2$ нарушается при $A_1 \lesssim \sqrt{A_1 A_m} \sim H^{1/4}$ вследствие чего J_1 существенно изменяется, и траектория оказывается хаотической. Таким образом, равномерное движение вдоль любой из осей оказывается неустойчивым, хотя время развития неустойчивости ($T \sim \sqrt{A_m/J_1} \sim 1/A_1$) неограниченно возрастает при $A_1 \rightarrow 0$.

Другой особой траекторией являются синфазные колебания $A_1(t) = A_2(t) = A_3(t)$ /6,7/. Как показано в /9/, эти колебания устойчивы, причем механизм устойчивости оказывается весьма своеобразным. Малые поперечные колебания в окрестности периодического решения являются сильно нелинейными, а их частота стремится к нулю при уменьшении их амплитуды. Область устойчивости очень мала и имеет, повидимому, сложную форму.

Перейдем теперь к случаю $N = 2$ ($A_1 \equiv 0$). Именно эта модель изучалась численно в работе /7/, где были получены первые данные, свидетельствующие в пользу хаотичности ее движения (см. также /8/). По нашим данным /9/ движение здесь также локально неустойчиво, однако, получить определенное численное значение энтропии $h = \lambda$ не удалось из-за сильных флуктуаций и плохой сходимости выражения (2.5). Это объясняется тем, что инвариантная мера (2.6) на энергетической поверхности расходится /9/. Действительно

$$\begin{aligned} \mu_H &= 2\pi \int \delta(E^2 - 2H^0 + (A_3 A_2)^2) E dE dA_2 dA_3 = \\ &= \pi \int_{(A_2 A_3)^2 < 2H^0} dA_2 dA_3 \rightarrow \sqrt{2H^0} 8\pi \ln A \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.2)$$

Заметим, что из второго выражения для μ_H вытекает полезное геометрическое правило: мера на энергетической поверхности в фазовом пространстве пропорциональна объему (площади), ограниченному эквипотенциальной поверхностью в конфигурационном пространстве для $N \geq 2$ и квадратичной зависимости гамильтониана от импульсов.

Расходимость меры означает, что подавляющую часть времени хаотическая траектория проводит в областях с $|A_k| \rightarrow \infty$. Любая функция распределения будет "уходить" при этом с течением времени все дальше и дальше вдоль осей A_2, A_3 а ее плотность будет неограниченно уменьшаться в любой точке энергетической поверхности.

С другой стороны, при достаточно большом (или малом) отношении $|A_3/A_2|$ имеется, как и в случае $N=3$, дополнительный интеграл движения - действие $J_2 = H_2/A_3$, где $2H_2 = E_2^2 + (A_3 A_2)^2$ и мы приняли для определенности, что $A_3 \gg |A_2|$. Поэтому в этих областях движение становится регулярным и, в частности, отсутствует экспоненциальная локальная неустойчивость. Последняя имеет место лишь в области неадиабатичности $|A_3| \lesssim H^{1/4}$, мера которой $\mu_\lambda \sim H^{1/2}$ конечна. Отсюда при $t \rightarrow \infty$

$$h = \lambda \rightarrow H^{1/4} \cdot \frac{\mu_\lambda}{\mu_H} \rightarrow \frac{H^{1/4}}{\ln A} \sim \frac{H^{1/4}}{\ln t} \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

Здесь связь между A и t получается из оценки скорости диффузии по A : $D_A = \langle (\Delta A)^2 \rangle / t \sim A \sqrt{H}$, откуда $A \sim \sqrt{H} t$.

Хотя по A рассматриваемое движение инфинитно, напряженности полей $B_1 = A_2 A_3, E_2 = \dot{A}_2, E_3 = \dot{A}_3$ остаются конечными из-за сохранения энергии. Более того, по порядку величины $B_1 \sim E_2 \sim E_3$, если даже, скажем, $A_3 \rightarrow \infty$. Однако при этом частота колебаний A_2 и B_1 неограниченно возрастает, а частота A_3 - падает таким образом, что произведение частот остается неизменным.

Для $N=3$ инвариантная мера энергетической поверхности конечна, хотя поверхность и не замкнута, т.е. ее "размеры" по A_k не ограничены. Для того, чтобы убедиться в этом, подсчитаем меру на одной из 6 "трубок", уходящих на бесконечность ($A_1^2 \gg A_1^2$):

$$\mu_H(A_1 > A) \propto \int_A^\infty dA_1 A_1^2 \propto \int_A^\infty \frac{dA_1}{A_1^2} = \frac{1}{A} \rightarrow 0$$

при $A \rightarrow \infty$. Поэтому в данном случае имеет место обычная релаксация.

Еще одна любопытная особенность модели (I.10) при $N=2$ связана с начальными условиями движения. Для полного определения траектории необходимо задать 4 величины $A_2, \dot{A}_2, A_3, \dot{A}_3$. Хотя в задаче имеются 4 компоненты тензора напряженности, сумма двух из них тождественно равна нулю из-за антисимметричности тензора: $F_{23} = -F_{32} = B_1$. Следовательно, в отличие от линейных полей, задание тензора $F_{\mu\nu}$, вообще говоря, еще не определяет полностью ни состояние нелинейного поля, ни его динамику. Первый пример подобной неоднозначности был построен в /20/ (см. также /21/). В нашем случае необходимо дополнительно задать отношение A_2/A_3 . Изменение этого отношения приводит к разной динамике и не эквивалентно калибровочному преобразованию. Если, например, $A_2 = A_3$ и $E_1 = E_2 = 0$, движение будет периодическим (хотя и неустойчивым), тогда как при $A_2 \neq A_3$ с тем же $B_1 = A_2 A_3$ движение становится хаотическим.

Вместо отношения (A_2/A_3) можно задать \dot{E}_2 или \dot{E}_3 , или наконец, их отношение \dot{E}_2/\dot{E}_3 . Если же задать B_1 , то получается, вообще говоря, либо два, либо ни одного значения (A_2/A_3) .

Любопытные особенности начальных условий имеются и в случае $N=3$. Положим $B_1 = A_2 A_3; B_2 = A_1 A_3; B_3 = A_1 A_2$, откуда $(B_k \neq 0)$:

$$A_1^2 = \frac{B_2 B_3}{B_1}, A_2^2 = \frac{B_1 B_3}{B_2}, A_3^2 = \frac{B_1 B_2}{B_3} \quad (3.4)$$

При заданных B , поле может находиться в двух состояниях, отличающихся изменением знака у всех A_k . Если при этом $E_k = \dot{A}_k \neq 0$, то движение из обоих начальных состояний будет различным (одна траектория получается из другой при

$t \rightarrow -t$ и $A_k \rightarrow -A_k$). С другой стороны, компоненты B_k не могут быть заданы произвольно, а должны удовлетворять условию $B_1 B_2 B_3 \geq 0$ (3.4), причем в случае равенства в нуль обращаются по крайней мере две компоненты B_k . Можно показать, что подобное ограничение сохраняется и в случае произвольных векторов \vec{B}_k .

4. Массивные поля ЯМ

Рассмотрим однородную модель поля ЯМ с массой в простейшем нетривиальном случае $N = 2$ степени свободы /8/. Гамильтониан (I.10) с добавкой (I.14) имеет вид ($\omega = 1$):

$$H = \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_1^2 A_2^2) \quad (4.1)$$

Ясно, что при $A_k \gg 1$ квадратичные члены несущественны (по крайней мере в первом приближении, см. ниже), и мы возвращаемся к случаю безмассового поля, т.е. к хаотическому движению (раздел 3). При $A_k \ll 1$ казалось бы можно пренебречь слабой нелинейной связью и ожидать устойчивых регулярных колебаний. Эти простые соображения были высказаны и подтверждены численным моделированием системы (4.1) в /8/. Ниже мы рассмотрим динамику этой модели более подробно. Начнем со случая $H \ll 1$. Перейдем к переменным действие-фаза невозмущенной системы (линейные осцилляторы): $A_k = \sqrt{2I_k} \cos \theta_k$; $E_k = -\sqrt{2I_k} \sin \theta_k$; $k = 1, 2$. Гамильтониан (4.1) принимает вид:

$$H = I_1 + I_2 + \frac{1}{2} I_1 I_2 [1 + \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2 + \frac{1}{2} \cos(2\theta_1 + 2\theta_2) + \frac{1}{2} \cos 2(\theta_1 - \theta_2)] \quad (4.2)$$

Члены возмущения, зависящие от фаз, разбиваются на две группы: высокочастотные ($\Omega = 2$), или нерезонансные (первые 3 слагаемых), и низкочастотные, или резонансные (последнее слагаемое, невозмущенная частота которого равна нулю). Ясно, что именно резонансное возмущение и будет определять, в основном, динамику системы. Поэтому в первом приближении отбросим все нерезонансные члены (так называемый метод усреднения /22/). В усредненной системе остается единственный резонансный член возмущения, или, короче, единственный резонанс. В этом случае

система всегда полностью интегрируема, а ее движение является квазипериодическим (см., например, /14/). Это связано с дополнительным, резонансным интегралом, так как один резонанс всегда зависит от определенной комбинации фаз, что приводит к симметрии возмущения. В данном случае, например, гамильтониан не зависит от сдвига обеих фаз, в результате чего сохраняется невозмущенная энергия $H^0 = I_1 + I_2$. Так как полный гамильтониан H также сохраняется, то сохраняется и их разность, т.е. возмущение $V = H - H^0$.

Произведем каноническое преобразование к переменным $J_1 = H^0$; $\varphi_2 = 2(\theta_2 - \theta_1)$. Тогда $\varphi_1 = \theta_1$; $J_2 = I_2/2$ и усредненный, или резонансный гамильтониан

$$H_r = J_1 + J_2 (J_1 - 2J_2) (1 + \frac{1}{2} \cos \varphi_2) \quad (4.3)$$

Так как $J_1 = \text{const}$, то фазовые кривые определяются соотношением

$$\rho(1-\rho)(1 + \frac{1}{2} \cos \varphi) = \frac{2V}{(H^0)^2} \equiv \nu \quad (4.4)$$

где $\rho = 2J_2/H^0$, $0 \leq \rho \leq 1$. Типичные фазовые кривые приведены на рис. I. В исходных переменных они переходят в кривые на рис. I в /8/. Периодические траектории системы соответствуют $\varphi = 0; \pi$ (при этом $\varphi_1 = \theta_1 = H^0 t$). Первая из них устойчива (частота малых колебаний $\omega_0 = \sqrt{3/8} H^0 \approx 0,61 H^0$), а вторая - неустойчива и определяет сепаратрису резонанса, на которой колебания J_2 максимальны ($J_2^{\text{max}}/J_2^{\text{min}} = (1 + \sqrt{2/3})/(1 - \sqrt{2/3}) \approx 10$). Последнее соотношение показывает, что эффект слабого нелинейного возмущения (обмен энергией между степенями свободы) всегда большой и не зависит от $H \rightarrow 0$. Это связано с изохронностью невозмущенных колебаний (для линейной связи обмен энергией был бы полным).

Эффект отброшенных нерезонансных гармоник возмущения двоякий. С одной стороны, они вызывают высокочастотные осцилляции интегралов усредненной системы J_1, V . Амплитуда этих осцилляций $|\Delta V/V| \sim H^0 \rightarrow 0$, они не меняют характера движения и могут быть устранены, в принципе, не зависящей от времени заменой переменных.

С другой стороны, "нерезонансное" возмущение может вызывать резонансы с высокими гармониками частоты ω_0 . Ампли-

туда последних возрастает по мере приближения к сепаратрисе (рис. I). В результате вокруг сепаратрисы образуется стохастический слой, относительная ширина которого $\sim \exp(-\nu/\omega_0)$, где $\nu \sim 1$ (подробное исследование этого явления для близкой модели см. в /14/). С увеличением ω_0 ширина стохастического слоя быстро возрастает и при $\omega_0 \gtrsim 1$ ($H \gtrsim 1$) хаотическая компонента движения распространяется на большую часть энергетической поверхности. Приведенное в /8/ критическое $H_{кр} \approx 6,7$ соответствует резонансу с 4-й гармоникой невозмущенных колебаний (член $\cos(2\theta_1 + 2\theta_2) = \cos(\varphi + 4\theta_1) \approx \frac{1}{2} \varphi_0 \cos(4\theta_1 - \omega_0 t + \alpha)$). В любом случае величина $H_{кр}$ является условной, поскольку мера хаотической компоненты непрерывно зависит от H .

При $H \gg 1$ движение является хаотическим как и для безмассовых полей ЯМ /8/. Однако есть и интересные особенности. Прежде всего, энергетические поверхности теперь замкнуты и имеют конечную меру, а, значит, и энтропия $h > 0$ (см. раздел 3). Оценку ее зависимости от энергии можно получить при $H \gg 1$ следующим образом. Максимальное $A_m = \sqrt{2H}$ (4.1). Подставляя это значение в (3.3), найдем

$$h \sim \frac{H^{1/4}}{\ln H} \quad (4.5)$$

Далее, движение вдоль каждой из осей будет теперь периодическим: $A_1 = A_m \cos t$. Устойчивость этого решения в линейном приближении определяется уравнением Матье

$$\ddot{A} + (1 + H + H \cos 2t)A = 0 \quad (4.6)$$

При $H \gg 1$ устойчивые и неустойчивые интервалы H имеют примерно одинаковую ширину (см., например, /23/). Центры интервалов даются приближенным соотношением:

$$H_{уст} \approx \frac{\pi^2}{8} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$$H_{нуст} \approx \frac{\pi^2}{8} n^2 - 1$$

где $n > 1$ целое.

Таким образом, массовые члены в гамильтониане (I.14) действительно стабилизируют движение, так что при $H \rightarrow 0$ хаотическая компонента сохраняется только в экспоненциально

узком слое вокруг сепаратрисы. Однако положение кардинально изменяется при увеличении числа степеней свободы. Рассмотрим, например, ту же модель (I.10) с массовой добавкой (I.14), но для $N = 3$.

Переходя к переменным действие-фаза, также как и для $N = 2$, приходим к усредненному гамильтониану:

$$H_r = I_1 + I_2 + I_3 + \frac{1}{2} V \quad (4.7)$$

$$V = I_1 I_2 \left[1 + \frac{1}{2} \cos 2(\theta_1 - \theta_2)\right] + I_1 I_3 \left[1 + \frac{1}{2} \cos 2(\theta_1 - \theta_3)\right] + I_2 I_3 \left[1 + \frac{1}{2} \cos 2(\theta_2 - \theta_3)\right]$$

Принципиальной особенностью этой модели является наличие не одного (как в (4.2)), а трех резонансов, сохраняющихся при $H \rightarrow 0$. Для полной интегрируемости системы теперь нужно два дополнительных интеграла. Между тем (4.7) содержит две линейно-независимые комбинации фаз, так что имеется только одна циклическая комбинация фаз и, соответственно, только один дополнительный интеграл $H^0 = I_1 + I_2 + I_3$. В этих условиях можно ожидать значительной хаотической компоненты движения при любом $H \rightarrow 0$. Более того, как и для $N = 2$, структура фазового пространства вообще не зависит от величины H , которая определяет только временной масштаб. Действительно, благодаря интегралу $H^0 = \text{const}$ система может быть сведена к двум степеням свободы. Тогда, если произвести масштабное преобразование времени $H^0 t \rightarrow t$ и перейти к каноническим переменным

$$\varphi_1 = 2(\theta_1 - \theta_3); \quad \varphi_2 = 2(\theta_2 - \theta_3) \quad (4.8)$$

$$J_1 = I_1 / H^0; \quad J_2 = I_2 / H^0$$

гамильтониан редуцированной системы принимает вид

$$H_r = J_1 (1 - J_1 - J_2) \left(1 + \frac{1}{2} \cos \varphi_1\right) + J_2 (1 - J_1 - J_2) \left(1 + \frac{1}{2} \cos \varphi_2\right) + J_1 J_2 \left(1 + \frac{1}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \quad (4.9)$$

и не зависит от энергии исходной системы $H \approx H^0$. Если движение этой системы является хаотическим, то универсальный хаос

в исходной системе будет сохраняться при сколь угодно слабом нелинейном возмущении. Это красивое явление было обнаружено и исследовано в работе /24/ для близкой модели. Отметим, что теория КАМ (Колмогорова-Арнольда-Мозера) в данном случае неприменима, так как невозмущенная система (линейный осциллятор) изохронна /25/.

Исследование динамики системы (4.9) проводилось путем численного моделирования. Точность сохранения интеграла H_R находилась в интервале от 10^{-3} до 10^{-8} и не влияла на характеристики системы.

В процессе численного решения уравнений движения (на интервале $t \sim 10^4$) методом двух близких траекторий (раздел 2) определялась энтропия h_R , которая связана с энтропией исходной системы посредством $h \approx h_R H$. Численные эксперименты показали, что в системе имеется хаотическая компонента, а характеризующая ее величина h_R зависит от значения интеграла H_R . Максимальная $h_R^{\max} \approx 0,15$ достигается при $H_R \approx 0,3$. Величина H_R может принимать значения в интервале: $0 \leq H_R \leq 1/2$, что следует из (4.9) и положительности действий I_k .

При приближении H_R к своим крайним значениям h_R уменьшается. Так, например, $h_R = 0,082$ при $H_R = 0,18$ и $h_R = 0,026$ при $H_R = 0,40$.

Для наглядного представления картины движения можно построить двумерное сечение Пуанкаре трехмерной энергетической поверхности системы (4.9), если наложить какое-либо дополнительное условие на динамические переменные (см., например, /24/). Мы использовали условие $\varphi_1 = \varphi_2$, при котором картина движения будет симметричной относительно J_1, J_2 . В этих переменных поверхность сечения представляет собой равносторонний треугольник, так как $H^0 = I_1 + I_2 + I_3 = \text{const}$ и $I_k > 0$. Перейдем к декартовым координатам

$$X = \frac{1}{2}(1 + J_2 - J_1); Y = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - J_1 - J_2) \quad (4.10)$$

Энергетически допустимая область движения представляет собой пересечение области внутри круга

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1 - 2H_R}{3} \quad (4.11)$$

и вне эллипса

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(Y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2H_R}{3} \quad (4.12)$$

(см.рис.3).

На рис.2 приведен пример картины движения для $H_R = 0,404$. Сплошная окружность соответствует (4.11), а точки - численный счет для четырех различных траекторий. Три из них, для которых точки ложатся на гладкую кривую, соответствуют квазипериодическому движению, т.е. для них существует еще один дополнительный интеграл. Остальные нерегулярно разбросанные точки принадлежат одной хаотической траектории, которая приблизительно охватывает всю хаотическую компоненту движения ($h_R = 0,026$).

Обратим внимание на значительное изменение плотности точек хаотической траектории. Это указывает на сильную неравномерность инвариантной меры на поверхности сечения.

Другой пример картины движения приведен на рис.3. Относительная площадь хаотической компоненты достигает максимума при $H_R \approx 0,3$ (как и h_R) и уменьшается при $H_R \rightarrow 1/2$ и $H_R \rightarrow 0$. В последнем случае допустимая область движения разделяется на три участка вблизи углов треугольника, не связанных между собой.

Некоторые средние статистические характеристики хаотической компоненты исходной модели (I.10; I.14) при $H \rightarrow 0$ могут быть получены следующим образом. Возьмем группу траекторий, начальные условия которых распределены случайно и равномерно в слое фазового пространства толщиной ΔH со средним значением $H_0 \ll 1$. Для каждой из этих траекторий вычислим энтропию h . Тогда отношение S числа траекторий с $h > 0$ к полному числу траекторий равно (приблизительно) относительной мере хаотической компоненты на энергетической поверхности ($H \rightarrow 0$).

Специальные измерения показали, что в качестве H_0 достаточно взять $H_0 \approx 0,25$ ($\Delta H \approx 0,1$). Контроль производился по зависимости от H безразмерной энтропии $h/H \rightarrow h_R$ ($H \rightarrow 0$). Так, при увеличении H от 0,07 до 0,29 отношение h/H остается постоянным в пределах нескольких процентов. При измерении по 100 траекториям мы получили $S = 65\%$.

Помимо этого было получено распределение различных значе-

ний энтропии $h_R \approx h/H$, гистограмма которого приведена на рис.4. Среднее значение энтропии на энергетической поверхности $\langle h_R \rangle \approx 0,093$. Резкий обрыв распределения со стороны малых значений h_R указывает на хорошее разделение устойчивых и хаотических компонент движения в условиях численного моделирования. Близкие максимальные значения h_R для исходной (0,143) и приведенной (0,151) систем дополнительно подтверждают, что принятое значение $H_0 \approx 0,25$ достаточно хорошо отражает предельное поведение исходной системы при $H \rightarrow 0$. Значительное уменьшение H_0 нежелательно, так как при этом увеличивается продолжительность счета.

Обнаруженная значительная хаотическая компонента при $H \rightarrow 0$ связана с вырождением невозмущенной системы (все три частоты линейного осциллятора (массы) одинаковы). Только в этом случае все резонансы сохраняются при $H \rightarrow 0$. Если по каким-либо причинам линейные частоты оказываются различными, появляется, как и для $N = 2$, критическая энергия $H_{кр} \sim |\Delta\omega|_{max}$ - максимальная разность линейных частот ($|\Delta\omega| \ll \omega$). В частности, $H_{кр} > 0$ даже, если две частоты совпадают. В этом случае при $H \rightarrow 0$ остается только один резонанс.

Аналогичная ситуация может возникнуть и при одинаковых частотах, если момент $M \neq 0$ (1.9). Рассмотрим следующую модель. Пусть поле ЯМ имеет компоненты: $A_1^a \equiv A_1$; $A_2^a \equiv A_2$; $A_3^c \equiv A_3$. Тогда $M_3 = A_1 E_2 - A_2 E_1 = const$ ($M_3 \equiv 0$). Гамильтониан имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} [E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 (A_1^2 + A_2^2) A_3^2] \quad (4.13)$$

Ввиду аксиальной симметрии система может быть сведена к двум степеням свободы. Положим $A_1^2 = A_1^2 + A_2^2$, тогда гамильтониан редуцированной системы можно записать в виде:

$$H = \frac{1}{2} [E_3^2 + E_{\perp}^2 + \frac{M_3^2}{A_1^2} + A_3^2 + A_{\perp}^2 + A_3^2 A_{\perp}^2] \quad (4.14)$$

Если $M_3 = 0$, задача сводится к рассмотренному выше случаю (4.1) с одним резонансом и критической энергией. Для $M_3 \neq 0$ энергия имеет минимум $H_m = |M_3|$ при $A_{\perp} = A_m = \sqrt{|M_3|}$; $A_3 = 0$. Обозначив $A_{\perp} - A_m = A$ получим разложение гамильтониана (4.14) вблизи минимума:

$$H = |M_3| + \frac{1}{2} [E_3^2 + (1 + |M_3|) A_3^2 + E^2 + 4A^2 + 2\sqrt{|M_3|} A A_3^2 + A^2 A_3^2] \quad (4.15)$$

Частоты малых колебаний равны $\omega_3 = \sqrt{1 + |M_3|}$ и $\omega = 2$ (для A_3 и A соответственно). Условия резонанса: $\omega = 2\omega_3$ (член возмущения $A A_3^2$) и $\omega = \omega_3$ (член $(A A_3)^2$). Поэтому даже один резонанс возможен лишь для $|M_3| = 0$; 3. В противном случае движение системы (4.15) будет даже более устойчивым, чем (4.1), в том смысле, что колебания невозмущенных действий будут малыми: $I_3, I \approx const$ (ср. рис.1). Отметим, что существует симметричное решение ($A_2 \rightarrow A_1^c, M = 0, M_3^c \neq 0$), отвечающее ненулевой плотности источников.

В заключение вернемся еще раз к предыдущей модели с $N = 3$ и рассмотрим случай $H \gg 1$. Как и для $N = 2$ хаотическая компонента движения охватывает в этом случае почти всю энергетическую поверхность за исключением малых областей вдоль координатных осей, т.е. когда, например, $A_1^2 \gg A_2^2 + A_3^2$. В этой области можно пренебречь в гамильтониане членом $(A_2 A_3)^2$ (см. (1.10)), так что движения по A_2 и A_3 становятся независимыми и каждое из них описывается уравнением Матье (4.6) как и в случае $N = 2$. Соответственно, движение будет устойчивым или неустойчивым (хаотическим) в зависимости от значения H .

Численное моделирование подтверждает, что, например, при $H = 51$ (устойчивый интервал, $n = 6$) действительно существует конечная область регулярного движения, размер которой $\sqrt{(A_2^2 + A_3^2)}/A \sim 3 \times 10^{-3}$.

5. Замечания о динамике неоднородных полей ЯМ

Если внутренняя динамика поля ЯМ, описываемая однородной моделью, является хаотической, то пространственная неоднородность поля, вообще говоря, лишь усиливает хаотичность движения из-за резкого увеличения числа степеней свободы системы. Поэтому уже в случае двух внутренних степеней свободы (модель (1.12)) следует ожидать полной хаотичности движения.

Иначе обстоит дело для модели (1.13) с одной внутренней степенью свободы, которая имеет два интегрируемых предела.

Один из них ($\lambda A \rightarrow 0$) соответствует линейным волнам. Хаотизация возможна здесь за счет слабого нелинейного взаимодействия между ними. Другой предел ($\lambda A \rightarrow \infty$) приводит к однородной модели, колебания которой в данном случае являются периодическими (2.1). Механизм хаотизации здесь совсем иной и связан с линейным взаимодействием нелинейных локальных колебаний при разных k . Наиболее сильную хаотизацию следует ожидать при $\lambda A \sim 1$.

Рассмотрим локальную устойчивость движения. В качестве невозмущенного решения выберем однородные колебания

$$A^0(x, t) \approx A_0 \cos(\beta A_0 t) \quad (5.1)$$

где $\beta \approx 0,85$ (2.1). Полагая $A(x, t) = A^0(t) + u(t) \exp(ikx)$ и переходя к новому времени $\tau = \beta A_0 t$, приходим к уравнению Матье:

$$\ddot{u} + \left(\frac{k^2}{\beta^2 A_0^2} + \frac{3}{2\beta^2} + \frac{3}{2\beta^2} \cos 2\tau \right) u = 0 \quad (5.2)$$

Если не накладывать никаких ограничений на пространственную конфигурацию возмущения, то однородные колебания (5.1) всегда неустойчивы (для значений k в зонах параметрического резонанса). Наиболее широкая зона наиболее сильной неустойчивости соответствует параметрическому резонансу со второй гармоникой невозмущенных колебаний при

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\beta^2 A_0^2} + \frac{3}{2\beta^2} = 4; \quad \frac{k^2}{\beta^2 A_0^2} \approx 2 \quad (5.3)$$

в согласии с оценкой $\lambda A \sim 1$, приведенной выше. Отметим, что основной параметрический резонанс не достигается, точнее, мода с $k = 0$ попадает точно на границу устойчивости, где $u \propto t$ из-за сдвига частоты невозмущенных колебаний (см. раздел 2). Для уравнения Матье (5.2) этот случай ($k = 0$) является устойчивым с относительным превышением границы на 9%. Это характеризует точность использованного гармонического приближения для невозмущенного решения (см. (2.1)). Ширина зоны неустойчивости $(\Delta k/k) \approx 1/8$, а инкремент $4/\tau_n \approx 0,06$.

Обнаруженная локальная неустойчивость движения служит серьезным доводом в пользу хаотической динамики поля (1.13). Эта задача исследовалась численно в работе /13/, однако, по-

лучить определенные выводы о хаотичности движения не удалось. Помимо других начальных условий для поля в /13/ были введены периодические граничные условия, что неизбежно при численном моделировании. Это превращает непрерывный спектр по k (5.2) в дискретный: $k_n = 2\pi n/\ell$, где ℓ - период, а n - любое целое, включая нуль. При таком ограничении спектра однородные колебания могут быть и устойчивыми. Положим $\ell = 2\pi/\beta$ и пусть $A_0 \ll 1$, так что $\omega_n \approx k_n/\beta A_0 = n/A_0 \gg 1$ ($n \neq 0$). В этом случае неустойчивость возможна лишь для очень узких интервалов A_0 , соответствующих резонансам высокого порядка. В обратном предельном случае $A_0 \gg 1$ возможно попадание и во вторую зону как и для непрерывного спектра. Более того, если разность $\Delta\omega_n = 1/A_0$ меньше ширины этой зоны, то неустойчивость обязательно возникает для одной из мод. Это приводит к условию (неустойчивости): $A_0 > 4\sqrt{2}$. В зоне неустойчивости по линейному приближению следует ожидать хаотичности движения. Заметим, однако, что хаос может быть локальным и не приводить к равномерному распределению энергии по многим модам /26/ (последнее было критерием хаотичности движения в /13/).

В любом случае хаотический режим не исключается для каких-то других (неоднородных) начальных условий. Пусть, например, $\lambda A \ll 1$. Характерной особенностью системы (1.13) является отсутствие дисперсии фазовой скорости в линейном пределе ($\omega = k$). Но это значит, что различные линейные моды могут эффективно взаимодействовать между собой, т.е. в системе имеется много линейных резонансов. Как мы знаем (раздел 4) это приводит, вообще говоря, к медленной хаотизации движения в значительной части фазового пространства системы.

Мы хотели бы выразить искреннюю признательность В.Н.Байеру, А.И.Вайнштейну и И.Б.Хрипловичу за многочисленные разъяснения вопросов теории поля ЯМ и ценные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. Yang C.N., Mills R.L. Phys. Rev., 1954, 96, 191.
2. Поляков А.М. Письма в ЖЭТФ, 1974, 20, 430; ЖЭТФ, 1975, 68, 1975.
3. Polyakov A.M. Phys. Letts., 1975, 59B, 82; Belavin A.A., Polyakov A.M. et al., *ibid*, p. 85.
4. Callan C.G., Dashen R. et al. Phys. Rev., 1978, 17, 2717.
5. Вайнштейн А.И., Захаров В.И. и др. УФН, 1982, 136, 553.
6. Басеян Г.З., Матинян С.Г. и др. Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, 641.
7. Матинян С.Г., Саввиди Г.К. и др. ЖЭТФ, 1981, 80, 830.
8. Матинян С.Г., Саввиди Г.К. и др. Письма в ЖЭТФ, 1981, 34, 613.
9. Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л., там же, с.171.
10. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
11. Изергин А.Г., Корепин В.Е. и др. ТМФ, 1979, 39, 3.
12. Прохоров Л.В. ЯФ, 1982, 35, 229.
13. Захаров В.Е., Иванов М.Ф. и др. Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, 39.
14. Chirikov B.V. Phys. Repts., 1979, 52, 263.
15. Корнфельд И.П., Синай Я.Г. и др. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
16. Алексеев В.М., Якобсон М.В. Добавление в книге: Боуэн Р. Методы символической динамики. М.: Мир, 1979; Брудно А.А. Кандидатская диссертация. М., 1978.
17. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Природа, 1981, № 2, с.54; Синай Я.Г., там же, № 3, с.72; Чириков Б.В., там же, 1982, № 7.
18. Ford J., Stoddard S.D. et al. Prog. Theor. Phys., 1973, 50, 1547

19. Casati G. et al. Phys. Letts., 1980, 77A, 91.
20. Wu T.T., Yang C.N. Phys. Rev., 1975, D12, 3843.
21. Coleman S. Phys. Letts., 1977, 70B, 59.
22. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
23. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. М.: ИИЛ, 1953.
24. Ford J., Lunsford G.H. Phys. Rev. 1970, A1, 59.
25. Арнольд В.И. УМН, 1963, 18, № 6, 91.
26. Chirikov B.V., Izrailev F.M. et al. Computer Phys. Comm., 1973, 5, 11.

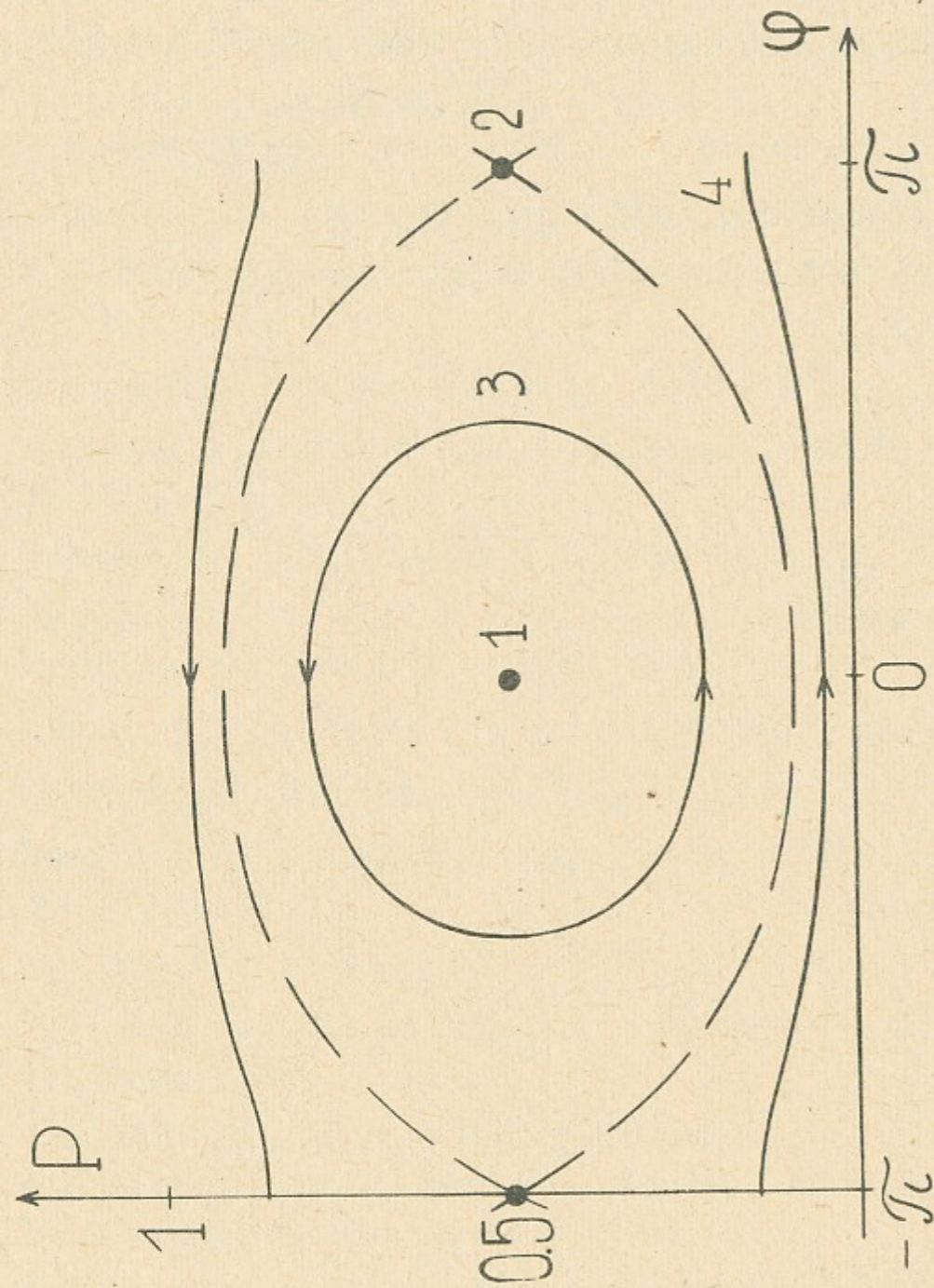


Рис.1. Типичные фазовые кривые модели (4.3): 1 - устойчивая периодическая траектория; 2 - неустойчивая периодическая траектория; 3 - квазипериодические траектории внутри резонанса (колебания фазы φ); 4 - вращение фазы; пунктир - сепаратриса, ограничивающая область резонанса.

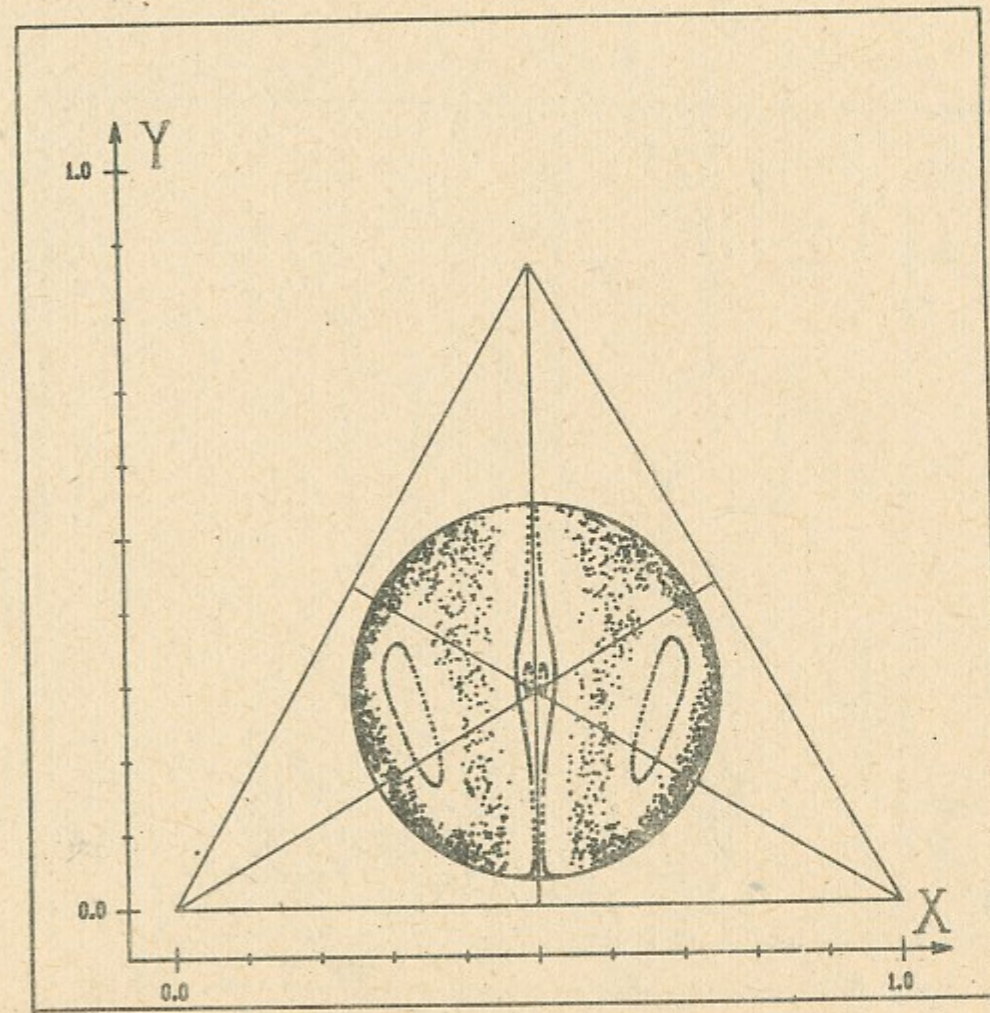


Рис.2. Плоскость сечения Пуанкаре для системы (4.9); $h_R = 0,404$. Картина движения симметрична относительно вертикальной прямой. Центр треугольника совпадает с центром окружности, которая ограничивает энергетически допустимую область движения. Нерегулярно разбросанные точки принадлежат одной хаотической траектории; $h_R = 0,026$.

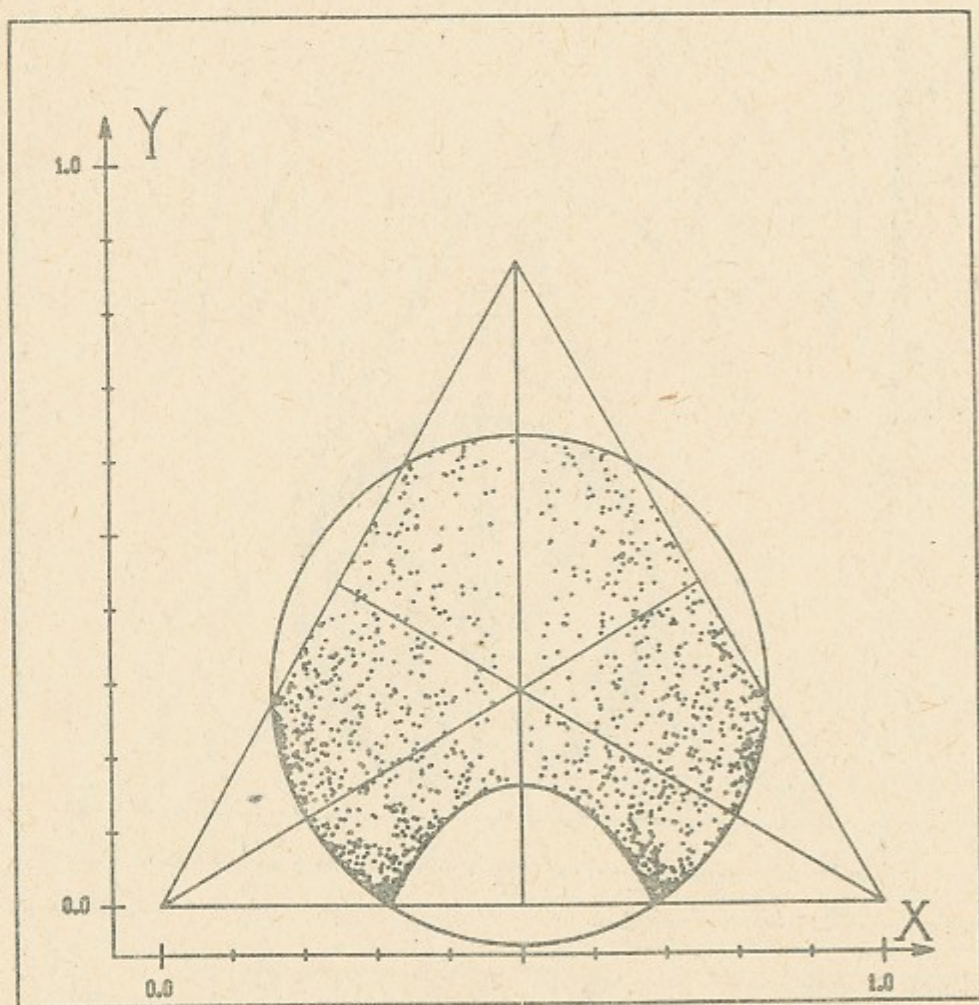


Рис.3. То же, что и на рис.2; $H_R = 0,324$, $h_R = 0,14$.

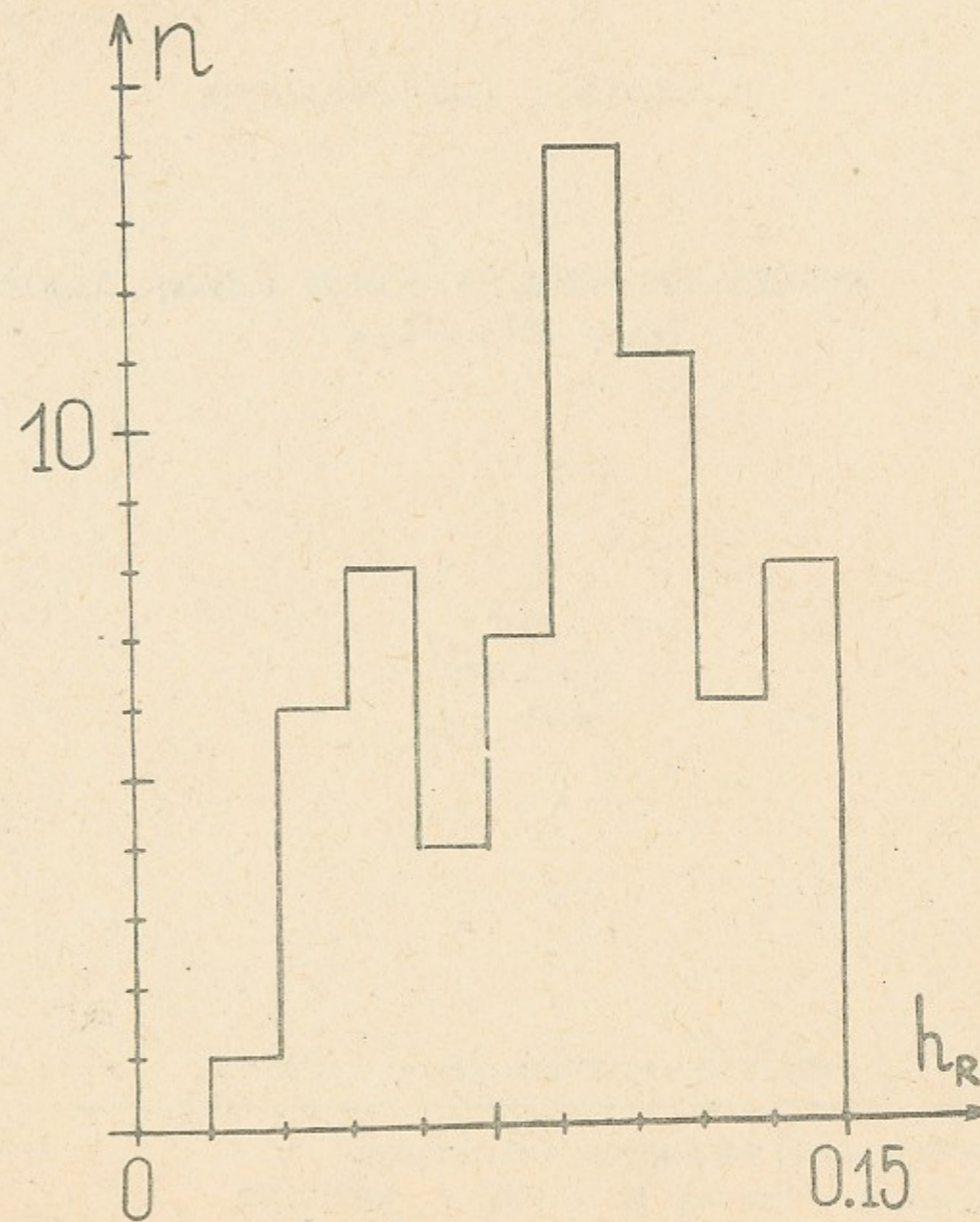


Рис.4. Гистограмма распределения энтропии $h_R \approx h/H$ для модели (I.10; I.14) при $H \ll 1$; n - число траекторий с h_R в соответствующем интервале.

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

ДИНАМИКА НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ КЛАССИЧЕСКИХ
ПОЛЕЙ ЯНГА-МИЛЛСА

Препринт
№ 82- 120

Работа поступила - 28 июня 1982 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 23.9-1982 г. МН 17272
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,9 печ.л., 1,5 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 120

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90