

К.93

22

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

КУРАЕВ Э.А. И ДР.

ПРОЦЕССЫ $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ И $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-e^+e^-$ КАК
ОСНОВНЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ
ДЛЯ ВСТРЕЧНЫХ $\gamma\gamma$ -ПУЧКОВ
ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ.

ПРЕПРИНТ 82-107

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
Физики СО АН СССР
ИНВ. № _____



АННОТАЦИЯ

Детально рассмотрены процессы $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ и $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-e^+e^-$ с поляризованными фотонами, которые могут использоваться для определения светимости встречных $\gamma\gamma$ -пучков высокой энергии. Найдены полностью дифференциальные сечения, энергетические спектры, инклюзивные и полные сечения для этих процессов. Для реакции $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ в одноинклюзивном сечении поляризационные эффекты достигают 19%.

Указана новая кинематическая область, дающая существенный вклад в сечение образования четырех струй в $\gamma\gamma$ -соударениях.

Рассмотрен также процесс $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^-$ в борновском приближении.

I. ВВЕДЕНИЕ

1. Создание встречных e^+e^- пучков с энергией ≥ 100 ГэВ, повидимому, наиболее перспективно на линейных ускорителях [1]. Такие принципиально новые установки в настоящее время проектируются в Новосибирске (проект ВЛЭШ, энергия $2E = 300+1000$ ГэВ, светимость $L_{ee} = 10^{32} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$ [2]) и в Стэнфорде (SLC, $2E = 100+140$ ГэВ, $L_{ee} = 6 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$ [3]).

В работах [4,5] показано, что на базе этих ускорителей можно получить встречные $\gamma\gamma$ -пучки с примерно теми же энергиями и светимостями, что и для исходных e^+e^- соударений. Необходимые для этого интенсивные γ -пучки предлагается получать при рассеянии света лазера на электронных пучках этих ускорителей. Позже подобное предложение было выдвинуто также в работе [6]. В работе [7] предложено использовать лазер на свободных электронах этого же пучка для реализации указанной в [4] схемы.

2. Один из главных параметров ускорителя со встречными пучками — светимость L определяется соотношением $\dot{N} = L\sigma$, где \dot{N} — число событий в единицу времени для процесса с сечением σ . Если известен достаточно точно рассчитываемый процесс с не слишком малым сечением σ , хорошо отделимый от других процессов и удобный для регистрации, то его измерение позволит независимым образом определить светимость установки L . При этом отпадает необходимость в детальных сведениях о трудно измеримом распределении плотности пучков в области встречи. Известно, что в e^+e^- -соударениях для определения светимости используется целый ряд хорошо рассчитываемых в рамках квантовой электродинамики процессов: упругое e^+e^- -рассеяние в области малых углов, однократное или двойное тормозное излучение (см., например, [8]).

Энергетический спектр фотонов, полученных при комптоновском рассеянии лазерных фотонов, будет довольно широким. Поэтому для предложенных в [4] $\gamma\gamma$ -соударений проблема определения светимости заметно сложнее, поскольку здесь требуется калибровка как полной, так и спектральной светимости. Процессы низшего порядка по α ($\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$, $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$) имеют малое $\sim \alpha^2/S$ сечение в рассматриваемой области энергий и потому непригодны для калибровки. В работе [5] предложены два основных калибровочных процесса:

$$\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^- \quad (1)$$

$$\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-e^+e^- \quad (2)$$

Процесс (1) является, по видимому, более удобным из-за относительной простоты регистрации мюонов. Полное сечение этого процесса для неполяризованных фотонов вычислено в работах [9, 10], оно не зависит от энергии (при $s \gg m_\mu^2$) и равно \approx

$$\sigma_{\text{чпол}}^{\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-} = \frac{28\alpha^4}{27\pi m_\mu^2} \left[L^2 + \frac{103}{21}L + \frac{485}{63} \right] = 5,67 \cdot 10^{-33} \text{ см}^2, \quad (1a)$$

$$L = \ln(m_\mu^2/m_e^2) = 10,7.$$

При светимости $L_{\gamma\gamma} \sim 10^{31} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ образуется 200 пар мюонов и электронов в час, что вполне достаточно для целей калибровки. В работе [10] вычислены также энергетические распределения мюонов и электронов для неполяризованных фотонов.

Полное сечение процесса (2) вычислено в работе [12], оно равно $6,4 \cdot 10^{-30} \text{ см}^2$ и очень слабо зависит от поляризаций фотонов. Энергетические распределения электронов для неполяризованных фотонов определены в работе [8]. Для целей калибровки, по видимому, больший интерес представляют не эти сечения, а инклюзивные сечения в области больших ($\gg m_e$) поперечных импульсов электронов, которые не были рассмотрены в [12] и [8].

3. В данной работе дано практически полное описание реакций (1,2) с произвольным образом поляризованными фотонами. Отметим необходимость учета поляризаций фотонов, поскольку на ВЛЭП и SLС планируется иметь высокополяризованные e^- пучки, а поляризация γ -пучков возникает при комптоновском рассеянии из-за первоначальной поляризации как лазерных фотонов, так и электронов. Основные нетривиальные моменты расчета мы разбирали на примере реакции (1). Для нее мы нашли полное сечение, энергетические распределения электронов и мюонов, инклюзивные по μ^- и $\mu^+\mu^-$ сечения и некоторые другие распределения. Оказалось, что все сечения зависят только от линейной поляризации

\approx) Полное сечение процесса (1) для поляризованных фотонов вычислялось в работе [11], однако, полученный там результат ошибочен, см. раздел 4.

фотонов и не зависят от круговой поляризации. Поляризационные эффекты в полностью дифференциальном сечении могут быть весьма велики и приводят к азимутальным корреляциям конечных частиц. В инклюзивном сечении $d\sigma/d^3p_\mu$ поляризационные эффекты могут изменять сечение на $\pm 19\%$. А полное сечение и энергетические спектры слабо (на уровне $< 1,4\%$) зависят от линейных поляризаций фотонов.

Для реакции (2) рассмотрены аналогичные сечения и проведено сравнение этих двух реакций.

4. Расчет реакций (1,2) в области больших поперечных импульсов имеет прямое отношение к четырехструйным процессам типа $\gamma\gamma \rightarrow Q\bar{Q}q\bar{q}$ в квантовой хромодинамике (Q и q - разные, вообще говоря, кварки). Эти процессы рассматривались в работах Бродского, Де Гранда и др. [13] в логарифмическом приближении. Как следует из наших расчетов (см. раздел 3) их анализ является существенно неполным. Именно, они учитывали такой механизм рождения струй, когда каждый фотон фрагментирует в пару кварков с относительно небольшими поперечными импульсами $\gamma_1 \rightarrow Q\bar{Q}$, $\gamma_2 \rightarrow q\bar{q}$, а затем два кварка при соударении $Qq \rightarrow Qq$ приобретают большой поперечный импульс (см. (34)). Оказывается, есть другой механизм (дающий вклад того же порядка, а при $m_Q \gg m_q$ являющийся доминирующим), при котором один фотон как и ранее фрагментирует в пару кварков $\gamma_2 \rightarrow q\bar{q}$, затем один из кварков испускает глюон небольшой энергии $q \rightarrow qg$, а глюон при столкновении с γ_1 образует две струи $\gamma_1 g \rightarrow Q\bar{Q}$ с большими поперечными импульсами, летящие в одну сторону (см. (24)). (Для реакции (1) этот механизм является определяющим). Мы надеемся вернуться к этому вопросу в отдельной публикации.

5. В разделе 5 мы рассмотрели для полноты процесс

$$\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^- \quad (3)$$

в борновском приближении, считая пионы точечными частицами. Ранее полное сечение для этой реакции в данном приближении вычисляли Ченг и Ву [14]. Однако, их рассмотрение неудовлетворительно в двух отношениях. Во-первых, из их работы совершенно не ясно, имеет ли данное приближение хоть какое-нибудь отношение к реальным пионам. Во-вторых, их расчет в указанном приближении ошибочен (см. (54)). Основные результаты для этого процесса получаются достаточно просто из соответствующих сечений для

процесса (I).

6. Приведем основные обозначения, используемые в статье, на примере процесса (I) (см. рис. Ia). Мы используем систему отсчета, в которой оба фотона движутся навстречу друг другу (лобовое соударение) с разными, вообще говоря, энергиями ω_1 и ω_2 одного порядка $\omega_1 \sim \omega_2$. Ось z выбрана вдоль импульса I-го фотона, так что 4-импульсы фотонов $k_1 = \omega_1 (1, 0, 0, 1)$ и $k_2 = \omega_2 (1, 0, 0, -1)$. 4-импульсы конечных частиц $p_i = (\epsilon_i, \vec{p}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, причем p_1, p_2 соответствуют $\mu^- (\mu^+)$, а p_3, p_4 соответствуют $e^- (e^+)$. Передача от первого фотона к мюонной паре

$$q = p_1 + p_2 - k_1 = k_2 - p_3 - p_4, \quad (4a)$$

для поперечных к оси z составляющих имеем

$$\vec{q}_\perp = \vec{p}_{1\perp} + \vec{p}_{2\perp} = -\vec{p}_{3\perp} - \vec{p}_{4\perp}. \quad (4b)$$

Углы φ_i и φ_q - азимутальные углы векторов \vec{p}_i и \vec{q} . Кроме того, обозначим

$$s = 2k_1 k_2 = 4\omega_1 \omega_2, \quad s_1 = 2k_1 q, \quad s_2 = -2k_2 q, \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \epsilon_{1,2}/\omega_1, \quad y_{1,2} = \epsilon_{3,4}/\omega_2,$$

т.е. $x_{1,2}$ есть доля энергии первого фотона уносимая μ^\pm , а $y_{1,2}$ - доля энергии второго фотона, уносимая e^\pm .

Поляризационное состояние первого (второго) фотона задается параметрами Стокса ξ_i ($\tilde{\xi}_i$); степень линейной поляризации

$$l_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \quad \text{и} \quad l_2 = \sqrt{\tilde{\xi}_1^2 + \tilde{\xi}_2^2}; \quad \text{часто встречаемая комбинация} \\ \Sigma = \xi_3 \tilde{\xi}_3 - \xi_1 \tilde{\xi}_1 = l_1 l_2 \cos 2\gamma \quad (6)$$

где γ - угол между направлениями максимальной линейной поляризации первого и второго фотонов.

Отметим в заключение, что точность всех приводимых формул (за исключением формул раздела 3) определяется отброшенными слагаемыми, которые имеют относительную малость

$$\sim \frac{\vec{p}_{i\perp}^2 + m_i^2}{s} \quad (7)$$

2. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОЦЕССА $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$

I. При высокой энергии сталкивающихся фотонов $\omega_{1,2} \gg m_\mu$ основной вклад в сечение процесса (I) дают две блочные диаграммы рис. Ia, с фотонным обменом в t -канале. Частицы каждой из рожденных пар летят вдоль импульса "своего" фотона, имея большие энергии $\epsilon_i \sim \omega_{1,2}$ и малые поперечные импульсы $p_{i\perp} \ll \omega_{1,2}$. Поэтому с точностью (7) интерференция диаграмм рис. Ia и Ib отсутствует, т.е.

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-} = d\sigma_a + d\sigma_b; \quad d\sigma_b = d\sigma_a(p_{1,2} \leftrightarrow p_{3,4}), \quad (8)$$

где сечение $d\sigma_a$ отвечает диаграмме рис. Ia.

В свою очередь сечение $d\sigma_a$ с той же точностью можно представить в виде (см. приложение А)

$$d\sigma_a = \frac{d\sigma_1 ds_1}{s_1} \frac{d\sigma_2 ds_2}{s_2} \frac{d^2 q_\perp}{4\pi^4}, \quad (9)$$

где $d\sigma_{1,2}$ соответствует верхнему (нижнему) блоку на рис. Ia. Точнее, $d\sigma_1$ есть сечение процесса рис. Ic, в котором виртуальный фотон имеет "массу" $q^2 \approx -\vec{q}_\perp^2$ и вектор поляризации $\vec{q}_\perp / |\vec{q}_\perp|$:

$$\frac{d\sigma_1 ds_1}{s_1} = 2\alpha^2 (1 - 2x_1 x_2 G) \frac{d^2 p_{1\perp} dx_1 d^2 p_{2\perp} dx_2}{(\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2)(\vec{p}_{2\perp}^2 + m_\mu^2)} \delta(\vec{p}_{1\perp} + \vec{p}_{2\perp} - \vec{q}_\perp) \delta(x_1 + x_2 - 1); \quad (10a)$$

$$G = \frac{1}{q_\perp^2} \left[\vec{q}_\perp^2 + (q_x^2 - q_y^2) \xi_3 + 2q_x q_y \xi_1 \right] (\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2) (\vec{p}_{2\perp}^2 + m_\mu^2)$$

$$\vec{q}_\perp = \frac{\vec{p}_{1\perp}}{\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2} + \frac{\vec{p}_{2\perp}}{\vec{p}_{2\perp}^2 + m_\mu^2}$$

Для нижнего блока

$$\frac{d\sigma_2 ds_2}{s_2} = \frac{d\sigma_1 ds_1}{s_1} (\vec{p}_{1,2\perp} \leftrightarrow \vec{p}_{3,4\perp}, \vec{q}_\perp \rightarrow -\vec{q}_\perp, m_\mu \rightarrow m_e, x_{1,2} \leftrightarrow y_{1,2}, \xi_3 \rightarrow \tilde{\xi}_3, \xi_1 \rightarrow -\tilde{\xi}_1) \quad (10b)$$

Формулы (8-10) определяют полностью дифференциальное сечение процесса и являются основой для получения различных частных распределений. Обратим внимание на то, что этот ответ не зависит от ξ_a и $\tilde{\xi}_2$, т.е. от круговой поляризации фотонов.

2. При фиксированных значениях $\vec{p}_{1,2\perp}$ вся зависимость сечения $d\sigma_a$ от x_i и ξ_i определяется выражением $x_1 x_2 G$. Рассмотрим подробнее функцию G . Используя явный вид \vec{q}_\perp можно

показать, что

$$0 < G < 2 \quad (II)$$

В частности, при $m_e \ll p_{3L} \ll p_{2L} \approx q_L$ имеем

$$G = 1 + \tilde{F}_3 \cos 2\varphi_1 + \tilde{F}_1 \sin 2\varphi_1 \quad (I2a)$$

При $q_L \ll p_{3L}$ (при этом $\vec{p}_{3L} \approx -\vec{p}_{2L}$) имеем

$$G = \frac{1}{(1+p)^2} \left\{ 1 + p^2 - 2p(p_1 \cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi) + p_1 [p^2 \cos 2(\varphi_1 + \varphi) + \cos 2(\varphi_1 - \varphi)] \right\} \quad (I2b)$$

где $p = \vec{p}_{3L}^2 / m_e^2$, а $\varphi_1 (\varphi)$ - угол между вектором \vec{p}_{3L} и направлением поляризации первого фотона (вектором \vec{q}_L). Из формул (II-12) видно, что зависимость от $\chi_{1,2}$ плавная, сечение (IOa) и, следовательно, $d\sigma_2$ имеет максимум при $\chi_1 \rightarrow 0$ и $\chi_1 \rightarrow 1$ и минимум при $\chi_1 = \chi_2 = 1/2$.

3. В дальнейшем окажется полезным знать поведение сечения $d\sigma_2$ в двух симметричных областях

$$m_e \ll p_{3L} \ll p_{4L}, \quad \vec{p}_{4L} \approx -\vec{q}_L, \quad (I3a)$$

$$m_e \ll p_{4L} \ll p_{3L}, \quad \vec{p}_{3L} \approx -\vec{q}_L. \quad (I3b)$$

В первой из них (с учетом (I2a))

$$\frac{d\sigma_2 ds_2}{s_2} = 2\alpha^2 \left[1 - 2y_1(1-y_1) / (1 + \tilde{F}_3 \cos 2\varphi_3 - \tilde{F}_1 \sin 2\varphi_3) \right] \frac{d^2 p_{3L} dy_1}{p_{3L}^2 q_L^2} \quad (I4)$$

Отсюда видно, что в первой (второй) области (I3) распределение по p_{3L} (p_{4L}) имеет логарифмический характер: $d^2 p_{3L} / p_{3L}^2$ ($d^2 p_{4L} / p_{4L}^2$) и что при азимутальном усреднении этого сечения по углу φ_3 (φ_4) зависимость от \tilde{F}_i исчезает. Без такого усреднения величина поляризационных эффектов определяется относительным коэффициентом при $-\tilde{F}_3 \cos 2\varphi_3 + \tilde{F}_1 \sin 2\varphi_3$, который равен $2y_1(1-y_1) / [1 - 2y_1(1-y_1)]$ и может достигать 1. Отсюда видно, что в области (I3a) электрон вылетает преимущественно в плоскости перпендикулярной направлению линейной поляризации второго фотона.

4. Для получения энергетического распределения необходимо провести интегрирование по $\vec{p}_{1,2L}$ в (IOa). При этом мы получим (см. приложение А)

$$\frac{d\sigma_1 ds_1}{s_1} = \frac{8\pi\alpha^2}{q_L^2} \left\{ F_1 - \chi_1 \chi_2 [F_2 + (2F_1 - F_2)(\tilde{F}_3 \cos 2\varphi_2 + \tilde{F}_1 \sin 2\varphi_2)] \right\} \delta(\chi_1 + \chi_2 - 1) dx_1 dx_2 \quad (I5a)$$

$$F_i \equiv F_i \left(\frac{|\vec{q}_L|}{2m_e} \right), \quad F_1(z) = \frac{z \operatorname{Arsh} z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad F_2 = \frac{2z^2+1}{2\sqrt{1+z^2}} \operatorname{Arsh} z - 1,$$

где φ_2 - азимутальный угол вектора \vec{q}_L . Аналогично

$$\frac{d\sigma_2 ds_2}{s_2} = \frac{8\pi\alpha^2}{q_L^2} \left\{ \tilde{F}_1 - y_1 y_2 [\tilde{F}_2 + (2\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2)(\tilde{F}_3 \cos 2\varphi_2 - \tilde{F}_1 \sin 2\varphi_2)] \right\} \delta(y_1 + y_2 - 1) dy_1 dy_2 \quad (I5b)$$

$$\tilde{F}_i \equiv F_i \left(\frac{|\vec{q}_L|}{2m_e} \right).$$

При малых q_L сечения (I5) конечны, например, при $q_L \ll m_e$

$$\frac{d\sigma_2 ds_2}{s_2} = \frac{2\pi\alpha^2}{3m_e^2} \left[3 - 2y_1 y_2 (2 + \tilde{F}_3 \cos 2\varphi_2 - \tilde{F}_1 \sin 2\varphi_2) \right] \delta(y_1 + y_2 - 1) dy_1 dy_2 \quad (I6a)$$

При больших q_L они убывают $\sim 1/q_L^2$, например, при $q_L \gg m_e$

$$\frac{d\sigma_2 ds_2}{s_2} = \frac{4\pi\alpha^2}{q_L^2} \left[(1 - 2y_1 y_2) \ln \frac{q_L^2}{m_e^2} + 2y_1 y_2 (1 - \tilde{F}_3 \cos 2\varphi_2 + \tilde{F}_1 \sin 2\varphi_2) \right] \delta(y_1 + y_2 - 1) dy_1 dy_2 \quad (I6b)$$

Главный логарифмический вклад в это сечение возникает как раз из областей (I3).

Из (I6) видно, что относительная величина слагаемых, пропорциональных \tilde{F}_i есть

$$\frac{y_1 y_2 (2\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2)}{\tilde{F}_1 - y_1 y_2 \tilde{F}_2} \leq \begin{cases} 1/4, & q_L \ll m_e \\ [\ln(q_L^2/m_e^2) + 1]^{-1}, & q_L \gg m_e, \end{cases} \quad (I7)$$

т.е. при малых q_L поляризационные эффекты численно не велики, хотя и могут достигать 25%, а при больших q_L они логарифмически подавлены.

3. КАЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ РЕАКЦИИ $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ (СТАРШЕЕ ЛОГАРИФИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Общие формулы для реакции (I), полученные в предыдущем разделе, достаточно сложны. Между тем в областях, дающих главный вклад, ситуация существенно упрощается и допускает простое и наглядное истолкование. Так, при вычислении полного сечения и энергетических распределений возникает большой параметр $L = \ln(m_\mu^2/m_e^2) = 10,7$; при вычислении инклюзивного сечения имеется большой параметр $\ln[(\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2)/m_e^2] > L$, а в области очень больших значений $p_{1\perp}$ еще и $\ln(p_{1\perp}^2/m_\mu^2)$. Поэтому вычисления в старшем логарифмическом приближении, обладая простотой, могут дать качественное понимание и даже вполне приемлемую для быстрых оценок точность.

I. Рассмотрим процесс образования μ^- мезона, соответствующий диаграмме рис.1а. Будем считать, что поперечный импульс мезона не слишком велик

$$m_\mu \approx p_{1\perp} \ll m_\mu^2/m_e = 20 \text{ ГэВ}. \quad (18)$$

Смысл этого ограничения выяснится ниже, во всяком случае, эта область охватывает все практически интересные значения $p_{1\perp}$. При этом основной областью, дающей главный логарифмический вклад, является область малых значений $q_{1\perp}$:

$$\vec{q}_{1\perp}^2 \ll \vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2, \quad \vec{p}_{2\perp} \approx -\vec{p}_{1\perp} \quad (19)$$

и области (I3) для $p_{3,4\perp}$. В области (I9) для верхнего блока виртуальный фотон можно рассматривать как почти реальный с частотой

$$\omega = \frac{s_1}{4\omega_1} = \frac{\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2}{4\omega_1 x_1 x_2}, \quad (20)$$

а сечение $d\sigma_1$ — как сечение реального процесса $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ для поляризованных фотонов (ср. (5.33) из [15])

$$d\sigma_1 = d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-} = 2\alpha^2 [1 - 2x_1(1-x_1)G] \frac{d^2 p_{1\perp} dx_1}{(\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2)^2} \omega \delta\left(\omega - \frac{\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2}{4\omega_1 x_1(1-x_1)}\right), \quad (21)$$

где G определено в (I2в).

После этого легко увидеть, что рассматриваемый процесс можно представить в виде трех последовательных подпроцессов.

1) Фотон k_2 порождает реальный электрон с поперечным импульсом $\vec{p}_{3\perp}$ и долей энергии y_1 и виртуальный позитрон с поперечным импульсом $\vec{p}_{1\perp} = -\vec{p}_{3\perp}$ и долей энергии $y = 1 - y_1$ (см. область (I3а)). Число таких виртуальных позитронов обозначим $dn_{e^+}(\vec{p}_{1\perp}, y)$. В области (I3в) фотон k_2 порождает $dn_{e^-}(\vec{p}_{1\perp}, y)$ виртуальных электронов с $\vec{p}_{1\perp} = -\vec{p}_{4\perp}$, $y = 1 - y_2 = y_1$, где (ср. (I4))

$$dn_{e^\pm}(\vec{p}_{1\perp}, y) = \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{d^2 p_{1\perp} dy}{p_{1\perp}^2} [1 - 2y(1-y)(1 + \tilde{\xi}_3 \cos 2\varphi_p + \tilde{\xi}_1 \sin 2\varphi_p)] \quad (22)$$

(φ_p — азимутальный угол вектора $\vec{p}_{1\perp}$).

2) Виртуальный позитрон (или электрон) испускает эквивалентные фотоны, число которых

$$dn_\gamma(\vec{q}_{1\perp}, \omega) = \frac{\alpha}{\pi^2} \frac{d^2 q_{1\perp}}{q_{1\perp}^2} \frac{d\omega}{\omega} \quad (23)$$

Эти фотоны полностью линейно поляризованы, их вектор поляризации равен $\vec{q}_{1\perp}/|\vec{q}_{1\perp}|$.

3) Эквивалентные фотоны сталкиваются с реальным поляризованным фотоном k_1 и образуют $\mu^+\mu^-$ пару; сечение этого процесса дается формулой (2I).

В итоге, сечение $d\sigma_a$ (9) можно в области (I8) представить в виде

$$d\sigma_a = [dn_{e^+}(-\vec{p}_{3\perp}, y_2) + dn_{e^-}(-\vec{p}_{4\perp}, y_1)] dn_\gamma(\vec{q}_{1\perp}, \omega) d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-}(\vec{p}_{1\perp}, x_1, \omega_1) \quad (24)$$

Отметим, что до выполнения азимутальных усреднений поляризационные эффекты могут быть велики. Так, относительный коэффициент при $\tilde{\xi}_3$ в dn_{e^+} равен $-2y_2(1-y_2)[1-2y_2(1-y_2)]^{-1} \cos 2\varphi_3$ и может достигать значений ± 1 .

2. Из сечения (24) легко получать самые разные распределения. Так, энергетические распределения можно получить, интегрируя dn_{e^\pm} по $\vec{p}_{3,4\perp}$ в области (I3), а $d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-}$ по $\vec{p}_{1\perp}$ и далее $d\sigma_a$ по $\vec{q}_{1\perp}$ в области $m_e \ll q_{1\perp} \ll m_\mu$:

$$d\sigma_a = \frac{\alpha^4}{\pi m_\mu^2} \left[1 - \frac{4}{3} x_1(1-x_1)\right] [1 - 2y_1(1-y_1)]^2 dx_1 dy_1. \quad (25)$$

Сравнение полученного отсюда полного сечения с (1а) позволяет оценить, что точность старшего логарифмического приближения равна примерно 30%.

Аналогично, подставляя в (24) $n_{e^+} + n_{e^-} = \frac{2\alpha}{3\pi} \ln(q_{\perp}^2/m_e^2)$, получим дважды инклюзивное сечение

$$d\sigma_a = \frac{4\alpha^4}{3\pi^3} (1-2x_1x_2G) \frac{d^2p_{1\perp} dx_1 d^2p_{2\perp} dx_2}{\vec{q}_{\perp}^2 (\vec{p}_{1\perp}^2 + m_{\mu}^2)^2} \ln \frac{\vec{q}_{\perp}^2}{m_e^2} \delta(x_1+x_2-1) \quad (26)$$

Характерной особенностью этого сечения является острый пик при малых значениях суммарного поперечного импульса пары q_{\perp} . Из (26) видно, что в данном приближении мюны "помнят" только поляризацию "своего" фотона.

3. Одним из следствий малости q_{\perp} по сравнению с $p_{1,2\perp}$ является характерное острое распределение по углу раскомпланарности ψ - углу между вектором $\vec{p}_{1\perp}$ и $(-\vec{p}_{2\perp})$. Ситуация в этом отношении очень близка к случаю рождения пары частиц эквивалентными фотонами в e^+e^- -соударениях (см. [15], раздел 5.6). Повторяя выкладки указанного раздела, получим из (26) в логарифмическом приближении (при $|\psi| \gg m_e/p_{1\perp}$)

$$d\sigma_a = \frac{2\alpha^4}{3\pi} \left[1 - 2x_1(1-x_1) \frac{p_{1\perp}^2 + m_{\mu}^2}{(\vec{p}_{1\perp}^2 + m_{\mu}^2)^2} \right] \frac{d\psi d\vec{p}_{1\perp}^2 dx_1}{|\sin \frac{\psi}{2}| (\vec{p}_{1\perp}^2 + m_{\mu}^2)^2} \ln \frac{4\vec{p}_{1\perp}^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{m_e^2} \quad (27)$$

4. Инклюзивное по μ^- сечение получим, интегрируя (26) по \vec{q}_{\perp} в области $m_e^2 \ll q_{\perp}^2 \ll p_{1\perp}^2 + m_{\mu}^2$. При усреднении функции G (I2в) по азимутальному углу вектора q_{\perp} она сильно упрощается (ср. (I2в))

$$\langle G \rangle = \int G \frac{d\psi}{2\pi} = \frac{1+p^2 - 2p l_1 \cos 2\psi_1}{(1+p)^2} \quad (28)$$

В итоге

$$d\sigma_a = \frac{2\alpha^4}{3\pi^2} \left[1 - 2x_1(1-x_1) \langle G \rangle \right] \frac{d^2p_{1\perp} dx_1}{(\vec{p}_{1\perp}^2 + m_{\mu}^2)^2} \left(\ln \frac{\vec{p}_{1\perp}^2 + m_{\mu}^2}{m_e^2} \right)^2 \quad (29)$$

Величина поляризационных эффектов определяется относительным коэффициентом при $l_1 \cos 2\psi_1$, который есть $4x_1(1-x_1)p \cdot [(1+p)^2 - 2x_1(1-x_1)(1+p^2)]^{-1}$ и имеет равный 1/3 максимум при $p_{1\perp} = m_{\mu}$ и

$x_1 = 1/2$. При $p_{1\perp} \gg m_{\mu}$ функция $\langle G \rangle \rightarrow 1$ и поляризационные эффекты исчезают.

5. Откажемся теперь от ограничения (I8) и рассмотрим область очень больших $p_{1\perp} \gg m_{\mu}$, требуя лишь, чтобы $p_{1\perp} \ll \sqrt{s}$. И при этих условиях остается справедливым утверждение о том, что области (I3), (I9) дают логарифмически большой вклад. Но теперь возникает и новая область, в которой мюонная пара ведет себя подобно электронной, т.е. имеет резко несимметричное распределение, аналогичное (I3):

$$m_{\mu} \ll p_{1\perp} \ll p_{2\perp} \approx q_{\perp}, \quad (30a)$$

$$m_{\mu} \ll p_{2\perp} \ll p_{1\perp} \approx q_{\perp}. \quad (30b)$$

Соответствующие подпроцессы теперь выглядят так: 1) тот же, что и раньше. 2) Фотон k_1 порождает $dn_{\mu^+}(-\vec{p}_{1\perp}, x_2)$ виртуальных μ^+ или $dn_{\mu^-}(-\vec{p}_{2\perp}, x_1)$ виртуальных μ^- , поперечные импульсы которых малы по сравнению с q_{\perp} . Число виртуальных мюонов есть (ср. (22))

$$dn_{\mu^{\pm}}(\vec{p}_{\perp}, x) = \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{d^2p_{\perp} dx}{\vec{p}_{\perp}^2} \left[1 - 2x(1-x)(1 \pm \xi_2 \cos 2\psi_p - \xi_1 \sin 2\psi_p) \right]. \quad (31)$$

3) Виртуальные μ^{\pm} сталкиваются с виртуальными e^{\pm} и приобретают большой поперечный импульс, примерно равный q_{\perp} . Сечение этого процесса

$$d\sigma_{\mu e \rightarrow \mu e} = \frac{4\alpha^2}{q_{\perp}^4} d^2q_{\perp}. \quad (32)$$

В итоге, сечение $d\sigma_a$ состоит из двух вкладов

$$d\sigma_a = d\sigma_a^I + d\sigma_a^{II} \quad (33)$$

где $d\sigma_a^I$ - это прежний вклад (24) из областей (I3) и (I9), а $d\sigma_a^{II}$ - новый вклад из областей (I3) и (30)

$$d\sigma_a^{II} = [dn_{\mu^+}(-\vec{p}_{1\perp}, x_2) + dn_{\mu^-}(-\vec{p}_{2\perp}, x_1)] \cdot d\sigma_{\mu e \rightarrow \mu e}(q_{\perp}) \cdot [dn_{e^+}(-\vec{p}_{2\perp}, y_2) + dn_{e^-}(-\vec{p}_{1\perp}, y_1)]. \quad (34)$$

В частности, инклюзивное по μ^- сечение $d\sigma_a^{II}$ возникает из областей (I3) и (30b), в которых $\vec{p}_{1\perp} \approx \vec{q}_{\perp}$,

$$d\sigma_a = dn_{\mu^-(x_1)} (n_{e^+} + n_{e^-}) d\sigma_{\mu e \rightarrow \mu e}(\vec{p}_{1L}) =$$

$$= \frac{4\alpha^4}{3\pi^2} [1 - 2x_1(1-x_1)] \frac{d^2 p_{1L} dx_1}{p_{1L}^4} \ln \frac{p_{1L}^2}{m_e^2} \ln \frac{p_{1L}^2}{m_\mu^2}; \quad p_{1L} \approx p_{2L} \gg m_\mu. \quad (35)$$

Сечение (35) сравнивается с сечением (29) лишь при $2 \ln(p_{1L}^2/m_e^2) \approx \ln(p_{1L}^2/m_\mu^2)$, т.е. при $p_{1L} \sim m_\mu^2/m_e$. При меньших p_{1L} сечение (35) мало, отсюда и получаем ограничение (18).

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ РЕАКЦИИ $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^- e^+e^-$

Чтобы получить энергетические спектры мюонов и электронов, подставим в (9) выражения (15) и проведем интегрирование по \vec{q}_1 . При этом возникают интегралы вида

$$J_{ij} = \int_0^\infty \frac{d^t}{z} F_i(t) F_j\left(\frac{m_\mu}{m_e} z\right), \quad i, j = 1, 2, \quad (36)$$

которые уже были вычислены в [10]:

$$a = J_{11} = \frac{1}{8} L^2 + \frac{1}{2} L + 1 = 20,5; \quad L = \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} = 10,66;$$

$$b = J_{21} = \frac{1}{6} L^2 + \frac{13}{18} L + \frac{40}{27} = 28,1;$$

$$c = J_{12} = \frac{1}{4} L^2 + \frac{1}{2} L + 2 = 35,8;$$

$$d = J_{22} = \frac{1}{3} L^2 + \frac{7}{9} L + \frac{77}{27} = 49,0.$$

Относительный порядок отброшенных при вычислении J_{ij} членов есть m_e^2/m_μ^2 . В итоге получаем

$$d\sigma_a = \frac{8\alpha^4}{\pi m_\mu^2} \left[a - x_1 x_2 b - y_1 y_2 c + x_1 x_2 y_1 y_2 (d + f \Sigma_-) \right] \cdot$$

$$\delta(x_1 + x_2 - 1) \delta(y_1 + y_2 - 1) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2;$$

$$f = 2a - b - c + \frac{1}{2} d = \frac{1}{6} L - \frac{1}{18} = 1,72,$$

где Σ_- определено в (6). Видно, что вклад слагаемого, пропорционального Σ_- мал ($\leq 1,4\%$) (как и ожидалось, см (17), (25)).

Интегрируя по $y_{1,2}$ получим энергетические спектры мюонов, летящих вдоль направления движения первого фотона.

$$d\sigma_a = \frac{8\alpha^4}{\pi m_\mu^2} \left[a - \frac{1}{6} b - x_1 x_2 (b - \frac{1}{6} d - \frac{1}{6} f \Sigma_-) \right] \delta(x_1 + x_2 - 1) dx_1 dx_2. \quad (39a)$$

Добавляя вклад $d\sigma_b$, получим окончательно

$$\frac{d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \mu\mu ee}}{d\varepsilon_1 d\varepsilon_2} = 3,68 \cdot 10^{-33} \text{ см}^2 \left\{ \left[1 - 1,37 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\omega_1^2} (1 - 0,014 \Sigma_-) \right] \cdot \right.$$

$$\left. \frac{\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega_1)}{\omega_1} + (\omega_1 \rightarrow \omega_2) \right\}. \quad (39b)$$

Полное сечение процесса (I) получим, интегрируя (39a) по $x_{1,2}$ и добавляя $\sigma_b = \sigma_a$ (ср. (1a)):

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^- e^+e^-} = 2\sigma_a = \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^- e^+e^-}^{\text{инкл}} + \frac{2\alpha^4}{27\pi m_\mu^2} (L - \frac{1}{3}) \Sigma_-. \quad (40)$$

Сечение (40) в два раза больше полученного в [II]. Это различие обусловлено так, что в [II] учтен только вклад σ_a и пропущен вклад σ_b .

При $\Sigma_- = 0$ наши формулы (38-40) совпадают с соответствующими формулами из [9, 10].

5. ИНКЛЮЗИВНЫЕ СЕЧЕНИЯ $d\sigma/d^3p_1, d^3p_2$ И $d\sigma/d^3p_1$ ДЛЯ ПРОЦЕССА $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^- e^+e^-$

I. Инклюзивное по обоим мюонам сечение можно получить, подставляя в (9) вместо $d\sigma, ds_1/s_1$ выражение (10a), а вместо $d\sigma_2, ds_2/s_2$ выражение (15b) и интегрируя по $\vec{q}_2, y_{1,2}$:

$$d\sigma_a = \frac{2\alpha^4}{3\pi^3} (1 - 2x_1 x_2 G) \frac{\delta(x_1 + x_2 - 1) d^2 p_{1L} dx_1 d^2 p_{2L} dx_2}{(\vec{p}_{1L} + \vec{p}_{2L})^2 (\vec{p}_{1L}^2 + m_\mu^2) (\vec{p}_{2L}^2 + m_\mu^2)} \cdot$$

$$\cdot [6\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 - (2\vec{F}_1 - \vec{F}_2) (\vec{\xi}_3 \cos 2\varphi_2 - \vec{\xi}_1 \sin 2\varphi_2)].$$

Видно, что распределение по x_i — гладкое, а распределение по поперечным импульсам имеет острый пик при малых значениях $\vec{q}_1 = \vec{p}_{1L} + \vec{p}_{2L}$ — суммарного поперечного импульса мюонов (см. обсуждение в пункте 3.2 и 3.3).

2. Интегрируя (4I) по $\vec{q}_{1\perp}$ и x_2 , получим инклюзивное по μ^- сечение (см. приложение B)

$$d\sigma_a = \frac{2\alpha^4}{3\pi^2} \mathcal{J} \frac{d^2 p_{1\perp} dx_1}{m_\mu^4}; \quad \mathcal{J} = F_0 + F_3 \Sigma_3 + F_- \Sigma_- + F_+ \Sigma_+ + \tilde{F}_3 \tilde{\Sigma}_3. \quad (42a)$$

Здесь комбинации параметров Стокса фотонов определены соотношениями (см. также (6) и рис.2)

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \xi_3 \cos 2\varphi_1 + \xi_1 \sin 2\varphi_1 = l_1 \cos 2\gamma_1, \\ \Sigma_- &= \xi_3 \tilde{\xi}_3 - \xi_1 \tilde{\xi}_1 = l_1 l_2 \cos 2(\delta_1 - \delta_2), \\ \Sigma_+ &= (\xi_3 \tilde{\xi}_3 + \xi_1 \tilde{\xi}_1) \cos 4\varphi_1 + (\xi_1 \tilde{\xi}_3 - \xi_3 \tilde{\xi}_1) \sin 4\varphi_1 = l_1 l_2 \cos 2(\gamma_1 + \delta_2), \\ \tilde{\Sigma}_3 &= \tilde{\xi}_3 \cos 2\varphi_1 - \tilde{\xi}_1 \sin 2\varphi_1 = l_2 \cos 2\gamma_2, \end{aligned} \quad (42b)$$

где φ_1 - азимутальный угол μ^- , а γ_1 (δ_2) - угол между вектором $\vec{p}_{1\perp}$ и направлением максимальной линейной поляризации первого (второго) фотона. Для записи входящих в \mathcal{J} функций определим

$$p = \frac{p_{1\perp}^2}{m_\mu^2}, \quad \ell = \ln(1+p), \quad L = \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2}, \quad (42c)$$

$$R = L^2 + 2(2L+1)\ell + L + 4\ell^2 - 2 \int_0^p \frac{dx}{x} \ln(1+x) + \frac{\pi^2}{3} - 2,$$

тогда

$$F_0 = \frac{R}{(1+p)^2} - \frac{2x_1(1-x_1)}{(1+p)^4} \left[(1+p)^2 R - (2L+1)(p^2 - 4p + 1) - 2\ell(p^2 - 8p + 3) - 4p \right],$$

$$F_3 = p \frac{4x_1(1-x_1)}{(1+p)^4} \left[R - 6L - 3 + \frac{\ell}{p^2} (1 + 4p - 9p^2) - \frac{1}{p} - p \right],$$

$$F_- = \frac{x_1(1-x_1)}{(1+p)^4} \left(L + 2\ell - 3 + 3p + \frac{1}{2}p^2 \right), \quad (42d)$$

$$F_+ = \frac{x_1(1-x_1)}{(1+p)^4} \left[p^2(L-3) + \frac{1}{2} + 8p + \frac{3}{p} - \ell \left(\frac{3}{p^2} + \frac{10}{p} + 12 + 6p - p^2 \right) \right],$$

$$\tilde{F}_3 = -\frac{\ell(1+p) - p}{p(1+p)^2} - \frac{x_1(1-x_1)}{(1+p)^4} \left[2pL + 4p^2 - 5p + 2 - 2\ell \left(\frac{1}{p} + 3 + p + p^2 \right) \right].$$

Зависимость инклюзивного сечения (42) от параметров Стокса "чужого" фотона $\tilde{\xi}_i$ определяется отношениями F_\pm/F_0 и \tilde{F}_3/F_0 . Как и ожидалось (см. (17) и (29)), эти отношения оказались всюду малы (< 3%). Напротив, зависимость от поляризации "своего" фотона вполне заметна. На рис.3 даны графики функций F_0 , F_3 и отношения F_3/F_0 . Отметим, что

$$\max(F_3/F_0) = 0,19 \text{ при } p = 1,2, \quad x_1 = 1/2 \quad (43)$$

В старшем логарифмическом приближении

$$\mathcal{J} = \frac{L^2 + 4L\ell + 3\ell^2}{(1+p)^2} \left[1 - \frac{2x_1(1-x_1)}{(1+p)^2} (1+p^2 - 2p\Sigma_3) \right], \quad p \gg 1, \quad (44)$$

что совпадает с суммой вкладов (29) и (35).

3. Специальный интерес может представлять доля δ таких событий, когда μ^- вылетает с поперечным импульсом большим некоторого минимального

$$\delta(p_0, x_1) = \frac{\int_{p_0}^{\infty} F_0 dp}{\int_0^{\infty} F_0 dp}, \quad p_0 = \left(\frac{p_{1\perp}^2}{m_\mu^2} \right)_{\min} \quad (45)$$

График этой функции представлен на рис.4. Отметим, что зависимость этой функции от x довольно слабая и, что при больших $p_0 \gg 1$ она падает по закону $1/p_0$:

$$\int_{p_0}^{\infty} F_0 dp = \frac{1}{p_0} \left\{ [1 - 2x_1(1-x_1)] [L^2 + L(4\ell_0 + 5) + 3\ell_0^2 + 8\ell_0 + 6] + 2x_1(1-x_1)(2L + 2\ell_0 + 3) \right\}; \quad \ell_0 = \ln p_0; \quad p_0 \gg 1; \quad (46)$$

$$\int_0^{\infty} F_0 dp = L^2 + 5L + 8 - x_1(1-x_1) \left(\frac{4}{3}L^2 + \frac{64}{9}L + \frac{326}{27} \right) \approx 175 - 239 x_1(1-x_1).$$

6. РЕАКЦИЯ $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-e^+e^-$

I. Рассмотрение этой реакции проводится по той же схеме, что и для реакции (I). Основной вклад в сечение дают две блочные диаграммы рис. 1а, в которых мюонные линии должны быть заменены на электронные. Учет тождественности электронов приводит к тому, что в отличие от (8) сечение рассматриваемого процесса есть

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-e^+e^-} = \frac{1}{2!} (d\sigma_a + d\sigma_b) = d\sigma_a. \quad (47)$$

Полностью дифференциальное сечение этого процесса определяется формулами (9-10), в которых всюду надо произвести естественную замену $m_\mu \rightarrow m_e$.

Энергетические распределения определяются формулами (38) и (39а), в которых

$$a = \frac{7}{8} \zeta(3) = 1,05; \quad b = c = a + \frac{1}{2} = 1,55; \quad d = a + \frac{5}{4} = 2,30; \quad (48)$$

$$f = \frac{1}{2}a - \frac{3}{8} = 0,151; \quad \zeta(3) = 1,202.$$

При $\Sigma_- = 0$ эти распределения совпадают с полученными в работе [8]. Отметим, что вклад слагаемого пропорционального Σ_- мал ($\leq 2,2\%$).

Интегрируя (39а) по $x_{1,2}$, получим полное сечение

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-e^+e^-} = \frac{\alpha^4}{\pi m_e^2} \left\{ \frac{175}{36} \zeta(3) - \frac{19}{18} + \left[\frac{7}{72} \zeta(3) - \frac{1}{12} \right] \Sigma_- \right\} = \quad (49)$$

$$= 6,4 (1 + 0,007 \Sigma_-) \cdot 10^{-30} \text{ см}^2.$$

Этот результат совпадает с результатом, найденным другим способом в [12]. Основной вклад в сечение дает область $q_{\perp} \sim m_e$, в которой нет параметрического (типа $1/\ln(m_\mu^2/m_e^2)$) для реакции (I) подавления зависящих от параметров Стокса слагаемых, однако есть численная малость $\sim (1/4)^2 \langle \cos^2 2\varphi_2 \rangle \sim 3\%$ (ср. (I6а) и (I7)).

2. Сечение, инклюзивное по e^\pm , летящим вдоль импульса первого фотона определяется формулой (4I) с заменой $m_\mu \rightarrow m_e$. Из нее видно, что основной вклад в полное сечение происходит из области $p_{1\perp} \sim p_{2\perp} \sim m_e$, в которой, повидимому, трудно регистрировать частицы. При $p_{1\perp} \gg m_e$ основной вклад дают две сущест-

венно различных кинематических области (I9) и (30), обсуждавшиеся в 3 разделе. Качественная картина соответствует тому, что оба слагаемых $d\sigma_a^I$ и $d\sigma_a^{II}$ (33) дают примерно одинаковые вклады.

Инклюзивное сечение $d\sigma/d^3p_1$ при $p_{1\perp} \gg m_e$ можно получить из сечения (42), если рассмотреть в нем предел $p_{1\perp} \gg m_\mu$, а затем сделать замену $m_\mu \rightarrow m_e$. В итоге получаем

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-e^+e^-} = \frac{2d^4}{3\pi^2} \int \frac{d^2p_{1\perp} dx_1}{p_{1\perp}^4}; \quad \mathcal{J} = F_0 + F_3 \Sigma_3 + F_- \Sigma_- + F_+ \Sigma_+ + \tilde{F}_3 \tilde{\Sigma}_3, \quad (50a)$$

где комбинации параметров Стокса определены в (42в), а

$$F_0 = 3\ell^2 + 2\ell - 2 - 6x_1(1-x_1)(\ell^2 - 1), \quad F_3 = -4x_1(1-x_1),$$

$$F_- = \frac{1}{2} x_1(1-x_1), \quad F_+ = x_1(1-x_1)(\ell - 3), \quad (50b)$$

$$\tilde{F}_3 = -\ell + 1 + 2x_1(1-x_1)(\ell - 2),$$

$$\ell = \ln(p_{1\perp}^2/m_e^2), \quad p_{1\perp} \gg m_e.$$

Сечение с $p_{1\perp} > p_{1\perp \min}$ получается отсюда простым интегрированием

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-e^+e^-} = \frac{2d^4}{3\pi^2} \frac{dx_1}{p_{1\perp \min}^2} \left[3\ell_0^2 + 8\ell_0 + 6 - 6x_1(1-x_1)(\ell_0 + 1)^2 + \right. \quad (51)$$

$$\left. + \frac{1}{2} x_1(1-x_1) \Sigma_- \right], \quad \ell_0 = \ln(p_{1\perp \min}^2/m_e^2).$$

3. Интересно сравнить инклюзивные сечения образования e^- и μ^- , летящих вдоль направления движения первого фотона. Отношение числа e^- к числу μ^- задается отношением функции F_0 из (50б) к функции F_0^2 из (42д) и представлено на рис. 5. При $p_{1\perp} = m_\mu$ электронов в 7-9 раз больше, чем мюонов, а при $p_{1\perp}^2 = 10m_\mu^2$ это отношение уменьшается до величины 2+3. Это превышение связано с тем, что область (30) еще не дает вклада в сечение образования мюонов.

7. РЕАКЦИЯ $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^-$

I. Мы ожидаем, что истинное (с учетом сильного взаимодействия) сечение процесса $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^+\pi^-$ (γ^* - виртуальный фотон) должно падать с ростом инвариантной массы $\gamma\gamma^*$ - системы и виртуальности фотона $q^2 \approx -\vec{q}_L^2$. Поэтому соотношения (8), (9) будут выполняться с высокой точностью и для реакции (3), если под $d\sigma_1$ подразумевать истинное сечение $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^+\pi^-$ процесса. Известно [16], что на массовой поверхности сечение процесса $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$ хорошо описывается борновским приближением (точечные пионы) от порога до значений инвариантных масс $m_{\pi\pi}$ порядка m_p . Масштаб изменения этого сечения с ростом $-q^2$ должен быть порядка m_p^2 (модель векторной доминантности). В квантовой электродинамике этот масштаб $m_{\pi\pi}^2$. Поэтому в области импульсов π^\pm мезонов таких, что их инвариантная масса меньше m_p , а $\vec{q}_L^2 < s_1$, борновское приближение хорошо описывает реакцию (3). Поэтому расчеты дифференциального сечения реакции (3) в борновском приближении для этой области являются вполне обоснованными. В то же время наблюдение этой реакции, повидимому, очень затруднено из-за большого фона от процессов $\gamma\gamma \rightarrow$ адроны с большим сечением $\sim 3 \cdot 10^{-31} \text{ см}^2 \sim 10^3 \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi}$.

Полное сечение реакции (3) определяется интегралом $\int (\sigma_1/s_1) ds_1$, в котором борновский вклад может иметь смысл нижней оценки (впрочем, быть может не плохой - из-за быстрого падения σ_1/s_1 с ростом s_1).

2. В борновском приближении вместо (10а) имеем

$$\frac{d\sigma_1 ds_1}{s_1} = 2\alpha^2 x_1 x_2 G \frac{d^2 p_{1L} dx_1 d^2 p_{2L} dx_2}{(\vec{p}_{1L}^2 + m_\pi^2)(\vec{p}_{2L}^2 + m_\pi^2)} \delta(\vec{p}_{1L} + \vec{p}_{2L} - \vec{q}_L) \delta(x_1 + x_2 - 1), \quad (52)$$

где функция G та же, что и в (10а) с заменой $m_\mu \rightarrow m_\pi$. Самым важным отличием от (10а) является другая зависимость от x_i . Сечение (52) обращается в нуль при $x_1 \rightarrow 0$ и $x_1 \rightarrow 1$ и имеет максимум при $x_1 = x_2 = 1/2$. Легко видеть, что все остальные формулы для реакции (3) могут быть получены из соответствующих формул для реакции (I), если в последних отбросить слагаемые не пропорциональные множителю $x_1 x_2$ и результат умножить на $(-1/2)$ (с заменой $m_\mu \rightarrow m_\pi$). В частности, из (39а) получим спектры пионов (см. рис. 6):

$$d\sigma_a = \frac{4\alpha^4}{\pi m_\pi^2} x_1 x_2 \left(\beta - \frac{1}{6} d - \frac{1}{6} f \Sigma_- \right) \delta(x_1 + x_2 - 1) dx_1 dx_2. \quad (53)$$

Полное сечение реакции (3) получим, интегрируя (53) по $x_{1,2}$ и добавляя $\sigma_b = \sigma_a$ (см. (8)):

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^-}^{\text{Born}} &= 2\sigma_a = \frac{4\alpha^4}{2\pi m_\pi^2} \left[L^2 + \frac{16}{3} L + \frac{163}{18} - \frac{1}{12} (3L-1) \Sigma_- \right] = \quad (54) \\ &= 0,52 (1 - 0,014 \Sigma_-) \cdot 10^{-33} \text{ см}^2; \quad L = \ln(m_\pi^2/m_e^2). \end{aligned}$$

Сечение (54) отличается от полученного в [14] общим множителем 2 и знаком перед Σ_- . Первое различие связано с тем, что в [14] учтен только вклад σ_a и пропущен вклад σ_b , второе, как видно из формул, приведенных в [14], повидимому, является опечаткой.

Поляризационные эффекты в полном сечении очень малы. Однако, в инклюзивном сечении они оказываются даже больше, чем в случае реакции (I). Это сечение определяется формулами (42) с указанными заменами. Как и для реакции (I) отношения F_\pm/F_0 и \tilde{F}_3/F_0 малы ($< 4\%$). График отношения $(-F_3/F_0)$ дан на рис. 7, отметим, что для любых x_i

$$\max(-F_3/F_0) = 0,49 \text{ при } p_{1L} = m_\pi. \quad (55)$$

Мы благодарны И.Ф. Гинзбургу, А.П. Онучину, В.В. Серебрякову и В.И. Тельнову за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Амплитуду M , соответствующую диаграмме рис. 1а, можно представить в виде $M = M_1^\mu M_2^\nu g^{\mu\nu} / q^2$, где $M_{1,2}$ — амплитуда верхнего (нижнего) блока на рис. 1а, $(-g^{\mu\nu}/2)$ есть матрица плотности виртуального фотона. С точностью (7) эту матрицу можно преобразовать к виду (см. [17], § 4.8.3)

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \frac{2 k_2^\mu k_1^\nu}{s} \quad (\text{A.1})$$

или к виду

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \frac{2s}{s_1 s_2} q_\perp^\mu q_\perp^\nu. \quad (\text{A.2})$$

Отсюда видно, что виртуальный фотон полностью поляризован и его вектор поляризации $\vec{e}_\nu = \vec{q}_\perp / |\vec{q}_\perp|$. Используя (A.2), можно представить $d\sigma_\alpha$ в виде (9). Для расчета величин $d\sigma_{1,2}$ удобнее использовать (A.1) и преобразовать фазовый объем с помощью соотношения

$$\delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_2 d^3 p_4}{2 \varepsilon_2 2 \varepsilon_4} = \frac{d^2 q_\perp}{2 s x_2 x_4}.$$

Оставляя в $d\sigma_i$ лишь слагаемые конечные при $s \rightarrow \infty$, получим после суммирования по спиновым состояниям мюонов

$$\frac{d\sigma_i ds_i}{s_i} = \frac{|M_1^\mu k_2^\mu|^2 d^2 p_{1\perp} dx_1}{(4\pi)^2 q_\perp^2 s^2 x_1 (1-x_1)} = \quad (\text{A.3})$$

$$= 2\alpha^2 \left[\frac{\delta_{ij}}{(\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2)(\vec{p}_{2\perp}^2 + m_\mu^2)} - 4x_1(1-x_1) \frac{Q_i Q_j}{q_\perp^2} \right] e_i e_j^* d^2 p_{1\perp} dx_1,$$

$$Q_i = \frac{p_{1i}}{\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2} + \frac{p_{2i}}{\vec{p}_{2\perp}^2 + m_\mu^2},$$

где e_i — вектор поляризации первого фотона, причем индексы i, j отвечают лишь поперечным составляющим: $i, j = x, y$. Заменяя $e_i e_j^* \rightarrow \rho_{ij} = \frac{1}{2} [1 + \vec{\xi} \vec{\sigma}]_{ij}$, где $\vec{\sigma}$ — матрица Паули, получим (10а). При записи матрицы плотности для второго фотона следует учесть, что выбранная нами система отсчета совпадает с естественной для определения параметров Стокса $\vec{\xi}_i$ второго фотона

при отражении y и z осей, поэтому для второго фотона

$$\tilde{\rho}_{ij} = \frac{1}{2} [1 - \tilde{\xi}_1 \sigma_x - \tilde{\xi}_2 \sigma_y + \tilde{\xi}_3 \sigma_z]_{ij}.$$

При интегрировании (A.3) по $\vec{p}_{1\perp}$ возникают следующие интегралы

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 p_{1\perp}}{(\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2)(\vec{p}_{2\perp}^2 + m_\mu^2)} = \frac{4}{q_\perp^2} F_1; \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{\pi} \int Q_i Q_j d^2 p_{1\perp} = 2 \delta_{ij} (F_2 - F_1) + 2 \frac{q_i q_j}{q_\perp^2} (2F_1 - F_2),$$

где функции $F_{1,2}$ определены в (15).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В этом приложении мы покажем, как вычисляется функция \mathcal{J} (42). При этом мы будем использовать обозначения (42в) и (42с) и удобную систему отсчета с осью x вдоль вектора $\vec{p}_{1\perp}$. В этой системе определим безразмерные двумерные вектора

$$\vec{p} = \vec{p}_{1\perp}/m_\mu = (p, 0); \quad \vec{q} = \vec{q}_{1\perp}/m_\mu = (q \cos \varphi, q \sin \varphi)$$

и обозначим

$$A = (\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2)/m_\mu^2 = 1+p^2; \quad B = (\vec{q}_{1\perp}^2 + m_\mu^2)/m_\mu^2 = (q-p)^2 + 1$$

Тогда из (41), (42а) имеем

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 q}{q^2} \left\{ \frac{1}{AB} - \frac{2}{q^2} x_1(1-x_1) m_\mu^2 [\vec{Q}^2 + (Q_x^2 - Q_y^2) \xi_3 + 2Q_x Q_y \xi_1] \right. \\ \left. \cdot [f_1 - f_2 (\tilde{\xi}_3 \cos 2\varphi - \tilde{\xi}_1 \sin 2\varphi)] \right\}, \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{Q}^2 = \frac{q^2}{A^2 B^2 m_\mu^2} [1 + q^4 + p^2 q^2 + 2pq(1-p^2) \cos \varphi - 2p^2 \cos 2\varphi],$$

$$Q_x^2 - Q_y^2 = \frac{q^2}{A^2 B^2 m_\mu^2} [-2p^2 + p^2 q^2 + 2pq(1-p^2) \cos \varphi + (1+p^2) \cos 2\varphi],$$

$$2Q_x Q_y = \frac{q^2}{AB^2 m_\mu^2} [2pq \sin \varphi + (1-p^2) \sin 2\varphi],$$

$$f_i \equiv f_i \left(q \frac{m_\mu}{m_e} \right), \quad f_1(z) = \frac{4z^2 - 1}{2\sqrt{z^2 + 1}} \operatorname{Arsh} z + 1,$$

$$f_2(z) = 1 - \frac{\operatorname{Arsh} z}{2\sqrt{z^2 + 1}}.$$

Отметим, что

$$f_1 \rightarrow \begin{cases} \sim q^2, & q \ll m_e/m_\mu \\ 2L + 1 + 2L \ln q^2, & q \gg m_e/m_\mu \end{cases}; \quad f_2 \rightarrow \begin{cases} \sim q^2, & q \ll m_e/m_\mu \\ 1, & q \gg m_e/m_\mu. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

При замене $\varphi \rightarrow 2\pi - \varphi$ коэффициенты при ξ_1 и $\tilde{\xi}_1$ в (B.1) изменяют знак, а все остальные слагаемые не изменяются. Это означает, что после интегрирования по φ в ответ могут войти лишь следующие комбинации параметров Стокса: $\xi_3, \xi_3 \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_3, \xi_1 \tilde{\xi}_1$. Так как в избранной нами системе отсчета $\Sigma_3 = \xi_3, \tilde{\Sigma}_3 = \tilde{\xi}_3, \Sigma_\pm = \xi_3 \tilde{\xi}_3 - \xi_1 \tilde{\xi}_1$, то в итоге для \mathcal{J} мы получим представление (42а), в котором

$$F_0 = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 q}{q^2} \left[\frac{1}{AB} - \frac{2}{q^2} x_1(1-x_1) m_\mu^2 \vec{Q}_\perp^2 \right] \cdot f_1;$$

$$F_3 = -2 x_1(1-x_1) m_\mu^2 \int \frac{d^2 q}{\pi q^4} (Q_x^2 - Q_y^2) \cdot f_1;$$

$$F_- = \frac{x_1(1-x_1)}{A^2} \int \frac{d^2 q}{\pi q^2 B^2} [1 + p^2(q^2 - 2) \cos 2\varphi + 2pq(\cos \varphi - p^2 \cos 3\varphi) + p^4 \cos 4\varphi] \cdot f_2; \quad (\text{B.3})$$

$$F_+ = \frac{x_1(1-x_1)}{A^2} \int \frac{d^2 q}{\pi q^2 B^2} [p^4 + p^2(q^2 - 2) \cos 2\varphi + 2pq(\cos 3\varphi - p^2 \cos \varphi) + \cos 4\varphi] \cdot f_2;$$

$$\tilde{F}_3 = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 q}{q^2} \left\{ \frac{\cos 2\varphi}{AB} - \frac{2x_1(1-x_1)}{A^2 B^2} [-p^2(1 + \cos 4\varphi) + pq(1-p^2) \cdot (\cos \varphi + \cos 3\varphi) + (1 + p^2 q^2 + p^4) \cos 2\varphi] \right\} \cdot f_2.$$

Для определения этих функций необходимо вычислить 12 интегралов следующих двух типов:

$$C_{rs}^n = \frac{1}{\pi} \int \frac{q^n \cos n\varphi}{q^{2r} B^s} f_1 d^2 q; \quad E_{rs}^n = \frac{1}{\pi} \int \frac{q^n \cos n\varphi}{q^{2r} B^s} f_2 d^2 q. \quad (\text{B.4})$$

При вычислении этих интегралов мы отбрасывали малые слагаемые $\sim m_e^2 / (\vec{p}_{1\perp}^2 + m_\mu^2) = m_e^2 / A m_\mu^2$. В итоге необходимые для получения (42д) интегралы равны

$$E_{12}^1 = \frac{\sqrt{p}}{A}, E_{21}^2 = \frac{l}{p} - \frac{1}{A}, E_{22}^2 = \frac{p}{A^2}, E_{12}^2 = 1 - \frac{l}{p},$$

$$E_{22}^3 = \frac{2}{p^{3/2}} \left[-l + \frac{p(2+p)}{2A} \right], E_{32}^4 = -\frac{3l}{p^2} + \frac{1}{A^2} \left(\frac{3}{p} + \frac{g}{2} + p \right),$$

$$E_{q2}^0 = \frac{1}{A^2} (L - 3 + 2lp), C_{11}^0 = \frac{R}{A}, C_{12}^0 = \frac{1}{A^2} [R + (p-1)(2L+1) + 2l(p-3)],$$

$$C_{02}^0 = 2L+1+2l, C_{22}^2 = \frac{1}{A^2} [(2L+1)p + 2 - 2l(\frac{1}{p} + 2 - p)], \quad (B.5)$$

$$C_{12}^1 = \frac{\sqrt{p}}{A} [2L+1 - 2l(\frac{1}{p} - 1)].$$

Коротко поясним способ вычисления этих интегралов. Из определения (B.4) и свойств функции f_2 (B.2) видно, что первые шесть интегралов конечны при $m_e \rightarrow 0$, поэтому в них можно заменить $f_2 \rightarrow 1$, после чего они преобразуются к простому виду

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Re}[(q_x + iq_y)^n]}{(q^2)^s [(q^2 - p)^2 + 1]^s} d^2q = p^n \frac{(n+s-2)!}{(n-1)!(s-1)!} \int_0^1 \frac{\alpha^{n-1} (1-\alpha)^{n-2}}{(\alpha p^2 + 1)^{n+s-1}} d\alpha.$$

Подынтегральные функции остальных шести интегралов содержат логарифмические особенности при $m_e \rightarrow 0$. Для их вычисления удобно разбить область интегрирования по q^2 на два интервала:

$q^2 < \sigma$ и $q^2 > \sigma$, где $m_e^2 / Am_x^2 \ll \sigma \ll 1$. В первой области можно полагать $B = A$, после чего остается интеграл

$$\int_0^\sigma \frac{dq^2}{q^2} f_1 = (L + \ln \sigma)^2 + L + \ln \sigma - 2; \quad \int_0^\sigma \frac{dq^2}{q^2} f_2 = L + \ln \sigma - 2.$$

Во второй области можно вместо функции f_1 использовать ее асимптотику $f_1 \rightarrow 2L+1+2 \ln q^2$, что приводит к упрощению вычислений. В окончательном ответе параметр σ исчезает.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A.N.Skrinsky, Int.Seminar on Perspectives in High Energy Physics, Morges, Switzerland (1971).
- [2] V.E.Balakin, A.N.Skrinsky, preprint INP 81-129 Novosibirsk (1981).
- [3] P.Panofsky, Int.Symp. on Lepton and Photon Interaction at High Energies, Bonn (1981).
- [4] I.F.Ginzburg, G.L.Kotkin, V.G.Serbo, V.I.Telnov, preprint INP 81-50 Novosibirsk (1981); Eksp.Teor.Fiz. Pis'ma 34 (1981) 514.
- [5] I.F.Ginzburg, G.L.Kotkin, V.G.Serbo, V.I.Telnov, preprint INP 81-102 Novosibirsk (1981).
- [6] C.Akerlof, preprint UM HE 81-59 Ann Arbor (1981).
- [7] A.M.Kondratenko, E.V.Pakhtusova, E.L.Saldin, preprint INP 81-130 Novosibirsk (1981).
- [8] V.E.Baier, V.S.Fadin, V.A.Khoze, E.A.Kuraev, Physics Rep. 78 (1981) 293.
- [9] V.G.Serbo, Eksp.Teor.Fiz.Pis'ma 12 (1970) 50. 452.
- [10] S.L.Panfil, V.G.Serbo, preprint IAE 178 Novosibirsk (1982); Yad.Fiz. in print.
- [11] M.Masujima, Nucl.Phys. B24 (1970) 182.
- [12] H.Cheng, T.T.Wu, Phys.Rev. D1 (1970) 3414; L.N.Lipatov, G.V.Frolov, Sov.J.Nucl.Phys. 13 (1971) 333.
- [13] S.J.Brodsky, T. De Grand, J.Gunion, J.Weis, Phys.Rev. D19 (1978) 1418.
- [14] H.Cheng, T.T.Wu, Phys.Rev. D2 (1970) 2103.
- [15] V.M.Budnev, I.F.Ginzburg, G.V.Meledin, V.G.Serbo, Physics Rep. 15C (1975) 181.
- [16] V.M.Budnev, A.N.Vall, V.V.Serebryakov, Yad.Fiz. 21 (1975) 1033.
- [17] A.I.Achiezer, V.B.Berestecky, Quantum Electrodynamics, Nauka, Moscow (1981).

Подписи к рисункам:

Рис.2. Обозначения углов для инклюзивного сечения (42). Вектор $\vec{n}_1(\vec{n}_2)$ задает направление максимальной линейной поляризации первого (второго) фотона.

Рис.3. а) Зависимость F_0, F_3 (42) от поперечного импульса μ^- .
 в) Зависимость асимметрии $F_3/F_0 = (d\sigma_a'' - d\sigma_a^+) / (d\sigma_a'' + d\sigma_a^+)$ инклюзивного сечения реакции $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ от поперечного импульса μ^- ; $d\sigma_a''$ ($d\sigma_a^+$) отвечает случаю, когда направление максимальной поляризации первого фотона лежит в плоскости $\vec{p}_{\mu^-}, \vec{k}_1$ (перпендикулярно к ней).

Рис.4. Для мюонов с $p_{1\perp} > p_{1\perp \min}$ в зависимости от $p_{1\perp \min}^2 / m_\mu^2$ при $\chi_1 = 0$.

Рис.5. Сравнение инклюзивных сечений процессов $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-e^+e^-$ и $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ для случая неполяризованных фотонов.

Рис.6. Энергетический спектр пионов, летящих вдоль импульса первого фотона в реакции $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^-$.

Рис.7. Зависимость асимметрии $F_3/F_0 = (d\sigma_a'' - d\sigma_a^+) / (d\sigma_a'' + d\sigma_a^+)$ инклюзивного сечения реакции $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^-$ от поперечного импульса π^- ; $d\sigma_a''$ ($d\sigma_a^+$) отвечает случаю, когда направление максимальной поляризации первого фотона лежит в плоскости $\vec{p}_{\pi^-}, \vec{k}_1$ (перпендикулярно к ней).

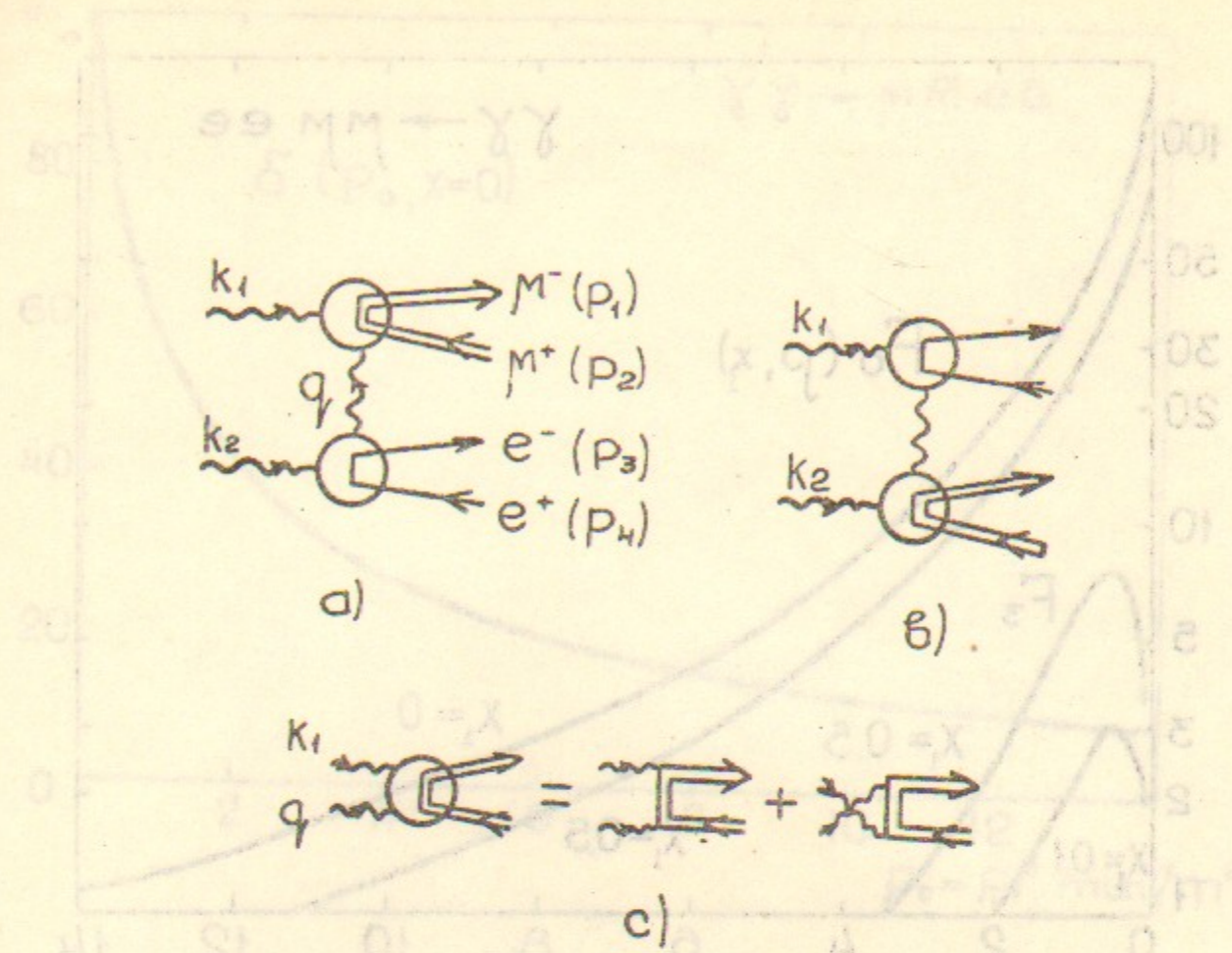


Fig. 1

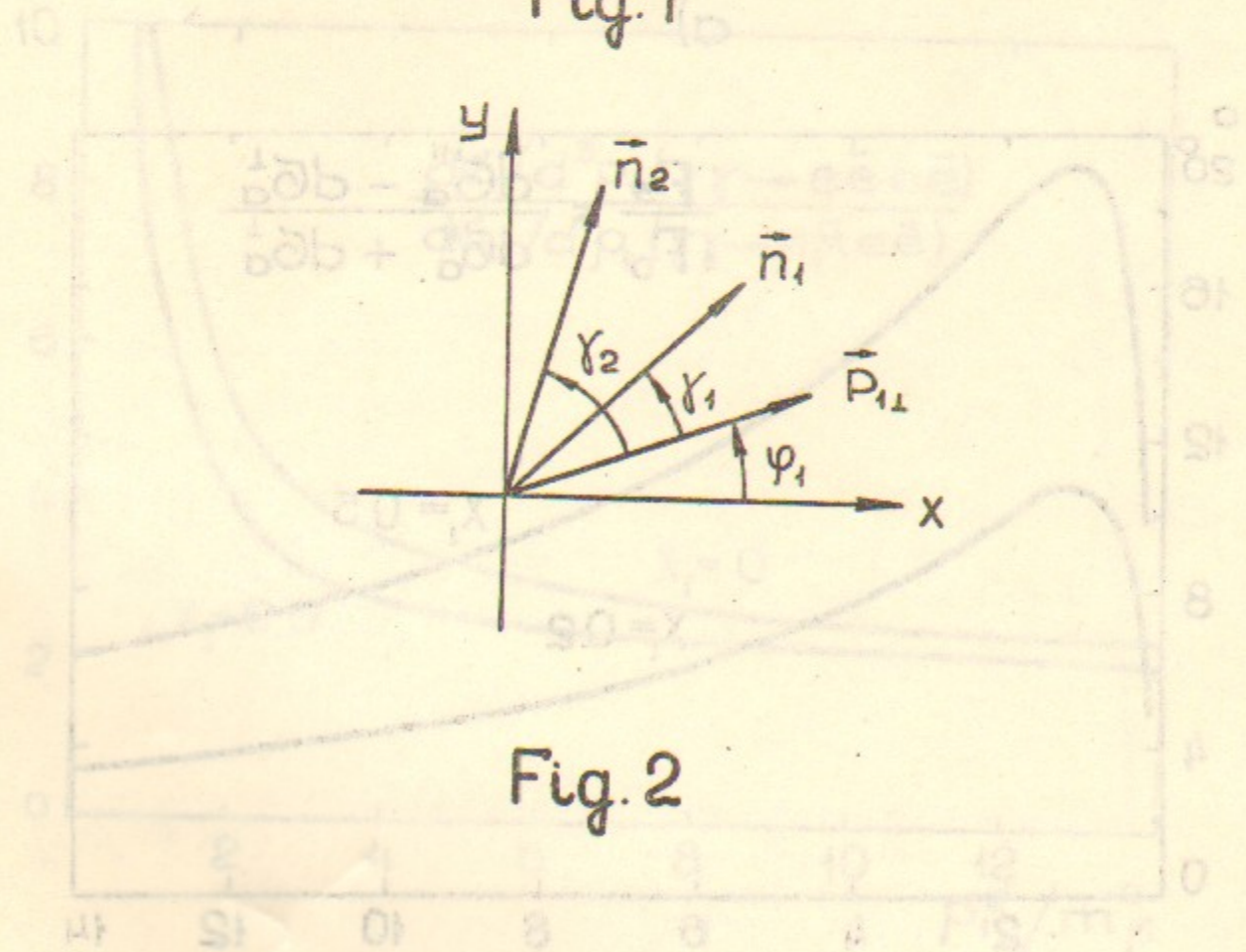
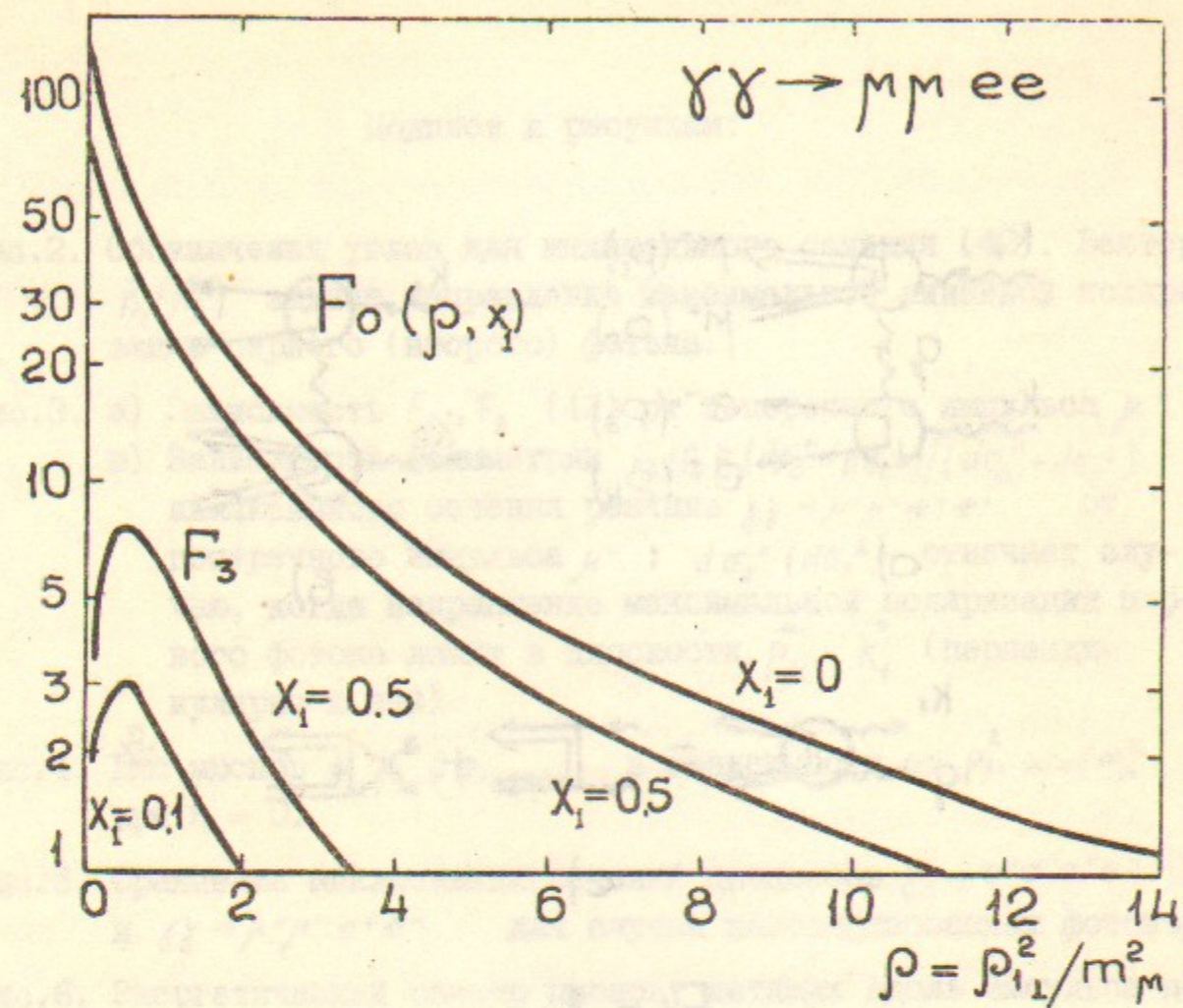
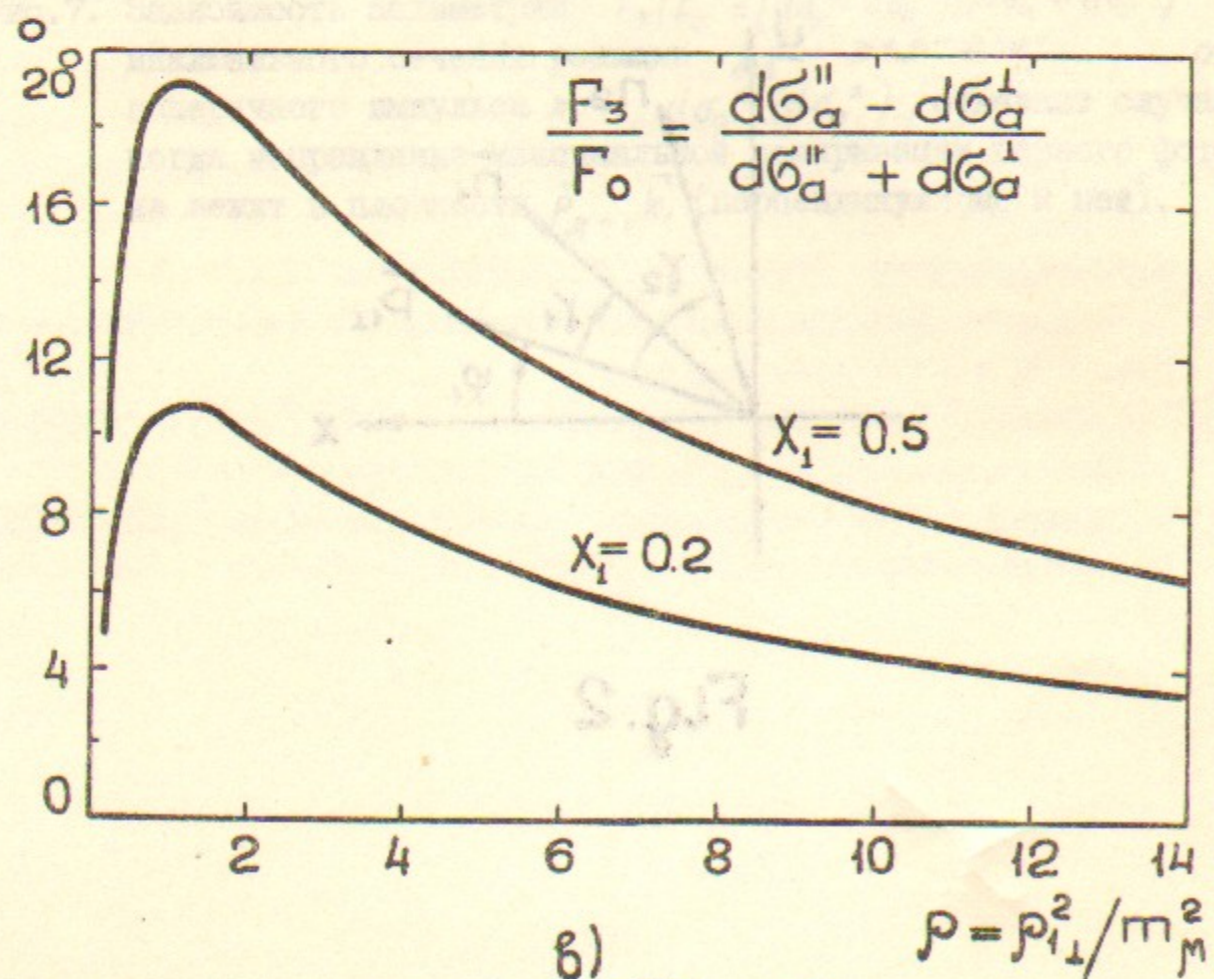


Fig. 2



a)



b)

Fig. 3

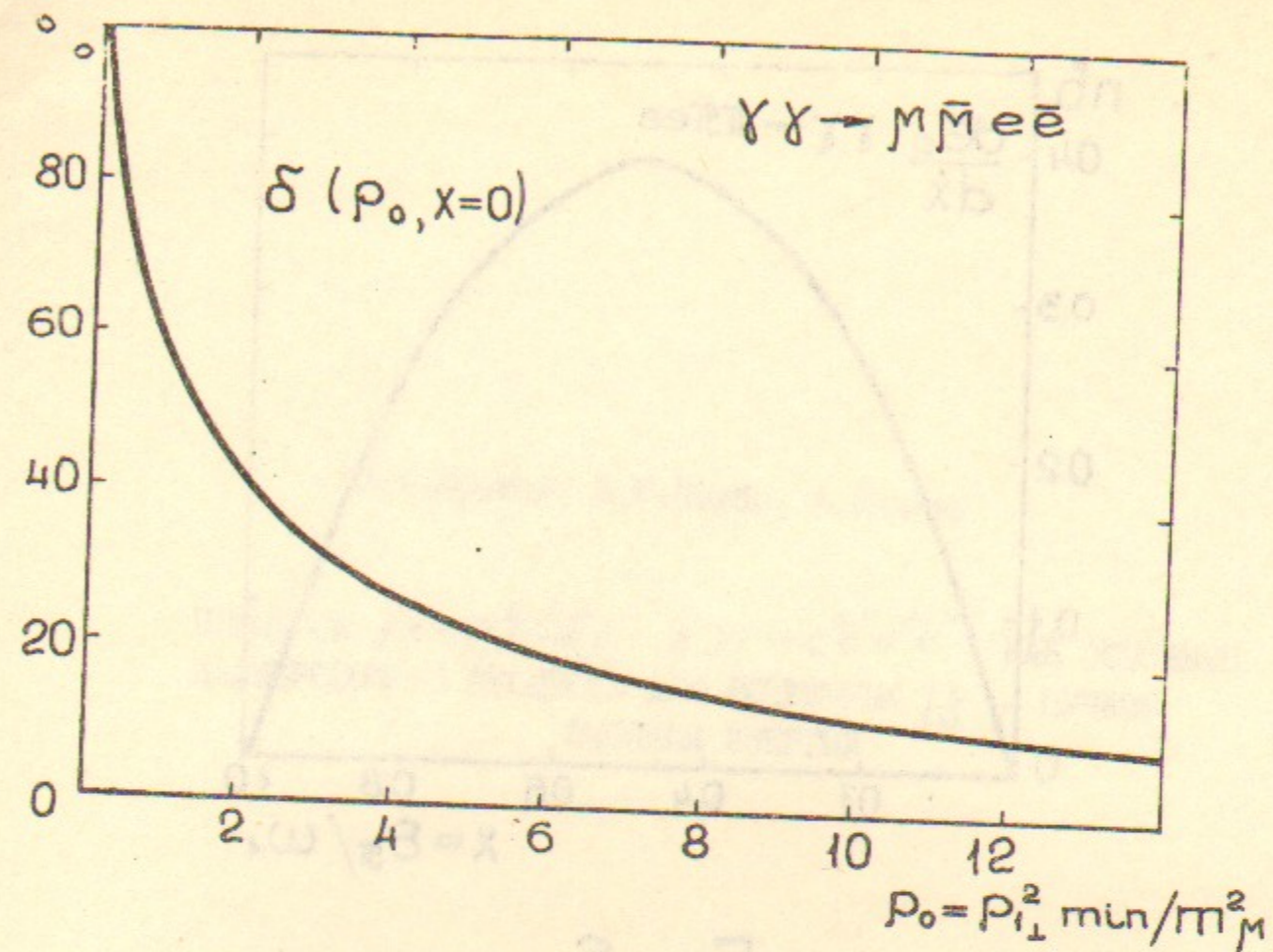


Fig. 4

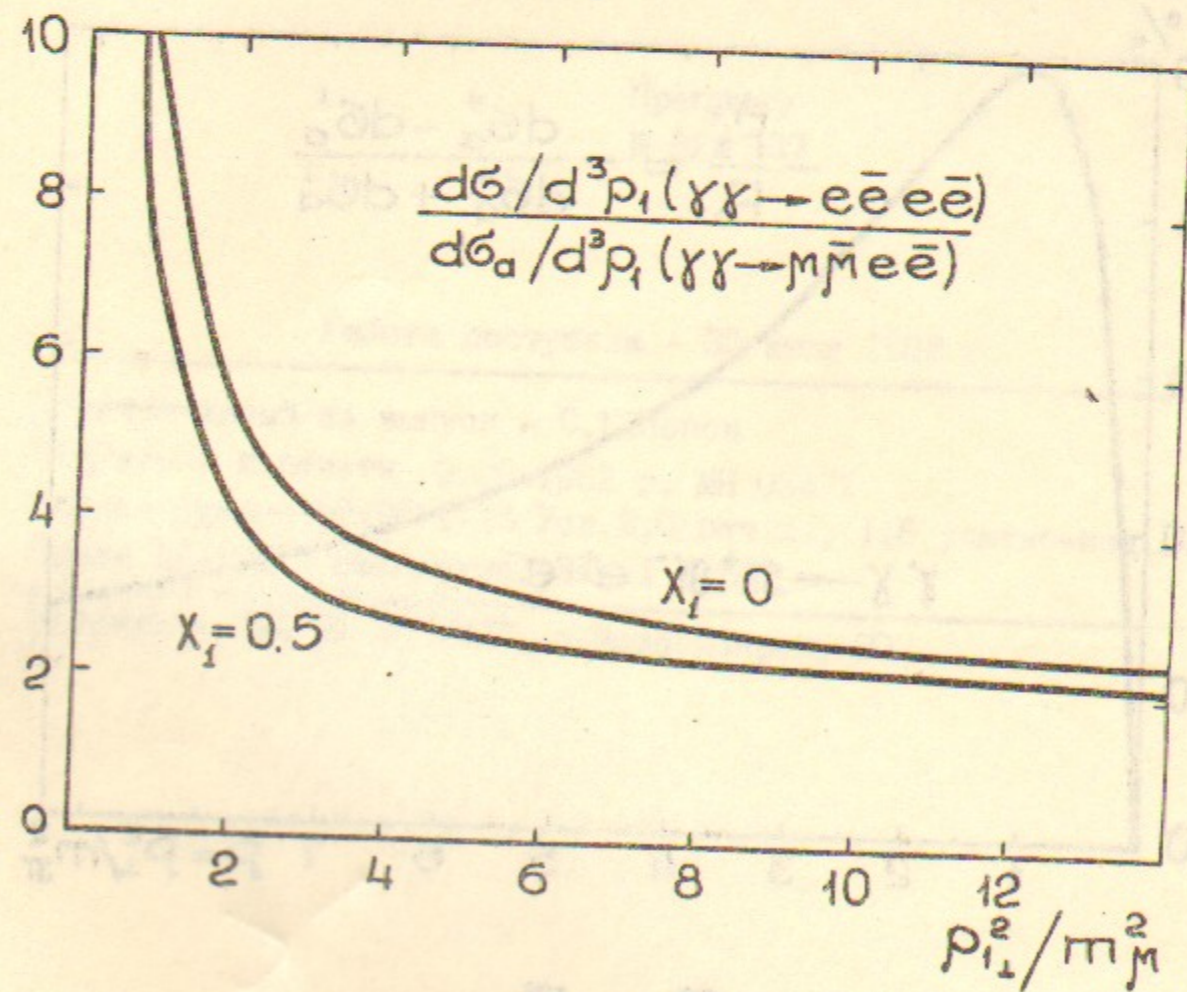


Fig. 5

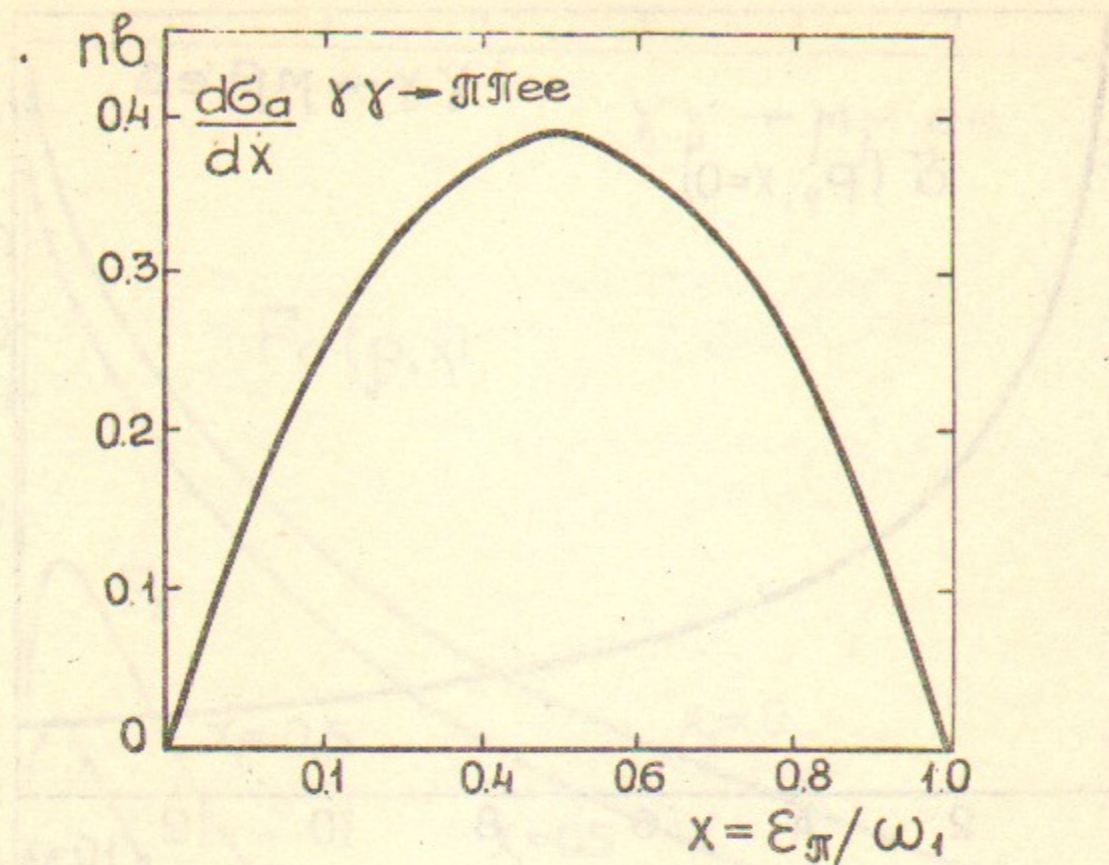


Fig. 6

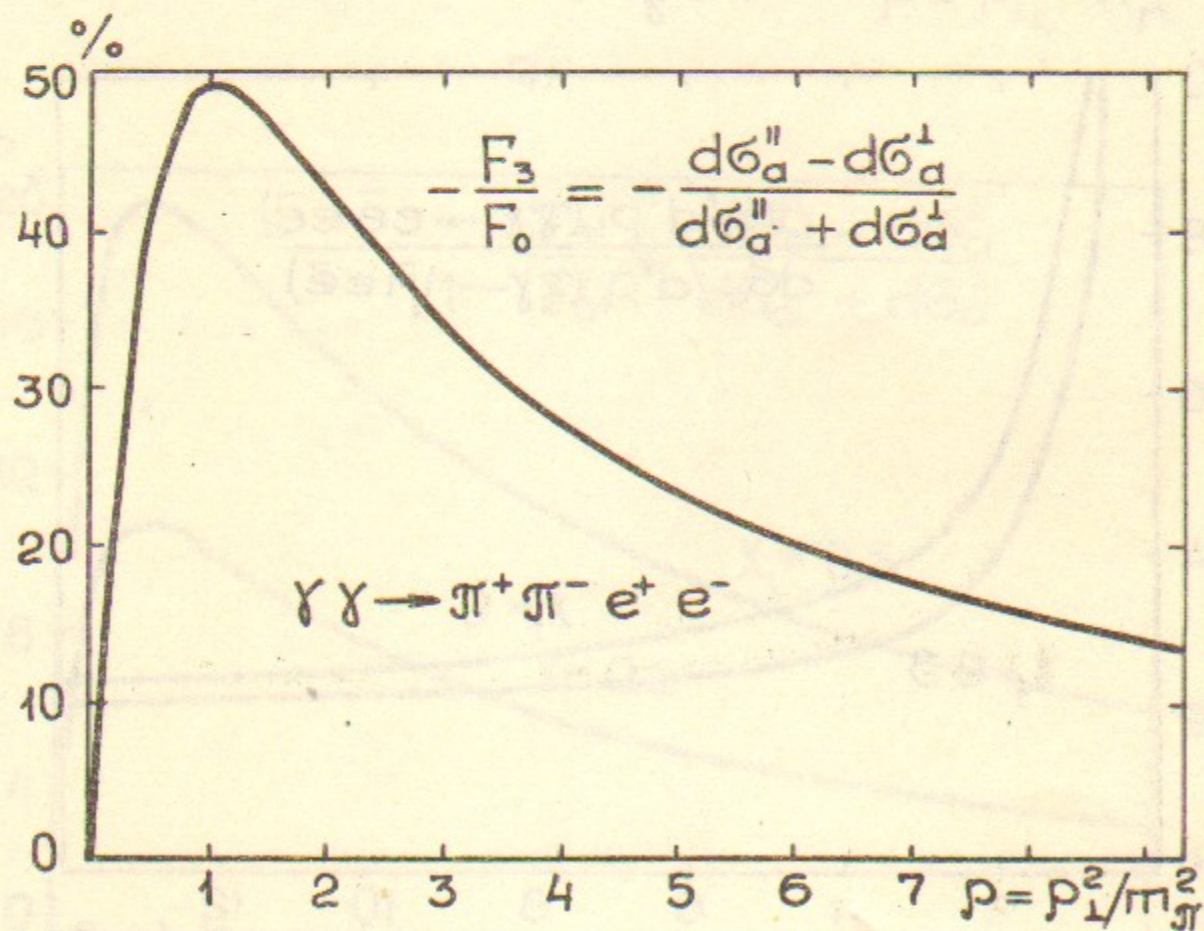


Fig. 7

Э.А.Кураев, В.Г.Сербо, А.Шиллер

ПРОЦЕССЫ $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^- e^+e^-$ и $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^- e^+e^-$ КАК ОСНОВНЫЕ
КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ ВСТРЕЧНЫХ $\gamma\gamma$ - ПУЧКОВ
ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

Препринт
№ 82-107

Работа поступила - 30 июля 1982 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 9.08-1982 г. МН 03471

Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,0 печ.л., 1,6 учетно-изд.л.

Тираж 150 экз. Бесплатно. Заказ № 107.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90