

15311-3251

9

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

В. Н. Байер, А. Г. Грозин

ЖЕСТКИЕ АДРОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КХД
II. ОБЩИЙ ПОДХОД И ПРОЦЕССЫ
С ОДНИМ МЕЗОНОМ.

ПРЕПРИНТ 82—92



HARD HADRON PROCESSES IN Q C D

II. General approach and one-meson
processes

V.N.Baier, A.G.Grozin

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

The paper presents the second part of the review devoted to hard hadron processes, i.e. the processes at the hard stage of which the entire hadrons are produced or annihilate. The following problems are discussed:

1. Meson wave functions
2. Selection rules
3. Wave function evolution
4. What is known about meson wave functions
5. Connection with operator approach
6. Meson decay into leptons
7. Photon-meson form factor
8. Quarkonium decays into photon and meson.

ЖЕСТКИЕ АДРОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КХД
II. ОБЩИЙ ПОДХОД И ПРОЦЕССЫ С ОДНИМ МЕЗОНОМ.

В.Н. Байер, А.Г. Грозин

А н н о т а ц и я

Работа является второй частью обзора, посвященного жестким адронным процессам в КХД, т.е. таким процессам, в жесткой стадии которых (на малых расстояниях) формируются или уничтожаются целые адроны. Рассматриваются следующие вопросы:

- 1) Волновые функции мезонов
- 2) Правила отбора
- 3) Эволюция волновых функций
- 4) Что известно о волновых функциях мезонов
- 5) Связь с операторным подходом
- 6) Распад мезона на лептоны
- 7) Формфактор фотон-мезон
- 8) Распады кваркония на фотон и мезон

Обзор посвящен рассмотрению в рамках квантовой хромодинамики (КХД) /I-15/ жестких адронных процессов /16-38/, т.е. таких процессов, в жесткой стадии которых (на малых расстояниях) формируются или уничтожаются целые адроны. В предыдущей его части (В.Н. Байер, А.Г. Грозин. Жесткие адронные процессы в КХД. I. Жесткие партонные процессы. Препринт ИЯФ 82-82 (1982)) рассматривались жесткие партонные процессы /39-III/. В настоящей части рассматриваются общий подход к жестким адронным процессам (гл.2) и процессы с одним мезоном (гл.3). Ссылки на пункты I.I - I.3 относятся к первой части.

2. ЖЕСТКИЕ АДРОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

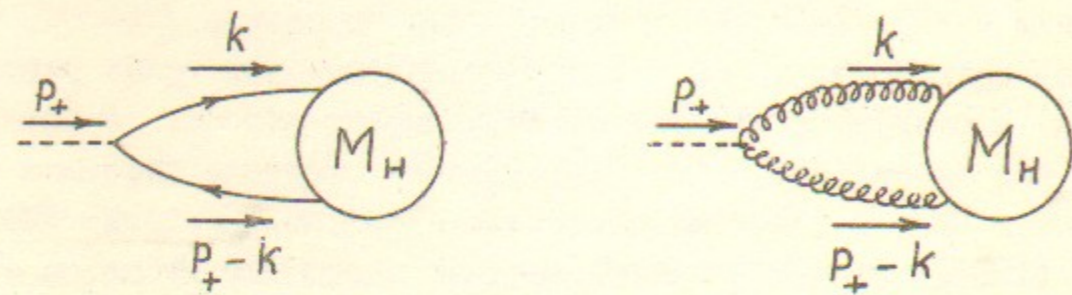
2.1. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ МЕЗОНОВ

Рассмотрим жесткий процесс с характерной передачей импульса $Q \gg \mu$ с участием мезона M . Пусть p_+ - импульс этого мезона. Мы ограничимся старшим членом в разложении по μ^2/Q^2 , в силу этого можно отбросить все массовые члены, в частности $p_+^2=0$. Введем второй характерный импульс жесткого процесса p_- такой, что $p_-^2=0$, $2p_+p_- = Q^2$. Импульс произвольного партона в мезоне может быть разложен по этим векторам: $k = x p_+ + \alpha p_- + k_\perp$, где $p_+ k_\perp = p_- k_\perp = 0$. Удобно использовать аксиальную калибровку $p_- A = 0$. В ней в главном порядке по μ^2/Q^2 вклад дают состояния с минимальным числом партонов в мезоне, поскольку при изменении импульса лишних партонов от p_+ к p_- возникают лишние жесткие пропагаторы. Именно, это кварк-антикварковое состояние и двухглюонное состояние, если оно возможно по квантовым числам.

Амплитуду процесса можно записать как (рис.2.1):

$$M = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Sp } \psi(k) M_H(k) \quad (2.1.1)$$

где $\psi(k)$ - Бете-Сальпетеровская волновая функция мезона, M_H - жесткая партонная амплитуда, Sp означает сумму по спиновым и цветовым индексам. Амплитуда M_H существенно меня-



а б

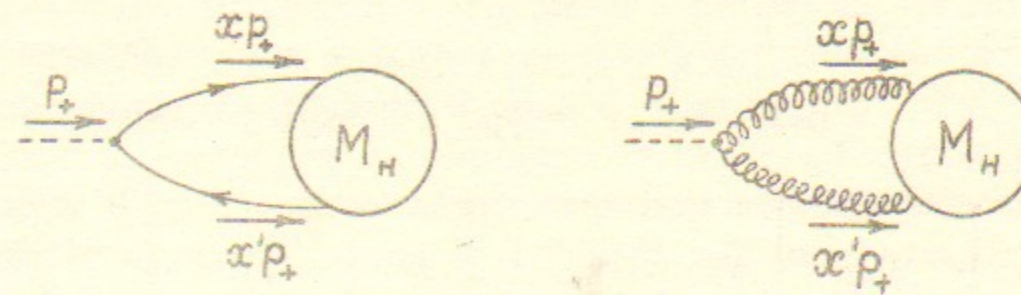
Рис.2.1

ется при изменении импульсов на величину порядка Q , поэтому при $k_{\perp}^2 \ll Q^2$ и $\alpha \ll 1$ можно положить $M_H = M_H(k_{\perp} = 0, \alpha = 0)$. В силу этого, амплитуда процесса (2.1.1) определяется интегралом

$$\int d^2 k_{\perp} \int d\alpha \psi(k) \quad (2.1.2)$$

если только он отличен от 0. А он отличен от 0 тогда, когда орбитальная спиральность $\lambda_{q\bar{q}}$ (проекция орбитального момента партонов в мезоне на направление его движения) равна 0. Если же она отлична от 0, $\psi(k) \sim e^{i\lambda_{q\bar{q}}\varphi}$, и под интеграл (2.1.2) необходимо вставить $|\lambda_{q\bar{q}}|$ раз вектор k_{\perp} , чтобы получить ненулевой результат. Для этого M_H надо разложить по k_{\perp} до степени $|\lambda_{q\bar{q}}|$, что даст в M малость $(k_{\perp}/Q)^{|\lambda_{q\bar{q}}|}$. Поскольку характерные k_{\perp} , входящие в $\psi(k)$, порядка μ , подавление по орбитальной спиральности дает $(\mu/Q)^{|\lambda_{q\bar{q}}|}$ в амплитуде.

Мы будем заниматься процессами, неподавленными по кварковому счету. Для них получается, таким образом, простая качественная картина: мезон заменяется на пару партонов, которые можно считать безмассовыми, находящимися на массовой поверхности и коллинеарными. Мезон описывается волновой функцией $f_M^p(x)$, качественно имеющей смысл амплитуды вероятности найти в мезоне M ровно 2 партона, партон p с долей импульса x и другой партон с долей импульса $x' \equiv 1-x$, имеющих поперечные импульсы вплоть до Q (2.1.2). Амплитуда



а б

$$= \frac{\Gamma}{4N} \int_0^1 f_M^q(x) dx \quad = \frac{\Gamma}{4N} \int_0^1 f_M^g(x) dx$$

в г

Рис.2.2

процесса M с участием мезона получается сверткой партонной амплитуды M_H с волновой функцией (рис.2.2):

$$M = \int_0^1 f(x) dx \frac{1}{4N} \text{Sp} [\Gamma M_H(x)] \quad (2.1.3)$$

Партонная амплитуда $M_H(x)$ в низшем порядке по α_s вычисляется как борновская амплитуда процесса, в котором мезон заменен парой партонов с импульсами $x p_+$ и $x' p_+$. При этом мы условимся в случае двухглюонного состояния не суммировать по перестановкам глюонов, т.к. такое суммирование автоматически производится при вычислении интеграла (2.1.3). Поскольку сумма борновских диаграмм калибровочно инвариантна, M_H можно вычислять в любой удобной калибровке.

Спиновые структуры Γ волновых функций всех мезонных состояний, которые могут рождаться в главном порядке по кварковому счету, приведены в табл 2.1 /37-38/. Если мезон

Таблица 2.1

Спиновые структуры волновых функций

X	X_{\pm}	λ	S	P	Γ_g	Γ_q
S	S_+	0	0, 2, 4...	+	δ_{\pm}^{jM}	\hat{p}
	S_-		1, 3, 5...	-		
P	P_+	0	0, 2, 4...	-	$i\epsilon_{\pm}^{jM}$	$\gamma^5 \hat{p}$
	P_-		1, 3, 5...	+		
V	V_+	± 1	1, 2, 3...	+		$\hat{p} \hat{e}_{\pm}$
	V_-			-		
	T_+	± 2	2, 3, 4...	+	$\sqrt{2} e_{\pm}^M e_{\pm}^V$	

X - тип волновой функции мезона, не являющегося абсолютно нейтральным

X_{\pm} - тип волновой функции абсолютно нейтрального мезона

λ - спиральность

S - спин

P - четность

Γ_g - спиновая структура глюонной волновой функции (только для абсолютно нейтральных мезонов)

Γ_q - спиновая структура кварковой волновой функции

не является абсолютно нейтральным, то его волновая функция является чисто кварковой и относится к одному из типов S, P, V. Если же мезон является абсолютно нейтральным, то его волновая функция относится к одному из типов S_{\pm} , P_{\pm} , V_{\pm} , T_{\pm} , где нижний индекс обозначает C-четность. В случае мезонов типов S_+ , P_+ мезон имеет кварковую и глюонную волновые функции, в случае T_+ - только глюонную и в остальных случаях - только кварковую.

В случае кварковой диаграммы рис.2.2а существуют 4 варианта сложения спинов кварка и антикварка. Все спиновые структуры должны обращаться в 0 при умножении на \hat{p}_+ с любой стороны в силу уравнения Дирака. Это условие вместе с требованиями правильной четности и спиральности однозначно фиксирует 4 независимых структуры:

$$P(\sigma^-(\lambda=0)): \Gamma = \gamma^5 \hat{p}_+; S(1^-(\lambda=0)): \Gamma = \hat{p}_+; V(1^-(\lambda=\pm 1)): \Gamma = \hat{p}_+ \hat{e}_{\pm} \quad (2.1.4)$$

где выписаны квантовые числа суммарного спина. С учетом того, что можно еще прибавить любой орбитальный момент ℓ^P ($P=(-1)^{\ell}$) с нулевой орбитальной спиральностью, волновая функция типа P может присутствовать в мезонах $0^-, 1^+, 2^-, \dots$ с $\lambda=0$. Если мезон состоит из одинакового кварка и антикварка, он имеет определенную C-четность $C=(-1)^{\ell+s} = (-1)^{\ell} = -P$. При сложении полного спина $1^-(\lambda=0)$ с орбитальным моментом следует иметь в виду, что коэффициент Клебша-Гордана $\langle \ell, 0; 1, 0 | \ell, 0 \rangle = 0$, поэтому полный момент может быть равен только $j = \ell \pm 1$. При данном $j \neq 0$ смешиваются состояния с $\ell = j \pm 1$. Поэтому волновая функция типа S может присутствовать в мезонах $0^+, 1^-, 2^+, \dots$ с $\lambda=0$. Если мезон состоит из одинакового кварка и антикварка, $C=(-1)^{\ell+s} = (-1)^{\ell} = P$. В случае полного спина $1^-(\lambda=\pm 1)$ этого запрета нет, и возможны как состояния с $\ell = j \pm 1$, так и с $\ell = j$. Поэтому волновая функция типа V может присутствовать в мезонах $1^{\pm}, 2^{\pm}, 3^{\pm}, \dots$ с $\lambda = \pm 1$. Вектора e_{\pm} в (2.1.4) означают спиральные орты в плоскости, ортогональной p_+ , p_- : $p_{\pm} e_{\pm} = 0$, и представляют собой вектора поляризации мезонов с $\lambda = \pm 1$. То, что эта спиновая структура действительно описывает кварк и антикварк с одинаковой спиральностью, особенно наглядно видно

из равенства

$$\gamma^5 \hat{p}_+ \hat{e}_\pm = \pm \hat{p}_+ \hat{e}_\pm \quad (2.1.5)$$

Если мезон состоит из одинакового кварка и антикварка, то при $\ell = j \pm 1$ ($j^P = 1^-, 2^+, 3^-, 4^+ \dots$) $C = (-1)^j$, а при $\ell = j$ ($j^P = 1^+, 2^-, 3^+, 4^- \dots$) $C = (-1)^{j+1}$, так что в обоих случаях оказывается $C = P$.

В случае глюонной диаграммы рис.2.2б также существуют 4 варианта сложения спинов двух глюонов. Все спиновые структуры должны быть ортогональны к импульсу глюонов p_+ и вектору p_- , фиксирующему калибровку. Это условие вместе с требованиями правильной четности и спиральности однозначно фиксирует 4 независимых спиновых структуры

$$P: \Gamma = i \varepsilon_\perp^{\mu\nu}; \quad S: \Gamma = \delta_\perp^{\mu\nu}; \quad T: \Gamma = \sqrt{2} e_\pm^\mu e_\pm^\nu \quad (2.1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_\perp^{\mu\nu} &= q^\mu q^\nu - \ell^\mu \ell^\nu - g^{\mu\nu} = e_+^\mu e_-^\nu + e_-^\mu e_+^\nu \\ i \varepsilon_\perp^{\mu\nu} &= i \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q_\alpha \ell_\beta = e_+^\mu e_-^\nu - e_-^\mu e_+^\nu \\ q &= (p_+ + p_-)/Q, \quad \ell = (p_+ - p_-)/Q \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Табл.2.2. Классификация двухглюонных состояний.

j	$P = -1, \lambda = 0$	$P = +1, \lambda = 0$	$P = +1, \lambda = \pm 2$
0	1	$1+1-1=1$	0
1	0	$0+0-0=0$	0
$2k$	1	$1+3-2=2$	$1+3-2=2$
$2k+1$	0	$0+0-0=0$	$0+2-1=1$

Перечисление возможных состояний глюонных пар сделаем, повторяя известные рассуждения /75/§9 о системе двух фотонов с учетом дополнительного условия нулевой орбитальной спиральности (см. таблицу 2.2). Антисимметричная структура P ($\lambda_{\text{спин}}=0$) по трансформационным свойствам эквивалентна скаляру, построенному из четных сферических гармоник (см. /75/§9), и поэтому волновая функция типа P может присутствовать в мезонах $0^-, 2^-, 4^- \dots$ с $\lambda = 0$. Числа состояний для симметричных спиновых структур можно получить, сложив число состояний для суммы следа спиновой структуры (спин 0) с четным орбитальным моментом и для суммы бесследной ее части (спин 2) с четным орбитальным моментом, и вычтя число лишних продольных состояний $n_i v_k + n_k v_i$, эквивалентных сумме вектора v (спин 1) с нечетным орбитальным моментом. В случае структуры S с $\lambda_{\text{спин}}=0$ следует иметь в виду, что $\langle \ell, 0; 2, 0 | \ell \pm 1, 0 \rangle = 0$, поэтому исчезают состояния с $j = 1, 2k+1$ и $\ell = j \pm 1$; при нечетном j исчезают также и лишние состояния с $S = 1, \ell = j$ в силу того же обращения в 0 коэффициента Клебша-Горлана, как для кварковых волновых функций (см. предыдущий абзац). Поэтому волновая функция типа S может присутствовать в мезонах $0^+, 2^+, 4^+ \dots$ с $\lambda = 0$. Для спиновой структуры T ($\lambda_{\text{спин}} = \pm 2$) этих запретов нет, и столбец таблицы выглядел бы точно как в /75/§9 (только по очевидным причинам нет состояния с $j = 0$). Поэтому волновая функция типа T может присутствовать в мезонах $2^+, 3^+, 4^+ \dots$ с $\lambda = \pm 2$. Разумеется, все мезоны, имеющие глюонную компоненту волновой функции, абсолютно нейтральны и $C = +1$.

Волновые функции абсолютно нейтральных мезонов удовлетворяют соотношениям симметрии

$$f^q(x') = -\rho f^q(x), \quad f^g(x') = \rho f^g(x) \quad (2.1.8)$$

Это связано с тем, что при перестановке импульсов ($x \leftrightarrow x'$) волновая функция умножается на орбитальную четность, произведение внутренних четностей кварка и антикварка равно -1 , а двух глюонов $+1$, так что в первом случае орбитальная четность равна $-P$, а во втором P . Например, кварковые волновые функции псевдоскалярных и векторных мезонов ($\pi, \eta, \eta', \rho, \omega$,

$\psi \dots$) симметричны, а скалярных, аксиальных и тензорных (S^* , A_1 , $f \dots$) антисимметричны, глюонные волновые функции псевдоскалярных мезонов ($\eta, \eta' \dots$) антисимметричны, а скалярных и тензорных (S^* , $f \dots$) симметричны. Кварковые волновые функции абсолютно нейтральных мезонов можно разложить на синглетную и несинглетную по аромату часть. Глюонная волновая функция полностью относится к синглетной части, и она существенна только в мезонах, имеющих большую синглетную компоненту, в частности их изоспин должен быть равен 0.

Все мезоны со спиральностью $\lambda = 0$ эффективно ведут себя как бесспиновые с той же натуральностью $\sigma = P(-1)^S$, т.к. их тензор поляризации $M_{i_1 \dots i_s}$ в матричном элементе по всем индексам сворачивается с их импульсом: $M \sim M_{i_1 \dots i_s} p_{i_1} \dots p_{i_s}$ (т.е. спин таким образом складывается с орбитальным моментом, что в результате матричный элемент имеет такую же структуру, как для бесспинового мезона). Аналогично все мезоны со спиральностью $\lambda = \pm 1$ ведут себя как векторные — у них один индекс тензора поляризации остается несвернутым с импульсом. Мезоны со спиральностью $\lambda = \pm 2$ ведут себя как тензорные.

Почему, хотя жесткий процесс происходит на малых расстояниях $\sim 1/Q$, много меньших размера мезона $\sim 1/\mu$, этим расстоянием нельзя полностью пренебречь и почему амплитуда зависит от функции $f(x)$, а не от числа типа $\psi(0)$? Дело в том, что ультррелятивистский мезон сжат лоренцевым сокращением в продольном направлении до размера $\frac{1}{\mu} \frac{m}{Q} \sim \frac{1}{Q}$. Поэтому поперечными размерами жесткой области действительно можно пренебречь, а в продольном направлении жесткий процесс чувствует нетривиальную структуру мезона. По соотношению неопределенностей, продольный размер мезона $\sim 1/Q$ соответствует размазке импульсов $\sim Q$, т.е. ширине волновой функции $f(x)$ порядка 1.

Выше мы везде пренебрегали степенными поправками $\sim \mu^2/Q^2$. Вопрос о том, где в действительности начинается область применимости таких асимптотических формул, является весьма сложным. Первая степенная поправка к формуле типа (2.1.3) содержит вклады двухпартонных волновых функций с "неправильными" спиновыми структурами и трехпартонных волно-

вых функций (qqg), причем по отдельности эти вклады не являются калибровочно инвариантными. В случае псевдоскалярных мезонов "неправильные" кварк-антикварковые волновые функции $\propto \frac{m_q^2}{m_u + m_d}$, т.е. велики, кроме того, соответствующие жесткие амплитуды более сингулярны, что может привести к увеличению интегралов по x [29, 36, II2]. Поэтому степенная поправка может быть существенной вплоть до весьма больших Q . Однако полный ее анализ к настоящему времени не произведен. Кроме того, область применимости асимптотических формул (и первых степенных поправок) ограничивается требованием, чтобы интеграл (2.1.3) определялся областью $x \gg \mu^2/Q^2$, $x' \gg \mu^2/Q^2$. Если волновая функция является широкой, то характерные x малы, т.е. внутренние виртуальности в диаграммах существенно меньше внешней передачи импульса Q . Это обстоятельство также может отодвинуть начало области применимости до весьма больших Q [36, II2].

2.2. ПРАВИЛА ОТБОРА

Спиральность легких кварков сохраняется в жестких процессах, вызванных сильными, электромагнитными и слабыми взаимодействиями, вдоль каждой кварковой линии. Переворот спиральности кварка связан с его массой, поперечный импульс кварка в адроне может привести к несовпадению настоящей спиральности кварка с проекцией его спина на направление движения адрона, что приводит к схожим эффектам. Поэтому переворот спиральности кварка дает в амплитуде малость $\sim \mu/Q$. Из сохранения спиновых спиральностей кварков и равенства 0 орбитальных спиральностей адронов следует закон сохранения суммы спиральностей адронов в процессах, неподавленных по кварковому счету, если только в этих адронах не дают вклада двухглюонные состояния с ненулевой спиральностью (типа T_+). Это правило отбора обсуждалось в работах [II3-II4], авторы которых не заметили, однако, исключения мезонов типа T_+ . Процессы, в которых сумма спиральностей адронов меняется, либо участвуют адроны со спиральностью $> 3/2$ (что требует ненулевой орбитальной спиральности), подавлены по кварковому счету. К таким процессам относится все, что было сказано о

степенных поправках. В частности, в них необходимо учитывать состояния с неминимальным числом партонов. Например, можно передать единицу спиральности глюону, при этом исчезает подавление μ/Q по орбитальной спиральности, но возникает такое же подавление по числу партонов. Конкретную степень μ/Q в амплитуде легко найти в каждом случае, распределив спиральности на орбитальные и спиновые (по кваркам) так, чтобы получить наименьшее подавление. Например, оказывается, что электромагнитный формфактор ведет себя как $(\frac{1}{Q})^{|\Delta\lambda|+2n-3}$, где $\Delta\lambda$ — изменение спиральности, n — число кварков (2 для мезонов и 3 для барионов) [16, 29].

Из этого правила следует, что (если не участвуют T_+ мезоны) угловое распределение в e^+e^- аннигиляции и распадах векторного кваркония на фотон и мезон является чисто поперечным (см. Приложение^{*)} I) и спиральность мезона равна 0, для двух мезонов угловое распределение чисто продольное, и спиральности обоих мезонов равны 0, для двух барионов угловое распределение чисто поперечное, и спиральности равны $+1/2$ и $-1/2$. Рождение псевдоскалярного и векторного мезона ($\pi\rho, KK^*$...) происходит в P-волне, $\ell=1$ складывается с $S_p=1$ в $S_y=1$ ($M \sim \vec{e}_p \times \vec{p} \cdot \vec{e}_y$), и нулевая спиральность векторного мезона запрещена, поэтому такой процесс подавлен $\sim 1/Q^2$ и имеет поперечное угловое распределение.

Рассмотрим еще одно правило отбора [115], которое является общим в предположении сохранения четности, но особенно полезным часто оказывается при анализе жестких адронных процессов. Пусть в процессе участвует не более 4 частиц в начальном и конечном состоянии. Тогда существует вектор n , ортогональный ко всем импульсам. Назовем его поперечным, а все векторы из ортогонального ему трехмерного пространства, в частности все импульсы — продольными. Определим оператор поперечной четности P_\perp как инверсию поперечного направления. Его достоинство состоит в том, что он не меняет продольных векторов, поэтому одновременно с определенными (продольными) импульсами частицы могут иметь определенную поперечную четность. Операцию поперечной инверсии можно рассматривать как полную инверсию, за которой следует поворот на π вокруг поперечного направления, поэтому $P_\perp = P e^{i\pi S_\perp}$.

^{*)} См. первую часть этого обзора (препринт ИЯФ 82-82 (1982))

В случае бозонов, тензор поляризации которых лежит в продольном пространстве, поперечная четность совпадает с введенной в [116] натуральностью $\sigma = P(-1)^S$. В общем случае ее надо еще умножить на поперечную четность тензора поляризации: если в каждом члене разложения тензора поляризации по 3 продольным и 1 поперечному орту последний встречается четное число раз, поляризация поперечно-четна, а если нечетное — поперечно-нечетна. Для векторной частицы продольная и одна из поперечных линейных поляризаций поперечно-четны, а другая поперечная линейная поляризация поперечно-нечетна. Частица с определенной ненулевой спиральностью не имеет определенной поперечной четности, т.к. она является суперпозицией состояний с поперечными линейными поляризациями, имеющих разную поперечную четность.

Легко проследить, как технически происходит обращение матричного элемента в 0 при несохранении поперечной четности. В случае бозонов каждая ненатуральная частица дает в матричный элемент псевдотензор $\xi^{\alpha\beta\mu\nu}$ или, что эквивалентно, γ^5 в шпур γ матриц. Далее, поперечные векторы, содержащиеся в тензорах поляризации, можно выразить как свертку $\xi^{\alpha\beta\mu\nu}$ с 3 некопланарными продольными векторами. Поэтому при несохранении поперечной четности матричный элемент должен содержать $\xi^{\alpha\beta\mu\nu}$ и продольные векторы, и следовательно равен 0. Очевидно, что спиновые структуры волновых функций (табл. 2.1) соответствуют этим правилам, равенство (2.1.5) еще раз наглядно показывает, что мезоны со спиральностью ± 1 не имеют определенной поперечной четности.

Правило отбора по поперечной четности особенно эффективно при совместном использовании с правилом отбора по спиральности. Например, при распадах кваркония на 2 легких мезона (в которых нет волновой функции типа T_+) оба мезона должны иметь нулевую спиральность в силу правила отбора по спиральности, если только спин кваркония < 2 . Тогда сохраняется натуральность σ , т.е. мы получаем правило отбора не для поляризационных состояний, а для типов частиц-продуктов распада. При распадах кваркония со спином 2 разрешен распад на 2 мезона со спиральностями $+1$ и -1 (тип V) независимо от их натуральностей (соответствующее утверждение в [116] ошибочно, см. [115]).

2.3. ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Волновые функции, так же как и функции распределения и фрагментации партонов, зависят от партонометрического разрешения. Если для процесса с передачей импульса Q выбрать точку нормировки тоже Q , то амплитуда процесса будет представляться борновскими диаграммами рис.2.2. Если же точка нормировки $Q_0 \ll Q$, то возникнут логарифмические поправки. Инфракрасные логарифмы отсутствуют, т.к. инфракрасные глюоны с $k \rightarrow 0$ плохо взаимодействуют с бесцветными мезонами. Другими словами, т.к. нет изменений направления движения цвета, отсутствует мягкое излучение $\frac{d\omega}{\omega}$, и дважды логарифмические члены, имеющиеся в отдельных диаграммах, должны сократиться по бесцветности мезона. Коллинеарные логарифмы приводят к однологарифмическим поправкам вида $(\alpha_s \ln Q^2/Q_0^2)^n$. В главном логарифмическом приближении их можно учесть при помощи уравнений эволюции для волновых функций (аналогично случаю функций распределения и фрагментации партонов).

Смешивание кварковой и глюонной волновой функции возможно для синглетных по аромату частей волновых функций мезонов $0^-, 2^-, \dots (P_+)$ и $0^+, 2^+, \dots (S_+)$. Для общности мы будем проводить все рассуждения в случае наличия смешивания, и индексы $a, b, c \dots$ будут принимать значения q, g . Если же смешивания нет, достаточно считать, что все индексы имеют значение q (для несинглетных по аромату частей волновых функций S, P , а также для типов S_-, P_-, V) или g (для типа T_+).

Кварковая волновая функция абсолютно нейтрального мезона с равным нулю изоспином может быть разбита на синглетную и несинглетную по аромату части: $f_M^q = f_M^q(NS) + f_M^q(S)$. Индекс q пробегает значения $u, d, s, c \dots$. Синглетная часть от него фактически не зависит: $f_M^u(S) = f_M^d(S) = \dots = f_M^q(S)$. Несинглетная часть эволюционирует для каждого аромата отдельно в соответствии с уравнением без смешивания, а синглетная часть вместе с глюонной — по уравнению со смешиванием.

Если $\Delta \xi \ll 1$, то существенны только однопетлевые по-

правки (рис.2.3) (ср. пункт I.3). На рисунке использованы обозначения

$$\begin{aligned} p &= y p_+ & , & \quad p' = y' p_+ \\ k &= x p_+ + \alpha p_- + k_\perp & , & \quad k' = x' p_+ - \alpha p_- - k_\perp \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$(x' \equiv 1-x, \quad y' \equiv 1-y)$$

Заметим, что диаграмма с четырехглюонной вершиной на рис.2.3г содержит множитель симметрии $1/2$, для волновой функции типа P_+ она обращается в 0. При вычислении интеграла по петле запишем элемент интегрирования в виде $d^4 k = Q^2 \frac{\pi}{2} d\alpha dx d\vec{k}_\perp^2$. Интеграл по α берется по вычетам знаменателей пропагаторов, а направление обхода удобно выбрать так, чтобы обходить только один полюс (расположение полюсов зависит от соотношения между x и y). В интервале $Q_0^2 \ll \vec{k}_\perp^2 \ll Q^2$ интеграл по \vec{k}_\perp^2 дает логарифм.

В дальнейшем удобно ввести вместо функций $f^a(x, Q^2)$ функции

$$F^a(x, \xi) = \frac{1}{x x'}, f^a(x, Q^2) \quad (2.3.2)$$

Ниже мы будем использовать верхние и нижние индексы, связь между которыми осуществляется "метрическим тензором"

$$H_{ab} = \begin{pmatrix} x x' & 0 \\ 0 & \frac{C_F}{n_f} (x x')^2 \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

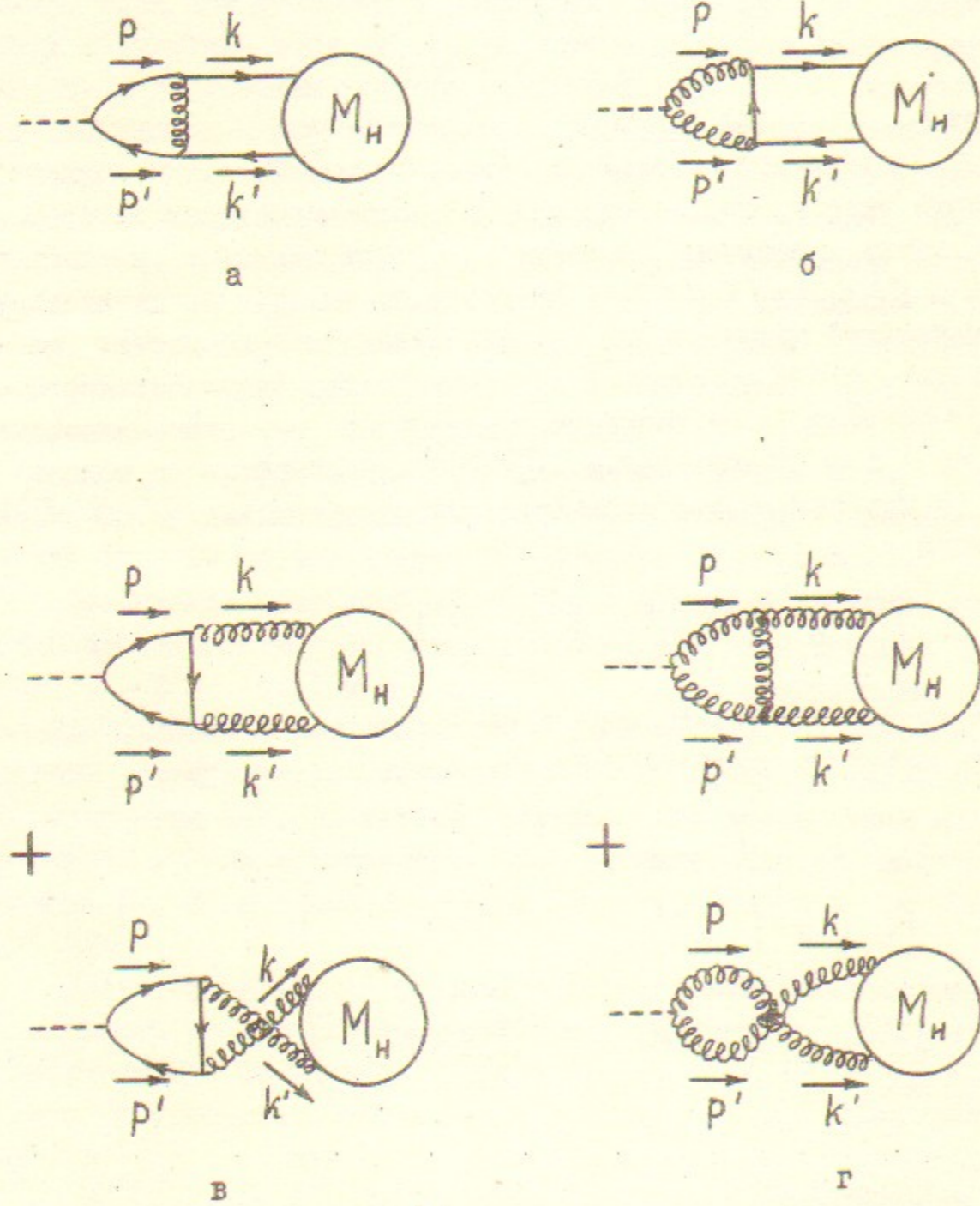


Рис. 2.3

Таблица 2.3
Ядра V_a и матрицы $(\chi_n^b)^k$ уравнений эволюции

Тип	ядро V_a^b	χ_n^b	$\chi_n^k, k < n$
V	$V_a^q = 2C_F \left[\frac{y}{x} \frac{\Delta}{x-y} \vartheta + \frac{y'}{x'} \frac{\Delta}{x'-y'} \vartheta' \right]$	$C_F [1 + 4\Sigma]$	$4C_F \left[\frac{1}{n-k} - \frac{1}{n+1} \right]$
T СВЯЗЬ В - ЧОТН.	$V_a^g = 2N \left[\frac{y}{x} \left(-\frac{1}{x} + \frac{\Delta}{x-y} \right) \vartheta + \frac{y'}{x'} \left(-\frac{1}{x'} + \frac{\Delta}{x'-y'} \right) \vartheta' \right]$	$N \left[\frac{1}{3} + \frac{2n_f}{3N} - \frac{8}{n(n+1)} + 4\Sigma \right]$	$4N \left[\frac{k}{n(n+1)} - \frac{1}{n-k} + \frac{1}{n} \right]$
P, S	$V_a^g = 2C_F \left[\frac{y}{x} \left(1 + \frac{\Delta}{x-y} \right) \vartheta + \frac{y'}{x'} \left(1 + \frac{\Delta}{x'-y'} \right) \vartheta' \right]$	$C_F \left[1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} + 4\Sigma \right]$	$2C_F \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{n-k} - \frac{2}{n+1} \right]$
P ₊ СВЯЗЬ П - ЧОТН.	$V_a^g = 2N \left[\frac{y}{x} \left(\frac{2y-1}{x} + \frac{\Delta}{x-y} \right) \vartheta + \frac{y'}{x'} \left(\frac{2y'-1}{x'} + \frac{\Delta}{x'-y'} \right) \vartheta' \right]$	$N \left[\frac{1}{3} + \frac{2n_f}{3N} - \frac{8}{(n+1)(n+2)} + 4\Sigma \right]$	$4N \left[-\frac{k}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{n-k} - \frac{1}{n} \right]$
	$V_a^g = 2C_F \left[\frac{y^2}{x} \vartheta - \frac{y'^2}{x'} \vartheta' \right]$	$-2C_F \frac{n \cdot 3}{(n+1)(n+2)}$	$4C_F \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
	$V_a^g = -2n_f \left[\frac{y}{x^2} \vartheta - \frac{y'}{x'^2} \vartheta' \right]$	$-2n_f \frac{n}{(n+1)(n+2)}$	$-2n_f \frac{k}{(n+1)(n+2)}$
S ₊ СВЯЗЬ П - ЧОТН.	$V_a^g = 2N \left[\frac{y}{x} \left(-\frac{2x^2 + 2y^2 - 2xy - x-y}{x^2} \vartheta + \frac{\Delta}{x-y} \right) \vartheta + \frac{y'}{x'} \left(-\frac{2x'^2 + 2y'^2 - 2x'y' - x'-y'}{x'^2} \vartheta' + \frac{\Delta}{x'-y'} \right) \vartheta' \right]$	$N \left[\frac{1}{3} + \frac{2n_f}{3N} - \frac{4}{n(n+1)} - \frac{4}{(n+2)(n+3)} + 4\Sigma \right]$	$2N \left[\frac{k-2}{n} - \frac{k-1}{n+1} + \frac{k}{n+2} - \frac{k+1}{n+3} \right]$
	$V_a^g = -2C_F \left[\frac{y}{x} (y-2x) \vartheta - \frac{y'}{x'} (y'-2x') \vartheta' \right]$	$-2C_F \frac{n^2 + 3n + 4}{n(n+1)(n+2)}$	$-4C_F \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
	$V_a^g = 2n_f \left[\frac{y}{x^2} \vartheta - \frac{y'}{x'^2} \vartheta' \right]$	$-2n_f \frac{n^2 + 3n + 4}{(n+1)(n+2)(n+3)}$	$-2n_f \left[\frac{2}{(n+1)(n+3)} + \frac{k}{(n+2)(n+3)} \right]$

обозначения: $\vartheta \equiv \vartheta(x-y), \vartheta' \equiv \vartheta(x'-y') = \vartheta(y-x), \Sigma \equiv \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}$.

*/ кроме $\chi_n^1 = 2N \left[-\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} \right]$

По дважды повторяющимся индексам будет подразумеваться суммирование.

Учет однопетлевых поправок на рис. 2.3 дает

$$F^a(x, \xi + \Delta \xi) = Z_a^2 F^a(x, \xi) + \Delta \xi \int_0^1 dy \tilde{V}_\ell^a(x, y) F^b(y, \xi) \quad (2.3.4)$$

Фактор Z_a (I.3.2I) появился при учете собственно-энергетических и вершинных поправок к борновской диаграмме (рис. 2.1). Как Z_a , так и интеграл по y содержат логарифмические инфракрасные расходимости, т.к. диагональные ядра \tilde{V}_a^a содержат особенность $\sim \frac{1}{x-y}$, соответствующую обмену мягким глюоном. В действительности эти расходимости (или дважды логарифмы, которые возникли бы при более аккуратном учете пределов) сокращаются. Чтобы убедиться в этом, в сингулярном члене $\frac{F(y)}{x-y}$ вычтем и добавим $F(x)$:

$$\frac{F(y)}{x-y} = \frac{F(y)-F(x)}{x-y} + \frac{F(x)}{x-y}, \quad \frac{1}{x-y} F(y) = \frac{\Delta}{x-y} F(y) + \frac{1}{x-y} F(x) \quad (2.3.5)$$

где символ Δ означает $\Delta F(y) = F(y) - F(x)$. Тогда интеграл с $\frac{\Delta}{x-y}$ будет конечен, а расходящийся член, содержащий $F(x)$, можно объединить с $Z_a^2 F(x)$. Делая далее в этом расходящемся интеграле замену переменных

$$y < x: y = xz, \quad y' < x': y' = x'z \quad (2.3.6)$$

легко убедиться, что суммарный интеграл по z сходится. Инфракрасные особенности сократились, как мы и ожидали из физических соображений. Уравнение эволюции можно поэтому окончательно записать в виде

$$\left(\delta_\ell^a \frac{\partial}{\partial \xi} + C_\ell^a \right) F^b(x, \xi) = \int_0^1 dy V_\ell^a(x, y) F^b(y, \xi) \quad (2.3.7)$$

где

$$C_\ell^a = \begin{pmatrix} C_F & 0 \\ 0 & \frac{N+2n_f}{3} \end{pmatrix} \quad (2.3.8)$$

или в символическом виде

$$\left(\delta_\ell^a \frac{\partial}{\partial \xi} + C_\ell^a \right) F^b = V_\ell^a F^b \quad (2.3.9)$$

Ядра V_ℓ^a уравнений эволюции различны для разных мезонов и приведены в табл. 2.3. Они удовлетворяют свойству симметрии

$$V_{a\ell}(x, y) = V_{\ell a}(y, x) \quad (2.3.10)$$

Напомним, что $V_{a\ell} = H_{ac} V_\ell^c$. Кроме того, диагональные ядра V_q^q и V_g^g симметричны, а недиагональные V_q^g и V_g^q антисимметричны относительно замены $x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y'$. Благодаря этому свойству симметрия волновых функций абсолютно нейтральных мезонов (2.1.8) сохраняется при эволюции.

Общее решение уравнения эволюции может быть записано в виде разложения по собственным функциям:

$$F^a(x, \xi) = \sum_n a_n(\xi_0) E_n^a(x) e^{-\gamma_n(\xi - \xi_0)} \quad (2.3.11)$$

где $E_n^a(x)$ — ортонормированный базис собственных функций оператора $C-V$:

$$\int_0^1 dx E_n^a(x) H_{a\ell}(x) E_m^b(x) = \delta_{nm} \quad (2.3.12)$$

а γ_n — соответствующие собственные значения. Коэффициенты a_n вычисляются из начальных условий для волновой функции:

$$a_n(\xi_0) = \int_0^1 dx F^a(x, \xi_0) E_{na}(x) \quad (2.3.13)$$

В случае мезонов со спиральностью 0 существует единственная собственная функция, имеющая $\gamma_0 = 0$, а именно

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

Все остальные собственные функции имеют $\gamma_n > 0$ и, следовательно, вымирают при $\xi \gg 1$. Наличие такой функции связано с

сохранением при эволюции интеграла

$$\int_0^1 f^q(x) dx = const \quad (2.3.15)$$

В операторном подходе это соответствует нулевой аномальной размерности векторного и аксиального тока. Действительно, интеграл (2.3.15) есть сумма вкладов всех мод, поэтому, во-первых, моды с $\gamma_n \neq 0$ не дают в него вклада, и во-вторых, существует мода с $\gamma_0 = 0$, которая одна дает вклад в интеграл (2.3.15). Волновые функции мезонов с ненулевой спиральностью (V, T_+), а также типов S_-, P_- , не содержащие моду (2.3.14), стремятся к 0 при $\xi \gg 1$. Волновые функции типов S, P при $\xi \gg 1$ становятся полностью известными: чисто кварковыми, параболической формы $f^q(x) \sim x x'$, и их нормировка определяется сохраняющимся интегралом (2.3.15). Эту логарифмическую асимптотику ($\xi \gg 1$, где известны волновые функции) следует четко отличать от степенной (где вымирают степенные поправки), обсуждавшейся в пункте 2.1. Поскольку $\gamma_1 \sim 1$, для существенного подавления высших мод необходим интервал $\Delta \xi$ порядка нескольких единиц, что соответствует уменьшению α_s на этом интервале на несколько порядков. Ясно, что эта теоретическая земля обетованная, где форма волновых функций известна и все процессы определяются нормировкой (2.3.15), экспериментально совершенно недостижима.

Для нахождения остальных собственных значений и собственных функций перейдем к переменным

$$\begin{aligned} X &= 2x-1, \quad Y = 2y-1, \\ x &= (1+X)/2, \quad x' = (1-X)/2, \\ y &= (1+Y)/2, \quad y' = (1-Y)/2 \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

и запишем интегральный оператор $(C-V)_2^q$ в базисе

$$q e_n = \begin{pmatrix} X^n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g e_n = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ X^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.3.17)$$

в виде матрицы

$$(C-V)_{\alpha} e_n = \sum_{\beta, k} (\gamma_{\alpha}^{\beta})_n^k e_k \quad (2.3.18)$$

Удобно сделать замену переменной (2.3.6). При этом оказывается, что матрицы γ_{α}^{β} являются треугольными, т.е. матричные элементы отличны от 0 только при $k \leq n$.

Замечательно, что диагональные элементы матриц совпадают с моментом ядер Альтарелли-Паризи, описывающих эволюцию функций распределения партонов. Операторы $C-V$, соответствующие волновым функциям типа S , связаны с регуляризованными ядрами уравнения Альтарелли-Паризи для суммы распределений партонов с положительной и отрицательной спиральностью, а соответствующие волновым функциям типа P — для их разности /38/:

$$(C-V)_{\alpha} e_n = \sum_{\beta} \left[\int_0^1 P_{\alpha}^{\beta}(z) z^n dz \right] e_n + \dots \quad (2.3.19)$$

где многоточие означает члены e_k с $k < n$. Причина этого состоит в том, что матрицы плотности в уравнении Альтарелли-Паризи (1.3.22) совпадают со спиновыми структурами волновых функций типа S и P (табл.2.1). Поэтому спиновая структура диаграмм, изображающих эволюцию функций распределения и волновых функций (рис.2.4), одинакова: если начать со структуры Γ_a , то Γ_b воспроизведется как коэффициент при логарифме.

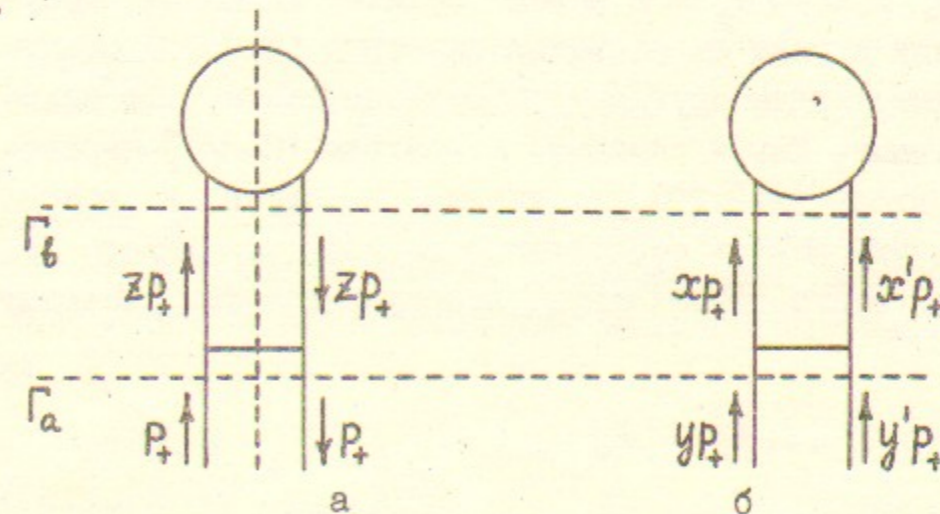


Рис.2.4

Матрицы γ приведены в табл. 2.3. Отметим, что характерные члены $\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}$ в диагональных элементах происходят от "остатков инфракрасной особенности" $\frac{A}{x-y}$. Собственные функции можно прямым, но длинным путем найти при помощи их диагонализации [II7], но удобнее исходить из общих свойств симметрии [37-38]. Поскольку операторы $(C-V)_q^q$ и $(C-V)_g^g$ не повышают степень X , их собственные функции являются полиномами. Из свойства симметрии (2.3.10) следует, что собственные функции оператора $(C-V)_q^q$ ортогональны с весом $H_{qq} = X X'$. Поэтому они представляют собой полиномы Гегенбауэра $C_n^{3/2}(X)$. Аналогично собственные функции оператора $(C-V)_g^g$ ортогональны с весом $H_{gg} = \frac{C}{n_f} (X X')^2$, и поэтому представляют собой полиномы Гегенбауэра $C_{n-1}^{5/2}(X)$. При отсутствии смешивания эти функции являются и собственными функциями всего уравнения эволюции.

Для рассмотрения смешивания перейдем к ортонормированному базису

$$\begin{aligned}
 {}_q E_n &= 2 \sqrt{\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}} \begin{pmatrix} C_n^{3/2}(X) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 {}_g E_n &= 12 \sqrt{\frac{n_f}{C_f} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}} \begin{pmatrix} 0 \\ C_{n-1}^{5/2}(X) \end{pmatrix} \quad (2.3.20)
 \end{aligned}$$

Матрицы $(C-V)_q^g$ и $(C-V)_g^q$ и в новом базисе являются треугольными. Наряду с этим из свойства симметрии (2.3.10) следует, что они симметричны друг другу. Следовательно, они являются диагональными. Иными словами, операторы $(C-V)_q^g$ переводят вектора базиса (2.3.20) с данным n друг в друга. В результате можно искать собственные вектора для каждого n отдельно. Для этого необходимо диагонализировать матрицу $(\gamma_n)_i^j$:

$$\begin{aligned}
 (\gamma_n)_q^q &= (\gamma_q^q)_n^n, \quad (\gamma_n)_g^g = (\gamma_g^g)_n^n, \\
 (\gamma_n)_g^q &= \sqrt{\frac{n_f}{C_f} \frac{n}{n+3}} (\gamma_g^q)_n^n = (\gamma_n)_q^g = \sqrt{\frac{C_f}{n_f} \frac{n+3}{n}} (\gamma_q^g)_n^n \quad (2.3.21)
 \end{aligned}$$

Эволюцию можно описывать двумя равноправными способами (эволюция волновых функций или жестких амплитуд), до сих пор мы следовали одному из них. Определив функцию

$$S_a = X X' \frac{1}{4N} S_p [\Gamma M_H(x)]_a \quad (2.3.22)$$

можно символически записать амплитуду (2.1.3) в следующих формах:

$$M = F^b(Q_0) G_b^a(\Delta \xi) S_a(Q) = F^a(Q) S_a(Q) = F^b(Q_0) S_b^a(Q, \Delta \xi) \quad (2.3.23)$$

где

$$\begin{aligned}
 F^a(Q) &= F^b(Q_0) G_b^a(\Delta \xi) \\
 S_b^a(Q, \Delta \xi) &= G_b^a(\Delta \xi) S_a(Q) \quad (2.3.24)
 \end{aligned}$$

а $G_b^a(\Delta \xi)$ есть функция Грина уравнения эволюции. В аксиальной калибровке функция G представляет собой сумму лестничных диаграмм, и уравнение Бете-Сальпетера для нее можно записать в следующих двух эквивалентных формах (см. рис. 2.5., ср. пункт I.3):

$$\begin{aligned}
 (\delta_c^b \frac{\partial}{\partial \xi} + C_c^b) G_a^c &= V_c^b G_a^c \\
 (\delta_a^c \frac{\partial}{\partial \xi} + C_a^c) G_c^b &= G_c^b V_a^c \quad (2.3.25)
 \end{aligned}$$

Уравнения (2.3.25) с учетом соотношений (2.3.24) можно записать либо в форме уравнения эволюции для волновой функции (2.3.9), либо в форме уравнения эволюции для жесткой амплитуды S_a (2.3.24):

$$(\delta_a^c \frac{\partial}{\partial \xi} + C_a^c) S_c = S_c V_a^c \quad (2.3.26)$$

Собственные функции и собственные значения для этого уравне-

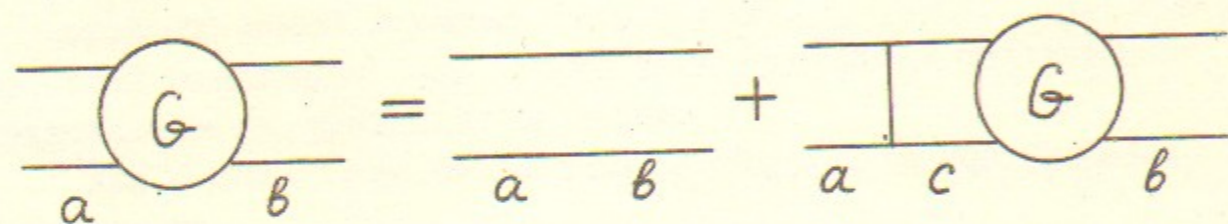
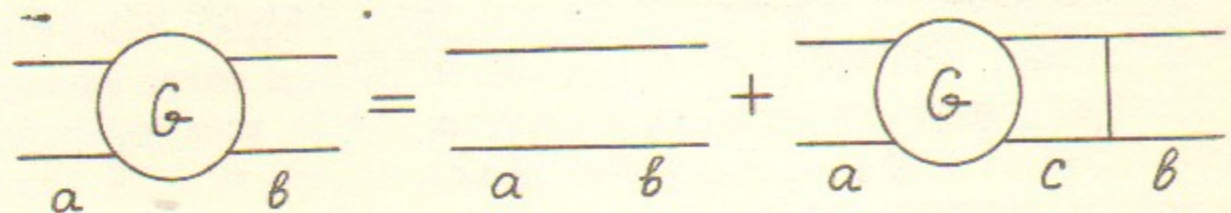


Рис. 2.5

ния совпадают с найденными выше для уравнения (2.3.9) в силу свойства симметрии (2.3.10).

Кварковые ядра V_q^q для волновых функций типов S, P, V были получены Бродским и Лепажем /22-24/. Они исчерпывают вопрос, если нет смешивания с глюонной волновой функцией. Матрица V для синглетных волновых функций типа P была получена Орндорфом /118/, Терентьевым /119/ и авторами /37-38/, а для типа S Чейзом /120/ и авторами /38/; ядро V_g^g для двухглюонных состояний со спиральностью ± 2 (тип T_+) получено в нашей работе /38/. Сопоставление с уравнением Альтарелли-Паризи для ядра V_q^q произведено Чейзом /120/ с помощью другой техники. Как показал Макеенко /121/, тот факт, что собственные функции V_q^q есть $C_n^{3/2}$, а $V_g^g = C_{n-1}^{5/2}$, связан с конформной группой^{*}. Аномальные размерности γ_q^q были ранее получены операторным методом в работах Черняка, Житницкого, Сербо /17, 29-31/ и Ефремова, Радюшкина /18,

^{*}Этот вопрос подробно обсуждался также Орндорфом /121/.

32-34/. Случай кварк-глюонного смешивания рассмотрен Шифманом и Высоцким. /117/. Диагональные элементы $(\gamma_a^b)_n$ для волновых функций типов S и P , совпадающие с моментами ядер Альтарелли-Паризи, фактически известны давно, т.к. в операторном подходе они изучались в задачах о глубоко неупругом рассеянии соответственно неполяризованных /122-123/ и поляризованных /124-125/ частиц.

Заканчивая обсуждение эволюции волновых функций, отметим, что ее значительно труднее обнаружить, чем эволюцию функций распределения партонов, т.к. вследствие степенного падения сечений жестких адронных процессов доступен наблюдению относительно небольшой интервал значений Q^2 .

2.4. ЧТО ИЗВЕСТНО О ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ МЕЗОНОВ

Как уже говорилось, волновые функции мезонов определяются физикой больших расстояний, и не вычислимы в теории возмущений КХД. Исключение представляют мезоны из тяжелых кварка и антикварка. Способ описания нерелятивистского кваркония изложен в пункте 1.2. Описание ультрарелятивистского кваркония должно строиться в соответствии с таким же подходом, как для легких мезонов (пункт 2.1). Проследим, как происходит переход между этими двумя режимами.

В случае образования кваркония с относительно большим, но нерелятивистским импульсом $Q: m v \ll Q \ll m$, амплитуда содержит подавление $(\frac{k}{Q})^l \sim (\frac{m v}{Q})^l$, где $k \sim m v$ — характерный относительный импульс кварков в волновой функции кваркония $\tilde{\Psi}(k)$. В координатном представлении волновая функция ведет себя как τ^l , поэтому входит отношение размера области образования $\sim 1/Q$ к размеру мезона $\sim 1/m v$ в степени l . В ультрарелятивистском случае, однако, продольный размер кваркония уменьшен лоренцевым сокращением и составляет $\sim \frac{m}{Q} \frac{1}{m v} \sim \frac{1}{Q v}$. По соотношению неопределенностей разброс продольных импульсов $k_{||} \sim Q v$, т.е. ширина волновой функции $\sim v$. Фактор подавления амплитуды при условии, что орбитальная спиральность равна 0, будет $(\frac{k_{||}}{Q})^l \sim v^l$. Теперь он не содержит Q . В координатном представлении по-прежнему входит отношение размера области образования $\sim 1/Q$ к лоренц-сжа-

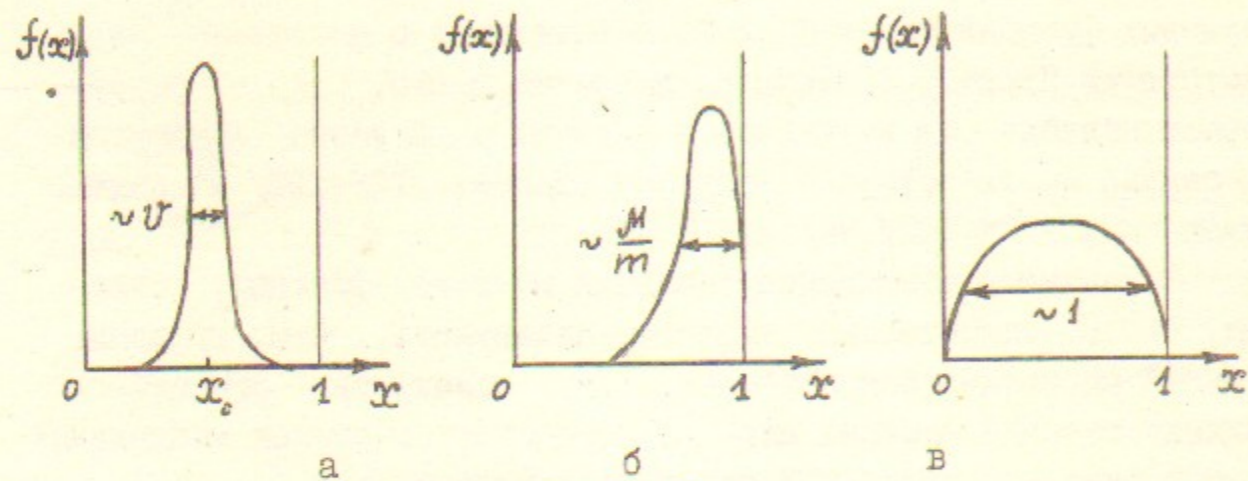


Рис. 2.6

тому продольному размеру $\sim 1/Qv$ в степени ℓ .

Волновые функции кваркония являются, таким образом, узкими: сосредоточены при $x \approx x_0 = \frac{m_q}{m_q + m_s}$ и имеют ширину $\sim v$ (рис. 2.6a). Поэтому если жесткая амплитуда $M_H(x)$ является плавной функцией вблизи $x = x_0$, волновые функции можно заменить на $\delta(x - x_0)$ (или ее производные). В случае S -волновых состояний спиновая структура будет $\gamma^5(\hat{p} + m)$ для паракваркония и $\hat{e}(\hat{p} + m)$ для ортокваркония. В ультррелятивистском случае для паракваркония остается асимптотически главная структура $\gamma^5 \hat{p}$ (тип P), для ортокваркония с продольной поляризацией $m \hat{e} \rightarrow \hat{p}$ (тип S) и с поперечной $\hat{p} \hat{e}$ (тип V). Во всех случаях волновая функция дается формулой

$$f^q(x) = 2N m \psi_0 \delta(x - x_0) \quad (2.4.1)$$

Чтобы получить волновые функции не S -волновых состояний, необходимо вернуться к формуле (I.2.II) и произвести разложение шпура матриц по k с учетом того обстоятельства, что продольные импульсы $k_{||} \sim Qv$ много больше поперечных $k_{\perp} \sim mv$, и выживают только асимптотические спиновые структуры волновой функции. Так, в случае паракваркония, подставляя $M_H = \gamma^5 \hat{p}_- \sum t_n (x - x_0)^n$, мы имеем для волновой функции типа P

$$\int \frac{1}{4N} f(x) \sum t_n (x - x_0)^n dz = Q \int \frac{\pi dx d\alpha d\vec{k}_{\perp}^2}{(2\pi)^4} \tilde{\varphi}(k) m [2x_0 x_0' + (1 - 2x_0)(x - x_0)] \times \sum t_n (x - x_0)^n = Q \int \frac{\pi dx d\alpha d\vec{k}_{\perp}^2}{(2\pi)^4} \tilde{\varphi}(k) k^{\mu_1} \dots k^{\mu_{\ell}} \left(\frac{2p_-}{Q^2}\right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{2p_-}{Q^2}\right)^{\mu_{\ell}} m \times [2x_0 x_0' t_{\ell} + (1 - 2x_0) t_{\ell-1}] = (-1)^{\ell} \frac{m}{2} \psi_e^{\mu_1 \dots \mu_{\ell}} \ell_{\mu_1} \dots \ell_{\mu_{\ell}} \times [t_{\ell} + \frac{1 - 2x_0}{2x_0 x_0'} t_{\ell-1}] \quad (2.4.2)$$

где ℓ_{μ} - единичный вектор в плоскости (p, p_-) ортогональный к p , откуда

$$f(x) = \frac{2N}{\ell!} m \psi_e^{\mu_1 \dots \mu_{\ell}} \ell_{\mu_1} \dots \ell_{\mu_{\ell}} \left[\delta^{(\ell)}(x - x_0) + \ell \frac{2x_0 - 1}{2x_0 x_0'} \delta^{(\ell-1)}(x - x_0) \right] \quad (2.4.3)$$

Входящая сюда комбинация связана с ψ_e через коэффициент Клебша-Гордана

$$\langle \underbrace{1, 0; \dots, 1, 0}_{\ell} | \ell, 0 \rangle = \sqrt{\frac{\ell!}{(2\ell-1)!!}} \quad (2.4.4)$$

(эта формула легко доказывается по индукции). Окончательно для волновой функции паракваркония (тип P) получаем

$$f(x) = \frac{2N m \psi_e}{\sqrt{\ell! (2\ell-1)!!}} \left[\delta^{(\ell)}(x - x_0) + \ell \frac{2x_0 - 1}{2x_0 x_0'} \delta^{(\ell-1)}(x - x_0) \right] \quad (2.4.5)$$

В случае мезона из одинаковых кварков второй член в квадратной скобке обращается в 0, что необходимо для выполнения свойства симметрии (2.1.8). Аналогичным образом для ортокваркония с нулевой спиральностью получаем волновую функцию типа S (используя $M_H = \hat{p}_- \sum t_n (x - x_0)^n$).

$$f(x) = \langle \ell, 0; 1, 0 | j, 0 \rangle \frac{2N m \psi_e}{\sqrt{\ell! (2\ell-1)!!}} \quad (2.4.6)$$

$$\times \left[\delta^{(\ell)}(x - x_0) + \ell \frac{2x_0 - 1}{2x_0 x_0'} \delta^{(\ell-1)}(x - x_0) - \frac{\ell(\ell-1)}{2x_0 x_0'} \delta^{(\ell-2)}(x - x_0) \right]$$

Состояния с $\ell = j + 1$ и $\ell = j - 1$ могут смешиваться. Наконец, для ортокваркония со спиральностью ± 1 получаем волновую функцию типа V (используя $M_H = \hat{p}_- \hat{e}_{\pm} \sum t_n (x - x_0)^n$).

$$f(x) = \langle \ell, 1; 1, 1 | j, 1 \rangle \frac{2N m \psi_\ell}{\sqrt{\ell!(2\ell-1)!}} \left[\delta^{(\ell)}(x-x_0) + \ell \frac{2x_0-1}{2x_0 x_0'} \delta^{(\ell-1)}(x-x_0) \right] \quad (2.4.7)$$

Опять возможно смешивание состояний с $\ell = j \pm 1$. В случае мезонов из одинаковых кварков в формулах (2.4.6, 2.4.7) также выпадает второй член в квадратных скобках, что необходимо для выполнения (2.1.8).

Вычисленные волновые функции кваркония относятся к передачам импульса $Q \sim m$. Подставляя их в качестве начальных условий уравнений эволюции (см. (2.3.I3, 2.3.II)), можно найти волновые функции при любых $Q \gg m$. Таким образом, волновые функции мезонов из тяжелых кварков можно считать полностью известными.

Не так дело обстоит для мезонов из одного тяжелого и одного легкого кварка ($D, B \dots$). С учетом лоренцева сокращения их продольный размер $\sim \frac{m}{Q} \frac{1}{\mu}$, или разброс продольных импульсов $\sim \frac{\mu}{m} Q$, что приводит к относительно узкой волновой функции с шириной $\sim \mu/m$. Она сосредоточена при $x \approx 1$ (почти весь импульс несет тяжелый кварк, легкому остается доля импульса $\sim \mu/m$, рис.2.6б). Поэтому в грубом приближении для волновой функции мезона с тяжелым кварком можно было бы написать

$$f_M^q(x) \approx f_M \delta(1-x) \quad (2.4.8)$$

Эта формула, однако, почти бесполезна. Жесткие амплитуды многих процессов имеют полюса при $x \rightarrow 0$ или 1, поэтому для количественной оценки матричного элемента необходима более детальная информация о поведении волновой функции при $x \approx 1$. Ясно, однако, что во всех таких процессах рождение D, B и т.п. мезонов будет значительно усилено как по сравнению с кварконием, так и по сравнению с легкими мезонами.

Для легких мезонов, повторяя аналогичную оценку (см. пункт 2.1), получаем, что ширина волновой функции ~ 1 . Поэтому для количественных вычислений необходимо достаточно детальное знание всей волновой функции. Нормировка волновых функций некоторых мезонов

$$f_M^P = \int_0^1 f_M^P(x) dx \quad (2.4.9)$$

с хорошей точностью известна феноменологически (см. пункт 3.1). Значительно меньше известно о форме волновых функций. Имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют, что волновые функции легких мезонов должны быть широкими, но т.к. они относятся к области небольших Q , применимость асимптотических формул является сомнительной, кроме того, сами данные при наибольших доступных $Q \sim 3$ Мэв весьма неточны.

В подходе, основанном на правилах сумм /55/, удается выразить многие параметры низколежащих резонансов через вакуумные средние нескольких операторов, рассматриваемые как феноменологические параметры. В частности, вычислены нормировки волновых функций f_π, f_ρ, \dots , и они хорошо согласуются с экспериментом. Поэтому представляется разумным распространить этот подход на более детальные характеристики волновых функций /126/, а именно, найти из правил сумм несколько первых моментов волновой функции

$$\langle X^n \rangle = \frac{1}{f_M} \int_0^1 X^n f_M(x) dx \quad (2.4.10)$$

С ростом номера момента n интеграл все в большей степени определяется краями $x \approx 0$ или 1 (характерный $x \sim 1/n$), т.е. большими расстояниями. Поэтому степенные поправки быстро растут: $\frac{\mu^2}{Q^2 x} \sim \frac{\mu^2}{Q^2} n$. Значит, точность предсказаний быстро убывает, однако можно надеяться, что

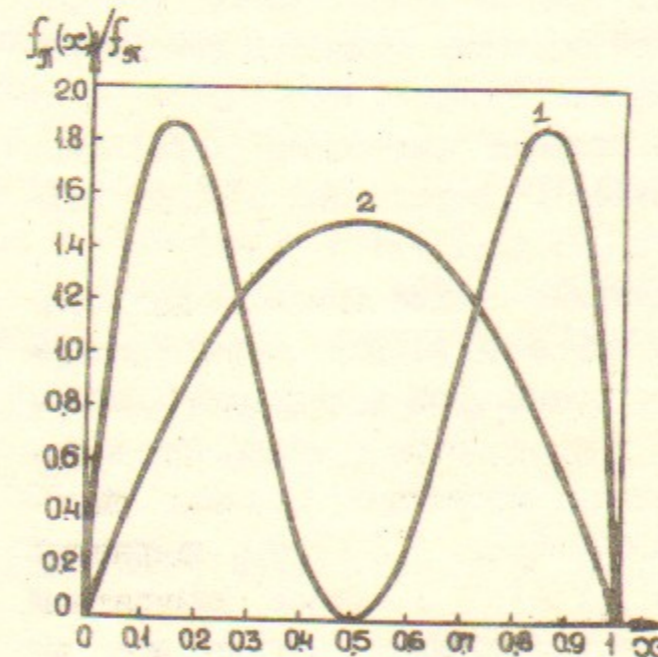


Рис.2.7

Волновая функция
 f_π - мезона
 1 - согласно работе /126/
 2 - асимптотическая.

первые несколько моментов могут быть определены правильно. В работе /126/ таким образом была исследована волновая функция π мезона. В результате была предложена модельная волновая функция, удовлетворяющая требованиям правил сумм. В точке нормировки $Q \approx 500$ Мэв она имеет вид (рис. 2.7)

$$f_{\pi}(x) = 120 f_{\pi} x(1-x)(x-1/2)^2 \quad (2.4.II)$$

В работе /127/ аналогичным образом исследовались волновые функции ρ , ω , φ , K и K^* мезонов. Нахождение волновых функций с помощью правил сумм подробнее обсуждается в Приложении.

2.5. СВЯЗЬ С ОПЕРАТОРНЫМ ПОДХОДОМ

При описании жестких адронных процессов практически каждая группа авторов пользуется своим "языком", и установление детального соответствия между разными подходами часто представляет собой нетривиальную задачу. Мы до сих пор пользовались подходом, основанным на Бете-Сальпетеровских волновых функциях и аксиальной калибровке, т.к. он имеет по нашему мнению ряд достоинств — он прост и нагляден, и в нем с самого начала присутствуют только те члены, которые дают главный асимптотический вклад. Операторный подход значительно менее прозрачен, и в нем в начале анализа возникает большое количество разных членов, значительная часть которых отбрасывается в асимптотической области. Однако в нем имеется хорошо разработанный формальный аппарат, что может оказаться очень полезным в более сложных ситуациях (например, при вычислении степенных поправок). Операторный подход подробнее изложен, например, в /23, 29, 33, 117/.

Он основан на том, что жесткая стадия процесса вычисляется по фейнмановским диаграммам, а их внешние линии остаются гейзенберговскими операторами. При вычислении амплитуды процесса с одним мезоном в борновском приближении в координатном представлении возникает матричный элемент билонкального кваркового оператора $\langle 0 | \bar{q}_{\beta}(0) q_{\alpha}(z) | M \rangle$, свернутый с жесткой частью диаграммы по α , β , z . Более аккуратный учет излучения глюонов на малых расстояниях заменяет его на

калибровочно инвариантный оператор $\bar{q}_{\beta}(0) e^{-ig \int_0^z A dx} q_{\alpha}(z)$. Его можно разложить по 16 γ матричным структурам:

$$4 \bar{q}_{\beta} q_{\alpha} = (1)_{\alpha\beta} \bar{q} q + (\gamma^5)_{\alpha\beta} \bar{q} \gamma^5 q + (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \bar{q} \gamma^{\mu} q + (\gamma^5 \gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \bar{q} \gamma^{\mu} \gamma^5 q + \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \bar{q} \sigma^{\mu\nu} q \quad (2.5.I)$$

Для любых квантовых чисел мезона можно записать общий вид матричных элементов этих операторов. Рассмотрим для простоты скалярный мезон:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{q}(z) \gamma^5 q(0) | M \rangle &= 0, \quad \langle 0 | \bar{q}(z) \gamma^{\mu} \gamma^5 q(0) | M \rangle = 0, \\ \langle 0 | \bar{q}(z) q(0) | M \rangle &= \varphi_1(p \cdot z, z^2), \\ \langle 0 | \bar{q}(z) \gamma^{\mu} q(0) | M \rangle &= p^{\mu} \varphi_2(p \cdot z, z^2) + z^{\mu} \varphi_3(p \cdot z, z^2), \\ \langle 0 | \bar{q}(z) \sigma^{\mu\nu} q(0) | M \rangle &= (p^{\mu} z^{\nu} - p^{\nu} z^{\mu}) \varphi_4(p \cdot z, z^2) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Для псевдоскалярного мезона все будет точно так же, если все γ матричные структуры домножить на γ^5 (в случае $\sigma^{\mu\nu}$ это эквивалентно свертке правой части с $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$). Из соображений размерности видно, что главный степенной вклад дает член φ_2 , в котором можно положить $z^2 = 0$. Фурье-образ $\varphi_2(p \cdot z)$ и представляет собой волновую функцию (типа S), как она была определена в пункте 2.1.

Рассмотрим еще общий вид матричных элементов для векторного мезона с вектором поляризации e_{β} :

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{q}(z) \gamma^5 q(0) | M \rangle &= 0, \\ \langle 0 | \bar{q}(z) \gamma^{\mu} \gamma^5 q(0) | M \rangle &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{\nu} z_{\alpha} e_{\beta} \varphi_1, \\ \langle 0 | \bar{q}(z) q(0) | M \rangle &= e \cdot z \varphi_2, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

$$\langle 0 | \bar{q}(z) \gamma^\mu q(0) | M \rangle = e^\mu \psi_3 + p^\mu e \cdot z \psi_4 + z^\mu e \cdot z \psi_5,$$

$$\langle 0 | \bar{q}(z) \sigma^{\mu\nu} q(0) | M \rangle = (p^\mu e^\nu - p^\nu e^\mu) \psi_6 + (z^\mu e^\nu - z^\nu e^\mu) \psi_7 + (p^\mu z^\nu - p^\nu z^\mu) e \cdot z \psi_8$$

Если поляризация продольная, в асимптотике $m \rightarrow p$, и выживает только комбинация $\frac{1}{m} (\psi_3 + p \cdot z \psi_4) p^\mu$ — как и следовало ожидать (см. пункт 2.1), нет ничего нового по сравнению со скалярным мезоном. Если поляризация поперечная, выживает член ψ_6 , и Фурье-образ $\psi_6(p \cdot z)$ дает волновую функцию типа V.

Аналогичную процедуру можно проделать с глюонными биллокальными операторами $G_{\alpha\beta}(z) G_{\mu\nu}(0)$. Для скалярного мезона общий вид матричного элемента

$$\langle 0 | G_{\alpha\beta}(z) G_{\mu\nu}(0) | M \rangle = (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \psi_1 + (P_\alpha P_\mu g_{\beta\nu} - P_\beta P_\mu g_{\alpha\nu} - P_\alpha P_\nu g_{\beta\mu} + P_\beta P_\nu g_{\alpha\mu}) \psi_2 + \dots \quad (2.5.4)$$

В асимптотике выживает ψ_2 и дает глюонную волновую функцию типа S. Для псевдоскалярного мезона достаточно взять в правой части (2.5.4) дуальный тензор по $\alpha\beta$ (или по $\mu\nu$). Один из членов разложения для тензорного мезона даст волновую функцию типа T.

Биллокальные операторы можно разложить по локальным калибровочно-инвариантным операторам $\bar{q} \overleftrightarrow{D} \dots \overleftrightarrow{D} q, G \overleftrightarrow{D} \dots \overleftrightarrow{D} G$. Чем больше размерность оператора, тем больше степень Q^2 в знаменателе коэффициента. Однако входящие в оператор индексы дают при взятии матричного элемента P_+ , и могут быть свернуты с P_- из коэффициента разложения, что компенсирует Q^2 . Таким образом, классификация происходит не по размерности, а по твисту (твист = размерность — спин). Главный вклад дают операторы твиста 2, операторы высших твистов дают степенные поправки. При эволюции по ренормгруппе будут также генерироваться операторы с внешними производными, поэтому рассмотрим сразу общие операторы вида:

$$S: q O_{n(n_0)} = \text{Sym} \frac{i \partial_{\mu_{n+1}}}{2} \dots \frac{i \partial_{\mu_{n_0}}}{2} \bar{q} \overleftrightarrow{D}_{\mu_1} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_n} q$$

$$g O_{n(n_0)} = \text{Sym} \frac{i \partial_{\mu_{n+1}}}{2} \dots \frac{i \partial_{\mu_{n_0}}}{2} \frac{i}{2n_f} G_{\alpha\nu}^a \overleftrightarrow{D}_{\mu_1} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_{n-1}} G_{\mu_n \alpha}^a$$

$$P: q O_{n(n_0)} = \text{Sym} \frac{i \partial_{\mu_{n+1}}}{2} \dots \frac{i \partial_{\mu_{n_0}}}{2} \bar{q} \gamma^\nu \gamma^5 \overleftrightarrow{D}_{\mu_1} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_n} q$$

$$g O_{n(n_0)} = \text{Sym} \frac{i \partial_{\mu_{n+1}}}{2} \dots \frac{i \partial_{\mu_{n_0}}}{2} \frac{i}{2n_f} \tilde{G}_{\alpha\nu}^a \overleftrightarrow{D}_{\mu_1} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_{n-1}} G_{\mu_n \alpha}^a \quad (2.5.5)$$

$$V: q O_{n(n_0)} = e_\alpha^* \text{Sym} \frac{i \partial_{\mu_{n+1}}}{2} \dots \frac{i \partial_{\mu_{n_0}}}{2} \bar{q} \sigma^{\alpha\nu} \overleftrightarrow{D}_{\mu_1} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_n} q$$

$$T: g O_{n(n_0)} = \frac{e_\alpha^* e_\beta^*}{\sqrt{2}} \text{Sym} \frac{i \partial_{\mu_{n+1}}}{2} \dots \frac{i \partial_{\mu_{n_0}}}{2} \frac{i}{2n_f} G_{\alpha\nu}^a \overleftrightarrow{D}_{\mu_1} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_{n-1}} G_{\mu_n \alpha}^a$$

Здесь q — кварковое поле, $G_{\mu\nu}^a$ — напряженность глюонного поля, $\tilde{G}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^a$, $\overleftrightarrow{D}_\mu$ — ковариантная производная, $\overleftrightarrow{D}_\mu = (\overleftrightarrow{D}_\mu - \overleftrightarrow{D}_\mu)/2$, Sym — симметризация по $\nu \mu_1 \dots \mu_{n_0}$. В случае несинглетного по аромату мезона глюонные операторы $g O_{n(n_0)}$ отсутствуют, а в кварковых под $\bar{q} \dots q$ понимается нужная структура по аромату, в случае синглетных мезонов под $\bar{q} \dots q$ понимается $\frac{1}{n_f} \sum_q \bar{q} \dots q$.

Для установления связи между подходами выразим матричные элементы этих операторов между вакуумом и одномезонным состоянием M через волновую функцию мезона /37/. Для этого на рис. 2.2 следует заменить жесткую амплитуду на соответствующий оператор. В итоге имеем (учитывая замечание в пункте 2.1 о том, что не нужно переставлять тождественные глюоны при вычислении этой диаграммы)

$$\langle 0 | a O_{n(n_0)} | M \rangle = \left(\frac{P_+}{2}\right)_\nu \left(\frac{P_+}{2}\right)_{\mu_1} \dots \left(\frac{P_+}{2}\right)_{\mu_{n_0}} \int_{-1}^{+1} dx \alpha e_n^b(x) F_b(x) \quad (2.5.6)$$

Отметим, что эта формула позволяет производить перевод с операторного языка на язык волновых функций и обратно на любой стадии вычислений.

Для мезона со спином S , $S = |\lambda|$ векторов p_+ в (2.5.6) из $n+1$ входят в тензор поляризации мезона (см. пункт 2.3). Поэтому отличные от 0 моменты кварковой волновой функции имеются только при $n \geq S - |\lambda| - 1$, а глюонной - $n \geq S - |\lambda|$.

Таким образом, операторному разложению бислокального оператора по локальным (2.5.5) соответствует разложение жесткой амплитуды $S^a(X)$ в ряд Тейлора по X . Локальные операторы определены только при задании точки нормировки Q (см. формулу (2.3.24) для $S^a(Q, \Delta \xi)$), и при эволюции в соответствии с уравнениями ренормгруппы оператор $a^{0_{n(n)}}$, возникший при разложении жесткой амплитуды, смешивается с операторами $\rho^{0_{k(n)}}$ с $k \leq n$. Из формулы (2.5.6) следует, что это смешивание такое же, как для функций S^a в базисе (2.3.17), и поэтому описывается матрицей аномальных размерностей $(\gamma_a^b)_n^k$ (табл. 2.3). Из операторов (2.5.5) можно построить мультипликативно ренормируемые операторы, соответствующие собственным функциям уравнения эволюции для S^a (2.3.26).

Обычная схема операторного подхода такова: вычисляется матричный элемент в виде бислокального оператора; разлагается по локальным операторам (2.5.5), нормированным в точке Q ; переразлагается по мультипликативно ренормируемым операторам; они переводятся в желаемую точку нормировки Q_0 и переразлагаются опять по операторам (2.5.5). В результате получается выражение для амплитуды процесса с характерной передачей Q через матричные элементы операторов, нормированных в точке Q_0 . Видно, что эта схема эквивалентна следующей последовательности действий: вычисляется жесткая амплитуда $S_a(Q)$; она выражается через жесткую амплитуду, нормированную в Q_0 , при помощи разложения по собственным функциям уравнения эволюции; амплитуда процесса по формуле (2.1.3) выражается через волновую функцию, нормированную в точке Q_0 .

Язык волновых функций представляется более естествен-

ным, т.к. он не требует обязательного разложения жесткой амплитуды в ряд по $1/Q$, и кроме того позволяет свести эффекты эволюции в универсальные волновые функции $f^a(x, Q^2)$, не зависящие от процесса.

3. ПРОЦЕССЫ С ОДНИМ МЕЗОНОМ

3.1. РАСПАД МЕЗОНА НА ЛЕПТОНЫ

Процессы, в которых один мезон формируется или уничтожается на малых расстояниях, содержат в сечении один малый множитель f_M^2/Q^2 (это минимальная степень подавления). Поэтому они лучше всего подходят для изучения при больших Q^2 , где применимо теоретическое рассмотрение. Кроме того, из них мы в чистом виде получаем информацию о волновой функции одного мезона.

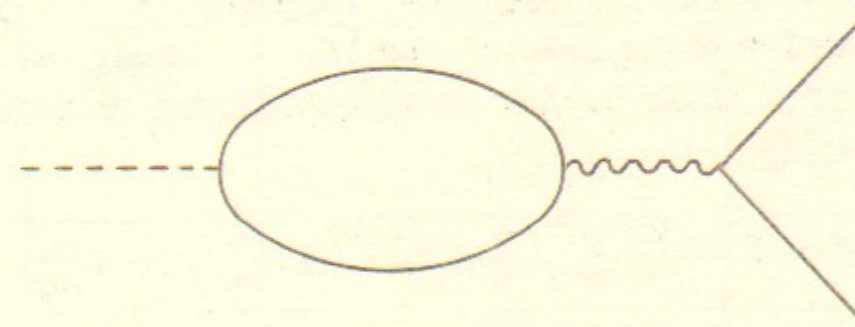


Рис. 3.1

Особое место среди одномезонных процессов занимают слабые распады заряженных мезонов на $l \bar{\nu}_l$ (через виртуальный W) и электромагнитные распады нейтральных мезонов на $l^+ l^-$ (через виртуальный фотон) (рис. 3.1). Кварк и антикварк в одной точке переходят в виртуальный W бозон или фотон. Поэтому ясно, что эти распады должны измерять кварк-антикварковую (двухчастичную!) волновую функцию в нуле, или в импульсном представлении интеграл от волновой функции f_M^q (2.4.9). Этот процесс не имеет характерного расстояния $1/Q$ (или если угодно, имеет $Q = \infty$). Однако f_M^q сохраняется при

эволюции (2.3.15), так что результат не зависит от точки нормировки. В системе бесконечного импульса амплитуда перехода мезона в виртуальный W бозон (для волновых функций типов S и P) или фотон (для типа S), вычисленная по формуле (2.1.3), равна соответствующей константе связи, умноженной на $f_M^q p^\mu$. Для бесспиновых мезонов такая форма должна сохраняться и в системе покоя, т.к. нет других векторов кроме p^μ . Для продольно поляризованных мезонов со спином 1 в системе бесконечного импульса мы не можем отличить p^μ от $m e^\mu$. Поскольку матричный элемент должен быть линеен по e^μ и $p \cdot e = 0$, единственно возможной структурой является $f_M^q m e^\mu$. Для мезонов со спином $S \geq 2$ вообще невозможно построить подобные структуры, и для них $f_M^q = 0$ (см. пункт 2.5).

Отсюда следует известная формула, например, для распада $\pi \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell$ (см. напр., /66/).

$$\frac{1}{m_\pi} \Gamma(\pi \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell) = \frac{1}{8\pi} G^2 m_\ell^2 f_\pi^2 \cos^2 \vartheta_c \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}\right)^2 \quad (3.1.1)$$

Для Кабиббо-подавленных распадов, например, $K \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell$, в соответствующей формуле вместо $\cos^2 \vartheta_c$ стоит $\sin^2 \vartheta_c$, где ϑ_c - угол Кабиббо. Для электромагнитных распадов, например, $\rho^0 \rightarrow \ell^+ \ell^-$

$$\frac{1}{m_\rho} \Gamma(\rho^0 \rightarrow \ell^+ \ell^-) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m_\rho^2} \left(\sum_q Q_q f_{\rho^0}^q\right)^2 \left(1 + 2 \frac{m_\ell^2}{m_\rho^2}\right) \sqrt{1 - 4 \frac{m_\ell^2}{m_\rho^2}} \quad (3.1.2)$$

и аналогично для ω, φ . В случае ρ^0 мезона по изотопической симметрии $f_{\rho^0}^u = -f_{\rho^0}^d = f_{\rho^+}^u / \sqrt{2}$, и сумма в скобке в (3.1.2) равна $f_{\rho^+}^u / \sqrt{2} \equiv f_\rho / \sqrt{2}$.

Другим каналом тех же слабых процессов являются распады $\tau \rightarrow \nu_\tau M$. В случае псевдоскалярных мезонов, например, для распада $\tau \rightarrow \nu_\tau \pi$ (напомним, что $dR_\tau(X) \equiv d\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau X) / \Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e)$)

$$R_\tau(\pi) = 12 \pi^2 \frac{f_\pi^2}{m_\tau^2} \cos^2 \vartheta_c \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\tau^2}\right)^2 \quad (3.1.3)$$

Для Кабиббо-подавленных распадов, например, $\tau \rightarrow \nu_\tau K$, в соответствующей формуле вместо $\cos^2 \vartheta_c$ стоит $\sin^2 \vartheta_c$. В случае векторных мезонов, например, для распада $\tau \rightarrow \nu_\tau \rho$

Таблица 3.1

Нормировка волновых функций (экспериментальные данные)

f_M	$f_M, M \approx B$	Альтернативная форма представления результата	процесс
f_π	132 ± 1		$\pi \rightarrow \mu \nu$
f_k	161 ± 8		$k \rightarrow \mu \nu$
f_ρ	211 ± 11	$\frac{g_\rho^2}{4\pi} = 2,11 \pm 0,22$	$e^+ e^- \rightarrow \rho$
f_ω	220 ± 25	$\frac{g_\omega^2}{4\pi} = 18,1 \pm 4,1$	$e^+ e^- \rightarrow \omega$
f_φ	460 ± 13	$\frac{g_\varphi^2}{4\pi} = 14,1 \pm 0,8$	$e^+ e^- \rightarrow \varphi$
f_{K^*}	250 ± 50		$\tau \rightarrow \nu_\tau K^*$
f_ψ	130 ± 6	$\Psi_0 = (2,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	$e^+ e^- \rightarrow \psi$
$f_{\psi'}$	96 ± 5	$\Psi_0 = (1,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	$e^+ e^- \rightarrow \psi'$
f_γ	227 ± 20	$\Psi_0 = (1,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-2}$	$e^+ e^- \rightarrow \gamma$
$f_{\gamma'}$	156 ± 12	$\Psi_0 = (0,78 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	$e^+ e^- \rightarrow \gamma'$
$f_{\gamma''}$	132 ± 4	$\Psi_0 = (0,64 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$	$e^+ e^- \rightarrow \gamma''$

Примечания:

1. Экспериментальные данные для семейств ψ, γ , а также K^* из /45/, остальные из Particle Data Group, Rev. Mod. Phys. 52, N 2, p.2 (1980)

2. $f_\omega = \sqrt{2} f_\omega^u, f_\varphi = \sqrt{2} f_\varphi^u$

3. Для кваркония $f_M = 2m \Psi_0$

4. $f_\rho = \sqrt{2} \frac{m_\rho}{g_\rho}, f_\omega = 3\sqrt{2} \frac{m_\omega}{g_\omega}, f_\varphi = 3 \frac{m_\varphi}{g_\varphi}$

$$R_{\tau}(\rho) = 12 \pi^2 \frac{f_{\rho}^2}{m_{\tau}^2} \cos^2 \vartheta_c \left(1 - \frac{m_{\rho}^2}{m_{\tau}^2}\right)^2 \left(1 + 2 \frac{m_{\rho}^2}{m_{\tau}^2}\right) \quad (3.1.4)$$

Для Кабиббо-подавленных распадов, например, $\tau \rightarrow \nu_{\tau} K^*$, вместо $\cos^2 \vartheta_c$ стоит $\sin^2 \vartheta_c$.

Другим каналом электромагнитных процессов является e^+e^- аннигиляция в векторный мезон. Если пренебречь шириной векторных мезонов, то, например, сечение $e^+e^- \rightarrow \rho^0$ имеет вид*

$$R(\rho) = 12 \pi^2 \left(\sum_q Q_q f_{\rho^0}^q\right)^2 \delta(Q^2 - m_{\rho}^2) \quad (3.1.5)$$

и аналогично для ω, φ . Учитывая связь (1.2.7) e^+e^- аннигиляции в канале с изоспином 1 и распадов τ , из этой формулы можно опять получить ширину распада $\tau \rightarrow \nu_{\tau} \rho$ (3.1.4). С учетом конечной ширины сечения описываются формулой Брейта-Вигнера

$$R(e^+e^- \rightarrow \rho^0 \rightarrow f) = \frac{g}{4d^2} \frac{\Gamma(\rho^0 \rightarrow e^+e^-) \Gamma(\rho^0 \rightarrow f)}{(Q - m_{\rho})^2 + \Gamma_{\rho}^2/4} \quad (3.1.6)$$

Имеющиеся экспериментальные данные о нормировке волновых функций приведены в табл.3.1.

Выражения для ширины распада τ лептона с очевидными изменениями применимы для слабых распадов тяжелых кварков, например, b . Для Кабиббо-разрешенных распадов $b \rightarrow c$ нужно учесть массу c кварка (в отличие от $m_{\nu_{\tau}} = 0$). Мезоны, образовавшиеся при помощи такого механизма, монохроматичны с точностью $\sim \mu/m_c$ (их энергия равна верхней границе сплошного спектра мезонов, образовавшихся при фрагментации легкого кварка, вблизи этой границы распределение мезонов квадратично стремится к 0), кроме того, они не сопровождаются близкими по импульсу адронами, а их импульс уравнивается летящей в противоположную полусферу "струей", обычно содержащей D мезон. Можно ли экспериментально выделить их в распадах B мезонов - вопрос сложный, для его решения необходимо подробное исследование физического фона.

Заметим также, что с использованием методов алгебры токов и аксиальной аномалии была вычислена (см., напр., /128/) вероятность распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ (она также выражается через f_{π}). Она хорошо согласуется с экспериментом, что является еще одним подтверждением $dR(x) \equiv d\sigma(e^+e^- \rightarrow X) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$.

ним подтверждением существования 3 цветов кварков (без них результат был бы в 9 раз меньше). Бродский, Лепаж и Хуанг /129,130,25/ связали этот распад с Бете-Сальпетеровской волновой функцией π мезона, не проинтегрированной по d^2k_{\perp} , а взятой при $k_{\perp} = 0$. Найденное ими значение волновой функции может быть полезным при конструировании феноменологических выражений для Бете-Сальпетеровской волновой функции /129,130,25/.

3.2. ФОРМФАКТОР ФОТОН-МЕЗОН

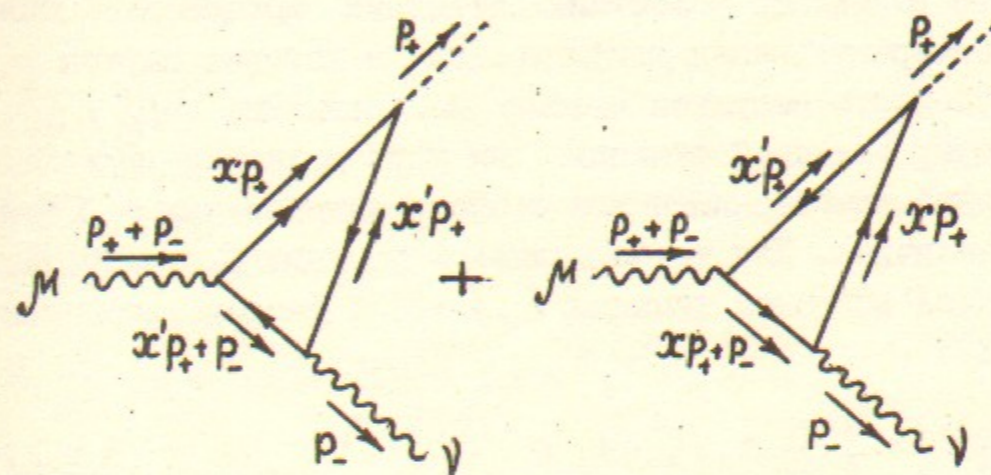


Рис.3.2

Простейший эксклюзивный процесс - это $\gamma^* \rightarrow \gamma M$ (переходный формфактор фотон - мезон) (рис.3.2). Размерная оценка дает

$$R(\gamma M) \sim \alpha \frac{f_M^2}{Q^2} \quad (3.2.1)$$

В нем участвует только кварковая волновая функция, и спиральность мезона должна быть равна 0. С учетом эволюции волновые функции следует брать в точке нормировки Q . Могут рождаться только абсолютно нейтральные мезоны с положительной C -четностью. Матричный элемент для мезона типа P /22,24,29/

$$M = e^2 \frac{i \varepsilon_{\perp}^{\mu\nu}}{2} \sum_q Q_q^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x}\right) f_M^q(x) dx \quad (3.2.2)$$

и типа S /38/

$$M = e^2 \frac{\delta_{\perp}^{\mu\nu}}{2} \sum_q Q_q^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} \right) f_M^q(x) dx \quad (3.2.3)$$

Как и следовало ожидать, для мезонов с отрицательной С-четностью (P_-, S_-) интегралы обращаются в 0 в силу симметрии волновой функции (2.1.8).

Здесь нам впервые встретился интеграл

$$I_M^P = \int_0^1 \frac{f_M^P(x) dx}{1-x} \quad (3.2.3)$$

который часто возникает в жестких мезонных процессах. Так как в нем подчеркнут вклад конфигураций, в которых партон p несет большую часть импульса мезона M , величина I_M^P / f_M^P чувствует форму волновой функции: чем шире волновая функция или чем сильнее она перекошена в сторону лидирования p , тем больше эта величина. Для узкой волновой функции $I/f=2$, для асимптотической волновой функции $I/f=3$. С учетом эволюции (см. (2.3.II))

$$I_M^P(\xi) = \frac{1}{2} \sum_n a_n(\xi_0) k_n e^{-\gamma_n(\xi-\xi_0)} \quad (3.2.4)$$

где k_n — коэффициент при $C_n^{3/2}(X)$ в собственной функции $E_n^q(X)$.

Принято выделять из матричного элемента кинематический множитель $\frac{e^2}{2} i \xi_{\perp}^{\mu\nu} Q^2$ или $\frac{e^2}{2} \delta_{\perp}^{\mu\nu} Q^2$, а остаток называть формфактором $F_{\gamma M^0}(Q^2)$. Сечение выражается через формфактор следующим образом:

$$R(\gamma M^0) = \left| \frac{M}{2eQ} \right|^2 = \frac{\pi \alpha}{2} Q^2 |F_{\gamma M^0}(Q^2)|^2 \quad (3.2.5)$$

Угловое распределение является поперечным. Формфактор равен (при $Q \gg \mu$)

$$F_{\gamma M^0}(Q^2) = 2 \frac{\sum_q Q_q^2 I_M^q}{Q^2} \quad (3.2.6)$$

Если мезон M^0 — член изотриплета (как π^0), по изотопической симметрии формфактор выражается через волновую функцию заря-

женного члена триплета:

$$F_{\gamma M^0}(Q^2) = \sqrt{2} (Q_u^2 - Q_d^2) \frac{I_{M^+}^u}{Q^2} \quad (3.2.7)$$

При $Q^2 < 0$ формфактор $F_{\gamma M^0}$ можно измерять в двухфотонном процессе с одним сильно виртуальным фотоном. Сечение рассеяния $e\gamma \rightarrow eM^0$ с большой передачей импульса равно

$$\frac{d\sigma}{dt}(e\gamma \rightarrow eM^0) = \pi^2 \alpha^3 |F(t)|^2 \frac{S_{e\gamma}^2 + t^2}{S_{e\gamma}^2 t} \quad (3.2.8)$$

В приближении эквивалентных фотонов через него можно выразить сечение $e^+e^- \rightarrow e^+e^-M^0$ (см., напр., /131/)

$$d\sigma = \int d\sigma_{\gamma} n(x) dx, \quad n(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1+(1-x)^2}{x} \ln \frac{\sqrt{t}}{x m_e} \quad (3.2.9)$$

где $x = S_{e\gamma}/S_{e^+e^-}$, $n(x)$ — плотность эквивалентных фотонов с виртуальностью $\ll t$. Отсюда

$$x_0 \frac{d\sigma}{dx_0}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-M^0) = 2\pi \alpha^4 |F(Sx_0)|^2 \times \left[(2+x_0)^2 l_0 l - 2(1-x_0)(3+x_0) l + \frac{1}{2}(2+x_0)^2 l_0^2 \right] \quad (3.2.10)$$

где $x_0 = \frac{|t|}{S_{e^+e^-}}$, $l = \ln \frac{\sqrt{t}}{m_e}$, $l_0 = \ln \frac{1}{x_0}$.

В более общем случае, когда виртуальности обоих фотонов велики (рис. 3.3), матричный элемент для мезонов типа P равен

$$M = e^2 \frac{i \xi_{\perp}^{\mu\nu}}{2} \sum_q Q_q^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{x-x_0} + \frac{1}{x-x_0} \right) f_M^q(x) dx \quad (3.2.II)$$

а типа S

$$M = e^2 \frac{\delta_{\perp}^{\mu\nu}}{2} \sum_q Q_q^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{x-x_0} - \frac{1}{x-x_0} \right) f_M^q(x) dx \quad (3.2.I2)$$

Кинематическая переменная $x_0 = Q_1^2/(Q_1^2 - Q_2^2)$, в физической области двухфотонного процесса $x_0 > 1$ или $x_0 < 0$, при $x_0 = 0$ или 1 воспроизводятся результаты для реального фотона (3.2.2-3.2.3). При близких Q_1^2 и Q_2^2 $x_0 \rightarrow \infty$, и матричный

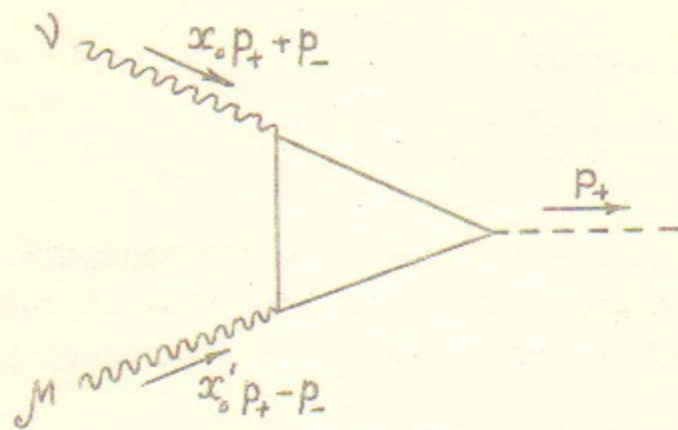


Рис. 3.3

элемент для мезона типа P становится равен

$$M = e^2 i \epsilon_{\perp}^{\mu\nu} \frac{1}{x_0} \sum_q Q_q^2 f_M^q \quad (3.2.13)$$

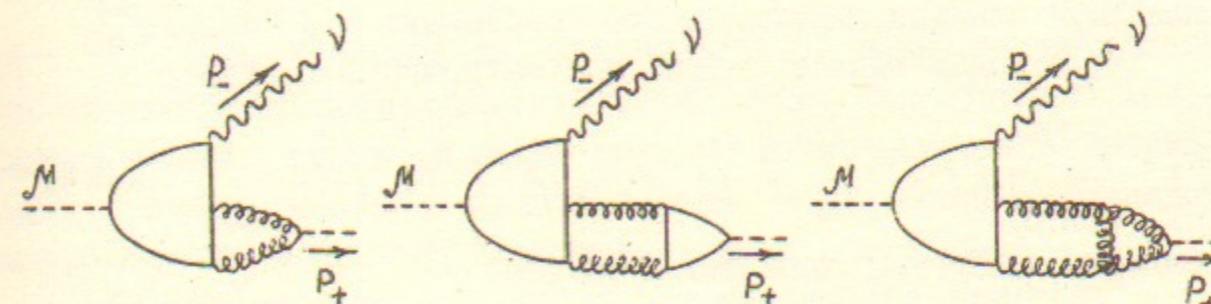
Следующий по сложности процесс $\gamma\gamma \rightarrow \gamma M^0$, на первый взгляд разрешенный, на самом деле подавлен по кварковому счету /132/. Дело в том, что спиральность мезона должна быть равна 0, и пренебрегая его массой, невозможно калибровочно-инвариантным образом связать его с 3 фотонами.

Имеется ряд процессов с одним мезоном и кварками или глюонами /133-134/ ($Mq \rightarrow gq$, $Mq \rightarrow q\bar{q}$, $Mq \rightarrow \gamma q$, $M\gamma \rightarrow q\bar{q}$...). Такие процессы с мезоном в начальном состоянии приводят к конечным состояниям, в котором отсутствует струя в направлении начального мезона (а есть 2 струи с большим P_{\perp} или струя и фотон). Те же процессы, прочитанные справа налево, приводят к конечным состояниям, содержащим одиночный (не сопровождаемый струей) мезон с большим P_{\perp} и струю или фотон в противоположном направлении. Сечения всех этих процессов выражаются через интегралы I_M^q . Заметим попутно, что в работе /135/ вычислено сечение двухмезонного процесса $Mq \rightarrow Mq$, приводящего к конечному состоянию, в котором нет струи в направлении начального мезона, есть одиночный мезон с большим P_{\perp} и противоположная ему струя.

3.3. РАСПАДЫ КВАРКНИЯ НА ФОТОН И МЕЗОН

Радиационные распады векторного кваркония $\psi_q \rightarrow \gamma q \bar{q} \rightarrow \gamma +$ адроны дают информацию о процессе перехода глюонов в адроны. Спектр фотонов в этом процессе играет для глюонов роль, во многом аналогичную полному сечению $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow$ адроны для кварков. При достаточно большой инвариантной массе сечение рождения адронов равно сечению рождения пары свободных глюонов (см. пункт 1.2). При меньших массах наблюдаются резонансы - процессы типа $\psi_q \rightarrow \gamma + M$ (обзор экспериментальных данных см. в /136, 44-47/). Т.к. мезон образуется из глюонной пары, он должен иметь существенную синглетную по аромату компоненту и положительную C-честность.

При достаточно большой массе кваркония можно пренебречь степенными поправками $\sim 1/m^2$. Тогда рождающийся мезон может принадлежать к типу S_+ (0^+ , 2^+ ... $\lambda=0$), P_+ (0^- , 2^- ... $\lambda=0$) или T_+ (2^+ , 3^+ ... $\lambda=\pm 2$). Рождение мезонов типа V_+ (1^+ , 2^+ ... $\lambda=\pm 1$) подавлено вследствие сохранения спиральности кварков. В борновском приближении (рис. 3.4а) могут рождаться только мезоны типа S_+ /38/. Помимо прямого вычисления, в этом легко убедиться следующим образом: если в матричном элементе Ора-Пауалла в трехмерной форме (1.2.38) направить 2 глюона параллельно, то их спиновая структура окажется типа S (ср. также /137, 138/). Размерная оценка относительной вероятности распада дает в этом случае



а

б

в

Рис. 3.4

$$B \sim \frac{\alpha}{\alpha_s} \left(\frac{f_M^g}{m} \right)^2 \quad (3.3.1)$$

рождение мезонов типа P_+ , T_+ возможно в однопетлевом приближении (рис. 3.4 б, в) (для типа T_+ есть только диаграммы рис. 3.4 в). Интеграл по петле в этих диаграммах определяется областью, где все виртуальности $\sim m$, и не содержит логарифма. В этом случае размерная оценка дает

$$B \sim \frac{\alpha}{\alpha_s} \alpha_s^2 \frac{(f_M^g, f_M^q)^2}{m^2} \quad (3.3.2)$$

Угловое распределение во всех случаях является поперечным.

Экспериментально в радиационных распадах ψ наблюдалось рождение мезонов η, η', ι (тип P_+); f, ϑ (при $\lambda = 0$ тип S_+ , при $\lambda = \pm 2$ тип T_+). Представляется странным, что в отличие от f с $\lambda = 0$ не наблюдалось рождение скалярных мезонов (S^*).

Для мезонов типа S_+ матричный элемент M и относительная вероятность распада B равны /38/

$$M = 4C_F Q_q e g^2 \psi_0 f_M^g \delta_{\perp}^{\mu\nu}, \quad B = \frac{\alpha}{\alpha_s} Q_q^2 \frac{48\pi^2}{\pi^2 g} \frac{C_F}{N^2 - 4} \left(\frac{f_M^g}{m} \right)^2 \quad (3.3.3)$$

$$B_\gamma \equiv \frac{\Gamma(\psi_q \rightarrow \gamma M)}{\Gamma(\psi_q \rightarrow \gamma + \text{адроны})} = \frac{4\pi^2}{\pi^2 - 9} \frac{C_F}{N} \left(\frac{f_M^g}{m} \right)^2$$

Если применить эту формулу к распаду $\psi \rightarrow \gamma f$, то можно получить $f_f^g \sim (75-90)$ Мэв, что, по-видимому, свидетельствует о заметной примеси двухглюонного состояния в f мезоне^{*}.

Для мезонов типа P общий вид матричного элемента

$$M = \frac{i\varepsilon_{\perp}^{\mu\nu}}{2} \int_0^1 [M_q(x) \sum_q f^q(x) + M_g(x) f^g(x)] dx \quad (3.3.4)$$

Вычисление диаграмм типа рис. 3.4 б дает

$$M_q(x) = 8C_F Q_q e \alpha_s^2 \psi_0 \left\{ \frac{1}{x} \left[\ln x + \frac{\pi^2}{4} + F(1-2x) - F(2x-1) \right] + (x \leftrightarrow x') \right\} \quad (3.3.5)$$

График этой функции приведен на рис. 3.5. Т.к. эта функция

^{*} При этом механизме рождаются f мезоны с $\lambda = 0$. Недавний эксперимент (Эдвардс/136/) показывает, что со сравнимой амплитудой рождаются f с $\lambda = \pm 1$, что указывает на наличие других механизмов.

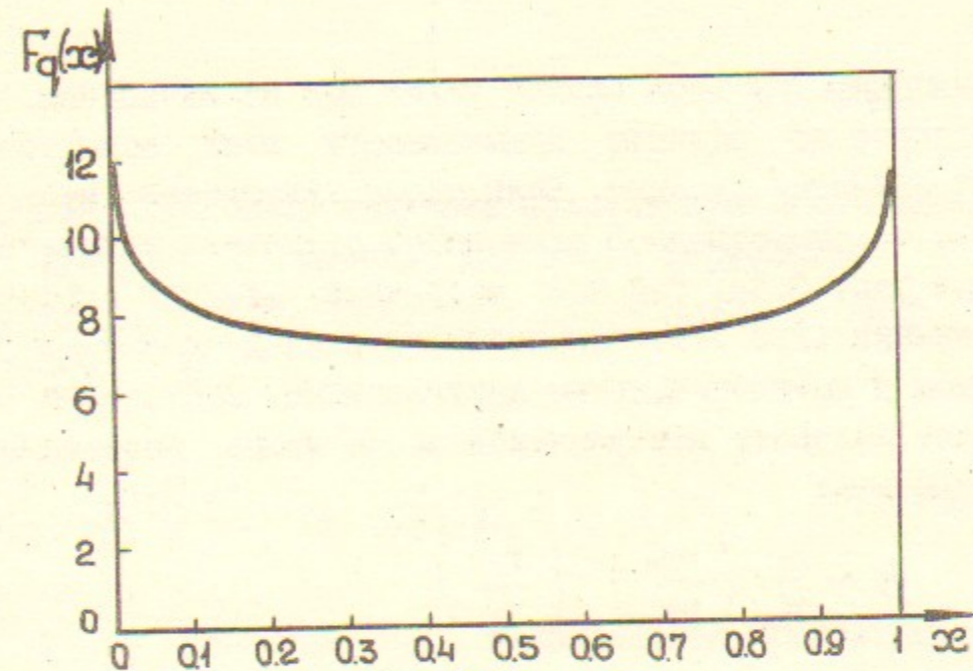


Рис. 3.5

довольно плоская, интеграл слабо зависит от формы кварковой волновой функции и может быть оценен через f_M^q . Если заменить $M_q(x)$ на $M_q(1/2)$ (что соответствует случаю узкой волновой функции), интеграл будет равен 7,1. Если заменить $M_q(x)$ на ее среднее значение (что соответствует плоской волновой функции), интеграл будет равен 7,7. Для всех выпуклых функций он лежит между этими пределами, для волновой функции с минимумом (рис. 2.7) он будет несколько больше. Все эти числа очень близки, поэтому можно записать хорошую оценку кварковой части матричного элемента:

$$M \approx \frac{i\varepsilon_{\perp}^{\mu\nu}}{2} \left[8C_F Q_q e \alpha_s^2 \psi_0 k \sum_q f_M^q + \text{глюонный вклад} \right] \quad (3.3.6)$$

где $k \approx 7-8$. К сожалению, функция $M_g(x)$ пока не вычислена из-за значительных технических трудностей. Для обычных кварковых мезонов глюонный вклад вряд ли может превышать кварковый, поэтому оценка порядка величины вероятностей распадов кваркония на $\gamma\eta, \gamma\eta'$ возможна, если известны $\sum_q f_{\eta, \eta'}^q$.

Для мезонов типа T_+ общий вид матричного элемента

$$M = \frac{e_{\perp}^{\mu} e_{\perp}^{\nu}}{\sqrt{2}} \int_0^1 M_g(x) f^g(x) dx \quad (3.3.7)$$

Функция $M_g(x)$ в этом случае также еще не вычислена.

Вопрос об области применимости этих асимптотических формул является сложным. Если масса кваркония недостаточно велика, то существенной становится степенная поправка к диаграмме рис. 3.4а. Так как матричный элемент эффективного лагранжиана (I.2.37), описывающего распад $\psi_q \rightarrow \chi g g$, между вакуумом и псевдоскалярным двухглюонным состоянием пропорционален квадрату инвариантной массы этого состояния, этот механизм дает

$$B \sim \frac{\alpha}{\alpha_s} \left(\frac{m_M^2}{m^2} \right)^2 \left(\frac{f_M^g}{m} \right)^2 \quad (3.3.8)$$

Однако коэффициент при этой степенной поправке, видимо, очень велик. Из рис. I.8 видно, что в случае свободных глюонов введение небольшой, но отличной от 0 массы глюонной пары сильно меняет ширину и особенно угловое распределение. Чтобы это влияние стало незначительным, необходимо, чтобы масса пары была $\lesssim 0,1 m$. Эта степенная поправка рассматривалась в /I39/ при помощи метода правил сумм (она связана с оператором $\tilde{G}_{\mu\nu} G_{\mu\nu}$ твиста 4), и действительно оказалась очень велика. Если привести результат /I39/ к виду, максимально похожему на принятую здесь форму записи (для чего необходимо использовать формулу $\psi_0^2 = \frac{2^5 \cdot 11^3}{3^7 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot \pi^2}$, полученную из правил сумм /73/), то его отношение к кварковому вкладу (3.3.6) будет равно

$$\frac{\Gamma_{ст. погр.}}{\Gamma_{асимп.}} = \frac{3^8 \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot \pi^4}{2^{10} \cdot 11^6} \frac{1}{k^2} \left(\frac{m_{\psi_q}}{2m_q} \right)^8 \left(\frac{m_{M'}}{m_{\psi_q} \alpha_s} \right)^4 \quad (3.3.9)$$

Поэтому даже для семейства γ степенная поправка остается порядка асимптотического вклада.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В работе /I26/ были получены правила сумм для моментов волновой функции $\overline{\psi}$ мезона. Для этого коррелятор

$$I_n(q^2) = \frac{i}{(2q)^{n+2}} \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \{ O_n(x) O_0(0) \} | 0 \rangle \quad (П.2.1)$$

где

$$O_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u} \hat{z} \gamma_5 (2iz\overleftrightarrow{D})^n u - (u \rightarrow d), \quad (П.2.2)$$

$u(x), d(x)$ - кварковые поля, ковариантная производная \overleftrightarrow{D} определена в (2.5.5), был вычислен при больших отрицательных q^2 (он содержит главный асимптотический член и ряд степенных поправок). Далее для него было выписано дисперсионное соотношение, и произведено преобразование Бореля /55/. В результате получилось правило сумм^{*)} /I26/

$$\frac{4\pi}{m^2} \int_0^\infty \text{Im} I_n(s) e^{-s/m^2} ds = \frac{3}{(n+1)(n+3)} \left[1 + \frac{\pi^2}{9} (n+3)(3n+1) \frac{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 | 0 \rangle}{m^4} + \frac{64\pi^3}{243} (n+1)(n+3)(4n+11) \frac{\langle 0 | \sqrt{\alpha_s} \bar{u} u | 0 \rangle^2}{m^6} + \dots \right], \quad (П.2.3)$$

n - четное

Вакуумные средние $\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 | 0 \rangle$, $\langle 0 | \sqrt{\alpha_s} \bar{u} u | 0 \rangle$ представляют собой феноменологические характеристики структуры вакуума КХД /55/. Вклад π мезона в спектральную плотность $\frac{1}{\pi} \text{Im} I_n(s)$ равен $f_\pi^2 \langle X^n \rangle \delta(s)$, где

$$\langle F(X) \rangle \equiv \int_{-1}^{+1} F(X) \varphi(X) dX, \quad \varphi(X) = \frac{1}{2f_\pi} f_\pi \left(\frac{1+X}{2} \right) \quad (П.2.4)$$

^{*)} Как сообщили нам А.Р.Житницкий и В.Л.Черняк, в выражении для правил сумм в /I26/ имеются опечатки, исправленные в (П.2.3)

Для вклада континуума, в который включаются все состояния, кроме π -мезона, принимается простейшая модель - асимптотическая спектральная плотность $\frac{1}{4\pi^2(n+1)(n+3)}$, резко обрезанная при $S = S_0$, где S_0 - интервал дуальности. Правило сумм принимает форму

$$\langle X^n \rangle = \frac{3}{4\pi^2} \frac{m^2}{f_\pi^2} \frac{1}{(n+1)(n+3)} \left[1 - e^{-S_0/m^2} \right. \quad (\text{П.2.5})$$

$$+ \frac{\pi^2}{9} (n+3)(3n+1) \frac{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 | 0 \rangle}{m^4}$$

$$\left. + \frac{64\pi^3}{243} (n+1)(n+3)(4n+11) \frac{\langle 0 | \sqrt{\alpha_s} \bar{u} u | 0 \rangle^2}{m^6} \right]$$

Надежность этих правил сумм уменьшается с ростом n . Действительно, чем больше n , тем в большей степени $\langle X^n \rangle$ определяется поведением волновой функции вблизи границ (при $X = \pm(I - \Delta X)$, $\Delta X \ll I$), т.е. физикой больших расстояний. Характерную величину ΔX для n -ого момента можно оценить из условия $(1 - \Delta X)^n \lesssim 1$, откуда $\Delta X \sim \frac{1}{n}$ убывает с ростом n . Из физических соображений, разложение в правой части (п.2.5) идет по параметру

$$\frac{\mu^2}{m^2 \Delta X} \sim \frac{n \mu^2}{m^2} \quad (\text{П.2.6})$$

Эти соображения подтверждаются явным видом (П.2.5): член с $\frac{1}{m^4}$ содержит n^2 , а с $\frac{1}{m^6}$ - n^3 . Значит, характерный масштаб масс, на котором становятся существенными степенные поправки, растет с n как $\mu^2/\Delta X \sim n \mu^2$. Условие применимости рассмотрения записывается в эквивалентных формах

$$\Delta X \gg \frac{\mu^2}{m^2} \quad \text{или} \quad n \ll \frac{m^2}{\mu^2} \quad (\text{П.2.7})$$

Интервал m^2 , в котором производится подгонка правил сумм, кроме условия малости степенных поправок (П.2.7) должен удовлетворять и другому условию, а именно, вклад континуума должен быть не слишком велик, т.к. в противном случае неопределенность, вносимая грубой моделью континуума, не позволит выделить вклад низшего мезона.

Анализ правил сумм (П.2.5) для нескольких первых моментов $\langle X^n \rangle$ проведен в /126/. Однако можно рассматривать правила сумм для других интегралов (П.2.4), и в частности непосредственно для волновой функции. Условием их применимости будет первая формула в (П.2.7), где ΔX - харак-

терное для рассматриваемой функции расстояние до краев, т.е. области по ΔX от краев не должны вносить существенный вклад в интеграл (П.2.4). Взяв линейную комбинацию правил сумм (П.2.5) с разными n , для любого полинома легко получить

$$\langle P(X) \rangle = \frac{3}{4\pi^2} \frac{m^2}{f_\pi^2} \left\{ \left[\frac{1}{(n+1)(n+3)} \right]_P (1 - e^{-S_0/m^2}) \quad (\text{П.2.8}) \right.$$

$$+ \left[3 - \frac{2}{n+1} \right]_P \frac{\pi^2}{9} \frac{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 | 0 \rangle}{m^4}$$

$$\left. + [4n+11]_P \frac{64\pi^3}{243} \frac{\langle 0 | \sqrt{\alpha_s} \bar{u} u | 0 \rangle^2}{m^6} \right\}$$

где для полинома $P(X) = \sum_n P_n X^n$

$$[F(n)]_P \equiv \sum_n P_n F(n) \quad (\text{П.2.9})$$

Для интересующих нас комбинаций мы имеем

$$\left[\frac{1}{(n+1)(n+3)} \right]_P = \int_0^1 dX X \int_0^X dY P(Y), \quad (\text{П.2.10})$$

$$\left[\frac{1}{n+1} \right]_P = \int_0^1 dX P(X),$$

$$[1]_P = P(1), \quad [n]_P = P'(1)$$

где полином $P(X)$ предполагается четным. После этого в (П.2.8, П.2.10) можно считать $P(X)$ произвольной функцией, т.к. ее всегда можно представить как предел последовательности полиномов. В частности, последовательность полиномов Бернштейна

$$B_{nk}(X) = \frac{(n+1)!}{2^{n+1} k! (n-k)!} (1+X)^k (1-X)^{n-k} \quad (\text{П.2.11})$$

сходится к δ -функции

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} B_{nk}(X) = \delta(X - X_0), \quad X_0 = \frac{2k-n}{n+2} \quad (\text{П.2.12})$$

$$X_0 = \text{const}$$

Поэтому выбрав $P(X) = \frac{1}{2} [\delta(X - X_0) + \delta(X + X_0)]$, можно получить правило сумм непосредственно для волновой функции

$$\varphi(X_0) : \quad \varphi(X) = \frac{3}{16\pi^2} \frac{m^2}{f_\pi^2} \left[(1-X^2)(1 - e^{-S_0/m^2}) - \frac{4\pi^2}{9} \frac{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 | 0 \rangle}{m^4} \right] \quad (\text{П.2.13})$$

Здесь необходимо одно значение. Из (П.2.8) видно, что для любой функции $P(X)$, обращающейся на границах в 0 вместе с первой производной, вклад кваркового конденсата обращается в 0. Иными словами, в правиле сумм для волновой функции (П.2.II) он имеет вид δ функции и ее производной на границах. Дальнейшие степенные поправки будут приводить к дальнейшим производным δ функции на границах. Качественно можно сказать, что взаимодействие с вакуумными флуктуациями становится сильным, когда один из кварков медленный. Бесконечный ряд производных δ функции может просуммироваться в функцию конечной ширины (эта ширина падает как μ^2/m^2 с ростом m^2). Ее можно грубо оценить как отношение первого момента суммарной функции (равного коэффициенту при δ') к нулевому (равному коэффициенту при δ):

$$\Delta X \sim \frac{256\pi}{81} \frac{\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle^2}{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 | 0 \rangle} \frac{1}{m^2} \quad (\text{П.2.I4})$$

Поэтому для исследования поведения волновой функции вблизи границ необходимо суммировать бесконечную подпоследовательность степенных поправок. Для вычисления матричных элементов реальных процессов наиболее существенно именно поведение вблизи границ (см. напр. обсуждение интеграла I в пункте 3.2). При попытке написать правила сумм непосредственно для таких интегралов оказывается, что все степенные поправки, начиная со второй, расходятся. Это свидетельствует о том, что для вычисления представляющих интерес матричных элементов также нельзя ограничиться конечным числом степенных поправок^{*)}.

Можно ожидать, что правило сумм (П.2.II) применимо при X , отстоящих от ± 1 дальше, чем на $\Delta X \sim \mu^2/m^2$. Поэтому из (П.2.I3) можно надеяться восстановить поведение волновой функции в средней области. Правила сумм для $\langle X^2 \rangle$, $\langle X^4 \rangle$, $\langle X^6 \rangle$, исследованные в /I26/, напротив, не чувствуют средней области, и могут непосредственно дать информацию лишь о поведении волновой функции вблизи краев. Провал в середине в волновой функции (2.4.I3) следует только из сохранения нормировки.

^{*)} Пример суммирования ряда степенных поправок для системы из тяжелых кварка и антикварка в модели разреженного инстантонного газа содержится в /I40/. Мы благодарны Ю.Ф.Пинелису за обсуждение этого круга вопросов.

Характерный масштаб m^2 , связанный со степенной поправкой в правиле сумм (П.2.I3), зависит от X как $1/\sqrt{1-X^2}$. Поэтому естественно предположить, что также зависит от X интервал дуальности:

$$S_0(X) = \frac{S_0(0)}{\sqrt{1-X^2}} \quad (\text{П.2.I5})$$

Поскольку мы используем гипотезу резкого включения континуума для $\langle \delta(X-X_0) \rangle$, для других функции, например $\langle 1 \rangle$, он будет включаться плавно. Эффективный интервал дуальности для $\langle 1 \rangle$ можно оценить как среднее от (П.2.I5), которое равно $\frac{\pi}{2} S_0(0)$; с другой стороны, он известен /55/ и равен $0,75 (\text{ГэВ})^2$, откуда получаем $S_0(0) \approx m_p^2$. Учитывая также, что $f_\pi \approx m_p/2\pi$ /55/, перепишем правило сумм для $\varphi(X)$ в виде:

$$\varphi(X) = \frac{3}{4} \frac{m^2}{m_p^2} \left[(1-X^2) \left(1 - e^{-\frac{m_p^2}{m^2 \sqrt{1-X^2}}} \right) - \frac{4\pi^2}{9} \frac{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 | 0 \rangle}{m^4} \right] \quad (\text{П.2.I6})$$

При использовании правил сумм требуется, чтобы правая часть была приблизительно постоянной на некотором (ненулевом) интервале m^2 , таком, чтобы вклад степенных поправок не превышал скажем 30% (тогда можно надеяться, что высшие степенные поправки не изменят существенно результат), причем на этом интервале вклад континуума также не должен быть большим (в противном случае результат существенно зависит от модели континуума). Оказывается, что для моментов волновой функции эти условия выполняются удовлетворительно /I26/, тогда как для самой волновой функции это, к сожалению, не так. Действительно, если положить, что степенная поправка в (П.2.I6) составляет 10%-30%, то приняв стандартное значение $\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 | 0 \rangle = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ГэВ}^4$ /I4I/, получим для интервала изменения m^2 : $1,4 m_p^2 > m^2 > 0,8 m_p^2$. Тогда вклад континуума составляет 50% - 30%, а значения $\varphi(0)$ изменяются от 0,43 до 0,25. Было бы желательно выяснить причину этого обстоятельства, что позволило бы лучше понять применение правил сумм к рассматриваемому кругу задач. Если принять приведенные значения $\varphi(0)$, то из сохранения нормировки волновой функции следует, что она должна иметь максимумы вблизи границ. По оценке (П.2.I4), при $m^2 \sim m_p^2$ имеем $\Delta X \sim 0,2$, т.е. эти максимумы лежат вблизи области $X \approx \pm 0,8$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.J.Buras. *Physica Scripta* 23, 863 (1981);
Preprint FERMILAB-CONF-81/69-THY (1981).
2. C.H.Llewellyn Smith. High Energy Physics-1980 (XX International Conference, Madison), ed. L.Durand and L.G.Pondrom, New York (1981).
3. E.Reya. *Phys. Reports* 69, 197 (1981).
4. A.H.Mueller. *Phys. Reports* 73, 239 (1981);
A.Duncan. *Physica Scripta* 23, 969 (1981).
5. S.J.Brodsky, G.P.Lepage. Quantum Chromodynamics, Proc. of Summer Workshop, La Jolla Institute, ed. W.Frazer and Henyey, AIP, New York (1979);
S.J.Brodsky. Quantum Chromodynamics, Proc. of Summer Institute on Particle Physics, SLAC, ed. A.Mosher, Stanford (1980); (1982).
6. C.Sachrajda. Quantum Chromodynamics, Proc. of the X GIFT International Seminar on Theoretical Physics, Jaca, Huesca, Spain, ed. J.L.Alonso and R.Tarrach, Lecture Notes in Physics 118 (1980).
7. А.В.Ефремов, А.В.Радюшкин. Труды 6 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля, Алушта (1981);
А.В.Радюшкин. ЭЧАЯ (1982), в печати.
8. A.Ali. Preprint DESY 81-016 (1981);
G.Shierholz. Preprint DESY 80/124 (1980).
9. Б.Л.Иоффе. Материалы 13 зимней школы ЛИЯФ (1978)
10. Yu.L.Dokshitzer, D.I.Dyakonov, S.I.Troyan. *Phys. Reports* 58, 269 (1980).
11. Я.И.Азимов, Ю.Л.Докшицер, В.А.Хозе. Материалы 15 зимней школы ЛИЯФ (1980); УФН 132, 443 (1980);
Материалы 16 зимней школы ЛИЯФ (1981);
Материалы 17 зимней школы ЛИЯФ (1982)
12. G.Altarelli. *Phys. Reports* 81, 1 (1982).
13. A.V.Efremov, A.V.Radyushkin. *Riv. Nuovo Cim.* 3, N 2 (1980).
14. A.Peterman. *Phys. Reports* 53, 157 (1979).
15. A.J.Buras. *Rev. Mod. Phys.* 52, 199 (1980).
16. В.Л.Черняк, А.Р.Житницкий. Письма в ЖЭТФ 25, 544 (1977)
17. В.Л.Черняк, А.Р.Житницкий, В.Г.Сербо.
Письма в ЖЭТФ 26, 760 (1977)
18. А.В.Радюшкин. Препринт ОИЯИ P2-10717 (1977)
19. D.R.Jackson. Thesis (1977), unpublished;
G.R.Farrar, D.R.Jackson. *Phys. Rev. Lett.* 43, 246 (1979).
20. A.I.Vainshtein, V.I.Zakharov. *Phys. Lett.* 72B, 368 (1978).
21. G.Parisi. *Phys. Lett.* 84B, 225 (1979).
22. G.P.Lepage, S.J.Brodsky. *Phys. Lett.* 87B, 359 (1979).
23. S.J.Brodsky, Y.Frishman, G.P.Lepage, C.Sachrajda. *Phys. Lett.* 91B, 239 (1980).
24. G.P.Lepage, S.J.Brodsky. *Phys. Rev.* D22, 2157 (1980).
25. S.J.Brodsky, G.P.Lepage. *Physica Scripta* 23, 945 (1981).
26. S.J.Brodsky, G.P.Lepage. Preprint SLAC-PUB-2762 (1981).
27. A.Duncan, A.H.Mueller. *Phys. Lett.* 90B, 159 (1980).
28. A.Duncan, A.H.Mueller. *Phys. Rev.* D21, 1636 (1980).
29. В.Л.Черняк. Материалы 15 зимней школы ЛИЯФ (1980)
30. В.Л.Черняк, А.Р.Житницкий. ЯФ 31, 1053 (1980)
31. В.Л.Черняк, В.Г.Сербо, А.Р.Житницкий. ЯФ 31, 1069 (1980)
32. А.В.Ефремов, А.В.Радюшкин. Труды Международного семинара: Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля, Протвино (1978)
33. А.В.Ефремов, А.В.Радюшкин. Труды 2 Международного семинара: Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля, Протвино (1980)
34. А.В.Ефремов, А.В.Радюшкин. ТМФ 42, 147 (1980)
35. A.V.Efremov, A.V.Radyushkin. *Phys. Lett.* 91B, 245 (1980).
36. А.В.Ефремов, А.В.Радюшкин. Препринт ОИЯИ E2-80-512 (1980)

37. V.N.Baier, A.G.Grozin. Nucl. Phys. B192, 476 (1981).
38. В.Н.Байер, А.Г.Грозин. ЯФ 35, 1021 (1982)
39. W.Caswell. Phys. Rev. Lett. 33, 244 (1974).
40. D.R.T.Jones. Nucl. Phys. B75, 531 (1974).
41. А.А.Владимиров, О.В.Тарасов. ЯФ 25, 1104 (1977)
42. О.В.Тарасов, А.А.Владимиров, А.Ю.Жарков. Phys. Lett. 93B, 429 (1980).
43. Д.В.Ширков. ЯФ 34, 541 (1981)
44. В.Н.Вик, G.Wolf. Springer Tracts in Modern Physics 86 (1979).
45. В.Н.Вик. High Energy Physics - 1980 (XX International Conference, Madison), ed. L.Durand and L.G.Pondrom, New York (1981); K.H.Mess, В.Н.Вик. Preprint DESY 82-011(1982).
46. Sau Lan Wu. Preprints DESY 81-003, 071 (1981).
47. G.Wolf. Preprint DESY 81-086 (1981); Rev. Mod. Phys. (1982), in print.
48. Б.И.Ермолаев, В.С.Фадин. Письма в ЖЭТФ 33, 285 (1981); В.С.Фадин. Препринт ИЯФ 82-22 (1982); ЯФ №8 (1982), в печати
49. T.Kinoshita. J. Math. Phys. 3, 656 (1962).
50. T.D.Lee, M.Nauenberg. Phys. Rev. 133B, 1549 (1964)
51. A.V.Smilga, M.I.Vysotsky. Nucl. Phys. B150, 173 (1979).
52. G.Sterman, S.Weinberg. Phys. Rev. Lett. 39, 1436 (1977).
53. C.L.Basham, L.S.Brown, S.D.Ellis, S.T.Love. Phys. Rev. D17, 2298 (1978); Phys. Rev. Lett. 41, 1585 (1978); Phys. Rev. D19, 2018 (1979); Phys. Lett. 85B, 287 (1979).
54. W. Celmaster, D.Sivers. Phys. Rev. D23, 227 (1981).
55. M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, V.I.Zakharov. Nucl. Phys. B147, 385, 448, 519 (1979); V.A.Novikov, M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, V.I.Zakharov. Nucl. Phys. B191, 301 (1981).

56. E.V.Shuryak, A.I.Vainshtein. Phys. Lett. 105B, 65 (1981); Preprints IYaF 81-77, 106 (1981).
57. K.Konishi, A.Ukawa, G.Veneziano. Phys. Lett. 78B, 243 (1978); Nucl. Phys. B157, 45 (1979).
58. S.J.Brodsky, G.R.Farrar. Phys. Rev. Lett. 31, 1153 (1973); Phys. Rev. D11, 1309 (1975).
59. V.A.Matveev, R.M.Muradyan, A.V.Tavkhelidze. Lett. Nuovo Cim. 7, 719 (1973).
60. A.Zee. Phys. Rev. D8, 4038 (1973).
61. T.Appelquist, H.Georgi. Phys. Rev. D8, 4000 (1973).
62. M.Dine, J.Sapirstein. Phys. Rev. Lett. 43, 668 (1979).
63. K.G.Chetyrkin, A.L.Kataev, F.V.Tkachov. Phys. Lett. 85B, 227 (1979); Preprint Inst. for Nucl. Res. P-0170 (1980).
64. W.Celmaster, R.J.Consalves. Phys. Rev. Lett. 44, 560 (1980); Phys. Rev. D21, 3112 (1980).
65. A.De Rujuba, R.Petronzio, B.Laufrup. Nucl. Phys. B146, 50(1978).
66. Л.Б.Окунь. Лептоны и кварки. Наука (1981)
67. Я.И.Азимов, Л.Л.Франкфурт, В.А.Хозе. УФН 124, 459 (1978); Я.И.Азимов, В.А.Хозе. УФН 132, 379 (1980)
68. N.Kawamoto, A.I.Sanda. Phys. Lett. 76B, 446 (1978).
69. F.J.Gilman, D.H.Miller. Phys. Rev. D17, 1846 (1978).
70. J.F.Gunion. Proc. $\gamma\gamma$ Collisions, Amiens 1980, ed. G.Cochard and P.Kessler, Lecture Notes in Physica 134 (1980).
71. В.Н.Байер, Э.А.Кураев, В.С.Фадин. ЯФ 31, 700 (1980)
72. M.A.Shifman. Preprint ITEP-143 (1981).
73. V.A.Novikov, L.B.Okun, M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, M.B.Voloshin, V.I.Zakharov. Phys. Reports 41, 1 (1978).
74. E.Remiddi. Int. School of Physics E. Fermi, ed. N.Costa and R.Catto, Varenna (1980).

75. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский.
Квантовая электродинамика. Наука (1980)
76. R.Barbieri a.o. Phys. Lett. 60B, 183 (1976).
77. L.B.Okun, M.B.Voloshin. Preprint ITEP-152 (1976).
78. R.Barbieri a.o. Phys. Lett. 61B, 465 (1976).
79. R.Barbieri a.o. Nucl. Phys. B154, 535 (1979).
80. R.Barbieri a.o. Phys. Lett. 95B, 93(1980); Nucl. Phys. B192, 61(1981).
81. R.Barbieri a.o. Phys. Lett. 57B, 455 (1975); Nucl. Phys. B105, 125 (1976).
82. W.Celmaster. Phys. Rev. D19, 1517 (1979).
83. P.V.Mackenzie, G.P.Lepage. Phys. Rev. Lett. 47, 1244 (1981).
84. Ю.Швингер. Частицы, источники, поля, т.2. Мир (1976)
85. V.N.Baier, A.G.Grozin. Preprint LAL/80-29 (1980).
86. K.Koller, T.Walsh. Nucl. Phys. B140, 449 (1978);
K.Koller, H.Krasemann, T.F.Walsh. Z. Phys. C1, 71 (1979).
87. В.Н.Байер, А.Г.Грозин. ЯФ 33, 491 (1981); ЯФ 32, 817 (1980)
88. J.Ellis, M.K.Gaillard, G.Ross. Nucl. Phys. B111, 253 (1976).
89. V.N.Baier. Proc. 18 Int. Conf. on High Energy Physics, Tbilisi (1976).
90. G.Kramer, G.Schierholz, J.Willrodt. Phys. Lett. 78B, 249 (1978), Erratum 80B, 433 (1979); Z. Phys. C4, 149 (1980).
91. A.De Rujula, R.Petronzio, B.Lautrup. Nucl. Phys. B146, 50 (1978).
92. J.G.Körner, G.Kramer, G.Schierholz, K.Fabricius, I.Schmitt. Phys. Lett. 94B, 207 (1980).
93. K.Fabricius, I.Schmitt, G.Kramer, G.Schierholz. Phys. Rev. Lett. 45, 867 (1980).
94. Р.Фейнман. Взаимодействие фотонов с адронами. Мир (1975)
95. Ф.Е.Клоуз. Кварки и партоны. Мир (1892)

96. J.Drees. CERN School of Physics (1980).
97. B.L.Combridge, J.Kripfganz, J.Ranft. Phys. Lett. 70B, 234 (1977).
98. J.F.Owens, E.Reya, M.Glück. Phys. Rev. D18, 1501 (1978).
99. В.Н.Грибов, Л.Н.Липатов. ЯФ 15, 781 (1972)
100. В.Н.Грибов, Л.Н.Липатов. ЯФ 15, 1272 (1972)
101. Л.Н.Липатов. ЯФ 20, 181 (1974)
102. А.П.Бухвостов, Л.Н.Липатов, Н.П.Попов. ЯФ 20, 532 (1974)
103. L.V.Gribov. Nucl. Phys. B168, 429 (1980).
104. G.Altarelli, G.Parisi. Nucl. Phys. B126, 298 (1977).
105. Ю.Л.Докшицер. ЖЭТФ 73, 1216 (1977)
106. D.J.Pritchard. Z. Phys. C2, 205 (1979).
107. В.Н.Байер, А.Г.Грозин. ДАН 249, 341 (1979)
108. E.G.Floratos, C.Kounnes, R.Lacaze. Nucl. Phys. B192, 417 (1981).
109. М.Г.Рыскин, С.И.Троян. ЯФ 33, 260 (1981)
110. P.Binetruy. Phys. Lett. 91B, 245 (1980).
111. Yu.L.Dokshitzer, V.S.Fadin, V.A.Khoze. Preprint LINP-745, Leningrad (1982); Phys. Lett. B, in print.
112. А.В.Радюшкин. Препринт ОИЯИ P2-80-687 (1980)
113. S.J.Brodsky, G.P.Lepage. Proc. of the Int. Symposium on High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets, Lausanne, ed. C.Joseph and J.Soffer, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland (1981).
114. S.J.Brodsky, G.P.Lepage. Phys. Rev. D24, 2848 (1981).
115. А.Г.Грозин. Препринт ИЯФ 81-128 (1981)
116. V.L.Chernyak, A.R.Zhitnitsky. Preprint IYaF 81-75 (1981).
117. М.А.Шифман, М.И.Вузотский. Nucl. Phys. B186, 475 (1981).
118. Th. Ohmndorf. Nucl. Phys. B188, 153 (1981).
119. М.В.Терентьев. Письма в ЖЭТФ 33, 71 (1981); ЯФ 33, 1692 (1981)

120. M.K.Chase. Nucl. Phys. B167, 125; B174, 109 (1980).
121. D.M.Макеенко. ЯФ 33, 824 (1981); Th.Ohrndorf. Nucl.Phys.B198,
26 (1982).
122. D.J.Gross, P.Wilczek. Phys. Rev. D9, 980 (1974).
123. H.Georgi, H.D.Politzer. Phys. Rev. D9, 416 (1974).
124. M.A.Ahmed, G.G.Ross. Phys. Lett. 56B, 385 (1975); Nucl.
Phys. B111, 441 (1976).
125. H.Ito. Progr. Theor. Phys. 54, 555 (1975);
K.Sasaki. Progr. Theor. Phys. 54, 1816 (1975).
126. V.L.Chernyak, A.R.Zhitnitsky. Preprint IYaF 81-74 (1981).
127. V.L.Chernyak, A.R.Zhitnitsky, I.R.Zhitnitsky. Preprint
IYaF 82-26 (1982).
128. С.Трейман, Р.Джекир, Д.Гросс. Лекции по алгебре токов.
Атомиздат (1977)
129. S.J.Brodsky, T.Huang, G.P.Lepage. SLAC-PUB-2540 (1980).
130. T.Huang. Proc. High Energy Physics - 1980 (XX Int. Conf.,
Madison), ed. L.Durand and L.G.Pondrom, New York (1981).
131. V.N.Baier, V.S.Fadin, V.A.Khoze, E.A.Kuraev. Phys. Re-
ports 78, 295 (1981).
132. А.Г.Грозин. Материалы Рабочего совещания по программе экс-
периментов на встречных линейных электрон - позитронных
пучках (ИЯФ,1980), сост. А.Г.Грозин, В.С.Фадин (1981).
133. E.L.Berger, S.J.Brodsky. Phys. Rev. D24, 2428 (1981).
134. E.L.Berger. Preprint ANL-HEP-PR-81-51 (1981).
135. G.Farrar, G.C.Fox. Nucl. Phys. B167, 205 (1980).
136. C.Edwards a.o. Preprints SLAC-PUB-2847, 2822 (1981);
D.G.Coynne. Preprint SLAC-PUB-2809 (1981).
137. M.Krammer. Phys. Lett. 74B, 361 (1978).
138. A.Billoire, R.Lacaze, A.Morel, H.Navalet. Phys. Lett.
80B, 381 (1979).
139. V.A.Novikov, M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, V.I.Zakharov.
Nucl. Phys. B165, 55 (1980).
140. V.N.Baier, Yu.F.Pinelis. Preprint IYaF 81-141 (1981)
141. M.B.Voloshin. Preprint ITEP-21 (1980)