ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Ф.М.Израйлев, М.И.Рабинович,
А.Д.Угодников

СТРУКТУРА СТОХАСТИЧНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

ПРЕПРИНТ 82-70

Новосибирск

СТРУКТУРА СТОХАСТИЧНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Ф.М.Израйлев, М.И.Рабинович , А.Д.Угодников

Аналитически и численно исследуется поведение параметрически возбуждаемого нелинейного осциллятора с трением:

$$\ddot{x} \pm x + x^3 + \gamma \dot{x} = -q x \cos \Omega t$$

где γ , q , Ω – параметры системы, $\gamma \geq 0$. Основное внимание уделяется условиям возникновения и стохастическим свойствам стохастических колебаний в зависимости от величины хаусдорфовой размерности притягивающего множества. Показывается, что при малой диссипации возникающая стохастичность близка к гамильтоновой, а при большой – аналогична стохастическим аттракторам для одномерных отображений.

Исследование стохастического поведения параметрически возбуждаемых нелинейных осцилляторов представляет интерес, как с точки зрения общих свойств стохастичности нелинейных неавтономных систем, так и для разнообразных приложений (например, в связи с возможностью стохастического нагрева заряженных частиц [I,2] . В настоящем докладе на примере двух часто встречающихся моделей

$$\ddot{x} + x + x^3 = f(x,\dot{x},t) \qquad (I)$$

$$\ddot{x} - x + x^3 = f(x,\dot{x},t) \qquad (2)$$

где $f(x,\dot{x},t) = -q x \cos \Omega t - \gamma \dot{x}$, аналитически и численно исследуется механизм возникновения стохастичности, ее спектральные свойства, структура стохастического множества в фазовом пространстве и их взаимосвязь. Как оказалось (см., также [3]), одним из параметров, характеризующим свойства стохастичности, может служить размерность стохастического множества, которая для диссипативных систем оказывается дробной (хаусдорфова или фрактальная размерность [4–6]). В нашем случае эта размерность выражается через среднюю скорость разбегания близких траекторий λ^+ [3,6] и равна[ж)]

$$d = \lambda^+/(\lambda^+ + \gamma) + 1 \qquad (3)$$

Мы обнаружили, что эта величина определяет близость статистических свойств стохастического аттрактора либо к гамильтоновой стохастичности (при $d \lesssim 2$), либо к демонстрирующему хаотическое поведение одномерному отображению (при $d \gtrsim I$).

Как показал численный эксперимент, в системе (I) стохастический аттрактор возникает при $q > 4$, $\gamma > 0{,}4$ и при $d \gtrsim I$ хорошо описывается [3] одномерным отображением (подобный аттрактор был получен также в [I3]). При приближении (по параметрам q и γ) к границе возникновения стохастичности, которой соответствовал "одномерный" аттрактор, наблюдались бифуркации удвоения периода, а непосредственно вслед за критической точкой было обнаружено универсальное поведение: $\lambda^+ \sim (c - c_{кр})^{0.45}$ где C – произвольная линейная комбинация параметров q и γ.

ж) Имеется в виду размерность на секущей ($x, \dot{x} \equiv y$).

Типичный вид аттрактора, близкого одномерному, приведен на рис.I. Процесс образования такого аттрактора можно представить следующим образом. Во время бифуркаций удвоения притягивающее множество (цикл периода 2^n) растет в том направлении, которое соответствует мультипликатору, проходящему через - I. Это направление, так же как и направление сжатия, меняется мало (вследствие уменьшения „окон" значений параметра, соответствующих циклам периода 2^n, в геометрической прогрессии). В результате притягивающее множество при критическом значении параметра лежит на нескольких кривых. Далее происходят бифуркции слияния, и в итоге эти кривые сливаются в одну (параллельно происходит расслоение этой кривой).

Когда же диссипация мала $\gamma \ll$ I, а накачка велика $q \gg$ I ($q \gtrsim 25$), стохастический аттрактор возникает из уже имеющегося гамильтонового ($\gamma = 0$) стохастического множества, которое образовалось в результате перекрытия на плоскости (x, y) нелинейных резонансов [II] . Каждому резонансу в фазовом пространстве (I) соответствует внутренность некоторого тора. С ростом q эти торы расширяются, и при соприкосновении разрушаются - резонансы перекрываются. В нашем случае первыми перекрываются резонансы $\omega(I) = \Omega/2$ и $\omega(I) = \frac{2}{3}\Omega$ (I - действие для невозмущенной $f = 0$ системы). На секущей при этом возникает широкий стохастический слой. С увеличением q начинают перекрываться резонансы $\omega(I) = m\Omega$ с целыми m . На рис.2а ясно видны четыре островка устойчивости, соответствующие не полностью перекрывающимися резонансам $\omega(I) = m_{1,2}\Omega$ с $m_{1,2} \gg 1$ Все точки соответствуют одной траектории, полученной за время $t = 5 \cdot 10^4$ Т. При введении очень слабой диссипации эти островки становятся притягивающими - стохастическое движение вырождается (см. [I2]). Однако уже при небольшом увеличении островки устойсивости разрушаются и возникает стохастический аттрактор с $d \leq 2$, занимающий практически ту же большую область в фазовом пространстве системы, что и в гамильтоновом случае (см. рис.2б).

Для сравнения статистических характеристик системы (I) при различных значениях d были вычислены спектры мощности и амплитуды. Амплитудный спектр оказался более информативным. Вычислялась также интегральная шумовая плотность мощности $N = \int_0^1 |x(\bar\omega)|^2 d\bar\omega$ где $x(\bar\omega)$ - шумовая составляющая амплитудного спектра, $\bar\omega = \omega/\omega_0$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$. Соответствующие результаты представлены на рис.3,4. Зависимость $N(d)$ в интервале $d \in$ (I.9, 2.0) не определена, поскольку в этой области параметров стохастичность является переходной - существуют притягивающие островки устойчивости. Стохастические характеристики движения на аттракторе оказались близкими к характеристикам одномерного отображения при $d \leq$ I,3 (см. [3]), и к характеристикам гамильтоновой стохастичности при $d \gtrsim$ I,8.

К аналогичным результатам приводит исследование системы (2). Подчеркнем, что при $q \gg$ I, $x \gg$ I свойства стохастического поведения (I) и (2) практически совпадают. На фазовой плоскости (2) при $f = 0$ имеется сепаратрисная "восьмерка". При $f \neq 0$ сепаратриса разрушается, превращаясь либо в гомоклиническую структуру со счетным множеством неустойчивых циклов, либо в устойчивые циклы. Если внутри гомоклинической структуры имеются устойчивые циклы (их области притяжения обычно малы), движение может быть стохастическим только при ограниченном наблюдении - переходная стохастичность [I2] . При $t \to \infty$ траектория вырождается в цикл. Если же устойчивых циклов нет, то движению соответствует стохастический аттрактор. Аналитически можно показать только существование гомоклинической структуры, отсутствие же устойчивых циклов очевидно лишь для $\gamma = 0$. При $\gamma \neq 0$ необходим численный анализ. В этом случае можно воспользоваться критерием Мельникова, который сводится к проверке знакопеременности функции $\Delta(t_0)$ [7] . Для (2) эта функция записывается в виде (аналогично [8,9])

$$\Delta^{(1)}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\gamma y_0^2(t-t_0) - q x_0(t-t_0) y_0(t-t_0) \cos\Omega t\} dt \tag{4}$$

где $y(t) = dx/dt$, а $x_0(t-t_0)$, $y_0(t-t_0)$ - координата и импульс, соответствующие невозмущенной траектории. В результате найдем

$$\Delta^{(1)}(t_0) = \frac{4}{3}\gamma - \frac{\pi\Omega^2 q}{\operatorname{Sh}((\Omega\pi/2))} \cdot \sin\Omega t_0 \tag{5}$$

В гамильтоновом случае ($\gamma = 0$) функция $\Delta^{(1)}(t_0)$ знакопеременна при произвольной глубине модуляции q . Для диссипативного же осциллятора гомоклиническая структура проявляется лишь при $q > q_{кр1}$, где

$$q_{кр1} = (4\gamma / 3\pi\Omega^2) \cdot Sh(\pi\Omega/2) \quad (6)$$

Как показал численный эксперимент, стохастический аттрактор возникает при значениях $q > q_{кр2} > q_{кр1}$. Так, например, при $\gamma > 0{,}2$ необходимо, чтобы $q > q_{кр2} = 0{,}25$, для меньших $q_{кр1} < q < q_{кр2}$ наблюдалась лишь переходная стохастичность.

Литература

I. J.Y.Hsu, K.Matsuda, M.S.Chu, T.H.Tensen, Stochastic Heating of a Large-Amplitude Standing Wave, Phys.Rev.Lett., 43, 1979, 203-206.

2. F.F.Karney, A.Bers, Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, Lect. Notes in Physics, 93, 44-50, Springer-Verlag, 1979.

3. Ф.М.Израйлев, М.И.Рабинович, А.Д.Угодников. О приближенном описании диссипативных систем со стохастическим поведением. Препринт № I7, Горький, ИПФ АН СССР, I98I, I8 стр, Phys. Lett., 86A, № 6-7, I98I, 32I-325.

4. B.B.Mandelbrot, Fractals: Form, Chance and Dimension, 365 p., Free man, 1977.

5. H.Mori, H.Fujisaka, Statistical Dynamics of Chaotic Flows, Progr. Theor. Phys., 63, Kyoto, "Nissha", 1980, 6, 1931.

6. D.A.Russel, T.D.Hanson, E.Ott, Dimension of Strange Attractors, Phys. Rev. Lett., 45, 1175-1178, 1980.

7. В.К.Мельников. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях. Труды математического общества, I2, Москва, I963, 3-52.

8. А.Д.Морозов. К вопросу о полном качественном исследовании уравнения Дюффинга. Журнал вычислительной математики и математической физики, I3, Москва, I973, 5, II34-II52.

9. P.J.Holmes, A nonlinear oscillator with a strange attractor, Philosofical Transactions Royal Society, 292, London, 1979, 419-448.

IO. M.J.Feigenbaum, A quantitative universality for a class of nonlinear transformations, Journal Statistical Physics, 19, N. 1, 25-52, 1978, 25-42.

II. B.V.Chirikov, A universal instability of many dimensional oscillator systems, Physics Reports, 52, 1979, 263-379.

I2. B.V.Chirikov, F.M.Izrailev, Degeneration of turbulence in simple systems, Physica 2D, 1981, 30.

I3. I.Ito, Successive bifurcations and chaos in nonlinear Matheu equation, Progress of Theoretical Physics, 61, Kyoto, "Nissha", 1979, 815.

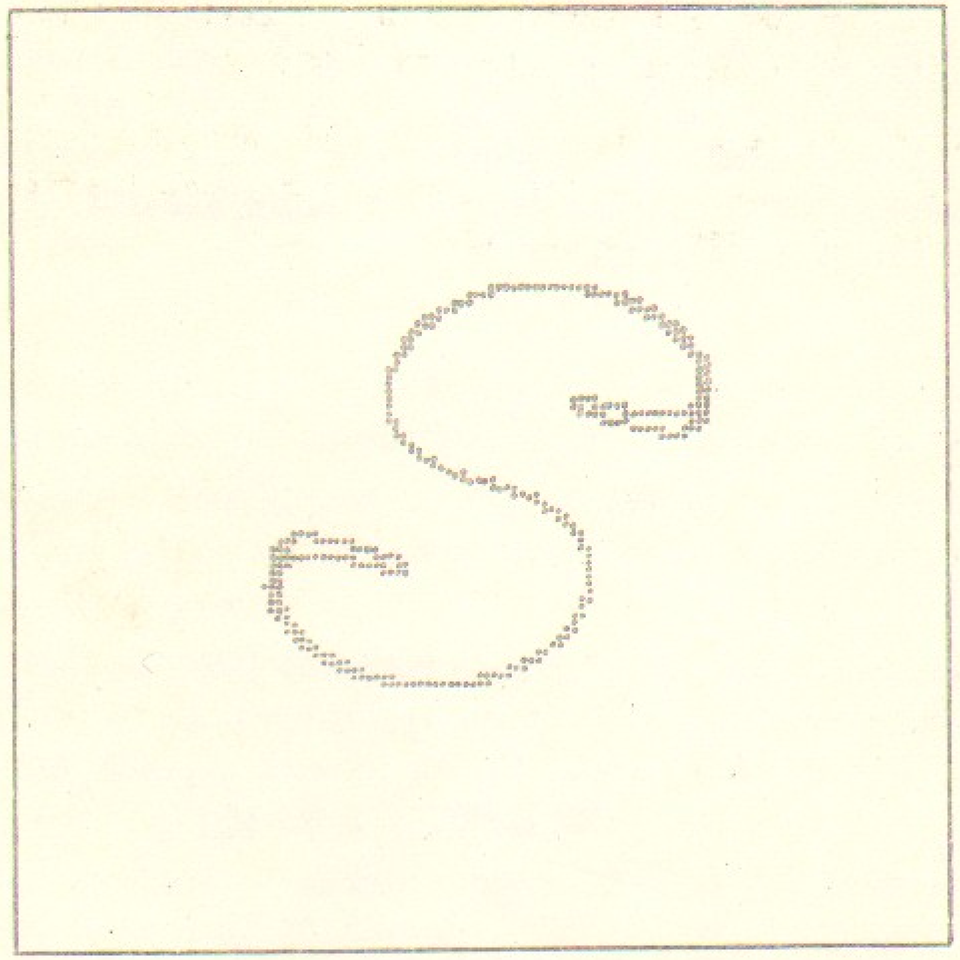
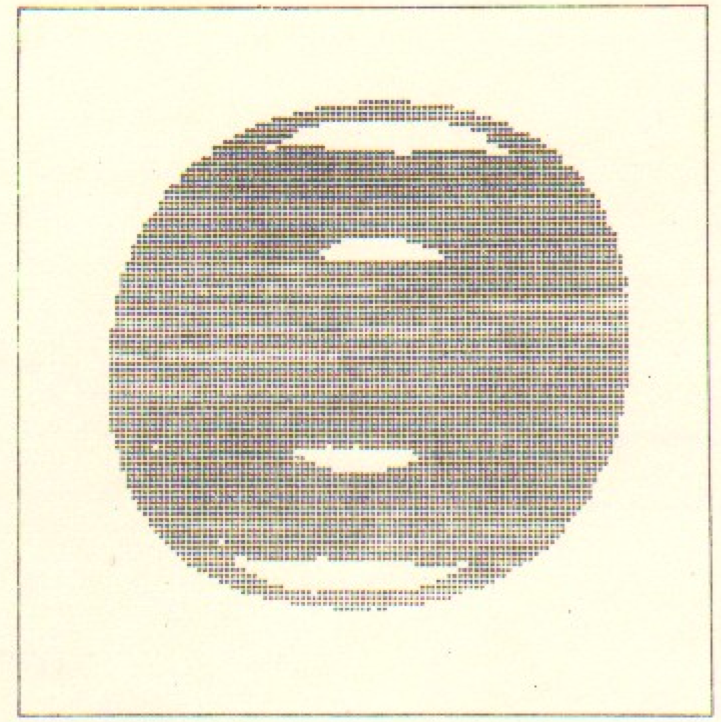


Рис.I. Фазовая плоскость ($x, \dot{x}$) уравнения (I), полученная через период $T = 2\pi/\Omega$. Размеры по вертикали $|\dot{x}| \leq 20$; по горизонтали $|x| \leq 5$. Центр соответствует $x = \dot{x} = 0$. Полное число периодов равно $t/T = I0^4$, $q = I7$, $\gamma = 0,9$, $\Omega = 2,04$; $d \simeq 0,22$ (см. [3]).

а



б

Рис.2. То же, что на рис.I для параметров: $q = 25$; $\Omega = 2,04$ $|x| \leq 7$; $|\dot{x}| \leq 50$; $t = 2 \cdot I0^4\ T$; Рис.2а – стохастическое множество для гамильтонового случая: $\gamma = 0$; $d = 2$; рис.2б – стохастический аттрактор для $\gamma = 0,I2$; $d \approx I,78$.

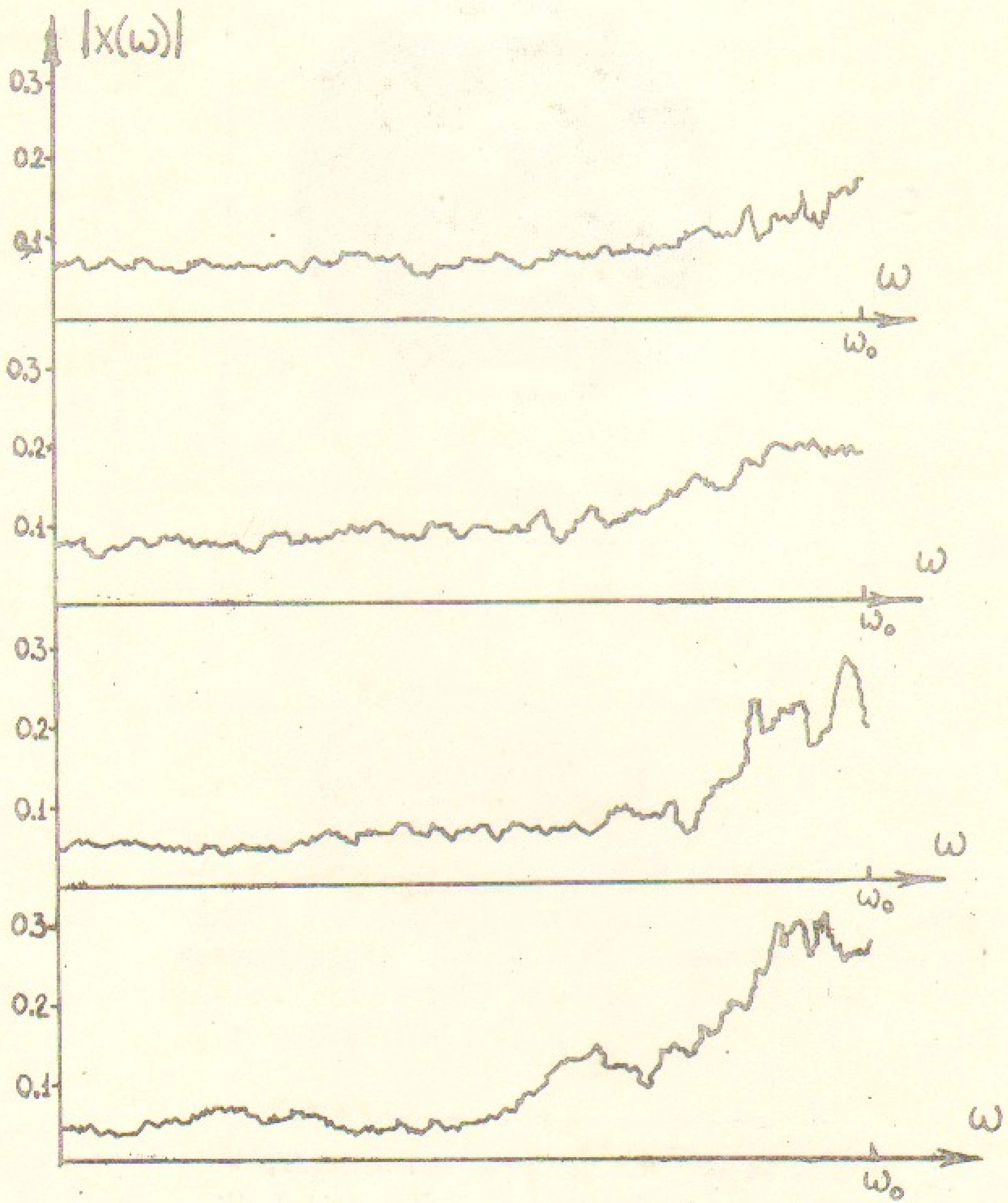


Рис.3. Амплитудные спектры величины $x(\omega)$ системы (I) в гамильтоновом и диссипативном случаях для $q = 25$; $\Omega = 2{,}04$; рис.: а) $\gamma = 0$; $d = 2$; б) $\gamma = 0{,}12$; $d = 1{,}54$; в) $\gamma = 0{,}30$; $d = 1{,}35$.

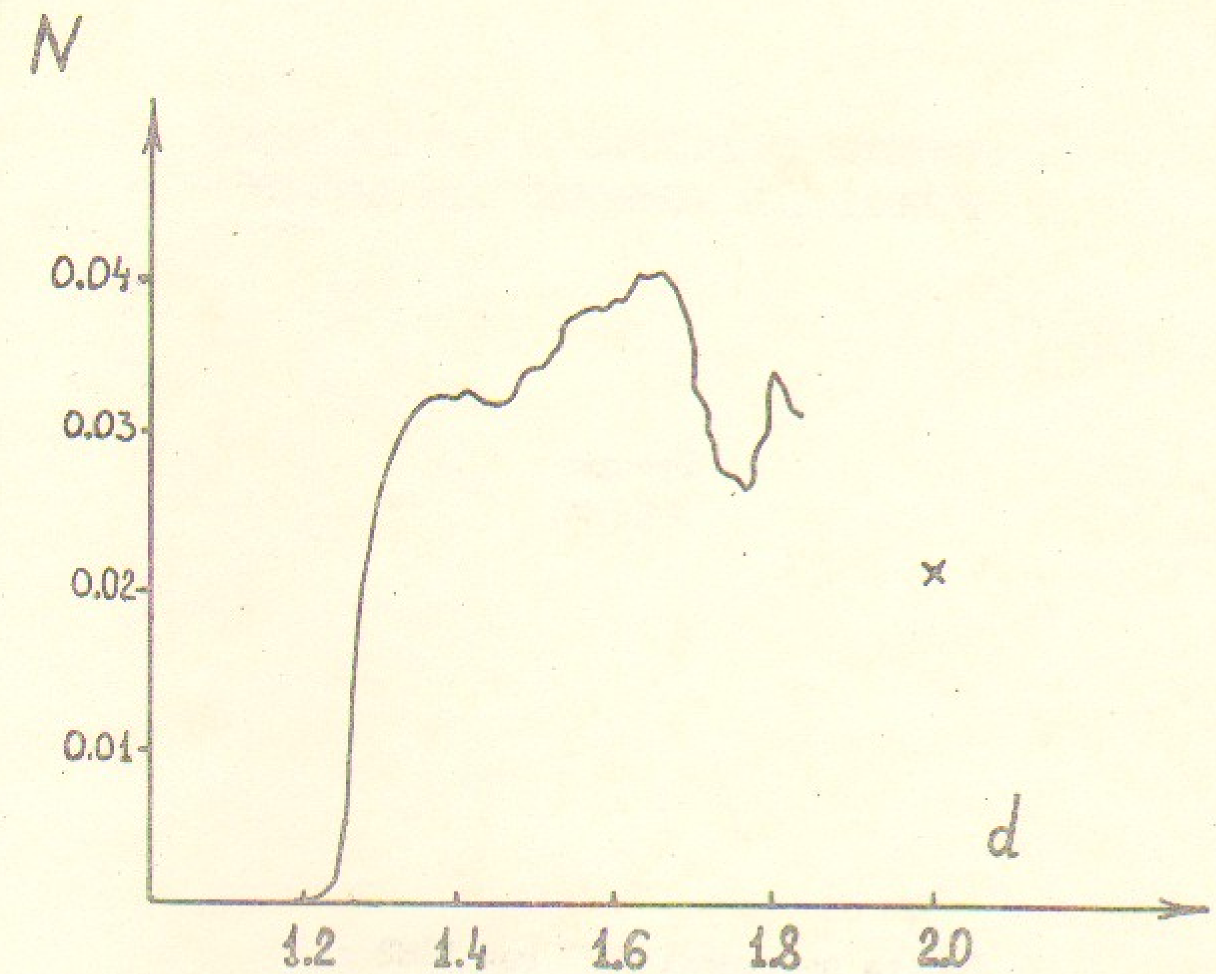


Рис.4. Зависимость интегральной плотности мощности $N(d)$ от хаусдорфовой размерности для $q = 50$; $\Omega = 2{,}04$; $\times$ - значение N при $d = 2$ (гамильтоновый случай).

Ф.М.Израйлев, М.И.Рабинович[**)], А.Д.Угодников[**)]

СТРУКТУРА СТОХАСТИЧНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ[*)]

Препринт
№ 82-70

Работа поступила - 17 мая 1982 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 26.05.1982 г. МН 03330
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.0,6 печ.л., 0,5 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 70

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90