ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Б.Н.Брейзман, Ф.А.Цельник

МГД УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

ПРЕПРИНТ 82-67

Новосибирск

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Препринт

Б.Н.Брейзман, Ф.А.Цельник

МГД УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

Новосибирск
1982

МГД УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

Б.Н.Брейзман, Ф.А.Цельник

Аннотация

Рассмотрены потенциальные колебания вращающейся плазмы в условиях, когда скорость вращения велика по сравнению с тепловой скоростью ионов.

Показана возможность полного подавления желобковой неустойчивости за счет надлежащего выбора профилей плотности и скорости вращения плазмы.

Принцип работы открытой ловушки с вращающейся плазмой требует, как известно, чтобы скорость вращения была значительно больше тепловой скорости ионов (см.,например,[I]). Вместе с тем плазма в ловушке должна сохранять МГД устойчивость, что традиционно считается наиболее серьезной трудностью на пути создания центробежных ловушек [I,2] .

Решая задачу об устойчивости столь быстро вращающейся плазмы, естественно вначале вообще пренебречь тепловым разбросом частиц и получить ответ в приближении "холодной" гидродинамики, после чего тепловое движение может быть включено в задачу как малая поправка. В этом смысле быстрое вращение качественно отличается от рассмотренного в работах [3,4] вращения с малой (дотепловой) скоростью.

Обсуждаемая в настоящей работе задача об устойчивости плазмы возникла в связи с практическими потребностями экспериментов, ведущихся в ИЯФ СО АН СССР на установке СВИПП (Стабилизация вращением и профилем плотности); параметры этой установки приведены в работе [5] . Нашей непосредственной целью будет выяснение условий устойчивости плазменного слоя, находящегося между двумя коаксиальными проводящими цилиндрами, относительно низкочастотных потенциальных возмущений желобкового типа с $k_z = 0$.

Выберем возмущение электрического потенциала Φ в виде

$$\Phi = \varphi(r)e^{il\theta - i\omega t},$$

где l – номер азимутальной моды, и найдем из уравнений гидродинамики возмущения плотностей заряда электронов (ρ_e) и ионов (ρ_i)

$$\rho_{e;i} = \frac{1}{4\pi}\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\omega^2_{p_{e;i}}}{\Delta_{e;i}} \frac{\partial}{\partial r}\varphi - \frac{l^2}{r^2}\frac{\omega^2_{p_{e;i}}}{\Delta_{e;i}}\varphi - \frac{1}{r}\cdot\frac{l\varphi}{\omega - l\omega_{e;i}}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\frac{\omega^2_{p_{e;i}}}{\Delta_{e;i}}(\omega_{H_{e;i}} + 2\omega_{e;i})\Big].$$

Здесь

$$\Delta_{e;i} \equiv -(\omega - l\omega_{e;i})^2 + (\omega_{H_{e;i}} + 2\omega_{e;i})\left(\omega_{H_{e;i}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r^2\omega_{e;i}\right),$$

а через $\omega_{p_{e;i}}$, $\omega_{H_{e;i}}$ и $\omega_{e;i}$ обозначены соответственно плазменная частота, циклотронная частота и угловая скорость вращения частиц каждого сорта.

В случае достаточно плотной плазмы ($\omega_{p_i} >> \omega_{H_i}$), обсуждением которого мы в дальнейшем ограничимся, распределение потенциала $\varphi(r)$ определяется условием квазинейтральности ($\rho_i + \rho_e = 0$). Учитывая малость ω и $\omega_{e;i}$ по сравнению с $\omega_{H_{e;i}}$ и пренебрегая поправками порядка m/M, можно записать уравнение для $\varphi(r)$ в следующем виде:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{H_i}^2}\frac{\partial}{\partial r}\varphi - \frac{\ell^2}{r^2}\frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{H_i}^2}\varphi = \tag{2}$$

$$= \ell\varphi\left[\left(\frac{1}{\omega-\ell\omega_i} - \frac{1}{\omega-\ell\omega_e}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{H_i}} - \frac{1}{\omega-\ell\omega_i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{H_i}^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\omega_i\right].$$

Входящие сюда частоты ω_e и ω_i связаны с невозмущенным радиальным электрическим полем E соотношениями

$$\omega_e = -\frac{c}{rH}E\ ; \qquad \omega_i = -\frac{c}{rH}E - \frac{1}{\omega_{H_i}}\frac{c^2E^2}{r^2H^2}.$$

Магнитное поле H в интересующих нас условиях можно с достаточной точностью считать однородным. Поэтому целесообразно выбрать в качестве единицы измерения всех частот величину ω_{H_i} и провести в уравнении (2) следующие замены:

$$\omega_e \to \omega_{H_i}\omega_e\ ; \quad \omega_i \to \omega_{H_i}\omega_i\ ; \quad \omega \to \ell\omega_{H_i}\Omega.$$

Окончательно получим:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rn\frac{\partial}{\partial r}\varphi - \frac{\ell^2}{r^2}n\varphi =$$

$$= -\varphi\left[\frac{\omega_i^2}{(\Omega-\omega_i)(\Omega-\omega_i-\omega_i^2)}\frac{1}{r}\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{1}{\Omega-\omega_i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\omega_i\right] \tag{3}$$

Это уравнение следует дополнить граничным условием

$$\varphi(r_1) = \varphi(r_2) = 0, \tag{4}$$

где r_1 и r_2 - внутренний и внешний радиусы камеры. Если пренебречь в знаменателе первого слагаемого в правой части уравнения (3) величиной ω_i^2, то это уравнение переходит в известное уравнение желобковых колебаний в пределе нулевого ларморовского радиуса ионов (см. [3,4]). Такое упрощение уравнения пригодно, очевидно, лишь для анализа неустойчивости с инкрементом, превышающим $\ell\omega_i^2/\omega_{H_i}$. Заметим, что учет конечности лармо-

ровского радиуса ионов в той форме, как это сделано в работах [3,4] , явился бы в данном случае превышением точности, поскольку при быстром вращении более важным оказывается учет инерции ионов в самом вращательном движении, приводящий к возникновению добавки ω_i^2 в знаменателе первого слагаемого в правой части уравнения (3)*.

Покажем теперь, что уравнение (3) допускает существование широкого класса устойчивых профилей плотности плазмы $n(r)$ и скорости вращения ω_i . Качественные соображения о возможности существования таких профилей и о подавлении за счет этого желобковой неустойчивости, связанной с неблагоприятной кривизной силовых линий, высказывались ранее в работах [6,7] .

Обратимся к двум интегральным соотношениям, которым должна удовлетворять собственная функция $\varphi(r)$. Эти соотношения получаются путем умножения обеих частей (3) на φ^* и интегрирования по промежутку $r_1 < r < r_2$ с учетом граничных условий (4).

$$\int_{r_1}^{r_2} nr\,dr\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|^2 + \frac{\ell^2}{r^2}|\varphi|^2\right) = \tag{5}$$

$$= -\int_{r_1}^{r_2}|\varphi|^2 dr\,\frac{\Omega_1-\omega_i}{(\Omega_1-\omega_i)^2+\gamma^2}\left[\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\omega_i\right] +$$

$$+ \int_{r_1}^{r_2}|\varphi|^2 dr\,\frac{\Omega_1-\omega_i-\omega_i^2}{(\Omega_1-\omega_i-\omega_i^2)^2+\gamma^2}\,\frac{\partial n}{\partial r}\ ; \tag{6}$$

$$\gamma\int_{r_1}^{r_2}|\varphi|^2 dr\,\frac{1}{(\Omega_1-\omega_i)^2+\gamma^2}\left(\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\omega_i\right) -$$

$$- \gamma\int_{r_1}^{r_2}|\varphi|^2 dr\,\frac{1}{(\Omega_1-\omega_i-\omega_i^2)^2+\gamma^2}\,\frac{\partial n}{\partial r} = 0.$$

Здесь через Ω_1 и γ обозначены вещественная и мнимая части Ω .

Рассмотрим в первую очередь случай однородного вращения ($\omega_i = const$). Соотношения (5) и (6) показывают, что в этом случае необходимым условием неустойчивости ($\gamma \neq 0$) является следующее равенство:

---

*) Условие малости поправки, связанной с конечностью ларморовского радиуса ионов, имеет вид $W >> T\,|\partial \ln P/\partial \ln r|$, где T - температура, W - энергия вращения, а P - давление ионов.

$$\int_{r_1}^{r_2} nr\,dr\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|^2+\frac{\ell^2}{r^2}|\varphi|^2\right)=-\int_{r_1}^{r_2}|\varphi|^2 dr\,\frac{\omega_i^2}{(\Omega_1-\omega_i-\omega_i^2)^2+\gamma^2}\,\frac{\partial n}{\partial r} \qquad (7)$$

Если плотность плазмы в ловушке – возрастающая функция r, то условие (7), очевидно, не выполняется, т.е. при $\frac{\partial n}{\partial r} > 0$ и однородном вращении плазма устойчива. Ясно, что плазма будет оставаться устойчивой также при достаточно малых отклонениях профиля ω_i от однородного. Чтобы продемонстрировать это, мы, воспользовавшись условием (6), представим правую часть соотношения (5) в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}|\varphi|^2 dr\,\frac{2(\omega_i-\overline{\omega}_i)-\overline{\omega}_i^2}{(\Omega_1-\omega_i)^2+\gamma^2}\left(\frac{\partial n}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\omega_i\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}|\varphi|^2 dr\,\frac{2(\omega_i-\overline{\omega}_i)+2\omega_i^2-\overline{\omega}_i^2}{(\Omega_1-\omega_i-\omega_i^2)^2+\gamma^2}\,\frac{\partial n}{\partial r} \qquad (8)$$

где черта означает усреднение по r. Если во всей области, занятой плазмой, разность $\omega_i-\overline{\omega}_i$ достаточно мала, а градиент плотности положителен, то вся подынтегральная функция в формуле (8) оказывается отрицательной при любых Ω_1 и φ, тогда как левая часть равенства (5) положительна. Таким образом, предположение о неустойчивости вступает в противоречие с условием (5). Из выражения (8) видно, что достаточное условие устойчивости можно оценочно понимать как требование малости изменения частоты вращения $(\omega_i-\overline{\omega}_i)$ по сравнению с величиной $\overline{\omega}_i^2$. Рассмотренный здесь пример имеет простой физический смысл: он показывает отсутствие центробежной неустойчивости в плазме с нарастающей по радиусу плотностью.

Другим интересным частным случаем является случай однородного распределения плотности и неоднородного вращения, когда неустойчивость может возникать только за счет проскальзывания слоев плазмы друг относительно друга. Достаточный критерий устойчивости в этом случае дается известным условием Рэлея: функция $f=\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}r^2\omega_i$ должна быть знакоопределенной (см. соотношение (6)). По аналогии с критерием Рэлея можно написать простое условие устойчивости и для плазмы с неоднородной плотностью: для устойчивости достаточно, чтобы функции $\frac{\partial n}{\partial r}$ и $\frac{\partial n}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\omega_i$ имели на всем промежутке $r_1<r<r_2$ противоположные знаки и не обращались в ноль. Это условие допускает относительное изменение плотности плазмы на величину порядка ω_i

Поясним теперь, как можно обеспечить устойчивость плазмы в случае, когда относительные изменения плотности n и скорости вращения ω_i на промежутке $(r_1;r_2)$ по порядку величины равны единице. Для этого заметим, что при $n=n_0$ и $\omega_i=\omega_0(1+R^2/r^2)$, где n_0, ω_0 и R – произвольные константы, уравнение (3) с граничными условиями (4) вообще не имеет нетривиальных решений. Примем для простоты, что внутренний и внешний радиусы камеры по порядку величины одинаковы $(r_1\sim r_2\sim R)$ и рассмотрим профили ω_i и n следующего вида:

$$\omega_i=\omega_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)+\delta\omega_i$$

$$n=n_0+\delta n$$

Пусть, кроме того, характерный пространственный масштаб изменения функций $\delta\omega_i$ и δn по порядку величины равен R. Простые оценки показывают, что в этом случае, несмотря на наличие резонансных знаменателей в правой части уравнения (3), собственная функция не может "уложиться" в промежуток $(r_1;r_2)$ по крайней мере до тех пор, пока $\delta\omega_i\ll\omega_0$ и $\delta n\ll n_0$. При проведении оценок существенно, что исходный профиль скорости вращения неоднороден (это обеспечивает малость пространственной ширины области резонанса по сравнению с полной шириной промежутка, заполненного плазмой).

Исследование устойчивости конфигураций, для которых $\delta\omega_i$ и δn сопоставимы с ω_0 и n_0, требует численного решения уравнения (3). При этом удобно воспользоваться методом Найквиста.

Проинтегрируем уравнение (3), считая, что

$$\varphi(r_1)=0\,;\qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=r_1}=1\,,$$

и найдем значение φ в точке r_2 как функцию Ω. Полученная таким образом функция $\varphi(\Omega)$ аналитична во всей верхней полуплоскости комплексной переменной Ω. Зафиксируем теперь некоторое значение γ_0 и рассмотрим отображение линии $\mathrm{Im}\,\Omega=\gamma_0$ на комплексную плоскость значений φ при $r=r_2$. Если уравнение (3) имеет решения с $\mathrm{Im}\,\Omega>\gamma_0$, то область, ограниченная образом линии $\mathrm{Im}\,\Omega=\gamma_0$ должна включать в себя точку $\varphi=0$. Если же точка $\varphi=0$ лежит вне указанной области, а величина γ_0 при этом выбрана малой по сравнению с характерным значением ω_i^2, то можно с достаточной уверенностью считать, что неустойчивость вообще отсутствует.

Имея в виду изложенные выше оценки, разумно предположить, что устойчивыми должны быть прежде всего такие распределения ω_i и n, в которых плотность нарастает по радиусу, а ω_i удовлетворяет условию устойчивости Ралея. В соответствии с этим в одном из вариантов численного решения уравнения (3) мы полагали

$$n = n_0 e^{2r}\ ; \quad \omega_i = 0{,}15 - 0{,}05\, r\ ; \quad r_1 = 1\ ; \quad r_2 = 3\ . \tag{9}$$

Из формулы (9) видно, что на внешней стенке камеры скорость вращения обращается в ноль (именно такая ситуация интересна с экспериментальной точки зрения). Вычисления проводились при $\gamma_0 = 10^{-3}$, что на порядок меньше максимального значения ω_i^2. Распределение (9) оказалось устойчивым относительно возмущений с произвольными значениями ℓ. Для сравнения укажем, что замена растущего профиля плотности на спадающий

$$n = n_0 e^{-2r}$$

(при неизменном профиле скорости вращения) приводит к нарушению устойчивости, причем неустойчивыми оказываются сразу несколько азимутальных и радиальных мод.

Выполненные нами вычисления показали, что помимо распределения (9) существует большое число других устойчивых распределений ω_i и n. Это дает веские основания рассчитывать на достижение МГД устойчивости вращающейся плазмы в условиях реального эксперимента.

Авторы признательны В.В.Васильеву за помощь в проведении численных расчетов.

Литература

1. Л.А.Арцимович. Управляемые термоядерные реакции. Физматгиз. М., 1961.
2. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. УФН, 73, 701 (1961).
3. M.N.Rosenbluth, A.Simon. Phys. Fluids, 8, 1300 (1965).
4. А.В.Тимофеев. Я.С. № 6, 93 (1966).
5. В.Н.Бочаров, С.Г.Константинов, А.М.Кудрявцев, О.К.Мыскин, В.М.Панасюк, А.Ф.Сорокин, Ф.А.Цельник. ФП, 4, № 3 (1978).
6. В.М.Панасюк, Ф.А.Цельник. ФП, 1, № 3 (1975).
7. B.Lehnert. Phys. Scripta, 13, 317 (1976).