35

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Н.И. Зиневич, М.М. Карлинер

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ РАЗБРОСА ПРОДОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

ПРЕПРИНТ 82-43

Новосибирск

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ РАЗБРОСА ПРОДОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Н.И.Зиневич, М.М.Карлинер

АННОТАЦИЯ

На основе уравнений для микроскопической фазовой плотности и микроскопических уравнений выводятся кинетические уравнения для системы слабовзаимодействующих заряженных частиц в приближении мелкомасштабных флуктуаций. Полученные уравнения используются для анализа системы стохастического охлаждения разброса продольных импульсов тяжелых заряженных частиц в накопителях с дифференциальным датчиком в качестве источника сигнала для цепи обратной связи. Приводится уравнение, определяющее поведение одночастичной функции распределения частиц. Исследуется эволюция функции распределения в процессе охлаждения с учетом шумов цепи обратной связи.

В в е д е н и е

Теоретический анализ предложенного Ван-дер-Меером способа стохастического охлаждения тяжелых заряженных частиц в накопителях был дан в работах Я.С.Дербенева и С.А.Хейфеца /I,2/. Используемое авторами кинетическое уравнение было выведено с помощью обычного приема обрыва цепочки Боголюбова при наложении дополнительного условия ослабления начальных корреляций.

Было показано, что полезным эффектом является эффект затухания колебаний частицы вследствие самодействия через цепь обратной связи (ОС), действие же других частиц приводит к диффузионному увеличению ее амплитуды. Однако, процесс взаимодействия носит коллективный характер, и более естественно было бы описывать его на языке коллективных степеней свободы. С этой точки зрения удобно в качестве исходной использовать систему уравнений для микроскопической фазовой плотности и микроскопических напряженностей полей. Такой подход был предложен Ю.Л.Климонтовичем для описания неравновесных процессов в плазме /3/.

Применение этого подхода позволяет существенно упростить решение задачи о стохастическом охлаждении тяжелых частиц в накопителях. Это обусловлено тем, что вместо сложных уравнений для функций распределения координат и импульсов частиц приходиться решать сравнительно более простые уравнения для моментов микроскопической фазовой плотности и микроскопических напряженностей полей и уравнение для случайных отклонений этих функций от их среднего значения. Предлагаемый метод позволяет получить не только явный вид уравнения, определяющего эволюцию функции распределения, но и рассчитать спектральные плотности неравновесных флуктуаций частиц и действующих полей.

I. Кинетические уравнения для системы слабо взаимодействующих заряженных частиц

Микроскопическое состояние заряженных частиц в накопителе в момент времени t может быть задано совокупностью координат $\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N$ и импульсов $\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_N$ всех N частиц.

Для краткости в дальнейшем будем использовать обозначения: $X_i=(\vec{r}_i,\vec{p}_i)$ – шестимерный вектор, определяющий состояние частицы с номером $i\ (1\le i\le N)$, $X=(X_1,\ldots,X_N)$ – $6N$-мерный вектор, определяющий состояние всех частиц в накопителе.

Функцию распределения переменных X обозначим через $f_N(X,t)$. Выражение $f_N(X,t)\,dX$ определяет вероятность того, что в момент времени t значения координат и импульсов всех частиц заключены в пределах dX около значения X, причем
$$\int f_N(X,t)\,dX = 1$$

При описании флуктуаций частиц удобен, однако, другой способ задания микросостояния системы. Будем считать микросостояние заданным, если в любой момент времени t в любой точке $X=(\vec{r},\vec{p})$ шестимерного фазового пространства известна плотность $N(x,t)$, определяемая выражением
$$N(x,t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta\left(x-x_i(t)\right) \qquad (1)$$

Величина $N(x,t)\,dX$ определяет истинную (не среднюю) долю частиц в элементе объема dX шестимерного фазового пространства около точки X. Эта величина, естественно, является случайной. Эволюция фазовой плотности описывается уравнением /3/:
$$\frac{\partial N}{\partial t}+\vec{v}\,\frac{\partial N}{\partial\vec{r}}+\dot{\vec{p}}\,\frac{\partial N}{\partial\vec{p}}=0\,, \qquad (2)$$
$$\vec{v}=\frac{\vec{p}}{m}\,,\qquad \dot{\vec{p}}=\vec{F}(\vec{r},t)\,, \qquad (3)$$
где $\vec{F}(\vec{r},t)$ - действующая сила.

Для достаточно широкого класса задач, встречающихся на накопителях заряженных частиц, сила, действующая на частицы пучка, может быть записана в виде
$$\vec{F}(\vec{r},t)=\vec{F}_{вн}(\vec{r},t)+\int\vec{G}(\vec{r},x',t,t')N(x',t')\,dx'dt'\,, \qquad (4)$$
$\vec{F}_{вн}(\vec{r},t)$ - внешняя сила.

Займемся усреднением микроскопических уравнений (2),(3),(4). Воспользуемся для этого функцией f_N. Обозначим статистическое усреднение по ансамблю чертой сверху. Непосредственное усреднение уравнения (2) дает:
$$\frac{\partial\overline{N}}{\partial t}+\vec{v}\,\frac{\partial\overline{N}}{\partial\vec{r}}+\overline{\vec{F}(\vec{r},t)\,\frac{\partial N}{\partial\vec{p}}}=0 \qquad (5)$$
$$\overline{N}(x,t)=\frac{1}{N}\int\sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i)\,f_N\,dX=\int\delta(x-x_1)\,f_N\,dX$$

(6)

Используя определение функции распределения одной частицы
$$f_1(x_1,t)=\int f_N\,dx_2,\dots,dx_N\,,$$
из равенства (6) получаем, что
$$\overline{N}(x,t)=f_1(x,t)\,,$$
т.е. среднее значение фазовой плотности совпадает с одночастичной функцией распределения.

Уравнение (5) запишем в иной форме, обозначив через
$$\delta N(x,t)=N(x,t)-\overline{N}(x,t) \qquad (7)$$
отклонение случайной функции $N(x,t)$ от ее среднего значения. Аналогично введем отклонение силы от ее среднего значения
$$\delta\vec{F}(\vec{r},t)=\vec{F}(\vec{r},t)-\vec{F}_{ср}(\vec{r},t)=\int\vec{G}(\vec{r},x',t,t')\,\delta N(x',t')\,dx'dt'\,, \qquad (8)$$
$$\vec{F}_{ср}(\vec{r},t)=\vec{F}_{вн}(\vec{r},t)+\int\vec{G}(\vec{r},x',t,t')\,f_1(x',t')\,dx'dt'\,.$$

Подставляя (7), (8) в (5), найдем:
$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\vec{v}\,\frac{\partial f_1}{\partial\vec{r}}+\vec{F}_{ср}\,\frac{\partial f_1}{\partial\vec{p}}=-\overline{\delta\vec{F}\,\frac{\partial\delta N}{\partial\vec{p}}}\,, \qquad (9)$$
$$\frac{\partial\delta N}{\partial t}+\vec{v}\,\frac{\partial\delta N}{\partial\vec{r}}+\vec{F}_{ср}\,\frac{\partial\delta N}{\partial\vec{p}}+\delta\vec{F}\,\frac{\partial f_1}{\partial\vec{p}}=-\delta\vec{F}\,\frac{\partial\delta N}{\partial\vec{p}}+\overline{\delta\vec{F}\,\frac{\partial\delta N}{\partial\vec{p}}}\,. \qquad (10)$$

Если в уравнениях (9), (10) не учитывать вклад, обусловленный флуктуациями δF, δN, то имеем широко известные уравнения Власова
$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\vec{v}\,\frac{\partial f_1}{\partial\vec{r}}+\vec{F}_{ср}\,\frac{\partial f_1}{\partial\vec{p}}=0\,,$$
$$\vec{F}_{ср}=\vec{F}_{вн}+\int\vec{G}(\vec{r},x',t,t')\,f_1(x',t')\,dx'dt'\,.$$

Будем считать, что флуктуации силы малы. Как следует из (10), отклонение δN того же порядка малости, что и δF, правые же части (9), (10) второго порядка малости относительно δF. Пренебрегая в (10) нелинейными по δN членами, приходим к более простому уравнению

$$\frac{\partial \delta N}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial \delta N}{\partial \vec{r}} + \vec{F}_{cp}\,\frac{\partial \delta N}{\partial \vec{p}} + \delta\vec{F}\,\frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}} = 0 \qquad (11)$$

Малость члена $\overline{\delta\vec{F}\,\frac{\partial \delta N}{\partial \vec{p}}}$ в (9) указывает на то, что изменение одночастичной функции распределения вследствие взаимодействия флуктуаций происходит медленно. На этом основании можно было бы при интегрировании уравнения (11) не принимать во внимание зависимость функции $f_1(\vec{p},\vec{r},t)$ от времени и координат. Однако нетрудно понять, что всегда есть длинномасштабные флуктуации с временами изменения порядка времени изменения функции f_1. Будем считать, что $\delta\vec{F}$ настолько мала, что доля спектра флуктуаций δN, приходящаяся на медленно меняющуюся часть, существенно меньше части спектра, принимающего участие во взаимодействии. Иными словами, положим, что определяющую роль во взаимодействии играют мелкомасштабные флуктуации с временами корреляции малыми по сравнению с временем изменения функции f_1. В рассматриваемом приближении в уравнении (11) можно не учитывать зависимость одночастичной функции распределения $f_1(\vec{p},\vec{r},t)$ от времени и координат. В этом случае (11) является обычным линейным относительно флуктуаций уравнением. Его полное решение, как известно, представляется суммой свободного решения, определяемого начальным условием, и вынужденного. Более удобно, однако, считать начальные условия нулевыми, а в (11) ввести эквивалентный им источник

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{F}_{cp}\,\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right)\left(\delta N - \delta N^{\text{ист}}\right) + \delta\vec{F}\,\frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}} = 0 . \qquad (12)$$

Флуктуации источника есть свободные флуктуации δN в отсутствие взаимодействия.

Чтобы найти функцию корреляции источника, рассмотрим соотношение

$$\overline{\delta N(x,t)\,\delta N(x',t')} = \overline{N(x,t)\,N(x',t')} - \bar{N}(x,t)\,\bar{N}(x',t') =$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N} \delta\left[x - x_i(t)\right]\delta\left[x' - x_j(t')\right] - f_1(x,t)\,f_1(x',t') . \qquad (13)$$

Разобьем двойную сумму в (13) на две части:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j=1}^{N} \delta\left[x - x_i(t)\right]\delta\left[x' - x_j(t')\right] + \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} \delta\left[x - x_i(t)\right]\delta\left[x' - x_i(t')\right] .$$

Если нет взаимодействия, то корреляции между различными частицами отсутствуют, поэтому при усреднении по ансамблю первая

сумма (в пренебрежении единицей по сравнению с) равна $f_1(x,t)\cdot f_1(x',t')$.

Вторая сумма для случая свободно движущихся частиц переписывается следующим образом:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} \delta\left[\vec{r} - \vec{r}_i(t)\right]\delta\left[\vec{p} - \vec{p}_i(t)\right]\delta\left[\vec{r}\,' - \vec{r}_i(t) - \vec{v}(t-t')\right]\delta\left[\vec{p}\,' - \vec{p}_i(t)\right] ,$$

и после усреднения дает

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta\left[\vec{r} - \vec{r}\,' - \vec{v}(t-t')\right]\delta\left[\vec{p} - \vec{p}\,'\right] f_1(\vec{p},\vec{r},t) .$$

Суммируя эти результаты, находим интересующие нас корреляции

$$\overline{\delta N(x',t')\,\delta N(x,t)}^{\text{ист}} = \frac{1}{N}\,\delta\left[\vec{p} - \vec{p}\,'\right]\delta\left[\vec{r} - \vec{r}\,' - \vec{v}(t-t')\right] f_1(\vec{p},\vec{r},t) . \qquad (14)$$

Таким образом, для случая слабо взаимодействующих частиц и приближения мелкомасштабных флуктуаций кинетические уравнения принимают вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{F}_{cp}\,\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right) f_1 = -\,\overline{\delta\vec{F}\,\frac{\partial \delta N}{\partial \vec{p}}} , \qquad (15)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{F}_{cp}\,\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right)\left(\delta N - \delta N^{\text{ист}}\right) = -\delta\vec{F}\,\frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}} \qquad (16)$$

причем корреляции источника определяются равенством (14). Отметим, что уравнения (15),(16) по форме совпадают с кинетическими уравнениями для кулоновской плазмы в поляризационном приближении и пренебрежении крупномасштабными флуктуациями /3/.

2. <u>Стохастическое охлаждение разброса продольных импульсов</u>

2.1. <u>Модель продольного движения</u>. Применим полученные выше результаты для расчета флуктуаций и эволюции одночастичной функции распределения в системе стохастического охлаждения разброса продольных импульсов. В качестве источника сигнала для цепи обратной связи используется дифференциальный датчик. Мы не будем подробнее останавливаться на описании системы охлаждения, которое можно найти, например, в /5/. При описании движения частиц не учитывается влияние поперечных колебаний частиц на продольную динамику.

Уравнения продольного движения частиц, записанные в системе покоя равновесной частицы, имеют следующий вид /4/

$$\dot{z} = \frac{P_z}{m_s}\left(\frac{1}{\gamma_s^2} - \alpha\right), \qquad \dot{P}_z = e E_z(z + \omega_s R_s t, t), \tag{17}$$

z – продольная координата в системе покоя равновесной частицы; $P_z = P - P_s$, P_s – импульс равновесной частицы; P – полный импульс частицы; γ_s – релятивистский фактор; α – коэффициент расширения орбит; m_s, ω_s, R_s – соответственно масса, частота обращения и средний радиус орбиты равновесной частицы. Электрическое поле E_z в системе покоя равновесной частицы получается из поля в лабораторной системе $E_z(\ell, t)$ (ℓ – продольная координата в этой системе) заменой $\ell = z + \omega_s R_s t$.

Для дальнейшего нам удобно уравнения (I7) переписать в переменных азимут $\theta = z/R_s$, частота обращения $\omega = P_z/MR_s$ в системе покоя равновесной частицы ($M = m_s\left(\frac{1}{\gamma_s^2} - \alpha\right)^{-1}$ – эквивалентная масса продольного движения):

$$\dot{\theta} = \omega, \qquad \dot{\omega} = \frac{e}{MR_s} E_z(\theta + \omega_s t, t) \tag{18}$$

Уравнения (I8) являются каноническими с гамильтонианом

$$H = \frac{\omega^2}{2} - \frac{e}{MR_s} \int E_z(\theta + \omega_s t, t)\, d\theta .$$

Продольное электрическое поле, создаваемое кикером (например, ускоряющим зазором), выражается рядом Фурье

$$E_z(\theta + \omega_s t, t) = \frac{U(t)}{2\pi R_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im(\omega_s t + \theta)}, \tag{19}$$

$U(t)$ – напряжение на зазоре. Коэффициенты a_m учитывают распределение поля в зазоре.

Будем полагать, что источником сигнала для цепи обратной связи (ОС) являются флуктуации радиальной координаты центра тяжести, определяемые через отклонения фазовой плотности следующим образом

$$y_c(\theta, t) = \frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\, \delta N(\omega, \theta, t)\, d\omega \tag{20}$$

Периодичность по θ функции $\delta N(\omega, \theta, t)$ позволяет представить ее суммой азимутальных гармоник

$$\delta N(\omega, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta N_m(\omega, t)\, e^{im\theta},$$

что дает возможность переписать равенство (20) в виде

$$y_c(\theta, t) = \frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s} \sum_m e^{im\theta} \int \omega\, \delta N_m(\omega, t)\, d\omega . \tag{21}$$

Пусть азимут ускоряющего зазора в лабораторной системе координат $\theta_{\Lambda K} = 0$, азимут датчика сигнала цепи обратной связи $\theta_{\Lambda g} = -\theta_0$, при этом $\theta_\Lambda = \theta + \omega_s t$. Переписывая равенство (21) в лабораторной системе координат (с помощью замены $\theta = \theta_\Lambda - \omega_s t$), подставляя затем $\theta_\Lambda = -\theta_0$, найдем величину координаты центра тяжести в датчике

$$y_c(t, -\theta_0) = \sum_m y_{cm}(t)\, e^{-im(\theta_0 + \omega_s t)}, \tag{22}$$

$$y_{cm}(t) = \frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s} \int \omega\, \delta N_m(\omega, t)\, d\omega .$$

Значение координаты центра тяжести пучка (22) в датчике и является входным сигналом для цепи обратной связи. Пренебрегая шумами усилителя, обратную связь опишем соотношением

$$U(s) = K(s)\, e^{-s\tau} \sum_m y_{cm}(s + im\omega_s)\, e^{-im\theta_0},$$

$U(s)$, $y_{cm}(s)$ – Лаплас-изображения $U(t)$, $y_{cm}(t)$, $K(s)$ – коэффициент передачи усилителя и датчика, τ – время задержки цепи обратной связи.

Положим, что в системе покоя равновесной частицы энергия взаимодействия частиц через цепь обратной связи много меньше их кинетической энергии, и что определяющую роль в эволюции одночастичной функции распределения играют мелкомасштабные флуктуации с временами корреляции малыми по сравнению с временем изменения функции f_1. Это позволяет использовать для описания процесса охлаждения в качестве исходных уравнения (I5,I6), которые в переменных θ, ω имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + F_{cp}(\theta,t)\frac{\partial}{\partial \omega}\right)\left(\delta N(\theta,\omega,t) - \delta N^{\text{ист}}(\theta,\omega,t)\right) = -\delta F(\theta,t)\,\frac{\partial f_1(\theta,\omega,t)}{\partial \omega}, \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + F_{cp}(\theta,t)\frac{\partial}{\partial \omega}\right) f_1(\theta,\omega,t) = \overline{-\,\delta F(\theta,t)\frac{\partial}{\partial \omega}\,\delta N(\theta,\omega,t)} .$$

Положим, для простоты, что отсутствуют внешние силы, действующие на пучок, и что $\int_{-\infty} \omega f_1(\omega,\theta,t)\, d\omega \equiv 0$, тогда $F_{cp}(\theta,t) \equiv 0$, и пусть, кроме того, $f_1(\omega,\theta,t) \equiv f_1(\omega,t)$. Подставляя в первое уравнение (23)

$$\delta F(\theta,t) = \frac{eU(t)}{2\pi R_s^2 M} \sum_m a_m e^{im(\omega_s t + \theta)},$$

получим следующую систему дифференциальных уравнений для азимутальных гармоник отклонений фазовой плотности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+im\omega\right)\left(\delta N_m(\omega,t)-\delta N_m^{ист}(\omega,t)\right)=-\frac{ea_m}{2\pi R_s^2 M}e^{im\omega_s t}\frac{\partial f_1}{\partial\omega}, \quad m=\pm1,\pm2,\ldots \tag{24}$$

Здесь опущена гармоника с $m=0$, так как на этой гармонике отсутствуют пространственно-временные изменения флуктуаций и левая часть (24) обращается в нуль.

Корреляция флуктуаций источника определяется соотношением (I4), которое применительно к продольному движению переписывается следующим образом:

$$\overline{\delta N(\omega,\theta,t)\,\delta N(\omega',\theta',t')}^{ист}=\frac{\delta(\omega-\omega')}{N}\,\delta\left[\theta-\theta'-\omega(t-t')\right]f_1(\omega).$$

Представим эту функцию корреляции рядом Фурье

$$\frac{\delta[\omega-\omega']}{N}\,\delta\left[\theta-\theta'-\omega(t-t')\right]f_1(\omega)=\frac{1}{N}\sum_m\frac{\delta(\omega-\omega')}{2\pi}e^{im(\theta-\theta')-im\omega(t-t')}f_1(\omega).$$

Случайный процесс является стационарным, поэтому спектральную плотность амплитуды m-ой гармоники источника найдем известным способом $(t-t'\equiv\tau)$

$$S_m^{ист}(\omega,\omega',\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-im\omega\tau-i\Omega\tau}\frac{\delta(\omega-\omega')}{2\pi N}f_1(\omega)\,d\tau= \tag{25}$$

$$=\frac{\delta(\omega-\omega')}{2\pi N}\,\delta(m\omega+\Omega)f_1(\omega).$$

Отметим, что корреляции между гармониками источника с разными номерами отсутствуют, ширина спектра определяется шириной одночастичной функции распределения $\Delta\omega$ и растет с номером гармоники m.

2.2. <u>Эволюция функции распределения</u>. Подвергнув уравнение (24) преобразованию Лапласа по времени, учитывая, что на временах корреляции флуктуаций функция f_1 не меняется, найдем его решение

$$\delta N_m(\omega,s)=-\frac{ea_m}{2\pi R_s^2 M}\frac{U(s-im\omega_s)}{s+im\omega}\frac{\partial f_1}{\partial\omega}+\delta N_m^{ист}(\omega,s), \tag{26}$$

$\delta N_m(\omega,s)$, $U(s)$, $\delta N_m^{ист}(\omega,s)$ – Лаплас – изображение функций $\delta N(\omega,t)$, $U(t)$, $\delta N_m^{ист}(\omega,t)$. Начальные условия положены нулевыми. Равенство (26) описывает изменение гармоник δN_m под действием напряжения обратной связи в присутствии источника. При нулевом напряжении ОС свободные флуктуации δN_m есть флуктуации источника.

Положим, что задержка распространения сигнала по цепи обратной связи τ равна времени движения частиц пучка от датчика до кикера, т.е. $\tau=\theta_0/\omega_s$ и что полоса цепи ОС – $n_{max}\omega_s$. Предположим, кроме того, отсутствие перемешивания частиц при их движении от датчика к кикеру, т.е. $n_{max}\Delta\omega\tau\ll1$.

Считая в этом приближении, что гармоники с разными номерами не взаимодействуют, перепишем (26)

$$\delta N_m(\omega,s)=-\frac{ea_m}{2\pi R_s^2 M}\frac{K(s-im\omega_s)}{s+im\omega}\frac{\partial f_1}{\partial\omega}y_{cm}(s)+\delta N_m^{ист}(\omega,s).$$

Умножая последнее равенство на $\alpha R_s M\omega/m_s\omega_s$ и интегрируя по ω после несложных алгебраических преобразований, получим выражение для флуктуаций азимутальных гармоник координаты центра тяжести

$$y_{cm}(s)=\frac{y_{cm}^{ист}(s)}{1-K(s-im\omega_s)\eta_m(s)}, \tag{27}$$

$$\eta_m(s)=-\frac{ea_m\alpha}{2\pi R_s\omega_s m_s}\int\omega\frac{\partial f_1}{\partial\omega}\frac{d\omega}{s+im\omega}, \quad y_{cm}^{ист}(s)=\frac{\alpha R_s M}{\omega_s m_s}\int\omega\,\delta N_m^{ист}(\omega,s)\,d\omega.$$

Отсюда легко выразить и флуктуации напряжения обратной связи через флуктуации источника

$$U(s-im\omega_s)=\frac{K(s-im\omega_s)\,y_{cm}^{ист}(s)}{1-K(s-im\omega_s)\eta_m(s)}. \tag{28}$$

Перейдем теперь к уравнению для одночастичной функции распределения. С учетом ранее сделанных предположений, второе уравнение (23), описывающее поведение функции f_1, принимает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\omega}\overline{\delta F(\theta,t)\,\delta N(\theta,\omega,t)}. \tag{29}$$

Раскроем правую часть (29)

$$\overline{\delta F(\theta,t)\,\delta N(\theta,\omega,t)}=\sum_m\frac{ea_m}{2\pi R_s^2 M}\overline{U(t)\,e^{im\omega_s t}\,\delta N_{-m}(\omega,t)}.$$

Вычисление взаимной корреляции флуктуаций напряжения обратной связи и фазовой плотности проведено в Приложении. Используя