

32  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

И.А. Котельников, Г.В. Ступаков

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ  
ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКОВОЙ  
ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ  
С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

ПРЕПРИНТ 82-40



Новосибирск

SOME NONLINEAR EFFECTS IN THE SOUND  
WAVE PROPAGATION IN THE GAS-BUBBLE LIQUID

I.A.Kotel'nikov, G.V.Stupakov

Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

The effect of the gas bubbles oscillations nonlinearity on the damping of a quasimonochromatic wave propagating in a gas-liquid medium is studied. The dissipative effects (viscosity, thermoconductivity, etc.) are assumed to be negligible.

In the linear approximation a small amplitude wave exponentially damps giving all its energy to the bubbles due to resonant interaction. Taking into account nonlinear effects shows that nonlinear damping of a monochromatic wave of a sufficiently large amplitude causes only a small decreasing of the wave energy. The value of this energy loss is calculated. It is shown that a wave packet localized in the space always damps to exhaustion because of its motion with group velocity through the medium.

The penetration of the sound perturbation generated by a garmonic source at the boundary of the medium is also considered. In this case nonlinear effects are essential no matter how small the source is.

## 1. Введение

Добавление в жидкость небольшого количества случайно распределенных газовых пузырьков существенным образом изменяет дисперсионные свойства звуковых колебаний, распространяющихся в такой среде. По-видимому, наиболее интересная характеристика газожидкостной смеси в этом отношении — появление затухания звука даже в пренебрежении диссипативными процессами в жидкости (вязкостью и теплопроводностью). Физический механизм такого затухания полностью аналогичен затуханию Ландау в физике плазмы и состоит в том, что волна передает свою энергию резонансным пузырькам, собственная частота колебаний которых совпадает с частотой волны. Линейная теория недиссипативного затухания звука в жидкости с пузырьками газа была построена в работе [1].

Что касается нелинейных эффектов при распространении волн в газожидкостной среде, то они изучались ранее в пренебрежении взаимодействием резонансных пузырьков с волной. Это предположение справедливо, если имеются, например, только пузырьки одного (нерезонансного) радиуса [2,3]. В рамках такой модели был получен ряд важных результатов: выведено уравнение Бюргерса-Кортвега — де Вриза и получены решения в виде стационарных волн и акустических солитонов [4]. Выводы теории подтверждены экспериментальными исследованиями [5].

В настоящей работе мы рассмотрим влияние нелинейности колебаний резонансных пузырьков на распространение звуковых возмущений. Наш подход основан на предположении, что длина волны звукового возмущения  $\lambda$  велика по сравнению с расстоянием между пузырьками. Это позволяет описывать колебания в приближении сплошной среды, используя микроскопические уравнения, усредненные по объемам, линейный размер которых много меньше длины волны, но много больше расстояния между пузырьками. Кроме того, мы ограничимся изучением случая, когда объемное содержание пузырьков  $\alpha$  мало по сравнению с параметром  $\epsilon = p_0 / \rho c^2$ , характеризующим сжимаемость чистой жидкости\* (  $p_0$  — равновесное давление,  $c$  — скорость звука в жидкости,  $\rho$  — ее плотность). Линейная теория [1] предсказывает в этом случае, что монохроматическая волна экспоненциально затухает с декрементом  $\gamma_\lambda$ :

\* Для воды при атмосферном давлении  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ .

$$\chi_{\lambda} = \pi^2 c^2 \int a g(a) \delta(\omega_0(a) - \omega) da, \quad (I.1)$$

где  $\omega_0(a)$  — обозначает частоту линейных колебаний пузырька радиуса  $a$ , а функция распределения пузырьков по радиусам  $g(a)$  нормирована таким образом, что  $g(a)da$  дает число пузырьков с радиусами в интервале от  $a$  до  $a+da$  в единице объема. Если разброс пузырьков по радиусам  $\Delta a$  сравним с характерным радиусом  $a$ , то по порядку величины  $\chi_{\lambda} \sim \omega a / \epsilon$ .

Изучение нелинейных эффектов в настоящей работе проводится для почти монохроматических волн, когда возмущение давления имеет вид

$$\delta p(\vec{r}, t) = \delta p_0(\vec{r}, t) \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \theta(\vec{r}, t)), \quad (I.2)$$

где  $\delta p_0(\vec{r}, t)$  и  $\theta(\vec{r}, t)$  — медленно меняющиеся в пространстве и времени амплитуда и фаза. В разделе 2 усреднением по быстрым осцилляциям частоты  $\omega$  выводятся уравнения, описывающие плавные изменения амплитуды колебаний резонансных пузырьков, огибающей и фазы волны. С помощью этих уравнений в третьем разделе анализируется нелинейное затухание синусоидальной волны ( $\delta p_0$  и  $\theta$  не зависят от  $\vec{r}$ ), которая возбуждается в среде в момент  $t = 0$  (такая постановка соответствует задаче о нелинейном затухании сильной ленгмюровской волны в плазме, решенной в работах [6,7]). Аналитически удается вычислить энергию, поглощенную пузырьками в пределе больших значений  $\delta p_0$  (точный критерий см. в разделе 3), когда амплитуда волны в ходе затухания меняется незначительно. Численным расчетом проиллюстрирован переход от нелинейной стадии затухания к линейной, происходящий с уменьшением  $\delta p_0$ .

В четвертом разделе рассматривается эволюция огибающей пакета волн. В отличие от синусоидального возмущения локализованный пакет, как оказывается, затухает до конца даже в нелинейном режиме.

Пятый раздел посвящен изучению проникновения в жидкость с пузырьками газа звукового возмущения, возбуждаемого на границе среды гармоническим источником. Особенностью этой задачи является то, что даже при сколь угодно малой амплитуде  $\delta p_0$  нелинейные эффекты играют определяющую роль. Здесь найдены скорость проникновения и ширина фронта волны.

Всюду в настоящей работе пренебрегается влиянием диссипативных эффектов (вязкости, теплопроводности). Условия такого пренебрежения обсуждаются в заключительном, шестом разделе.

## 2. Основные уравнения

Для описания распространения волны в жидкости с пузырьками газа мы воспользуемся системой уравнений из работы [1]:

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - \Delta \delta p = 0 \quad (2.1)$$

$$\delta p = \delta p / c^2 - 4\pi \rho \int a^2 \xi g(a) da$$

где  $\delta \rho$  — обозначает возмущение плотности смеси;  $\delta p$  — возмущение давления;  $\xi = R - a$  — отклонение текущего радиуса пузырька  $R$  от его равновесного значения  $a$ ;  $\rho$  — плотность;  $c$  — скорость звука в чистой жидкости.

Первое из уравнений (2.1) является следствием линеаризованных уравнений гидродинамики идеальной жидкости, а второе — учитывает тот факт, что возмущение плотности смеси возникает как вследствие сжимаемости жидкости, так и из-за изменения объема пузырьков. Здесь и в дальнейшем предполагается, что возмущение давления мало по сравнению с равновесным давлением  $p_0$  и, как следствие, амплитуда колебаний пузырьков также мала,  $\xi \ll a$ .

Система (2.1) должна быть дополнена уравнением, связывающим отклонение  $\xi$  с давлением в волне  $\delta p$ . В пренебрежении диссипативными процессами это уравнение имеет следующий вид [8]:

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{p_2 - p_0 - \delta p}{\rho}, \quad (2.2)$$

где  $p_2$  — давление газа внутри пузырька. Для определенности мы будем считать колебания адиабатическими, тогда

$$p_2 = p_0 (a/R)^{3\gamma}, \quad (2.3)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты газа. Проводя разложение в (2.2) по малому параметру  $\xi/a$  с точностью до членов  $(\xi/a)^3$ , получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi + \frac{\delta p}{\rho a} = \\ = a \omega_0^2 \left[ \frac{3}{2} (\gamma + 1) \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{9\gamma^2 + 18\gamma + 11}{6} \frac{\xi^3}{a^3} + \frac{3}{2} \frac{\xi^2}{\omega_0^2 a^2} \left( \frac{\xi}{a} - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где через  $\omega_0$  обозначена частота линейных колебаний:

$$\omega_0^2 = 3\gamma p_0 / \rho a^2 \quad (2.5)$$

Учет нелинейных членов в правой части уравнения (2.4) приводит к нелинейному сдвигу частоты  $\Delta\omega_H$ , зависящему от амплитуды линейных колебаний  $\xi_0$ . С помощью стандартной техники (см., например, [9]) нетрудно получить, что в первом неисчезающем приближении

$$\Delta\omega_H = - \frac{6\gamma^2 - 3\gamma - 2}{16} \frac{\xi_0^2}{a^2} \omega_0 \quad (2.6)$$

В рассматриваемых ниже задачах об эволюции квазимонохроматических волн зависимость  $\delta p$  от времени имеет вид (1.2), и основную роль во взаимодействии с волной играют резонансные пузырьки, собственная частота колебаний которых близка к  $\omega$ . Под действием давления  $\delta p$  амплитуда колебаний таких пузырьков меняется медленно по сравнению с  $\omega_0^{-1}$ , что позволяет усреднить уравнение (2.4) по быстрым осцилляциям с частотой  $\omega_0$ . Наиболее просто это сделать, если ввести в рассмотрение гамильтониан пузырька, находящегося в поле волны:

$$\mathcal{H}_0(q, \xi) + 4\pi a^2 \delta p(\vec{r}, t) \xi \quad (2.7)$$

где  $\mathcal{H}_0$  - гамильтониан свободного пузырька;  $q$  обозначает импульс, канонически сопряженный координате  $\xi$ , а вектор  $\vec{r}$  задает положение рассматриваемого пузырька. От переменных  $q$  и  $\xi$  удобно перейти к переменным действие - угол  $I$  и  $\phi$  невозмущенного гамильтониана  $\mathcal{H}_0$ , причем, выражая  $\xi$  через  $I$  и  $\phi$  во втором слагаемом в (2.7), достаточно воспользоваться приближенным соотношением, справедливым для линейного осциллятора:

$$\xi = \left( \frac{2I}{m\omega_0} \right)^{1/2} \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (2.8)$$

роль массы  $m$  для газового пузырька играет величина  $4\pi\rho a^3$ . В новых переменных

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(I) - \omega_0 I + 4\pi a^2 \left( \frac{2I}{m\omega_0} \right)^{1/2} \delta p_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \theta) \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Процедура усреднения теперь заключается в отбрасывании быстро осциллирующего слагаемого  $\propto \cos[(\omega + \omega_0)t - \vec{k}\vec{r} + \theta + \phi]$ . Одновременно, пользуясь малой нелинейностью осциллятора, можно

разложить  $\mathcal{H}_0(I)$  в ряд по  $I$ , ограничившись первыми двумя членами:

$$\mathcal{H}_0(I) = \omega_0 I - \alpha I^2$$

Параметр  $\alpha$ , определяющий нелинейный сдвиг частоты, находится с помощью выражения (2.6):

$$\alpha = \frac{6\gamma^2 - 3\gamma - 2}{16 m a^2} \omega_0$$

Таким образом получаем:

$$\mathcal{H} = -\alpha I^2 + 4\pi a^2 \left( \frac{I}{2m\omega_0} \right)^{1/2} \delta p_0(\vec{r}, t) \cos[(\omega_0 - \omega)t + \vec{k}\vec{r} + \phi + \theta]$$

Наконец, вместо  $\phi$  введем переменную  $\psi = \phi + (\omega_0 - \omega)t + \vec{k}\vec{r}$ . Такая замена эквивалентна каноническому преобразованию, не меняющему действия  $I$ , но изменяющему гамильтониан:

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - (\omega - \omega_0)I = (\omega_0 - \omega)I - \alpha I^2 + 4\pi a^2 \left( \frac{I}{2m\omega_0} \right)^{1/2} \delta p_0 \cos(\psi + \theta). \quad (2.9)$$

Гамильтониан (2.9) служит основой для исследования резонанса нелинейного осциллятора - пузырька. Разумеется, его можно получить и более строгим формальным способом, например, с помощью метода канонических преобразований, изложенного в [10].

Для дальнейшего удобно перейти к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} J &= I / 4\pi m \omega_0 a^2 (\delta p_* / 3\gamma p_0)^{2/3} \\ \Omega &= 4(1 - \omega/\omega_0) (6\gamma^2 - 3\gamma - 2)^{-1} (\delta p_* / 3\gamma p_0)^{-2/3} \\ \mathcal{P} &= (\delta p_0 / \delta p_*) (6\gamma^2 - 3\gamma - 2)^{-1} \\ \tau &= t / T, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$T = 4\omega_0^{-1} (6\gamma^2 - 3\gamma - 2)^{-1} (\delta p_* / 3\gamma p_0)^{-2/3}, \quad (2.11)$$

а  $\delta p_*$  - некоторое характерное значение возмущения давления. В этих обозначениях гамильтониан

$$\mathcal{H}' = \Omega J - J^2 + \mathcal{P} (2J)^{1/2} \cos(\psi + \theta) \quad (2.12)$$

и уравнения движения

$$\frac{dJ}{d\tau} = - \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \psi} = \mathcal{P} (2J)^{1/2} \sin(\psi + \theta) \quad (2.13)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial J} = \Omega - 2J + \mathcal{P} (2J)^{-1/2} \cos(\psi + \theta)$$

выглядят особенно просто. Подчеркнем здесь, что гамильтониан  $\mathcal{H}'$  не равняется энергии пузырька  $\varepsilon$ , которая (с достаточной точностью линейного приближения) пропорциональна действию  $I$ :

$$\varepsilon = \frac{m\omega_0^2 \xi_0^2}{2} = \omega_0 I = 16\pi\rho a^5 \omega_0^2 (\delta p_*/3\gamma p_0)^{2/3} J. \quad (2.14)$$

Суммарную энергию пузырьков в единице объема  $E$  мы будем выражать через энергию одиночного пузырька (2.14), вводя функцию распределения  $f$  на фазовой плоскости  $\mathcal{J}, \Psi$ :

$$E = \int_0^\infty da \int_0^{2\pi} d\mathcal{J} \int_0^{2\pi} d\Psi \varepsilon(\mathcal{J}, a) f(\mathcal{J}, \Psi, a; \vec{r}, t). \quad (2.15)$$

Функция  $f$  удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_0^{2\pi} d\mathcal{J} \int_0^{2\pi} d\Psi f = g(a). \quad (2.16)$$

Для дальнейшего удобно ввести также среднее значение действия  $\bar{J}$  для пузырьков данного радиуса  $a$ :

$$\bar{J} = \frac{1}{g(a)} \int_0^{2\pi} d\mathcal{J} \int_0^{2\pi} d\Psi \mathcal{J} f. \quad (2.17)$$

При этом плотность энергии (2.15) получается интегрированием  $\bar{J}$  по переменной  $a$ . Если же вместо  $a$  использовать в качестве переменной интегрирования  $\Omega$ , то связь  $E$  с  $\bar{J}$  принимает следующий вид:

$$E = 4\pi\rho (6\gamma^2 - 3\gamma - 2) \omega^{-1} (\delta p_*/3\gamma p_0)^{4/3} \int d\Omega \omega_0^3 a^6 g(a) \bar{J}. \quad (2.18)$$

В заключение этого раздела проведем усреднение волнового уравнения, предполагая, что масштаб и время изменения огибающей  $\delta p_0(\vec{r}, t)$  и фазы  $\theta(\vec{r}, t)$  велики по сравнению с  $k^{-1}$  и  $\omega^{-1}$ . После подстановки (1.2) в (2.1) и отбрасывания малых вторых производных от  $\delta p_0$  и  $\theta$ , волновое уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \theta) \left[ \delta p_0 \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) + 2\delta p_0 \left( \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{k} \nabla \theta \right) \right] + \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \theta) \left[ \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \delta p_0}{\partial t} + \vec{k} \nabla \delta p_0 \right] = 2\pi\rho \int da g \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (2.19)$$

Согласно (2.8)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega_0^2(a) \left( \frac{2I}{m\omega_0} \right)^{1/2} \cos(\Psi - \vec{k}\vec{r} + \omega t).$$

Умножая (2.19) сначала на  $\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \theta)$ , а затем на  $\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \theta)$  и усредняя, получим

$$\frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \delta p_0}{\partial t} + \vec{k} \nabla \delta p_0 = -2\pi\rho \int da g a^2 \omega_0^2 \left( \frac{2I}{m\omega_0} \right)^{1/2} \sin(\Psi + \theta) \quad (2.20)$$

$$\delta p_0 \left( \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{k} \nabla \theta \right) = \frac{\omega}{c^2} (\omega - kc) \delta p_0 - 2\pi\rho \int da g a^2 \omega_0^2 \left( \frac{2I}{m\omega_0} \right)^{1/2} \cos(\Psi + \theta) \quad (2.21)$$

Из (2.20) после несложных преобразований с учетом (2.10) - (2.16) следует закон сохранения энергии, связывающий изменение плотности энергии пузырьков и средней плотности энергии волны  $w = (\delta p_0)^2 / 2\rho c^2$  с потоком энергии в волне  $c\vec{n}w$  ( $\vec{n} = \vec{k}/k$  - единичный вектор в направлении распространения волны):

$$\frac{\partial}{\partial t} (w + E) + c \operatorname{div}(\vec{n}w) = 0 \quad (2.22)$$

Что же касается уравнения (2.21), описывающего изменение фазы волны, то нужно отметить, что выбор фазы  $\theta$  и частоты волны  $\omega$  неоднозначен. Это проявляется, в частности, в инвариантности уравнений (2.13), (2.20), (2.21) относительно замены  $\omega \rightarrow \omega + \delta\omega$ ,  $\theta \rightarrow \theta + \delta\omega t$ ,  $\Psi \rightarrow \Psi - \delta\omega t$ . (Разумеется,  $\omega$  должна быть близка к частоте звука в чистой жидкости  $kc$ , в противном случае процедура усреднения, основанная на медленности изменения  $\delta p_0$  и  $\theta$ , теряет смысл). В дальнейшем величина  $\omega$  полагается равной частоте звука в жидкости с пузырьками газа, найденной в линейном приближении [1]:

$$\omega = kc \left[ 1 + 2\pi c^2 \int_0^\infty \frac{a g(a) da}{(kc)^2 - \omega_0^2(a)} \right]. \quad (2.23)$$

При таком выборе  $\omega$  в интегралах, входящих в уравнение (2.20), (2.21), можно выделить вклад области резонанса, и, предполагая, что функция распределения  $g(a)$  слабо меняется на интервале резонансных радиусов пузырьков, вынести ее из-под знака интегрирования. Тогда (2.20), (2.21) в безразмерных переменных принимают следующий вид

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \tau} + cT \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = -\frac{\gamma \Lambda T}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \sqrt{2J} \sin(\Psi + \theta) \quad (2.24)$$

$$\mathcal{P} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + cT \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = -\frac{\gamma \Lambda T}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \sqrt{2J} \cos(\Psi + \theta).$$

### 3. Релаксация начального возмущения конечной амплитуды

Как отмечалось во Введении, согласно линейной теории монохроматическая волна затухает до конца, передавая всю свою энергию резонансным пузырькам, частота колебаний которых лежит в интервале ширины  $\gamma_\lambda$  вблизи частоты волны  $\omega$ . Учет нелинейного сдвига частоты (2.6) приводит к тому, что с ростом энергии колебаний частота резонансных пузырьков изменяется, и, если амплитуда волны достаточно велика, величина  $\Delta\omega_n$  может превысить  $\gamma_\lambda$ . При этом пузырьки выходят из резонанса, обмен энергией между ними и волной из-за фазового размешивания прекращается, а амплитуда волны, установившись на некотором уровне, не меняется дальше со временем. Качественно эффект полностью аналогичен нелинейному затуханию Мазитова - О'Нила ленгмювской волны в плазме [6,7].

Прежде чем переходить к описанию нелинейного затухания, найдем границы применимости линейной теории. Если волна полностью затухнет, вся ее энергия в единице объема  $(\delta p_0)^2 / \rho c^2$  перейдет в энергию колебаний резонансных пузырьков, число которых в единице объема по порядку величины равно  $(\alpha / a^3) \times (\gamma_\lambda / \omega_0) \sim \alpha^2 / \epsilon a^3$ . Находя энергию, которая приходится на один пузырек, и вычисляя с помощью (2.6), (2.14) соответствующий нелинейный сдвиг частоты, получим, что

$$\Delta\omega_n \sim \omega (\delta p_0 / \rho_0)^{2/3} \quad (3.1)$$

Отсюда следует, что условие применимости линейной теории  $\Delta\omega_n \ll \gamma_\lambda$  имеет вид

$$(\delta p_0 / \rho_0)^{2/3} \ll \alpha / \epsilon \quad (3.2)$$

В обратном предельном случае амплитуда монохроматической волны в процессе затухания будет меняться незначительно.

Нетрудно оценить энергию  $E$ , которую поглотят пузырьки при  $(\delta p_0 / \rho_0)^{2/3} \gg \alpha / \epsilon$ . Амплитуда их установившихся колебаний определяется теперь из условия нелинейного резонанса [9]:

$$\omega_0 \Delta\omega \xi_0 \sim \delta p_0 / \rho a,$$

которое вместе с (2.6) дает

$$\xi_0 \sim a (\delta p_0 / \rho_0)^{1/3} \quad (3.3)$$

Умножая энергию одного резонансного пузырька на их число в единице объема, равное  $(\alpha / a^3) (\Delta\omega_n / \omega_0)$ , найдем

$$E \sim \frac{\alpha}{\epsilon} \left( \frac{\delta p_0}{\rho_0} \right)^{-2/3} W.$$

Наличие пузырьков в жидкости приводит к дисперсии скорости звука, поэтому наряду с амплитудой волны меняется и ее фаза  $\theta$ , т.е. мгновенная частота звука  $\omega + \frac{\partial\theta}{\partial t}$ . Изменение фазы  $\theta$ , обусловленное нелинейностью колебаний резонансных пузырьков можно оценить с помощью второго уравнения из (2.21):

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} \sim \frac{\alpha}{\epsilon} \omega_0 \sim \gamma_\lambda \quad (3.4)$$

В нелинейном режиме сдвиг частоты (3.4) существенно меньше ширины резонанса  $\Delta\omega_n$ . Поэтому фазу волны  $\theta$  можно считать постоянной и, для определенности, равной нулю, тогда эволюция волны полностью описывается законом сохранения энергии (2.22).

Перейдем к точному вычислению энергии  $E$ . При решении уравнений колебаний пузырьков можно считать постоянной амплитуду волны  $\delta p_0$ . Тогда гамильтониан (2.12) является интегралом движения.

Выберем в качестве нормирующего множителя  $\delta p_*$  в (2.10) величину  $(6\gamma^2 - 3\gamma - 2)^{-1} \delta p_0$ , тогда движение пузырьков описывается уравнениями (2.13) с  $\mathcal{P} = 1$ . Качественный вид фазовых траекторий на плоскости  $\mathcal{J}, \mathcal{Y}$  для разных значений безразмерной расстройки  $\Omega$  приведен на рис.1. В начальный момент все пузырьки находятся в узкой полосе вблизи оси  $\mathcal{J} = 0$ , что соответствует малой (шумовой) амплитуде начальных колебаний и случайному распределению по фазам. Поскольку в начальном состоянии гамильтониан (2.12) равен нулю, то и в дальнейшем движение будет происходить вдоль траекторий, которые определяются уравнением  $\mathcal{H}' = 0$  (на рис.1 они выделены жирной линией). Период движения по фазовым траекториям зависит от радиуса  $a$  пузырька, или, другими словами, от величины расстройки  $\Omega$ . Это приводит к тому, что гладкая в начальный момент функция распределения  $f(\mathcal{J}, \mathcal{Y}, a)$  становится сильно изрезанной по переменной  $a$  уже после нескольких периодов фазовых колебаний. Усреднение же по малым интервалам  $\delta a$  позволяет считать функцию

$f$  эргодической,  $f = f(\mathcal{H}', a)$ . Легко непосредственно написать явный вид  $f$ , учитывая нормировку (2.16):

$$f = \frac{g(a) \delta(\mathcal{H}')}{\int \delta(\mathcal{H}') dJ d\varphi} \quad (3.5)$$

Пользуясь этой формулой, нужно только иметь в виду, что при  $\Omega > 3/2^{1/3}$ , когда есть две кривые  $\mathcal{H}' = 0$ , разделенные сепаратрисой (пунктирной линией на рис.1), функция распределения отлична от нуля лишь на той из них, которая соприкасается с осью  $J = 0$  (см.рис.1г).

Искомая энергия  $E$  теперь вычисляется по формуле (2.15), которая после замены переменной интегрирования  $d\varphi = d\mathcal{H}'(\partial\mathcal{H}'/\partial\varphi)^{-1} = -d\mathcal{H}'(dJ/d\tau)^{-1}$  с учетом (3.5) принимает следующий вид

$$E = \int_0^{\infty} da g(a) \frac{\oint dJ \mathcal{E}(J, a) (dJ/da)^{-1}}{\oint dJ (dJ/da)^{-1}} \quad (3.6)$$

Полагая, что масштаб изменения функции  $g(a)$  велик по сравнению с интервалом  $\Delta a \sim a (\Delta\omega_n/\omega)$  резонансных значений радиуса, на котором заметно отличен от нуля второй сомножитель в подынтегральном выражении (3.6), можно вынести  $g(a)$  за знак интеграла, подставив в нее значение  $a$ , соответствующее резонансной частоте  $\omega_0(a) = \omega$ . В результате получим

$$E = \frac{4\pi g(a) a^4}{(6\gamma^2 - 3\gamma - 2)^{1/3}} \frac{(\delta p_0)^{4/3}}{(3\gamma p_0)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F(\Omega), \quad (3.7)$$

где функция  $F(\Omega)$  дается равенством

$$F(\Omega) = \frac{\int_0^{y_m} y^{1/2} [1 - y(y - \Omega)^2/2]^{-1/2} dy}{\int_0^{y_m} y^{-1/2} [1 - y(y - \Omega)^2/2]^{-1/2} dy}, \quad (3.8)$$

а  $y_m$  определяется из условия обращения в нуль подкоренного выражения. График функции  $F(\Omega)$  приведен на рис.2. Численное интегрирование (3.8) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) d\Omega = 3,56.$$

Формула (3.7) решает поставленную задачу — она позволяет найти энергию, переданную волной пузырькам в результате нелинейного затухания.

С помощью (3.7) и закона сохранения энергии легко вычислить, насколько изменится амплитуда волны после того, как произойдет фазовое размешивание

$$\Delta \mathcal{P}(\tau = \infty) = \frac{44,7 \rho c^2 a^4 g(a) (\delta p_0)^{-2/3}}{(6\gamma^2 - 3\gamma - 2)^{1/3} (3\gamma p_0)^{1/3}} = \frac{3,56}{\pi} \gamma \Lambda T. \quad (3.9)$$

Представляет интерес и сама зависимость  $\mathcal{P}(\tau)$ , которая описывает, как изменяется амплитуда волны в процессе затухания. Соответствующие кривые, полученные в результате численного решения уравнений (2.13), (2.24) (в которых предполагалось, что

$\mathcal{P}$  и  $\Theta$  не зависят от  $x$ ), приведены на рис.3. Так как время фазовых колебаний  $T$  (2.11) по порядку величины совпадает с обратной нелинейной поправкой к частоте (3.1), то значение  $\gamma \Lambda T = 0,157$  с хорошей точностью представляет нелинейный режим; предел, к которому стремится  $\Delta \mathcal{P}$  при больших  $\tau$  с точностью до 10% совпадает с расчетом по формуле (3.9).

(Отметим, что (3.9) дает первый член разложения  $\Delta \mathcal{P}$  по  $\gamma \Lambda T$  и поэтому также имеет точность порядка 10% при  $\gamma \Lambda T \sim 0,1$ ). Кривая  $\gamma \Lambda T = 0,94$  демонстрирует экспоненциальное линейное затухание волны. Значение  $\gamma \Lambda T = 0,47$  иллюстрирует промежуточный случай.

В заключение этого раздела отметим, что поскольку характерное время затухания в нелинейном режиме  $\sim \Delta\omega_n^{-1}$ , то предполагавшееся нами условие внезапного включения волны фактически означает, что начальное возмущение должно быть создано быстрее, чем время фазового размешивания  $T$ .

#### 4. Нелинейная эволюция пакета волн

В настоящем разделе мы рассмотрим эволюцию квазимонохроматического пакета волн, уравнение которого задается формулой (1.2). Как будет показано, в отличие от монохроматической волны локализованное возмущение всегда затухает до конца, так как, передвигаясь в пространстве с групповой скоростью, оно раскачивает колебания новых пузырьков и отдает им свою энергию.

При малой амплитуде  $\delta p_0$ , когда справедливо неравенство (3.2), амплитуда пакета убывает в соответствии с линейной теорией пропорционально  $e^{-\gamma \Lambda t}$ . Нас будет здесь интересовать случай, когда выполняется неравенство, обратное (3.2). Кроме того, будем предполагать, что размер переднего фронта пакета



$L$  достаточно велик, так что время прохождения его мимо пузырька  $L/c$  значительно больше времени фазового размешивания  $\Delta\omega_n^{-1}$  \*) и ограничимся рассмотрением только переднего фронта пакета, где амплитуда  $\delta p_0$  является монотонно убывающей функцией  $x$  (см. рис.4).

Зависимость безразмерной амплитуды волны  $\mathcal{P}$  и фазы  $\Theta$  от времени приводит к тому, что гамильтониан (2.12) не является более интегралом движения, а форма фазовых траекторий (определяемых теперь при фиксированном  $\tau$  как линии постоянства  $\mathcal{H}'$ ) меняется со временем. Медленность изменения  $\mathcal{P}$  и  $\Theta$  позволяет однако считать функцию распределения  $f$  все время эргодической, и воспользоваться сохранением нового адиабатического инварианта  $K$ , равного площади под траекторией на плоскости  $\mathcal{J}, \mathcal{Y}$ :

$$K = \oint \mathcal{J} d\mathcal{Y} \quad (4.1)$$

Поскольку сдвиг частоты волны  $\frac{\partial\Theta}{\partial t} \sim \gamma \ll \Delta\omega_n$  (см. (3.4)) (и более того, как оказывается, не зависит от времени), его учет приводит просто к малому смещению резонанса как целого относительно частоты волны  $\omega$ . Ввиду этого фазу  $\Theta$ , как и в предыдущем разделе, можно считать равной нулю.

Так как до прихода волны все пузырьки покоятся, то  $\mathcal{J}$  а вместе с ним и  $K$ , равны нулю. Равенство  $K=0$  в последующие моменты времени, когда  $\tau \neq 0$ , означает, что состоянию осциллятора соответствует стационарная точка  $\mathcal{J}_c, \mathcal{Y}_c$ , координаты которой определяются из условий:

$$\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathcal{Y}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathcal{J}} = 0 \quad (4.2)$$

Зависимость  $\mathcal{J}_c$  от  $\Omega$ , вычисленная с помощью (2.12), совпадает с резонансной кривой нелинейного осциллятора [9]:

$$\mathcal{J}_c = \mathcal{P}^{2/3} 2^{-5/3} \left[ \left( 1 + \left( 1 - \frac{4\Omega^3}{27\mathcal{P}^2} \right)^{1/2} \right)^{1/3} + \left( 1 - \left( 1 - \frac{4\Omega^3}{27\mathcal{P}^2} \right)^{1/2} \right)^{1/3} \right]^2, \quad \Omega < 3(\mathcal{P}/2)^{2/3}; \quad (4.3)$$

$$\mathcal{J}_c = \frac{2\Omega}{3} \cos^2 \left[ \frac{1}{3} \arctg \left( \frac{4\Omega^3}{27\mathcal{P}^2} - 1 \right)^{1/2} + \frac{\pi n}{3} \right], \quad n=0, \pm 1, \quad \Omega > 3(\mathcal{P}/2)^{2/3}$$

и изображена на рис.5 сплошной линией.

\*) Если  $L/c \ll \Delta\omega_n^{-1}$ , то пакет затухает линейно даже при выполнении неравенства  $(\delta p_0/p_0)^{2/3} > \alpha/\epsilon$ .

Очевидно, что при малых амплитудах волны,  $\mathcal{P} \rightarrow 0$ , пузырьки попадают на ветви 1 (при  $\Omega < 0$ ) и 3 (при  $\Omega > 0$ ) резонансной кривой, которым соответствуют центры 1 и 3 на рис.1а и 1г. С ростом  $\mathcal{P}$   $\mathcal{J}_c$  увеличивается и эти центры перемещаются вверх на фазовой плоскости. При этом для осцилляторов с  $\Omega > 0$  при  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_k \equiv 2(\Omega/3)^{3/2}$  происходит перестройка структуры фазовой плоскости: центр 3 сливается с седловой точкой 2, образуя сложную особую точку (рис.1б), которая при дальнейшем увеличении  $\mathcal{P}$  исчезает вместе с сепаратрисой. При сближении особых точек период малых колебаний вокруг центра 3 стремится к бесконечности (пропорционально  $(\mathcal{P}_k - \mathcal{P})^{-1/4}$ ), поэтому в течение промежутка, когда он сравнивается и становится больше характерного времени нарастания давления  $L/c$ , адиабатический инвариант  $K$  перестает сохраняться. По порядку величины этот промежуток оказывается равным  $\Delta\omega_n^{-1} (\Delta\omega_n L/c)^{-3} \ll \Delta\omega_n^{-1}$  поэтому гамильтониан  $\mathcal{H}'$  пузырька меняется за это время незначительно и может считаться равным своему значению на сепаратрисе:  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_k \equiv -\Omega_k^2(\mathcal{P})/12$ , где  $\Omega_k(\mathcal{P}) = 3(\mathcal{P}/2)^{2/3}$ . В дальнейшем, после прохождения сепаратрисы, инвариант  $K$  снова становится сохраняющейся величиной, но теперь он уже равен не нулю, а площади под сепаратрисой в момент, когда происходит бифуркация:  $K = K_{\text{сеп}}(\Omega)$ .

Обратимся теперь к вычислению энергии пузырьков как функции  $\mathcal{P}$ . Из сказанного выше ясно, что при заданном  $\mathcal{P}$  функция распределения пузырьков с  $\Omega < 0$  и  $\Omega > \Omega_k(\mathcal{P})$  дается формулой

$$f = g(\alpha) \delta(\mathcal{J} - \mathcal{J}_c) \delta(\mathcal{Y} - \mathcal{Y}_c), \quad (4.4)$$

где при  $\Omega > \Omega_k(\mathcal{P})$  значениям  $\mathcal{J}_c, \mathcal{Y}_c$  соответствует ветвь 3 на рис.5. Для пузырьков из интервала  $0 < \Omega < \Omega_k(\mathcal{P})$ , испытывающих нарушение адиабатического инварианта, функцию распределения можно считать эргодической:

$$f = \frac{g(\alpha) \delta(\mathcal{H}' - \mathcal{H}_*)}{\int \delta(\mathcal{H}' - \mathcal{H}_*) d\mathcal{J} d\mathcal{Y}} \quad (4.5)$$

Фазовая траектория, на которой  $f \neq 0$ , т.е.  $\mathcal{H}_*$ , как функция  $\Omega$  и  $\mathcal{P}$ , задается значением инварианта  $K(\mathcal{H}_*, \Omega, \mathcal{P}) = K_{\text{сеп}}(\Omega)$ . Из (2.12) легко видеть, что форма интегральной линии  $\mathcal{J}(\mathcal{Y}; \mathcal{H}', \Omega, \mathcal{P})$  является однородной функцией:

$$J(\varphi; \mathcal{H}', \Omega, \mathcal{P}) = \mathcal{V} J(\varphi; \mathcal{V}^{-2} \mathcal{H}', \mathcal{V}^{-1} \Omega, \mathcal{V}^{-3/2} \mathcal{P}), \quad (4.6)$$

поэтому уравнение сепаратрисы для пузырька  $\Omega$  (соответствующие значениям параметров  $\mathcal{H}' = -\Omega^2/12$ ,  $\mathcal{P} = 2(\Omega/3)^{3/2}$ ) может быть записано как

$$J_{\text{сеп}}(\varphi; \Omega) = \Omega \cdot J(\varphi; -1/12, 1, 2/3^{3/2}),$$

и следовательно

$$K_{\text{сеп}}(\Omega) = \beta \Omega.$$

Константа  $\beta$  была найдена численным интегрированием и равна 6,16.

Далее по известному значению  $K_{\text{сеп}}(\Omega)$  при фиксированной амплитуде  $\mathcal{P} = 1$  численно находилось соответствующее значение  $\mathcal{H}_*$ , а следовательно и функция распределения (4.5). Результат вычисления с помощью этой функции распределения усредненного действия  $\bar{J}(\Omega, \mathcal{P}=1)$  (2.17) приведен на рис.5. При

$\Omega < 0$  и  $\Omega > \Omega_k(1)$  эта функция, очевидно, совпадает с участками 1 и 3 резонансной кривой; при  $0 < \Omega < \Omega_k(1)$  она изображена пунктирной линией. При произвольном давлении  $\mathcal{P}$  усредненное действие  $\bar{J}(\Omega, \mathcal{P})$  связано с найденной зависимостью  $\bar{J}(\Omega, 1)$  простым соотношением

$$\bar{J}(\Omega, \mathcal{P}) = \mathcal{P}^{2/3} \bar{J}(\Omega \mathcal{P}^{-2/3}, 1), \quad (4.7)$$

которое следует из (4.6).

Пользуясь теперь выражением (2.18) и формулой (4.7), легко находим плотность энергии пузырьков как функцию амплитуды  $\delta p_0$  на фронте волны

$$E = \frac{4\pi g(a) a^4 (\delta p_0)^{4/3}}{(6\gamma^2 - 3\gamma - 2)^{1/3} (3\gamma p_0)^{1/3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{J}(y, 1) dy. \quad (4.8)$$

Как и в (3.6), значение радиуса  $a$  соответствует резонансной частоте,  $\omega_0(a) = \omega$ . Численное интегрирование функции дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{J}(y, 1) dy = 2,49.$$

Для того, чтобы получить уравнение, описывающее эволюцию формы пакета, нужно в законе сохранения энергии (2.22) перейти

в систему координат, движущуюся со скоростью  $c$ :  $\vec{F}' = \vec{F} - \vec{n}ct$ . Используя выражение (4.8) и вводя переменную

$$U = 3.32 c \frac{\gamma \Lambda T}{\pi} \mathcal{P}^{-2/3},$$

получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \vec{n} U \frac{\partial U}{\partial \vec{F}'}. \quad (4.9)$$

Отсюда видно, что каждая точка огибающей движется с постоянной скоростью,  $U$ , которая обратно пропорциональна  $(\delta p_0)^{2/3}$ . Это означает, что со временем будет происходить укрупнение переднего фронта вплоть до масштаба  $c/\Delta\omega_n$ . После того, как ширина фронта станет сравнимой с  $c/\Delta\omega_n$ , адиабатическое приближение нарушится, и дальнейшая эволюция огибающей уже не будет описываться уравнением (4.9). Однако качественно картина сохранится: образовавшийся на переднем фронте скачок, двигаясь относительно пакета, будет постепенно "съедать" его. Такая эрозия пакета звуковых волн аналогична затуханию пакета ленгмюровских волн в плазме [II].

В заключение остановимся на влиянии дисперсионных эффектов, которые не учитывались выше, на эволюцию огибающей. Для этого сравним скорость дисперсионного расплывания  $\Delta k \cdot \partial^2 \omega / \partial k^2$  с вычисленной скоростью деформации пакета вследствие нелинейного затухания  $\gamma \Lambda c / \Delta\omega_n$ . Учитывая, что разброс волновых векторов в пакете  $\Delta k \sim L^{-1} \sim \Delta\omega_n / c$  и используя выражение для дисперсионной добавки в жидкости с пузырьками газа из [I], найдем, что  $\Delta k \partial^2 \omega / \partial k^2 \sim \gamma \Lambda \Delta\omega_n / c k^2$ . Таким образом, вследствие дисперсии пакет расплывается по крайней мере в  $(\omega / \Delta\omega_n)^2$  раз слабее, чем деформируется под действием нелинейных эффектов, так что дисперсионным расплыванием действительно можно пренебречь.

## 5. Проникновение волны в жидкость через границу

Рассмотрим теперь задачу о проникновении в жидкость с пузырьками газа звуковой волны, возбуждаемой на ее границе гармоническим источником частоты  $\omega$ . Будем считать, что источник с амплитудой колебаний давления  $\delta p_0$  включается в момент времени  $t = 0$ . В качестве  $\delta p_*$  в этом разделе выберем  $(6\gamma^2 - 3\gamma - 2)^{-1} \delta p_0$ .

Допустим сначала, что амплитуда  $\delta p^0$  настолько мала, что выполняется условие применимости линейной теории (3.2). Частота волны задается источником, а ее волновой вектор должен находиться из дисперсионного соотношения и будет содержать мнимую часть,  $\kappa = \omega/c + i\gamma_\lambda/c$ . Это означает, что волна экспоненциально затухает в глубь жидкости, а ее энергия поглощается пузырьками в поверхностном слое толщины  $c/\gamma_\lambda$ . Очевидно, что за промежуток времени  $\sim \Delta\omega_n^{-1}$  амплитуда колебаний этих пузырьков возрастет настолько, что в игру вступят нелинейные эффекты и, как описано в разделе 3, обмен энергии между волной и пузырьками прекратится. После этого возмущение давления сможет проникнуть еще на расстояние  $c/\gamma_\lambda$  и весь процесс повторится. В результате внутрь жидкости побегит фронт волны ширины  $\sim c/\gamma_\lambda$  со скоростью  $V$ , которая определяется из условия, что за время  $\Delta\omega_n^{-1}$  волна проходит расстояние  $c/\gamma_\lambda$ :  $V \sim \sim c\Delta\omega_n/\gamma_\lambda$ . За фронтом в невозмущенной вначале жидкости устанавливаются колебания амплитуды  $\delta p^0$ . Таким образом, мы видим, что проникновение гармонической волны в жидкость, даже при сколь угодно малой амплитуде, носит нелинейный характер (а не только при выполнении неравенства, обратного (3.2)).

После того как фронт волны удалится от границы на расстояние значительно большее, чем его ширина, форма и скорость фронта становится практически неизменной, можно считать, что решение зависит только от комбинации  $x/\sqrt{T} - \tau$ .

Для количественного описания структуры фронта адиабатическое приближение, развитое в предыдущем разделе, неприменимо, так как время нарастания амплитуды на фронте  $\sim \Delta\omega_n^{-1}$  сравнимо с периодом фазовых колебаний. По той же причине необходимо учитывать изменение фазы волны  $\theta$ .

Поэтому воспользуемся исходной системой уравнений (2.13), (2.24). Вводя переменную  $\xi = x/\sqrt{T} - \tau$ , перепишем ее в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\xi} &= -\mathcal{P}(2J)^{1/2} \sin(\varphi + \theta) \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= -\Omega + 2J - \mathcal{P}(2J)^{-1/2} \cos(\varphi + \theta) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{d\xi} &= -\frac{\gamma_\lambda T}{\pi} \frac{V}{c-V} \int_{-\infty}^{\infty} (2J)^{1/2} \sin \varphi d\Omega \\ \mathcal{P} \frac{d\theta}{d\xi} &= -\frac{\gamma_\lambda T}{\pi} \frac{V}{c-V} \int_{-\infty}^{\infty} (2J)^{1/2} \cos \varphi d\Omega. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Перед фронтом пузырьки покоятся и давление равняется своему равновесному значению:

$$J=0, \quad \mathcal{P}=0 \quad \xi = +\infty, \quad (5.3)$$

а за фронтом возмущение давления стремится к  $\delta p^0$ , или, в безразмерных переменных,

$$\mathcal{P}=1 \quad \xi = -\infty \quad (5.4)$$

Соотношения (5.3), (5.4) являются граничными условиями для системы (5.1), (5.2), решение которой должно определить как форму огибающей  $\mathcal{P}(\xi)$ , так и величину скорости  $V$ .

Задачу определения собственного значения  $V$  можно свести к задаче с начальными условиями. Для этого сделаем замену

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{J} \mathcal{P}', \quad \xi = \mathcal{J}^{-2/3} \xi', \quad \Omega = \mathcal{J}^{2/3} \Omega', \\ J &= \mathcal{J}^{2/3} J', \quad \varphi = \varphi', \quad \theta = \theta', \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $\mathcal{J} = [\gamma_\lambda T V / \pi (c-V)]^{3/2}$ . Тогда уравнения (5.1) остаются без изменения, а в (5.2) исчезают множители перед интегралом в правой части:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}'}{d\xi'} &= -\int (2J')^{1/2} \sin \varphi' d\Omega', \\ \mathcal{P}' \frac{d\theta'}{d\xi'} &= -\int (2J')^{1/2} \cos \varphi' d\Omega'. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Замена (5.6) сохраняет граничное условие (5.3), а вместо (5.4) получаем

$$\mathcal{P}'(-\infty) = [\gamma_\lambda T V / \pi (c-V)]^{-3/2} \quad (5.7)$$

Таким образом, если решить систему (5.1), (5.6) с начальным условием (5.3) и найти предел, к которому стремится  $\mathcal{P}'$  при  $\xi' \rightarrow -\infty$ , то  $V$  найдется из уравнения (5.7):

$$V = \frac{c}{1 + A \cdot \gamma_\lambda T}, \quad (5.8)$$

где  $A = (\mathcal{P}'(-\infty))^{2/3} / \pi$ . Давление в волне выражается через решение краевой задачи (5.1) - (5.4) следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta p(x,t) &= \delta p^0 \mathcal{P}(\xi) \cdot \cos(\kappa x - \omega t + \theta(\xi)), \\ \xi &= x/\sqrt{T} - \tau. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Так как функция  $\mathcal{P}(\xi)$  нарастает от нуля до величины порядка 1 на интервале  $\Delta \xi \sim 1$ , то ширина фронта волны с точностью до несущественной константы

$$L = VT$$

Асимптотику решения при  $\xi \gg l$ , где  $J, \mathcal{F} \rightarrow 0$ , легко получить, пренебрегая нелинейностью колебаний пузырьков:

$$\begin{aligned} P(\xi) &= \exp[-\gamma_{\lambda} T V (\xi - \xi_0) / (c - v)] \\ \theta(\xi) &= \text{const} \\ J(\xi) &= \frac{1}{2} \cdot P^2(\xi) [(\gamma_{\lambda} T V / (c - v))^2 + \Omega^2]^{-1} \\ \varphi(\xi) &= \text{arctg} [(\frac{\gamma_{\lambda} T V}{c - v} \text{tg} \theta - \Omega) / (\frac{\gamma_{\lambda} T V}{c - v} \text{tg} \theta + \Omega)] \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $\xi_0$  - константа.

В области  $\xi \sim l$  решение получено в результате численного интегрирования на ЭВМ исходных неавтономных уравнений (2.13), (2.24), в которых был сделан переход к системе отсчета, движущейся со скоростью  $V$ :  $\xi = \chi / VT - \tau$ . Интегрирование осуществлялось по разностной схеме второго порядка аппроксимации [12] на конечном участке  $0 \leq \xi \leq l$ . Внутри этого участка при  $\tau = 0$  задавались произвольные начальные данные ( $P, \theta, J, \varphi$ ); на левой границе - амплитуда  $P(\xi=0, \tau) = I$  и фаза волны  $\theta(\xi=0, \tau) = 0$ , а на правой - функция распределения пузырьков  $f(J, \varphi, a)$  по формулам (5.10), в которых нужно положить  $\xi = l$ , константу  $\xi_0$  выбрать так, чтобы  $P(l) \ll I$ . Фаза волны  $\theta$  при  $\xi = l$  (в отличие от  $P(l)$ ) в граничном условии (5.10) могла изменяться и на каждом шагу по времени задавалась равной своему значению при  $\xi = l$ , полученному на предыдущем шагу. За время в несколько раз большее, чем  $\max[l/V, l/(c-v)]$  с точностью 10% устанавливалась стационарная форма огибающей  $P(\xi)$  и фазы  $\theta(\xi)$  волны. При этом, разумеется, давление при  $\xi = l$  зависело от параметров  $V$  и  $\gamma_{\lambda} T$  и не обязательно совпадало со значением  $P(l)$ , использованным при вычислении функции распределения пузырьков (5.10) на правой границе. Семейство параметров  $V, \gamma_{\lambda} T$ , обеспечивающее такое совпадение, давало искомое решение краевой задачи (5.1)-(5.4). График функции  $P(\xi)$  приведен на рис.6. Константа  $A$  в (5.8) приблизительно равна 2,2.

Описанное решение справедливо, если выполняются неравенства  $\alpha \ll \epsilon, \delta r^0 \ll r_0$ , при этом параметр  $\gamma_{\lambda} T$ , обычно характеризующий роль нелинейности колебаний пузырьков, может быть как значительно больше, так и меньше единицы.

## Заключение

В заключение обсудим условия, когда можно пренебречь диссипативными процессами, которые выше не учитывались. Диссипация не играет заметной роли, если время затухания колебаний пузырька из-за диссипативных (вязкости, теплопроводности) и радиационных потерь (излучение звуковых волн) значительно больше характерного времени задачи, каковым в задаче о затухании монохроматической волны является  $\gamma_{\lambda}^{-1}$ , в задаче об эволюции пакета - время полной эрозии пакета и т.д. При принятых в работе предположениях все эти времена больше периода свободных колебаний  $2\pi \omega_0^{-1}$ .

Декремент диссипативного затухания увеличивается с ростом частоты и для воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении сравнивается с частотой линейных колебаний при  $\omega_0 \sim 10^6 + 10^7$  Гц ( $a \sim 10^{-4}$  см) [13]. Поэтому на более высоких частотах пренебрегать диссипацией нельзя. В области низких частот главными являются сначала радиационные (при  $\omega_0 < 10^3$  Гц), а затем потери за счет теплопроводности (при  $\omega_0 > 10^3$  Гц). Декремент радиационного  $\gamma_r \sim \omega_0 \epsilon^{1/2}$  и термического  $\gamma_t \sim (\frac{\omega_0 x}{\alpha^2})^{1/2} (\gamma - \text{коэффициент температуропроводности воздуха})$  значительно меньше, чем  $\omega_0$ . Поэтому на низких частотах существует область параметров ( $\alpha, \delta r_0$ ), в которой диссипативные эффекты не существенны.

В процессе затухания в силу закона сохранения импульса импульс волны передается пузырькам, которые в результате ускоряются в направлении распространения волны. Скорость  $v$ , до которой пузырьки разгоняются, можно оценить, разделив импульс, потерянный волной ( $w/c$  - в линейном и  $\gamma_{\lambda} T w/c$  - в нелинейном режимах) на число резонансных пузырьков (соответственно,  $(\alpha/a^3)(\gamma_{\lambda}/\omega_0)$  и  $(\alpha/a^3) \cdot (\Delta\omega_n/\omega_0)$ ) и эффективную массу пузырька  $4\pi r_0^3 \rho$ . Легко оценить, что доплеровский сдвиг частоты  $\omega v/c$  оказывается в  $\epsilon^{-1}$  раз меньше ширины резонанса (соответственно,  $\gamma_{\lambda}$  в линейном и  $\Delta\omega_n$  в нелинейном режимах), поэтому поступательное движение никак не сказывается на взаимодействии пузырька с волной.

В заключение авторы выражают благодарность Д.Д.Рятову за полезные обсуждения.

\* Под действием звукового возмущения пузырек совершает также колебательное поступательное движение со скоростью порядка  $\delta r/r_0$ , которая меньше  $v$ .

## Л и т е р а т у р а

1. Рютов Д.Д. Письма в ЖЭТФ 22, № 9, с.446, 1975.
2. Бэтчелор Дж.К. Механика. Периодический сборник иностранных статей, 109, № 3, с.65-84.
3. Кобелев Ю.А., Островский Л.А. В кн. Нелинейная акустика, с.143-160. Горький, ИПФ, 1980.
4. Накоряков В.Е., Соболев В.В., Шрейдер И.Р. Изв. АН СССР, № 5, 1972, с.71-76.
5. Кузнецов В.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Письма в ЖЭТФ, 23, с.194-198, 1976.
6. O'Neil T.M. Phys. Fluids, 8, 2255-2263, 1965.
7. Мазитов Р.К. ПМГФ, 1, 27, 1965.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред, с.44, М., Гостехиздат, 1953.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, с.109, М., Наука"1973.
10. Chirikov B.V. Phys. Reports, 52, № 5, 1979.
11. Рютов Д.Д., Худик В.Н. ЖЭТФ 64, с.1253-1260, 1973.
12. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы, с.204-207, М., Наука, 1977.
13. Chapman R.V., Plesset M.S. J. Basic Eng. Trans. ASME, 93D, № 3, 373-376, 1971.  
Рус.перевод: Труды амер. общества инж.-механиков. Теор. основы инж. расчетов, № 3, 1971.

## Подписи к рисункам

- Рис.1. Вид траекторий на фазовой плоскости  $J, \psi$  для разных значений расстройки  $\Omega$  (см. (2.13)): Ia -  $\Omega < 0$ , Ib -  $\Omega = 3(P/2)^{2/3}$ , Ic -  $3(P/2)^{2/3} < \Omega < 3P^{2/3}/2^{1/3}$ , Id -  $\Omega > 3P^{2/3}/2^{1/3}$ .  
Жирными линиями отмечены траектории, соответствующие значению  $\mathcal{H}' = 0$ . Цифры 1, 2 и 3 нумеруют стационарные точки.
- Рис.2. Зависимость  $F(\Omega)$ . В точке  $\Omega = 3/2^{1/3}$  ( $P = 1$ ) производная функции  $F(\Omega)$  обращается в бесконечность.
- Рис.3. Зависимость амплитуды монохроматической волны от времени. Кривая 1 соответствует значению  $\gamma_{\lambda T} = 0,157$ ; 2 -  $\gamma_{\lambda T} = 0,47$ ; 3 -  $\gamma_{\lambda T} = 0,94$ .
- Рис.4. Пакет звуковых волн. Ширина переднего фронта  $L$ . Направление движения пакета указано стрелкой.
- Рис.5. Зависимость  $J_c(\Omega)$  для стационарных точек. Нумерация ветвей (1, 2 и 3) соответствует обозначению стационарных точек на рис.1 (участки 2 и 3 разделяются точкой с вертикальной касательной).
- Рис.6. Амплитуда давления  $P(\xi)$  во фронте волны.



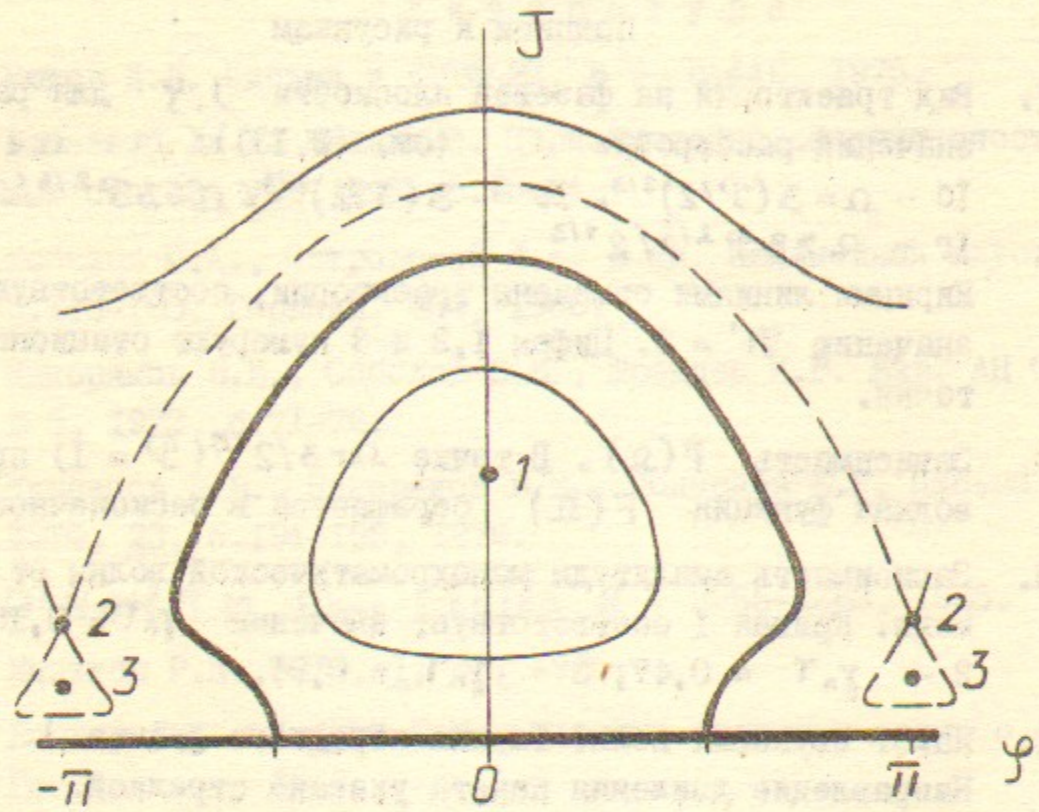


рис. 1а

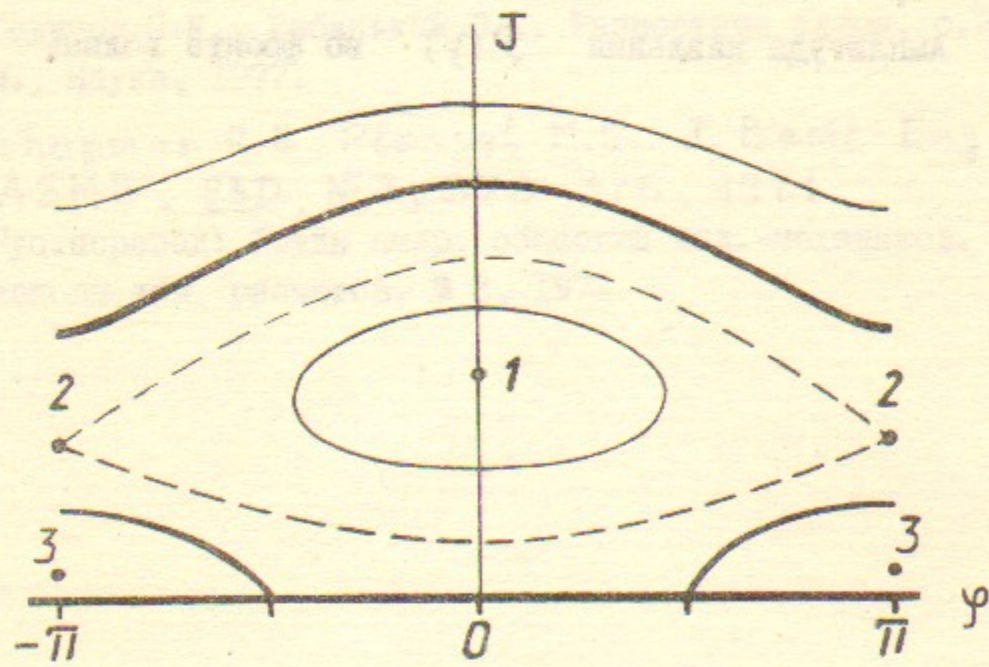


рис. 1б

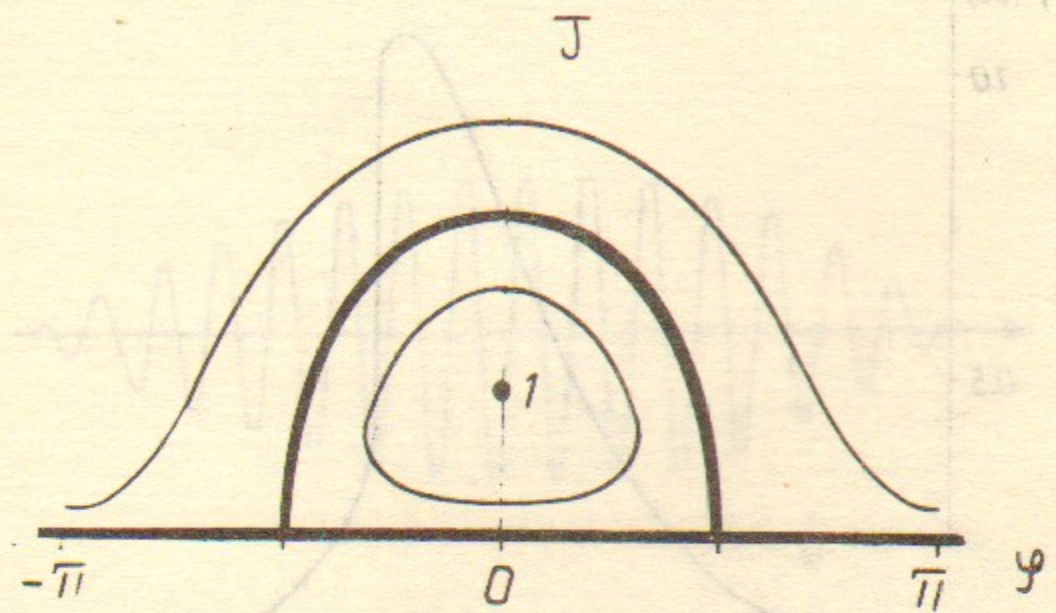


рис. 1в

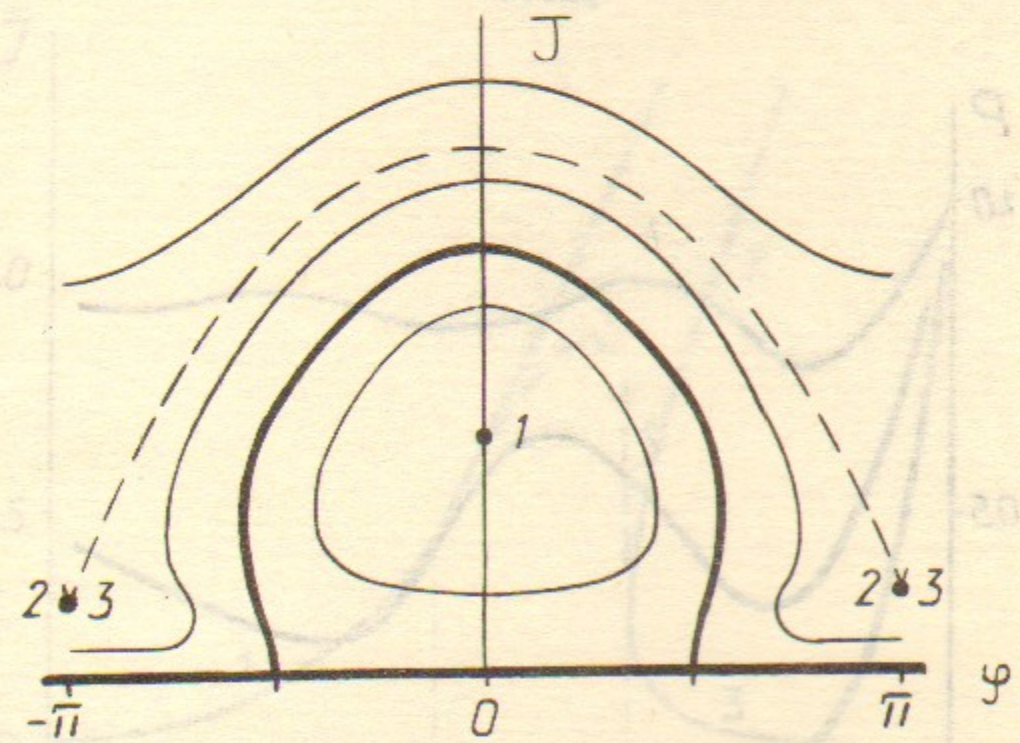


рис. 1г

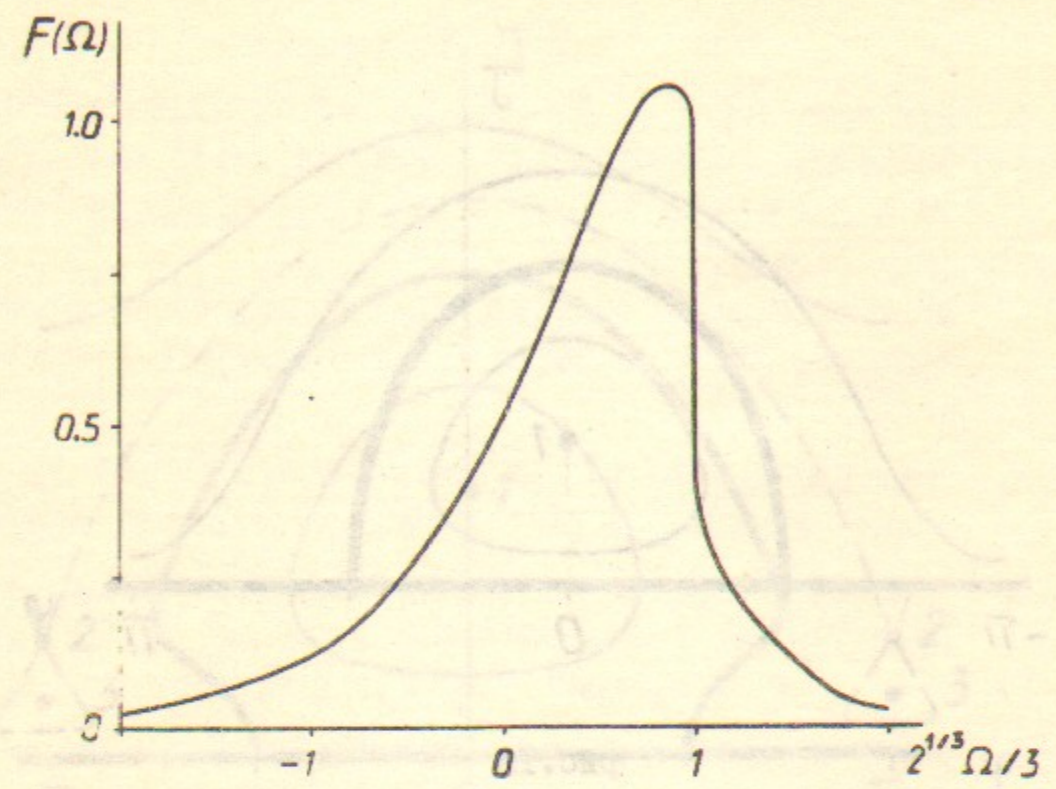


рис.2

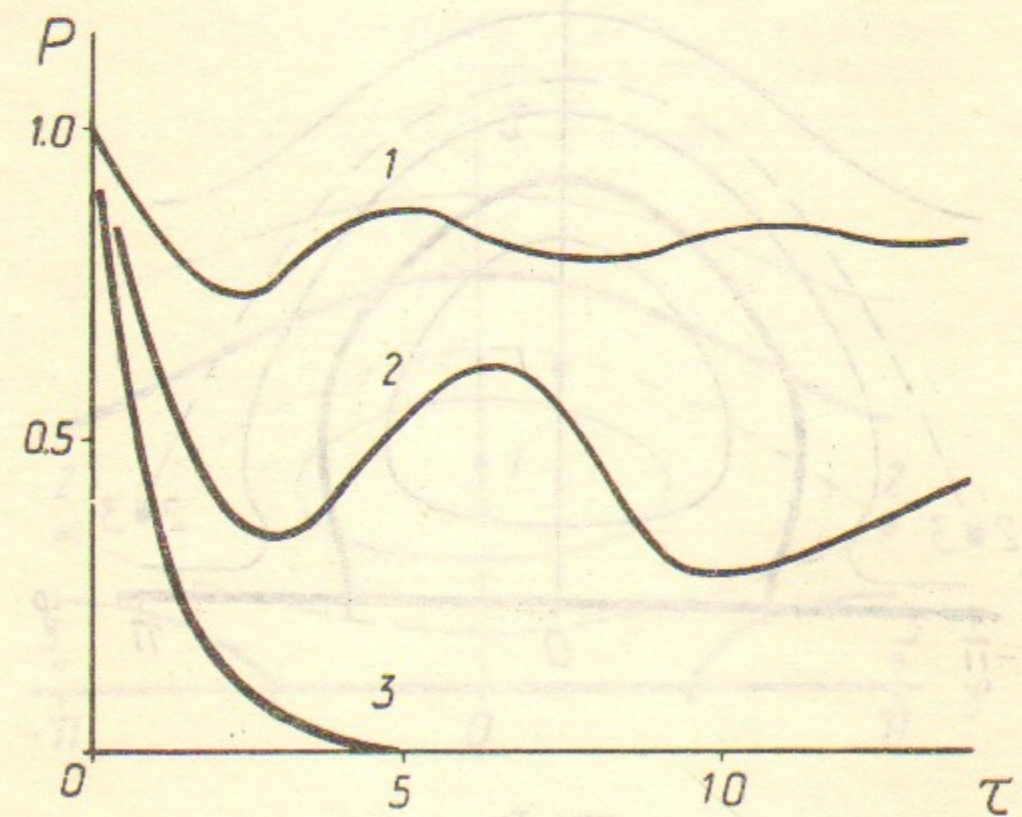


рис.3

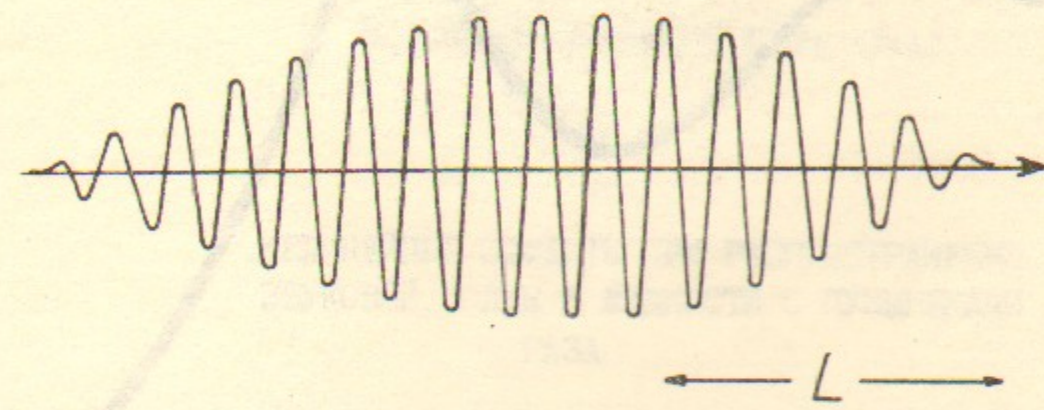


рис.4

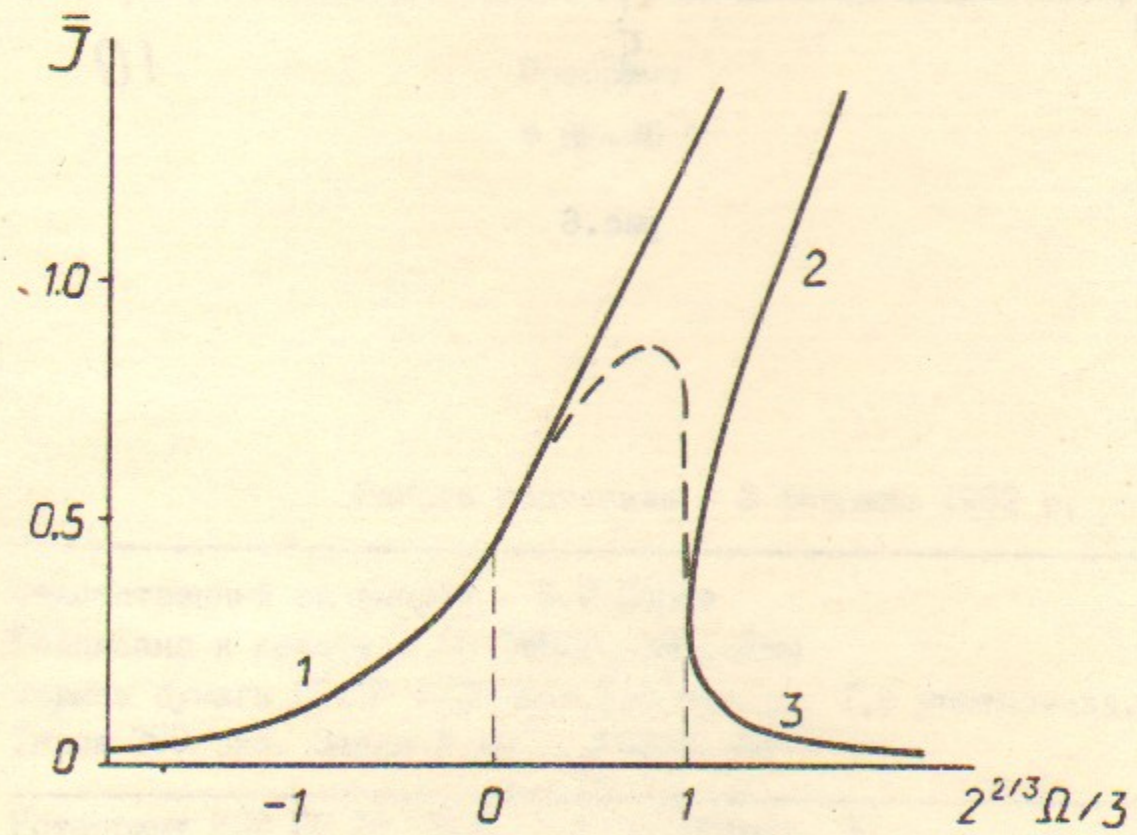


рис.5

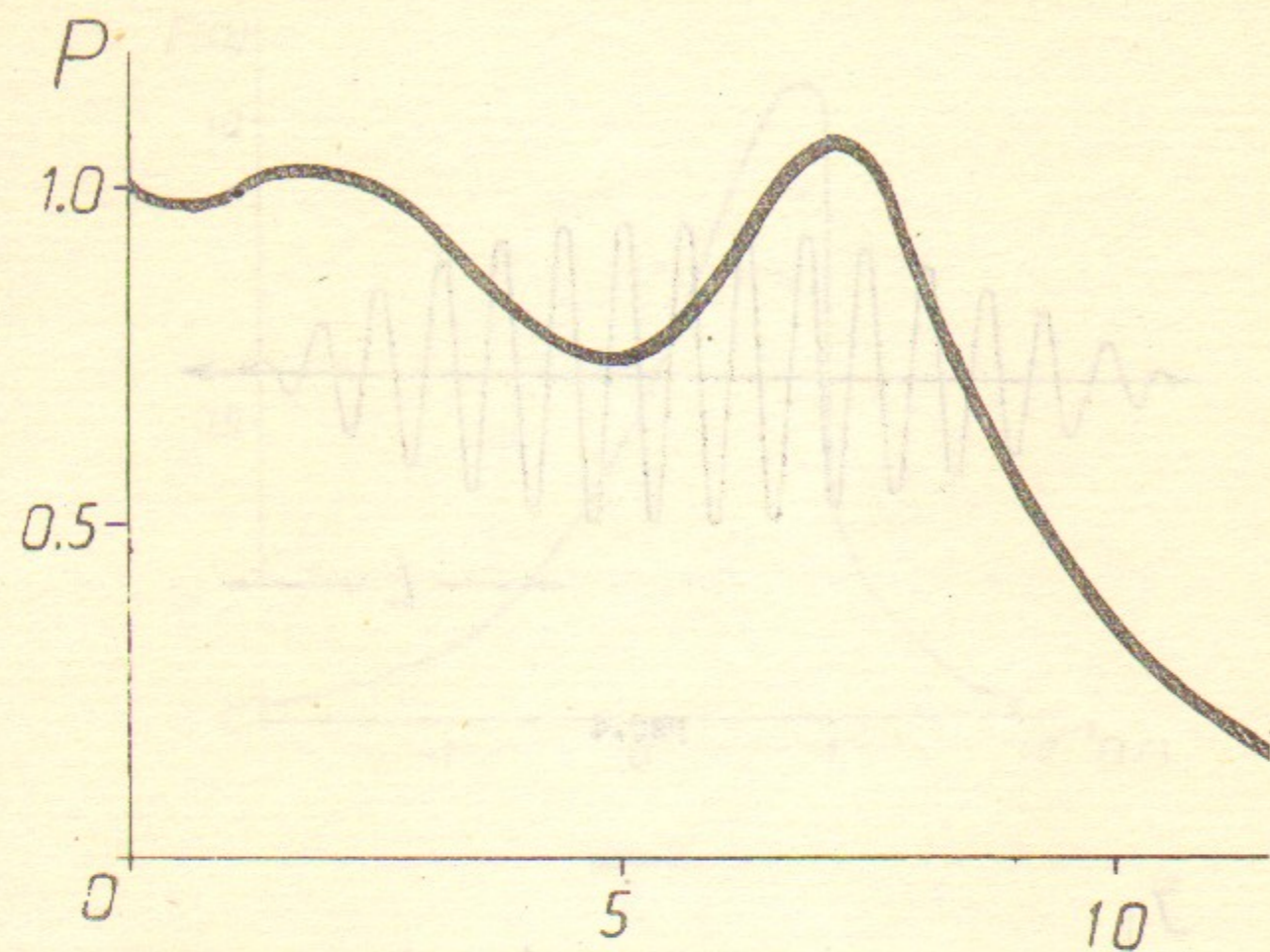


рис. 6

И.А.Котельников, Г.В.Ступаков

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ  
ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ  
ГАЗА

Препринт  
№ 82-40

Работа поступила - 3 февраля 1982 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 2.04-1982г. МН 03194  
Формат бумаги 60х90 1/16 Усл.1,6 печ.л., 1,3 учетно-изд.л.  
Тираж 290 экз. Заказ № 40 . Бесплатно

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90