

17

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

В.С. Фадин

ДВАЖДЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ  
АСИМПТОТИКИ СЕЧЕНИЙ  
 $e^+e^-$  АННИГИЛЯЦИИ В КВАРКИ И  
ГЛЮОНЫ

ПРЕПРИНТ 82 - 22



Новосибирск

"ДВАЖДЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ СЕЧЕНИЙ  $e^+e^-$   
АННИГИЛЯЦИИ В КВАРКИ И ГЛЮОНЫ"

В.С.Фадин

А Н Н О Т А Ц И Я

Проведен детальный анализ процесса  $e^+e^-$  аннигиляции в кварк-антикварковую пару и  $N$  глюонов в дважды логарифмическом приближении. Получены выражения для полностью дифференциальных сечений, а также для инклюзивных сечений и множественности. На основе проведенного анализа построена простая качественная картина процесса.

## Abstract

The process of  $e^+e^-$  annihilation into a  $q\bar{q}$  pair and  $N$  gluons in the double logarithmic approximation is carefully analysed. The expressions obtained (45) and (46) can be used for getting various exclusive and inclusive low-frequency gluon production cross sections. As examples, the inclusive low-frequency gluon production cross section (47), (48) and the average gluon multiplicity (49) are computed. In spite of the significance of interference between the contributions of various Feynman diagrams (in any gauge), the physical picture discussed in the Conclusion is rather simple and can be formulated in probabilistic language.

## I. Введение

В последнее время стало ясно, что многие высокоэнергетические величины в квантовой хромодинамике (КХД) можно вычислить лишь при наличии полного понимания не поддающихся ренорм-групповому анализу дважды логарифмических эффектов (см., например, обзор [1]). Простейший случай проявления дважды логарифмов в КХД-электромагнитный формфактор кварка при больших передачах импульса, который исследовался разными методами во многих работах (см., например, [2] - [7]) и поведение которого аналогично поведению формфактора электрона в квантовой электродинамике (КЭД).

Формфактор кварка определяет сечение однофотонной  $e^+e^-$ -аннигиляции в кварк-антикварковую пару  $q\bar{q}$ . В сечениях с большим числом частиц кроме дважды логарифмов, содержащихся в амплитудах процессов, есть дважды логарифмы, возникающие при интегрировании по фазовому объему конечных частиц. Все эти дважды логарифмы связаны друг с другом, так как в полном сечении, просуммированном по конечным состояниям, они сокращаются. Для определения асимптотики сечения нужно знать область фазового пространства, приводящую к дважды логарифмам, и асимптотику амплитуды в ней.

Наибольшую асимптотику в каждом порядке теории возмущений имеют сечения  $e^+e^-$  аннигиляции в  $q\bar{q}$  и глюоны. Рождение дополнительной  $q\bar{q}$  пары приводит к потере логарифма. Дважды логарифмический вклад в сечение дает область мягких глюонов. Все это совершенно аналогично ситуации в КЭД. Дальше, однако, аналогия не проходит. В КЭД сечение с излучением мягких фотонов дается произведением независимых множителей сопровождающего излучения на сечение основного процесса. В КХД возможность распада глюона на два глюона приводит к нарушению пуассоновского распределения излучения [8].

В короткой заметке [9] было предложено эксклюзивное описание процесса однофотонной  $e^+e^-$  аннигиляции в  $q\bar{q}$ -пару и глюоны в дважды логарифмическом приближении. Данная работа посвящена обоснованию и развитию представлений работы [9], примерам их применения и сравнению с другими подходами.

План работы следующий. В разделе 2 рассматривается излучение двух глюонов в борновском приближении. В разделе 3 доказывається рецепт вычисления матричного элемента процесса с излучением  $N$  глюонов. В разделе 4 обсуждается учет виртуальных поправок, приводятся общие выражения для сечений, вычисляется инклюзивное сечение и множественность глюонов. В разделе 5 обсуждается качественная картина процесса и проводится сравнение с другими подходами.

Удобно работать в какой-либо физической калибровке, в которой вершина излучения глюона кварком или глюоном зануляется при коллинеарных импульсах. В статье избрана планарная калибровка [6].

## 2. Излучение двух глюонов

Пусть  $P-(P_+)$  - 4-импульс кварка (антикварка),  $K_i$  - 4-импульс  $i$ -го глюона,  $e_i$  - его вектор поляризации,  $a_i$  - цветовой индекс,  $i = 1, 2$ . Пропагатор глюона с импульсом  $K$  в планарной калибровке имеет вид  $-i \delta_{ab} \frac{d_{\mu\nu}(K, n)}{K^2 + i0}$ , где  $a, b(\mu, \nu)$  - цветные (лоренцовские) индексы глюона,

$$d_{\mu\nu}(K, n) = g_{\mu\nu} - \frac{K_\mu n_\nu + n_\mu K_\nu}{(Kn)} \quad (1)$$

$n$  - вектор, фиксирующий калибровку. Для простоты выберем  $n_n = q_n / \sqrt{q^2}$ , где  $q$  - 4-импульс виртуального фотона,  $q = P_+ + P_- + \sum_i K_i$ .

Будем работать в системе центра инерции  $e^+e^-$  пары, где  $\bar{n}=0$ . Для конечных глюонов будем использовать только физические поляризации, векторы которых удовлетворяют условиям (см., например, [10])

$$(e_i, k_i) = 0, \quad (e_i, n) = 0 \quad (2)$$

то есть в системе  $\bar{n}=0$  это пространственные векторы, перпендикулярные соответствующим импульсам. При использовании физических поляризаций интерференцией между глюонами, испущенными кварком и антикварком, можно пренебречь, так что можно рассматривать отдельно излучение с кварковой и антикварковой линий. Случай, когда с каждой из линий испускается по одному глюону, отличается от КЭД лишь групповыми множителями. Фейнмановские диаграммы излучения двух глюонов с кварковой линией представлены на рис. 1, где пунктирной линией изображен виртуальный фотон. Диаграммы

рис. 1а), 1б) - электродинамического типа, их вклады в дважды логарифмическом приближении равны соответственно

$$M_{1a} = M_0 g^2 \frac{e_2 P_-}{K_2 P_-} \frac{e_1 P_-}{(K_1 + K_2) P_-} \langle t^{a_2} t^{a_1} \rangle \quad (3a)$$

$$M_{1b} = M_0 g^2 \frac{e_1 P_-}{K_1 P_-} \frac{e_2 P_-}{(K_1 + K_2) P_-} \langle t^{a_1} t^{a_2} \rangle \quad (3b)$$

где  $t^a = \lambda^a / 2$  - генераторы группы в фундаментальном представлении, скобки означают матричный элемент между состояниями кварка и антикварка,  $M_0$  - матричный элемент рождения  $q\bar{q}$  без групповой его части. Диаграмма рис. 1в) дает

$$M_{1v} = M_0 g^2 e_1^\mu e_2^\nu \gamma_{\mu\nu\rho} (K_1, K_2, -K) \frac{d^{\rho\sigma}(K, n)}{K^2} \frac{P_-^\sigma}{K P_-} f^{a_1 a_2 c} \langle t^c \rangle \quad (4)$$

где  $f^{abc}$  - структурные константы группы,  $K = K_1 + K_2$ ,

$$\gamma_{\mu\nu\rho} (K_1, K_2, K_3) = g_{\mu\nu} (K_2 - K_1)_\rho + g_{\nu\rho} (K_2 - K_3)_\mu + g_{\rho\mu} (K_3 - K_2)_\nu \quad (5)$$

Рассмотрим этот вклад более подробно. Представим  $d_{\rho\sigma}(K, n)$  в виде

$$d_{\rho\sigma}(K, n) = - \sum_{\lambda=0}^3 e_\rho^{(\lambda)}(K) e_\sigma^{(\lambda)}(K) \quad (6)$$

где, с учетом того, что  $n^2 = 1$

$$e_\rho^{(0,3)}(K) = \frac{K_\rho \pm \sqrt{K^2} n_\rho}{[2\omega(\omega \pm \sqrt{K^2})]^{1/2}} \quad (7)$$

$\omega = (Kn)$  - энергия глюона с импульсом  $K$ , а единичные векторы  $e^{(1,2)}(K)$  ортогональны друг другу и векторам  $K$  и  $n$ . По аналогии с векторами поляризации конечных глюонов будем называть их физическими. Покажем, что только они дают вклад в (4).

Для этого заметим, что частоты глюонов  $\omega_1$  и  $\omega_2$  можно считать сильно упорядоченными; не нарушая общности, будем считать  $\omega_1 \gg \omega_2$ . Кроме того, так как  $K^2 \approx \omega_1 \omega_2 \theta_{12}^2$ ,  $2PK \approx \approx \epsilon_-(\omega_1 \theta_1^2 + \omega_2 \theta_2^2)$ , где  $\theta_{12}$  - угол между  $K_1$  и  $K_2$ , а  $\theta_1(\theta_2)$  - между  $P_-$  и  $K_1(K_2)$ , то диаграмма рис. в) может давать вклад только в области  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \theta_1^2 \gg \theta_2^2 \approx \theta_1^2 \quad (8)$

В самом деле, при  $\theta_1^2 \gg \theta_2^2$  знаменатели матричного элемента не зависят от углов излучения второго глюона, так что интегрирование по ним становится нелогарифмическим. Точно так же при

$\theta_2^2 \approx \frac{\omega_1}{\omega_2} \theta_1^2 \gg \theta_1^2$  не дает логарифма интегрирование по углам вылета первого глюона. С учетом этих обстоятельств имеем

$$e_1^\mu e_2^\nu \gamma_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k) e_p^{(1,2)}(k) \sim \omega_1 \theta_{12} \gg \sqrt{\omega_1 \omega_2} \theta_{12}^2 \sim \sqrt{k^2} \sim e_1^\mu e_2^\nu \gamma_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k) e_p^{(0,3)}(k) \quad (9)$$

а также

$$e_\sigma^{(1,2)}(k) p_\sigma^\beta \sim \frac{\epsilon_-}{\omega_1} (\omega_1 \theta_1 + \omega_2 \theta_2) \gg \frac{\epsilon_-}{\omega_1} (\omega_1 \theta_1^2 + \omega_2 \theta_2^2 + \sqrt{\omega_1 \omega_2} \theta_{12}^2) \sim \frac{p \cdot k + \sqrt{k^2} p \cdot n}{\omega} \sim e_\sigma^{(0,3)}(k) p_\sigma^\beta \quad (10)$$

т.е. вклад векторов  $e^{(0,3)}(k)$  пренебрежимо мал. Поэтому в (4) можно заменить  $d_{\rho\sigma}(k, n)$  на

$$g_{\rho\sigma}^\perp(k) = - \sum_{\lambda=1}^2 e_p^{(\lambda)}(k) e_\sigma^{(\lambda)}(k) \quad (11)$$

и оставить в выражении (5) для  $\gamma_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k)$  только член  $g_{\mu\rho}(k_1+k_2)_\nu$ , так как он при свертке с  $e_1^\mu e_2^\nu e_p^{(1,2)}(k)$  дает величину  $\sim \omega_1 \theta_{12}$ , а остальные члены - величину  $\sim \omega_2 \theta_{12}$ . Значит,

$$e_1^\mu e_2^\nu \gamma_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k) d_{\rho\sigma}(k, n) p_\sigma^\beta \approx 2(e_2 k_1) e_1^\mu g_{\mu\sigma}^\perp(k) p_\sigma^\beta \quad (12)$$

Теперь остается сделать последний шаг - показать, что  $g_{\mu\sigma}^\perp(k)$  в (11) можно заменить на  $g_{\mu\sigma}$ . В самом деле, так как  $e_1$  - пространственный вектор, имеем

$$e_1^\mu g_{\mu\sigma}^\perp(k) p_\sigma^\beta = -(\bar{e}_1 \bar{p}_-) + \frac{(\bar{e}_1 \bar{k})(\bar{k} \bar{p}_-)}{k^2} \approx -(\bar{e}_1 \bar{p}_-) = e_1^\mu g_{\mu\sigma} p_\sigma^\beta \quad (13)$$

При этом, используя (8), мы пренебрегли величиной  $\frac{(\bar{e}_1 \bar{k})(\bar{k} \bar{p}_-)}{k^2} \sim \epsilon_- \frac{\omega_2}{\omega_1} \theta_{12}$  по сравнению с  $(\bar{e}_1 \bar{p}_-) \sim \epsilon_- \theta_1$ .

Здесь может возникнуть недоумение: мы исходили из выражения для матричного элемента в планарной калибровке, а пришли к то-

му, что заменили в (4)  $d_{\rho\sigma}$  на  $g_{\rho\sigma}$ ; так не проще ли было сразу работать в фейнмановской калибровке, используя физические поляризации конечных глюонов. Не следует забывать, однако, что мы упростили выражение для  $\gamma_{\mu\nu\rho}$ , сведя его к одному члену. В фейнмановской калибровке для того, чтобы обосновать это упрощение, понадобилось бы привлекать к рассмотрению и диаграмму излучения с антикварковой линией.

Таким образом при  $\omega_1 \gg \omega_2$  вклад диаграммы рис.1в можно записать в виде

$$M_{1b} = M_0 g^2 \frac{e_2 k_1}{k_2 k_1} \frac{e_1 p_-}{(k_1 + k_2) p_-} i f^{a_1 a_2 c} \langle t^c \rangle \quad (14)$$

причем область, в которой этот вклад дает дважды логарифмы, ограничена условиями (8). Вклады диаграмм рис.1а), 1б) даются формулами (3а), (3б); очевидно, области дважды логарифмичности для них ограничены условиями

$$\theta_1^2 \gg \frac{\omega_2}{\omega_1} \theta_2^2 \quad (15a)$$

и

$$\theta_2^2 \gg \frac{\omega_1}{\omega_2} \theta_1^2 \quad (15b)$$

соответственно и не перекрываются друг с другом. Область (15б) не перекрывается также и с (8), однако, области (15а) и (8) перекрываются; таким образом следует учитывать интерференцию вкладов диаграмм рис.1а) и рис.1в). Напомним, что мы рассматриваем случай  $\omega_1 \gg \omega_2$ ; в противоположном случае, естественно, нужно учитывать интерференцию вкладов диаграмм рис.1б) и рис.1в).

Можно, однако, по существу избежать рассмотрения интерференции, выделив три неперекрывающихся области по углам излучения

$$I, \theta_1 \gg \theta_2 \quad (16)$$

$$II, \theta_2 \gg \theta_1$$

$$III, \theta_{12} \ll \theta_1 \approx \theta_2$$

В каждой из этих областей матричный элемент приобретает тривиальный вид произведения матричного элемента процесса без излучения на соответствующие множители сопровождающего излучения.

В самом деле, в области I вклад, очевидно, дает только диаграмма рис.1а); учитывая, что в этой области  $K_1 p \gg K_2 p$ , имеем

$$M_I = M_0 g^2 \frac{e_2 p}{K_2 p} \frac{e_1 p}{K_1 p} \langle t^{a_2} t^{a_1} \rangle \quad (17)$$

Сложнее ситуация в области II. Здесь возможны два варианта: либо  $\theta_2^2 \gg \frac{\omega_1}{\omega_2} \theta_1^2 \gg \theta_1^2$ , либо  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \theta_1^2 \gg \theta_2^2 \gg \theta_1^2$ . (Случай, когда  $\theta_2^2 \sim \frac{\omega_1}{\omega_2} \theta_1^2$  не подлежит рассмотрению, так как такое фиксирование области приводит к потере логарифма; по этой же причине области (Iб) исчерпывают в дважды логарифмическом приближении весь интервал углов). В первом варианте вклад дает только диаграмма рис.1б); с учетом того, что при этом  $K_2 p \gg K_1 p$ , имеем

$$M_{II} = M_0 g^2 \frac{e_1 p}{K_1 p} \frac{e_2 p}{K_2 p} \langle t^{a_1} t^{a_2} \rangle \quad (18)$$

Во втором варианте вклад дают две диаграммы: рис.1а) и рис.1в). Однако здесь с учетом того, что  $\theta_{12} \simeq \theta_2$  имеем

$$\frac{e_2 K_1}{K_2 K_1} \sim \frac{e_2 p}{K_2 p} \quad (19)$$

Складывая с учетом (19) выражения (14) и (3а), приходим, используя коммутационные соотношения для  $t^a$  и неравенство  $K_1 p \gg K_2 p$ , следующее из условия  $\omega_1 \theta_1^2 \gg \omega_2 \theta_2^2$ , вновь к выражению (18). Значит, оно справедливо во всей области II.

Наконец, в области III вклад дает только диаграмма рис.1в); т.к. в этой области  $K_1 p \gg K_2 p$ , то вклад этот может быть записан как

$$M_{III} = M_0 g^2 \frac{e_2 K_1}{K_2 K_1} \frac{e_1 p}{K_1 p} i f^{a_1 a_2 c} \langle t^c \rangle \quad (20)$$

Для того, чтобы сделать ясным обобщение на случай излучения большого числа глюонов, суммируем проведенное нами рассмотрение следующим образом. Рисуем фейнмановские диаграммы для излучения с кварковой линии (в нашем случае это диаграммы рис.1). Считаем частоты сильно упорядоченными ( $E \gg \omega_1 \gg \omega_2$ ). Говорим, что на диаграмме рис.1а) (рис.1б) оба глюона испускаются кварком с импульсом  $p$ , причем сначала испускается глюон с импульсом  $K_1 (K_2)$ , а затем с импульсом  $K_2 (K_1)$ ; этой диаграм-

ме сопоставляем область I (область II). На диаграмме рис.1в) глюон с импульсом  $K_1$  испускается кварком, а глюон с импульсом  $K_2$  — глюоном с импульсом  $K_1$ . Этой диаграмме сопоставляем область III. В каждой из областей матричный элемент представляется как произведение  $M_0$  на соответствующие множители сопровождающего излучения и на групповую часть, определяемую диаграммой, которой эта область сопоставляется. Очевидно, излучение с антикварковой линии рассматривается точно так же.

Подчеркнем здесь, что выражение (18) в области  $\frac{\omega_1 \theta_1^2 \gg \theta_2^2 \gg \theta_1^2}$  получается в результате суммирования вкладов диаграмм рис.1а) и рис.1в). Как отмечалось в [9], не существует калибровки, в которой в каждой из областей вклад давала бы только одна диаграмма. Поэтому, если работать с фейнмановскими диаграммами, то дважды логарифмический вклад в сечение дает их интерференция, т.е. диаграммы типа изображенной на рис.2а). Из этой диаграммы при разрывании линии с импульсом  $K_2$  получается диаграмма рис.2б). Значит диаграмму рис.2б) надо удерживать при вычислении инклюзивного по глюону сечения с дважды логарифмической точностью. На первый взгляд это выглядит странным, так как известно, что в физических калибровках в главном логарифмическом приближении (ГЛП) вклад в инклюзивные сечения дают только плоские диаграммы (см., например, [6]). Однако следует помнить, что при этом считается, что  $\chi = \frac{2\omega}{\sqrt{Q^2}} \sim 1$ ; дважды же логарифм набираются от области  $\chi \ll 1$ . Поэтому при изучении явлений, чувствительных к области малых  $\chi$  (таких, например, как множественность), нельзя пользоваться идеологией ГЛП и считать, что главный вклад идет от плоских диаграмм (как уже говорилось в [9], при любом выборе калибровки). В сфероконусной калибровке это было недавно показано Миллером [11]. К этому вопросу мы еще вернемся в заключении.

### 3. Излучение произвольного числа глюонов

I. Рецепт получения в дважды логарифмическом приближении матричного элемента процесса излучения  $N$  глюонов сформулирован в [9]. В борновском приближении он выглядит следующим образом.

Считаем глюоны мягкими и энергии их сильно упорядоченными; для определенности

$$\omega_N \ll \omega_{N-1} \ll \dots \ll \omega_1 \ll \varepsilon_+ \approx \varepsilon \quad (21)$$

Каждой диаграмме Фейнмана  $D$  без четырехглюонных вершин сопоставляем определенную область  $\Gamma_D$  в пространстве углов излучения. Эти области не перекрываются и исчерпывают в дважды логарифмическом приближении все пространство углов. В каждой области матричный элемент имеет свой простой вид.

Область  $\Gamma_D$  сопоставляется диаграмме  $D$  так. Благодаря условию (21) каждая из виртуальных частиц на диаграмме  $D$  имеет энергию, примерно равную энергии самой энергетичной из тех конечных частиц, на которые она распадается. Линию виртуальной частицы с энергией, примерно равной  $\omega_i$ , припишем  $i$ -му глюону. Совокупность всех таких линий будем называть линией  $i$ -го глюона, или просто  $i$ -ой линией и изображать прямой (см. рис. 3). Если линия  $j$ -го глюона начинается с линии  $i$ -го (что возможно, в силу (21), только при  $j > i$ ), то будем говорить, что  $j$ -й глюон излучается  $i$ -ым; если эта линия начинается с кварковой (антикварковой) линии, то  $j$ -й глюон излучается кварком (антикварком). Если глюон  $j$ , излучаемый частицей  $i$ , сам испускает последовательно по ходу своей линии глюоны  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , то

$$K_j \hat{K}_i \gg K_{z_1} \hat{K}_j \gg K_{z_2} \hat{K}_j \gg \dots \gg K_{z_m} \hat{K}_j \quad (22)$$

где  $K_j \hat{K}_i$  - угол между векторами  $\vec{K}_j$  и  $\vec{K}_i$ . Если глюон  $j$  испускается кварком (антикварком), то вместо  $K_i$  в (22) стоит  $p_-(p_+)$ . Для глюонов  $j_1, \dots, j_n$ , испускаемых кварком (антикварком) последовательно по (против) кварковой линии, углы также упорядочены:

$$1 \gg K_{j_1} \hat{p}_+ \gg \dots \gg K_{j_n} \hat{p}_+ \quad (23)$$

На этом описании области  $\Gamma_D$  закончено. То, что области, сопоставляемые разным диаграммам, не перекрываются, очевидно. В пункте 3 будет показано и то, что в дважды логарифмическом приближении они исчерпывают все пространство углов.

В области  $\Gamma_D$  матричный элемент процесса равен

$$M_D g^N (-1)^m \prod_{i=1}^N \frac{(e_i \cdot p_i)}{(K_i \cdot p_i)} G \quad (24)$$

здесь  $M_D$  - матричный элемент рождения  $q \bar{q}$  пары без групповой его части;  $m$  - число глюонов, испущенных антикварком;  $e_i$  - физический вектор по поляризации  $i$ -го глюона,  $p_i$  - 4-импульс излучившей его частицы,  $G$  - групповая часть матричного элемента, которая получается, если в диаграмме  $D$  в вершинах на кварковой линии стоит  $t^a = \lambda^a/2$ , а в трехглюонных вершинах  $if^{abc}$ , причем  $a(b)$  - индекс глюона с наименьшей (наибольшей) энергией.

Как отмечалось в [9] и обсуждалось уже в разделе 2, выражение (24) получается в результате суммирования вкладов множества фейнмановских диаграмм; не существует калибровки, в которой вклад в каждой из областей давала бы только одна диаграмма.

Доказательство приведенного рецепта будем проводить в два этапа. На первом этапе (в пункте 2) максимально упростим выражение для вклада каждой из фейнмановских диаграмм в области, приводящей к дважды логарифмическому вкладу, используя планарную калибровку и физические векторы поляризации конечных глюонов. На втором этапе (в пункте 3) покажем, что сумма вкладов фейнмановских диаграмм в каждой из областей, определенных неравенствами (21)-(23), дает выражение (24).

2. Приступим к первому этапу. Возможность ограничиться рассмотрением частот глюонов в области (21) и диаграмм без четырехглюонных вершин представляется очевидной. Поскольку нет интерференции между излучением с кварковой и антикварковой линией дальше мы рассматриваем только излучение кварка (происхождение множителя  $(-1)$  в (24) на каждый глюон, испущенный антикварком, то же, что и в КЭД). Так как мы используем физические поляризации конечных глюонов, то для определения области дважды логарифмичности нужно рассматривать квадраты матричных элементов для каждой диаграммы, поскольку именно они дают наибольший вклад в сечение. Логарифмы набираются при интегрировании по частотам и углам излучения глюонов. Поскольку при нашем выборе калибровки (I) и системы отсчета ( $\vec{n} = 0$ ) зависимость от углов в знаменателях матричного элемента дают только пропагаторы, то каждый из них должен приводить к логарифму при угловом интегрировании.

Возьмем произвольную диаграмму Фейнмана без четырехглюонных вершин. Для удобства формулировок припишем кварку нулевой номер, так что  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $K_0 \equiv p_-$ ,  $\omega_0 \equiv \varepsilon_-$ . Рассмот-

рим знаменатели пропагаторов на  $i$ -ой линии. Они имеют вид  $(\sum_t K_t)^2$ , где сумма идет по всем частицам, на которые распадается рассматриваемая виртуальная частица. Так как наибольшую энергию среди них имеет  $i$ -я частица, и так как при  $\omega_i \gg \omega_j, \omega_n$  имеем

$$K_i(K_j + K_n) \sim \omega_i(\omega_j \theta_{ji}^2 + \omega_n \theta_{ni}^2) \gg \quad (25)$$

$$\gg \omega_j \omega_n (\theta_{ji}^2 + \theta_{ni}^2) \approx \omega_j \omega_n \theta_{jn}^2 \sim K_j K_n$$

то вследствие упорядоченности по частотам (21)

$$\left(\sum_t K_t\right)^2 \approx 2K_i \sum_{t \neq i} K_t \quad (26)$$

Это очевидный аналог мягкофотонного приближения КЭД. Однако в КЭД фотоны испускаются только с одной линии (кварковой), и область дважды логарифмичности определяется просто требованием упорядоченности знаменателей пропагаторов на этой линии. В КХД ситуация несколько сложнее. Определим здесь область дважды логарифмичности следующим образом. Рассмотрим вершину на  $i$ -ой линии, в которой излучается  $j$ -ый глюон (см. рис.3). Если он в свою очередь испускает глюоны, и первый из них -  $z$ -ый, то в этой вершине можно наложить условие

$$\omega_j \theta_{ji}^2 \gg \omega_z \theta_{zj}^2 \quad (27)$$

Если после излучения  $j$ -го глюона с  $i$ -ой линии еще излучаются глюоны, и первый из них  $n$ -ый, то можно наложить условие

$$\omega_j \theta_{ji}^2 \gg \omega_n \theta_{ni}^2 \quad (28)$$

Докажем справедливость следующих утверждений.

А. Если в вершине рождения  $j$ -го глюона  $i$ -ой частицей (см. рис.3) выполняется условие (27) ((28)), то можно пренебречь зависимостью от  $K_z$  (от  $K_n$ ) в знаменателях всех пропагаторов, отделяющих эту вершину от вершины рождения  $q\bar{q}$  пары фотоном.

Б. Дважды логарифмический вклад может дать только область, в которой условия (27), (28) (с соответствующими индексами) выполняются в каждой вершине, в которой их можно наложить.

Пропагаторы, упомянутые в утверждении А, либо лежат на  $i$ -ой линии, либо предшествуют вершине излучения  $i$ -ой частицы, и лежат на какой-то  $h$ -ой линии. С учетом (26), в первом случае  $K_z$  и  $K_n$  входят только в виде  $2K_i(K_j + K_n + K_z + \dots) \approx \omega_i(\omega_j \theta_{ji}^2 + \omega_n \theta_{ni}^2 + \omega_z \theta_{zi}^2 + \dots)$ , а во втором - в виде  $2K_h(K_i + K_j + K_z + K_n + \dots) \approx \omega_h(\omega_i \theta_{ih}^2 + \omega_j \theta_{jh}^2 + \omega_z \theta_{zh}^2 + \omega_n \theta_{nh}^2 + \dots)$ . Возможность пренебрежения зависимостью от  $K_n$  в первом случае следует непосредственно из (28), а во втором из (28) и соотношений

$$\omega_n \ll \omega_i; \theta_{nh}^2 \leq \theta_{ni}^2 + \theta_{ih}^2 \quad (29)$$

$$\omega_i \gg \omega_j; \omega_i \theta_{ih}^2 + \omega_j \theta_{jh}^2 \approx \omega_i \theta_{ih}^2 + \quad (30)$$

$$+ \omega_j (\theta_{jh}^2 + \theta_{ih}^2) \approx \omega_i \theta_{ih}^2 + \omega_j \theta_{ji}^2$$

Зависимость от  $K_z$  можно пренебречь вследствие условия (27) и соотношений

$$\omega_z \ll \omega_j; \theta_{zi}^2 \leq \theta_{zj}^2 + \theta_{ji}^2 \quad (31)$$

в первом случае и вследствие (27), (30) и соотношений (31) с заменой ( $i \rightarrow h$ ) во втором. Утверждение А таким образом доказано.

Покажем теперь, что нарушение любого из условий (27), (28) хотя бы в одной из вершин ведет к потере логарифма. Для этого из вершин, в которых имеется нарушение условий (27), (28), рассмотрим самую удаленную от вершины рождения  $q\bar{q}$  пару фотоном. (Мерой удаленности считается число пропагаторов между вершинами). Пусть это будет вершина рождения  $j$ -го глюона  $i$ -ой частицей (рис.3). Так как во всех вершинах, более удаленных, чем рассматриваемая, соотношения (27) и (28) (с соответствующими индексами) выполняются, то согласно утверждению А знаменатели пропагаторов частиц с импульсами  $q_2$  и  $q_3$  равны соответственно  $q_2^2 = 2K_i K_n \approx \omega_i \omega_n \theta_{ni}^2$ ;  $q_3^2 = 2K_j K_z \approx \omega_j \omega_z \theta_{zj}^2$ , а знаменатель пропагатора частицы с импульсом  $q_1$  равен  $q_1^2 = 2K_i(K_j + K_n + K_z) \approx \omega_i(\omega_j \theta_{ji}^2 + \omega_n \theta_{ni}^2 + \omega_z \theta_{zi}^2)$ . Нарушение ус-



ловия (27) означает, что  $\omega_2 \theta_{2j}^2 \geq \omega_j \theta_{ji}^2$ ; с учетом того, что  $\omega_2 \ll \omega_j$ , это приводит к  $\theta_{2j}^2 \gg \theta_{ji}^2$ . Так как  $\theta_{2i} + \theta_{ji} \geq \theta_{2j} \geq |\theta_{2i} - \theta_{ji}|$ , то значит  $\theta_{2i} \simeq \theta_{2j}$ , и  $q_1^2 \simeq \omega_i (\omega_j \theta_{ji}^2 + \omega_n \theta_{ni}^2 + \omega_2 \theta_{2j}^2) \sim \omega_i (\omega_n \theta_{ni}^2 + \omega_2 \theta_{2j}^2)$  независимо от того, нарушается ли (28). В дважды логарифмическом приближении, как мы отмечали, каждый из пропагаторов должен приводить к логарифму при угловом интегрировании; так как  $q_1^2$  определяется теми же углами, что и  $q_2^2$  и  $q_3^2$ , это приводит к потере логарифмов. Логарифм теряется и в том случае, когда нарушается только условие (28), так как тогда из (27), (31) и из  $\omega_n \theta_{ni}^2 \geq \omega_j \theta_{ji}^2$  следует, что  $q_1^2 \sim \omega_i \omega_n \theta_{ni}^2$ .

Таким образом, мы определили область, которая может приводить к дважды логарифмическому вкладу; в ней дальше и будем работать. В силу утверждения А в этой области знаменатель пропагатора на  $i$ -ой линии перед излучением  $j$ -го глюона равен  $2K_i K_j$ . Займемся теперь упрощением числителей. Так же, как при анализе рождения двух глюонов, воспользуемся разложением (6) для числителей глюонных пропагаторов и покажем, что вклад дают только физические поляризации ( $\lambda = 1, 2$ ). Рассмотрим вершину рождения  $j$ -го глюона  $i$ -ым (рис.3) и введем величины

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}(q_1, q_2, q_3) = e_{\mu}^{(\lambda_1)}(q_1) e_{\nu}^{(\lambda_2)}(q_2) e_{\rho}^{(\lambda_3)}(q_3) \chi^{\mu\nu\rho}(-q_1, q_2, q_3) \quad (32)$$

где трехглюонная вершина  $\chi^{\mu\nu\rho}$  определена как в (5). Определим  $\chi_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$  при различных  $\lambda$ . Предварительно выразим величины, входящие в (32), через  $\omega_n, \omega_2, \omega_j, \omega_i$  и углы  $\theta_{ji}, \theta_{ni}, \theta_{2j}$ . Имеем (см. рис.3)

$$(q_1 n) = q_1^0 \simeq (q_2 n) = q_2^0 \simeq \omega_i; (q_3 n) = q_3^0 \simeq \omega_j \quad (33)$$

$$q_1^2 \simeq \omega_i \omega_j \theta_{ji}^2, \quad q_2^2 \simeq \omega_i \omega_n \theta_{ni}^2, \quad q_3^2 \simeq \omega_j \omega_2 \theta_{2j}^2$$

Кроме того, нужны выражения для углов  $\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \vartheta_{23}$  между векторами  $\vec{q}_1$  и  $\vec{q}_2, \vec{q}_1$  и  $\vec{q}_3, \vec{q}_2$  и  $\vec{q}_3$  соответственно. Из элементарной геометрии получаем

$$\frac{\vartheta_{12}}{|\vec{q}_3|} = \frac{\vartheta_{13}}{|\vec{q}_2|} = \frac{\vartheta_{23}}{|\vec{q}_1|} \quad (34)$$

а так как из (27), (28), (33) следует, что

$$\omega_i \omega_j \theta_{ji}^2 \simeq q_1^2 = q_2^2 + q_3^2 + 2q_2 q_3 \simeq q_2^0 q_3^0 \vartheta_{23}^2 \simeq \omega_i \omega_j \vartheta_{23}^2 \quad (35)$$

то имеем

$$\vartheta_{23} \simeq \theta_{ji}, \quad \vartheta_{13} \simeq \theta_{ji}, \quad \vartheta_{12} \simeq \frac{\omega_j}{\omega_i} \theta_{ji} \ll \theta_{ji} \quad (36)$$

Теперь легко видеть, что для физических поляризаций

$$\chi_{t_1 t_2 t_3}(q_1, q_2, q_3) \simeq (e^{(t_1)}(q_1) e^{(t_2)}(q_2)) \chi(e^{(t_3)}(q_3) q_2) \sim \omega_i \theta_{ji}; \quad (37)$$

$$t_{1,2,3} = 1, 2$$

Следует здесь же отметить, что

$$(e^{(t_3)}(q_3) q_2) \simeq (e^{(t_3)}(q_3) K_i) \quad (38)$$

В самом деле, пусть, кроме  $i$ -го глюона при распаде виртуальной частицы с импульсом  $q_2$  (см. рис.3) образуются еще глюоны с импульсами  $K_s$ , так что  $q_2 = K_i + \sum K_s$ . Если  $\vartheta_s$ -угол между  $\vec{q}_3$  и  $\vec{K}_s$ , то из  $\omega_j \omega_s \vartheta_s^2 \leq 2K_s q_3 \ll q_1^2 \simeq \omega_i \omega_j \theta_{ji}^2$  имеем  $(e^{(t_3)}(q_3) K_s) \sim \omega_s \vartheta_s \ll \omega_i \theta_{ji}$ , откуда следует (38). В случае, когда хотя бы одна из поляризаций не физическая, элементарные вычисления дают, с учетом (27), (28), (33), (36),

$$\chi_{t_1 l_2 t_3} \sim \sqrt{\omega_i \omega_n \theta_{ni}^2 + \omega_j \theta_{ji}^2}; \quad \chi_{t_1 t_2 l_3} \sim \frac{\omega_i}{\omega_j} \sqrt{\omega_j \omega_2 \theta_{2j}^2 + \omega_i \theta_{ji}^2};$$

$$\chi_{l_1 t_2 t_3} \sim \sqrt{\omega_i \omega_j \theta_{ji}^2}; \quad \chi_{l_1 l_2 t_3} \sim \chi_{l_1 t_2 l_3} \sim \theta_{ij} \sqrt{\omega_i \omega_j \theta_{ji}^2};$$

$$\chi_{t_1 l_2 l_3} \sim \theta_{ji} \left[ \omega_j \theta_{ji}^2 + \sqrt{\omega_i \omega_n \theta_{ni}^2} + \sqrt{\omega_j \omega_2 \theta_{2j}^2} \frac{\omega_j}{\omega_i} \right]; \quad (39)$$

$$\chi_{l_1 l_2 l_3} \sim \theta_{ji} \left[ \sqrt{\omega_i \omega_j \theta_{ji}^2} + \sqrt{\omega_j \omega_n \theta_{ni}^2} + \sqrt{\omega_i \omega_2 \theta_{2j}^2} \right]$$

где  $t_{1,2,3} = 1, 2; l_{1,2,3} = 0, 3$ . Сравнение (37) и (38) показывает, что в трехглюонных вершинах наибольшую величину дают свертки с физическими поляризациями. Легко убедиться, что так же дело обстоит и в глюон-фермионных вершинах. Пусть  $i=0$ , то есть  $i$ -я линия на рис.3 - кварковая. Тогда, после хорошо известных по КЭД манипуляций с числителями фермионных пропагаторов, получаем в вершине излучения  $j$ -го глюона  $2K_o^{\nu\rho} (K_o \equiv p)$ . Доминирование физических поляризаций следует из оценок

$$(e^{(1,2)}(q_3)K_0) \sim \omega_0 \theta_{j0}; \quad (40)$$

$$(e^{(0,3)}(q_3)K_0) \sim \omega_0 \theta_{j0}^2 + \frac{\omega_0}{\omega_j} \sqrt{\omega_j \omega_2} \theta_{2j}^2$$

с учетом (27).

Проведенный анализ показывает, что в разложении (6) следует оставить только физические поляризации, так что с учетом (II),  $d_{\rho\sigma}(k,n) \approx g_{\rho\sigma}^\perp(k)$ ; кроме того, в вершине излучения  $j$ -го глюона  $i$ -ым (см. рис. 3) с учетом (37), (38) остается лишь  $g_{\mu\nu} 2K_i^\rho$ . Так же, как при анализе излучения двух глюонов, покажем теперь, что после такого упрощения вершин можно заменить  $g_{\rho\sigma}^\perp(k)$  на  $g_{\rho\sigma}$ . Рассмотрим для этого пропагаторы на линии  $j$ -го глюона (рис. 3). Их числители входят в матричный элемент следующим образом

$$2K_i^\rho g_{\rho\sigma}^\perp(q_3) g_{\sigma\tau}^\perp(q_4) \dots g_{\tau\nu}^\perp(q_n) e_j^{\rho\nu} \quad (41)$$

где  $q_3, q_4, \dots, q_n$  — импульсы пропагаторов на  $j$ -ой линии,  $e_j$  — вектор поляризации  $j$ -го глюона. Поскольку в системе  $\bar{n} = 0$ , в которой мы работаем, как  $g_{\mu\nu}^\perp$ , так и  $e_j$  имеют только пространственные компоненты, удобно перейти к трехмерным обозначениям; будем считать, что в (41) лоренцовские индексы принимают только значения 1, 2, 3, при этом  $g_{\mu\nu}^\perp(q_\alpha) = -\delta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu^\alpha q_\nu^\alpha}{q_\alpha^2}$ , и легко видеть, что главный вклад в (41) дают только члены  $\delta_{\mu\nu}$  (что и доказывает возможность замены  $g_{\mu\nu}^\perp$  на  $g_{\mu\nu}$ ). В самом деле, использование хотя бы один раз члена с  $q_\alpha^\mu q_\alpha^\nu$  дает (с точностью до знака) величину  $2\omega_i(q_\alpha e_j)/\omega_j$ , где  $q_\alpha$  — импульс какой-то виртуальной частицы на  $j$ -ой линии. Пусть при распаде этой частицы кроме  $j$ -го глюона образуются еще глюоны с импульсами  $K_\pm$ , так что  $q_\alpha = K_j + \sum_\pm K_\pm$ . Так как  $e_j \cdot K_j = 0$ , то эта величина  $\sim \sum_\pm \omega_\pm \omega_i \vartheta_\pm / \omega_j$ , где  $\vartheta_\pm$  — угол между  $K_j$  и  $K_\pm$ ; вклад же членов с  $\delta_{\mu\nu}$  в (41) порядка  $\omega_i \theta_{ji}$ . Поскольку  $\omega_j \omega_\pm \vartheta_\pm^2 \sim 2K_j K_\pm \leq q_3^2 \sim \omega_j \omega_2 \theta_{2j}^2 \ll \omega_j^2 \theta_{ji}^2$  имеем  $(\omega_\pm \omega_i \vartheta_\pm / \omega_j) \ll \omega_i \theta_{ji}$ .

На этом завершается первый этап доказательства рецепта, сформулированного в [9] и изложенного в пункте I. Мы определили для каждой диаграммы область, которая может дать дважды логарифмический вклад (утверждение Б), и показали, что в ней матричный

элемент имеет вид (24). Отметим, что правила написания матричного элемента (24) по-существу одинаковы для излучения с глюонной и фермионной линий, поскольку  $if^{abc} = (T^a)_{cb}$ , где  $T^a$  — генераторы группы в присоединенном представлении, обладающие теми же коммутационными соотношениями, что и  $t^a$ .

Однако области, определенные утверждением Б, для разных диаграмм перекрываются, что означает наличие интерференции (мы уже видели это на примере излучения двух глюонов). Рецепт, изложенный в пункте I, позволяет по-существу избежать рассмотрения интерференции. Согласно этому рецепту, каждой диаграмме  $\mathcal{D}$  сопоставляется область  $\Gamma_{\mathcal{D}}$ , определенная неравенствами (22), (23). Подчеркнем, что область  $\Gamma_{\mathcal{D}}$  вовсе не совпадает с определенной утверждением Б областью дважды логарифмичности для диаграммы  $\mathcal{D}$ , и вклад в области  $\Gamma_{\mathcal{D}}$  может давать как диаграмма  $\mathcal{D}$ , так и другие диаграммы. Однако сумма матричных элементов всех дающих вклад диаграмм определяется формулой (24), то есть имеет такой вид, как будто работает только одна диаграмма. Доказательство этого изложено в следующем пункте.

3. Нужно еще убедиться, что совокупность областей, определенных неравенствами (22), (23) исчерпывает в дважды логарифмическом приближении все пространство углов; иначе говоря, следует показать, что область дважды логарифмичности для любой диаграммы можно разбить на части таким образом, чтобы каждая часть попадала бы в одну из областей, определенных соотношениями (22), (23).

В условия, ограничивающие область дважды логарифмичности (см. (27), (28)) входят лишь углы между импульсами излученной и излучившей ее частиц (будем называть их углами излучения), при интегрировании по каждому из которых должен набираться логарифм. Поэтому область дважды логарифмичности для любой диаграммы  $\mathcal{D}$  можно разбить на части, где все углы излучения строго упорядочены. Рассмотрим какую-нибудь определенную часть (обозначим ее  $\tilde{\Gamma}$ ) и явным построением покажем, что существует диаграмма  $\mathcal{D}$ , сопоставляемая которой по правилам (22), (23) область  $\Gamma_{\mathcal{D}}$  включает в себя  $\tilde{\Gamma}$ . Назовем  $i$ -ой ветвью часть диаграммы, которую можно отделить разрезанием линии  $i$ -ой частицы у вершины ее рождения. Эту вершину будем называть основанием ветви. Ветвь, состоящую из одной частицы, назовем элементарной. Нулевую (кварковую) ветвь

будем называть деревом, а кварковую линию — его стволом. Индексы у углов излучения будем писать в порядке их убывания, так что первым станет номер излученной частицы, вторым — излучившей. Поскольку углы излучения в области  $\Gamma$  сильно упорядочены, среди них есть наибольший,  $\theta_{ji}$ , причем  $\theta_{ji} \approx \theta_{j0}$ . Обрубим на диаграмме  $\hat{D}$   $j$ -ю ветвь у ее основания и прикрепим к стволу дерева первой от его основания (т.е. от вершины рождения  $q\bar{q}$ ). Рассмотрим теперь оставшуюся часть дерева (без  $j$ -ой ветви), опять выберем наибольший угол; если это  $\theta_{in}$ , то опять  $\theta_{in} \approx \theta_{i0}$ . Обрубим  $n$ -ю ветвь и прикрепим ее к стволу следующей за  $j$ -ой. Опять рассмотрим оставшуюся часть и т.д. И так будем продолжать до тех пор, пока не обрубим все ветви со ствола. После этого аналогичную процедуру сделаем с каждой обрубленной нами  $m$ -ой ветвью, считая ее за дерево, а  $m$ -ю линию — за его ствол; роль нулевого номера при этом играет  $m$ -ый. Затем то же сделаем с каждой ветвью, обрубленной на втором этапе и т.д. до тех пор, пока обрубаемые ветви не станут элементарными. Очевидно, построенной таким образом диаграмме  $D$  сопоставляется по правилам (22), (23) область, включающая в себя  $\hat{\Gamma}$ .

Теперь нам осталось доказать утверждение, что в области  $\Gamma_D$  сопоставляемой любой диаграмме  $D$  по правилам (22), (23), сумма матричных элементов всех дающих вклад диаграмм определяется формулой (24). Доказательство будем проводить по индукции. Для излучения одного глюона утверждение тривиально справедливо, так как есть всего одна диаграмма (мы по-прежнему рассматриваем только излучение кварка) и сопоставляемая ей область совпадает с ее областью дважды логарифмичности. Предположим, что оно справедливо до  $N-1$  глюонов и докажем его справедливость для  $N$ .

Рассмотрим на диаграмме  $D$  нижнюю (то есть ближайшую к вершине рождения  $q\bar{q}$ ) ветвь, отщепляющуюся от кварковой линии. Пусть это будет  $i$ -я ветвь. Согласно (22), (23), в области  $\Gamma_D$  глюоны  $i$ -ой ветви образуют струю, угол вылета которой относительно кварка  $\theta_{i0}$  велик, как по сравнению с угловым размером струи, так и по сравнению с углами вылета (тоже по отношению к кварку) других глюонов. Поэтому вклад в области  $\Gamma_D$  могут давать лишь те диаграммы, на которых глюоны из  $i$ -ой ветви тоже образуют  $i$ -ю ветвь, возможно другой конфигурации, но с тем же составом глюонов. Легко видеть, что во всех других диаграммах не-

сколько углов излучения будут равны  $\theta_{i0}$ , так что они не могут дать вклада. Рассматривая  $i$ -ю ветвь как дерево, мы можем применить к ней наше предположение, поскольку, если не считать ствол (то есть  $i$ -ю линию), количество глюонов на ней  $\leq N-1$ . То, что ствол не кварковый, а глюонный, не играет роли, поскольку, как мы уже говорили, правила для излучения с кварковой и глюонной линий отличаются только тем, что генераторы группы входят в разных представлениях; однако, для дальнейшего доказательства существенны только коммутационные соотношения, которые одинаковы. С другой стороны, если  $i$ -я ветвь не элементарна, то наше предположение можно применить и к диаграммам с обрубленной  $i$ -ой ветвью (когда вместо нее остается один глюон). Таким образом, если нижняя ветвь на диаграмме  $D$  не элементарна, то утверждение доказано.

Пусть теперь нижняя ветвь элементарна, то есть это просто  $i$ -ый глюон. Согласно выше изложенному, вклад дают только те диаграммы, где этот глюон не излучает. Очевидно, они могут быть получены вставками  $i$ -го глюона из диаграмм с  $(N-1)$  глюонами, дающих вклад в области, сопоставляемой диаграмме  $D$  без  $i$ -го глюона. Рассмотрим какую-нибудь из этих диаграмм с  $N-1$  глюонами и покажем, что сумма матричных элементов диаграмм со вставками  $i$ -го глюона, приводящих к дважды логарифмическому вкладу, сводится в области  $\Gamma_D$  к произведению матричного элемента без вставок на  $g(e_i p_i) t^{a_i} / (k_i p_i)$ . Тем самым, с учетом предположения, утверждение будет доказано полностью.

Выделение множителя  $g(e_i p_i) / (k_i p_i)$  очевидно; если  $i$ -ый глюон излучается  $j$ -ой частицей, то в матричный элемент входит  $g(e_i k_j) / (k_i k_j)$ ; но вследствие великости  $\theta_{i0}$  имеем  $\frac{e_i k_j}{k_i k_j} \approx \frac{e_i k_0}{k_i k_0} = (e_i p_i) / (k_i p_i)$ . Значит, вопрос только в групповой части. Очевидно, если  $\omega_i$  больше всех других частот, то и групповая часть верна, так как работает только вставка  $i$ -го глюона на кварковую линию рядом с вершиной рождения  $q\bar{q}$ . Будем теперь уменьшать  $\omega_i$  и следить, что происходит. Пусть на рассматриваемой диаграмме с  $N-1$  глюонами нижней ветвью является какая-то  $j$ -я (см. рис. 3, где нужно заменить  $i$  на  $0$ ). До тех пор, пока выполняется условие  $\omega_i \theta_{i0}^2 \gg \omega_j \theta_{j0}^2$ , работает только диаграмма со вставкой  $i$ -го глюона перед  $j$ -ой ветвью. Однако как только становится  $\omega_i \theta_{i0}^2 < \omega_j \theta_{j0}^2$  (область  $\omega_i \theta_{i0}^2 \sim \omega_j \theta_{j0}^2$  не дает вкла-

да), но еще продолжают выполняться  $\omega_i \theta_{i0}^2 \gg \omega_n \theta_{n0}^2$ ,  $\omega_i \theta_{i0}^2 \gg \omega_j \theta_{j0}^2$ , эта диаграмма перестает работать, а работают теперь две диаграммы: со вставкой  $i$ -го глюона на кварковой линии между  $j$ -ой и  $n$ -ой ветвями и со вставкой на  $j$ -ой линии перед  $z$ -ой ветвью. Легко, однако, видеть, используя коммутационные соотношения между  $t^a$ , что суммарный их вклад дает прежнее выражение (которое раньше давала одна диаграмма). При дальнейшем уменьшении  $\omega_i$  происходит "раздвоение" каждой из этих двух диаграмм (первой - при переходе через рубеж  $\omega_i \theta_{i0}^2 \sim \omega_n \theta_{n0}^2$ , второй - через  $\omega_i \theta_{i0}^2 \sim \omega_j \theta_{j0}^2$ ), но, очевидно, суммарный вклад всех работающих диаграмм дает исходное выражение, так как он не меняется при каждом "раздвоении". Тем самым утверждение доказано полностью, и, значит, завершено доказательство рецепта, приведенного в пункте I.

#### 4. Учет виртуальных поправок, инклюзивные сечения и множественность

Как утверждалось в [9], учет виртуальных поправок приводит к умножению (24) на дважды логарифмический формфактор

$$F = \exp \left[ -\frac{1}{2} W_{p-}^F(1) - \frac{1}{2} W_{p+}^F(1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N W_{k_i}^V(\theta_i^2) \right] \quad (42)$$

где  $\theta_i$  - угол между импульсами глюона  $i$  и излучившей его частицы,  $W_p^{F(V)}(\theta^2)$  - борновская вероятность излучения глюона фермионом (глюоном) с импульсом  $p$  в конус с углом раствора  $\theta$ :

$$W_p^{F(V)}(\theta^2) = \frac{g^2}{(2\pi)^3} C_{F(V)} \int \frac{d^3K}{2\omega} \frac{\bar{p}^2 \theta_k^2}{(Kp)^2} \quad (43)$$

Здесь  $\theta_k$  - угол между  $\bar{p}$  и  $\bar{K}$ , интегрирование по  $\theta_k$  ведется до  $\theta$ , по  $\omega$  до  $p^0$ ,  $C_F(C_V)$  - значения операторов Казимира для фундаментального (присоединенного) представления; в КХД  $C_F = 4/3$ ,  $C_V = 3$ . Приведенное утверждение основывалось на расчетах в низших порядках теории возмущений и на физической интуиции. Полного доказательства этого утверждения до сих пор не получено, однако автор считает, что это связано только с техническими трудностями, которые он надеется преодолеть. Отчасти поэтому, а также из-за ограниченности места, не будем здесь рассматривать все имеющиеся расчеты и перечислять все аргументы, под-

тверждающие (42), а посвятим остаток статьи некоторым следствиям и обобщениям формул (24), (42).

Как следует из этих формул, в области  $\Gamma_D$ , сопоставляемой древесной диаграмме  $D$  по правилам (21)-(23), сечение рождения  $N$  глюонов имеет вид

$$d\sigma = d\sigma_0 F^2 \prod_{i=1}^N \frac{g^2}{(2\pi)^3} C_i \frac{d^3k_i}{2\omega_i} \frac{\bar{p}_i^2 \theta_{k_i}^2}{(k_i p_i)^2} \quad (44)$$

где  $d\sigma_0$  - сечение без излучения,  $\theta_{k_i}$  - угол между  $\bar{K}_i$  и  $\bar{P}_i$ ,  $P_i$  - импульс частицы, излучившей  $i$ -ый глюон (то есть той из конечных частиц, с линии которой на диаграмме  $D$  начинается  $i$ -я линия),  $C_i = C_F$  или  $C_V$  в зависимости от того, с кварковой или с глюонной линии этот глюон излучается. Чтобы получить полное сечение, надо проинтегрировать (44) по области  $\Gamma_D$  и просуммировать по всем таким областям (то есть по всем диаграммам без четырехглюонных вершин). Подчеркнем, что это утверждение, как и выражения (42)-(44), не зависят от калибровки. Желательно еще записать выражения (42)-(44) в ковариантном виде. Это легко сделать, поскольку  $|\bar{P}_i| \simeq P_i^0 = P_i q / \sqrt{q^2}$ ,  $\theta_{k_i}^2 \simeq \frac{2(k_i p_i) q^2}{(k_i q)(p_i q)}$ , где  $q$  - импульс виртуального фотона). Выполняя еще суммирование по числу глюонов от 0 до  $\infty$ , после несложной комбинаторики получим сечение рождения  $q\bar{q}$  пары в сопровождении произвольного числа глюонов

$$\sigma = \sigma_0 \phi(p_-) \phi(p_+) \quad (45)$$

$$\phi(p) = \exp \left[ -W_p^F(1) + W_p^V(1) \right]$$

где величина  $W_p^F(\theta^2)$ , которую мы будем называть вероятностью рождения кварком с импульсом  $p$  глюонной струи в конус с углом раствора  $\theta$  выражается через аналогичную вероятность  $W_K^V$  рождения струи глюоном

$$W_p^F(\theta^2) = \frac{g^2}{(2\pi)^3} C_F \int \frac{d^3K}{\omega} \frac{p q}{(Kp)(Kq)} \mathcal{V} \left( 1 - \frac{Kq}{p q} \right) \mathcal{V}(\theta^2) \quad (46)$$

$$- \frac{2(Kp)q^2}{(Kq)(pq)} \exp \left[ -W_K^V \left( \frac{2(Kp)q^2}{(Kq)(pq)} \right) + W_K^V \left( \frac{2(Kp)q^2}{(Kq)(pq)} \right) \right]$$

Здесь  $\mathcal{V}(x)$  — обычная ступенчатая функция. В свою очередь,  $W_p^V$  удовлетворяет тому же уравнению (46) с заменой  $F \rightarrow V$ . Решение этих уравнений очевидно:  $W_p^{F(V)}(\theta^2) = w_p^{F(V)}(\theta^2)$ , то есть вероятность рождения глюонной струи равна борновской вероятности излучения глюона. Поэтому в (45)  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0$ ; как и должно быть, все дважды логарифмы сокращаются. Однако формулами (45), (46) можно пользоваться не только для проверки этого факта. Они представляют некую условную запись всех дифференциальных сечений: если разложить их в ряд по  $g^2$ , не разлагая при этом виртуальных поправок, то есть считая  $w^F, w^V$  величинами нулевого порядка по  $g^2$ , и убрать знаки интегралов, то  $N$ -ый член разложения  $\bar{\sigma}$  дает нам дифференциальное сечение рождения  $q\bar{q}$  пары и  $N$  глюонов со всеми виртуальными поправками. Простейший пример использования этих формул — вычисление инклюзивного сечения  $d\bar{\sigma}/dx$ , где  $x$  — доля энергии, уносимая глюоном,  $x = \frac{2kq}{q^2}$ . С учетом того, что  $W_p^{F,V} = w_p^{F,V}$ , имеем

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dx} = \bar{\sigma}_0 \left( \frac{d\phi(p)}{dx} + \frac{d\phi(p_+)}{dx} \right) \quad (47)$$

$$\frac{d\phi(p)}{dx} = \frac{dW_p^F(1)}{dx} = \frac{C_F}{C_V} \frac{dW_p^V(1)}{dx}$$

$$\frac{dW_p^V(\theta^2)}{dx} = \frac{g^2}{(2\pi)^3} C_V \int \frac{d^3k}{\omega} \frac{pq}{(kq)(kp)} \mathcal{V}(1 - \frac{kq}{pq}) \mathcal{V}(\theta^2 - \frac{2(kp)q^2}{(kq)(pq)}) \left[ \delta\left(\frac{2kq}{q^2} - x\right) + \frac{dW_k^V\left(\frac{2(kp)q^2}{(kq)(pq)}\right)}{dx} \right]$$

Последнее уравнение легко решается итерациями. Однако здесь мы сталкиваемся с необходимостью регуляризации, так как в уравнении, естественно, содержатся так называемые коллинеарные, или массовые, сингулярности. Регуляризацию можно делать по-разному. Можно считать, что у глюонов нулевая масса, а рассматриваемый глюон находится не на массовой поверхности, так что квадрат его 4-импульса равен  $Q_0^2 > 0$ , а можно считать, что глюоны имеют

ненулевую массу  $Q_0$ . (Без нарушения перенормируемости теории масса глюона должна вводиться с помощью механизма Хиггса-Киббла [12], однако, в дважды логарифмическом приближении это эквивалентно введению массы "руками"). Оба способа приводят к одному ответу

$$\frac{1}{\bar{\sigma}_0} \frac{d\bar{\sigma}}{dx} = \frac{2C_F}{C_V} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{g^2}{4\pi^2} C_V \right)^n \frac{1}{n!} \left( \ln \frac{q^2 x^2}{Q_0^2} \right)^n \frac{1}{(n-1)!} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^{n-1} \quad (48)$$

$$= \frac{2C_F}{C_V} \int \frac{ds C_V}{\pi} \frac{\ln\left(\frac{q^2 x^2}{Q_0^2}\right)}{\ln(1/x)} I_1 \left( \sqrt{\frac{4ds C_V}{\pi} \ln \frac{q^2 x^2}{Q_0^2} \ln \frac{1}{x}} \right)$$

где  $ds = g^2/4\pi$ ,  $I_1$  — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Интегрируя (48) по  $x$  от  $\sqrt{Q_0^2/q^2}$  до 1, получим множественность глюонов, вычисленную в дважды логарифмическом приближении

$$\langle n_g \rangle = 2 \frac{C_F}{C_V} \left[ \text{ch} \left( \sqrt{\frac{ds C_V}{2\pi}} \ln \frac{q^2}{Q_0^2} \right) - 1 \right] \quad (49)$$

Аналогичным образом из (45), (46) могут быть получены более сложные инклюзивные сечения. Но это уже предмет для специального разговора.

Укажем еще очевидные обобщения формул (45). Очевидно, они остаются справедливыми для рождения  $q\bar{q}$  пары не электромагнитным, а каким-либо другим синглетным током. Если же таким током рождается не кварк-антикварковая, а глюонная пара, то нужно лишь в (45) заменить  $F$  на  $V$ . Наконец, мы можем рассматривать сечение рождения нескольких "жестких" частиц, таких, что энергии их (в системе  $\bar{q} = 0$ )  $\sim \sqrt{q^2}$ , а углы между их импульсами  $\sim 1$ . Тогда в (45) стоит  $\prod_i d\phi(p_i)$ , где  $p_i$  — импульс "жесткой" частицы, в произведение включены все такие частицы, а

ж) Следует отметить, что формула (49) присутствовала в первоначальном варианте работы [9]. Однако в связи с замечанием рецензента о том, что множественность была ранее получена в других работах, она была выкинута по вине автора, не удосужившегося разобраться с этими работами (см. о них ниже).

для каждой частицы  $\phi$  дается формулой (45) со значком  $F$  или  $V$ , в зависимости от того, кварки это или глюоны. Аналогичные формулы могут быть написаны и для других реакций (процесс Дрелля-Яна, глубоко неупругое рассеяние и т.д.).

### 5. Заключение

Из проведенного анализа вытекает простая качественная картина процесса  $e^+e^-$  аннигиляции в  $q\bar{q}$  и глюоны в дважды логарифмическом приближении. Если мы не интересуемся деталями, процесс выглядит как образование виртуальным фотоном двух струй с вероятностью, равной борновской вероятности рождения  $q\bar{q}$  пары. При более внимательном рассмотрении какой-либо из этих струй окажется, что она в свою очередь состоит из неперекрывающихся глюонных струй, испущенных кварком. Угловой размер каждой из струй мал по сравнению с углом между этой струей и кварком, причем эти струи испускаются кварком независимо с вероятностью, равной борновской вероятности рождения кварком лидирующего глюона (то есть глюона, имеющего в струе наибольший импульс), а вероятность какой-либо определенной конфигурации струй подавлена фактором  $\exp[-w_F^F(1)]$ . Если мы захотим еще и разобраться в структуре глюонной струи с лидирующим глюоном, имеющим импульс  $K$ , то в свою очередь увидим, что эта струя состоит из независимых струй, испущенных глюоном с импульсом  $K$ ; вероятность определенной конфигурации этих струй подавлена фактором  $\exp[-w_K^V(\theta^2)]$ , где  $\theta$  — угол между  $K$  и  $\bar{p}$ , и т.д. Следует отметить, что при анализе процесса можно использовать "партоновый" язык (см. [13]), несмотря на отсутствие калибровки, в которой нет интерференции вкладов разных диаграмм.

Изложенный подход к проблеме дважды логарифмов в КХД является эксклюзивным; он требует знания всех амплитуд и областей дважды логарифмичности для сечения. Более распространенным является инклюзивный подход, при котором не требуется столь детальных знаний, как при эксклюзивном, и можно использовать сокращения между дважды логарифмами от виртуальных и реальных глюонов, не вычисляя их. Однако для того, чтобы производить эти сокращения, надо понимать, откуда набираются дважды логарифмы, то есть опять же иметь какое-то представление об эксклюзивных сечениях.

Эксклюзивный подход применялся также в работах [14], [15]. В работе [14] утверждается, что в области упорядоченных частот глюонов (см. (21)) происходит экспонентизация излучения (аналогично КЭД). На самом деле это имеет место лишь в областях, ограниченных не только условием (21), но и условиями на углы, которые сопоставляются по правилам (22), (23) диаграммам без трехглюонных вершин. Виртуальные поправки даже для этих областей в [14] не получены. Работы [15] вовсе основаны на ошибочном утверждении, что в планарной калибровке трехглюонные вершины не играют роли в дважды логарифмическом приближении.

В ряде работ (см., например, [16]) для описания дважды логарифмических ситуаций используется метод когерентных состояний, развитый для КХД в работах [17]. Заметим, однако, что сам метод не имеет обоснования и четкой формулировки, а возможности его применения ограничены, так как инфракрасные и коллинеарные сингулярности прямо связаны с дважды логарифмами только в задачах с одним параметром.

Следует отметить, что неправильность эксклюзивного описания не влечет за собой с неизбежностью ошибки в применении к различного рода инклюзивным процессам. Яркий пример тому — работа [18], авторы которой, считая, что глюоны, подобно фотонам в КЭД, испускаются независимо, получили правильный ответ для распределения по перпендикулярному импульсу в процессе Дрелля-Яна, поскольку для этого распределения несущественны детали глюонных струй, испускаемых кварком. Однако в ряде случаев неправильные представления об эксклюзивных процессах приводят к ошибкам и в инклюзивном описании. В первую очередь это относится к спектрам глюонов в области малых частот. Как уже обсуждалось в конце второго раздела, при их вычислении нельзя пользоваться идеологией ГЛП и считать, что главный вклад идет от плоских диаграмм — при любом выборе калибровки. Поэтому некоторые результаты работ [19]–[22] не верны. В частности, результаты для множественности отличаются от (49) множителем  $\sqrt{2}$  в аргументе гиперболического косинуса. (Отметим, что в [19] не верна и формула для множественности тяжелых кварков в  $\alpha_s^2$  порядке). Согласующееся с (49) выражение для множественности получено недавно Миллером [11] на основе расчетов, сделанных им в трехпетлевом приближении для рождения глюонов синглетным током. Выражение работы

[II] для инклюзивного по частоте глюона сечения также согласуется с нашим, как и тот факт, что вклад дают нелинейные диаграммы.

В данной работе не учитывалась зависимость константы связи от точки нормировки, поскольку это выходит за рамки дважды логарифмического приближения. Конечно, такой учет необходим; однако, прежде чем выяснить, какой виртуальностью определяется константа связи, нужно разобраться с дважды логарифмами, чему и посвящена работа.

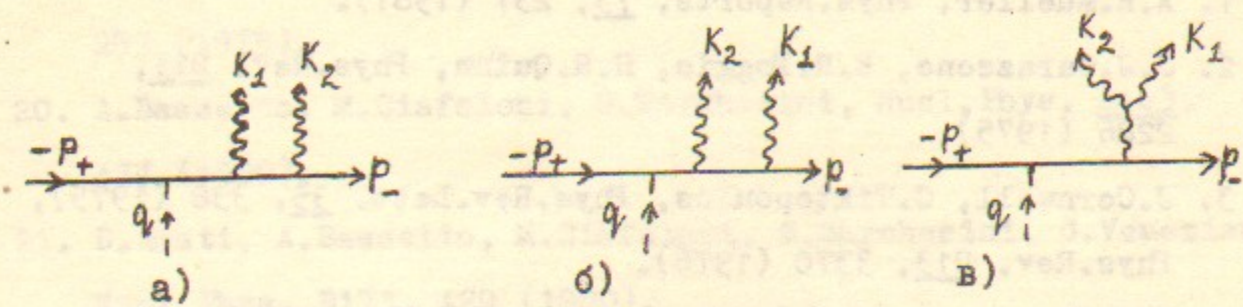


Рис. I

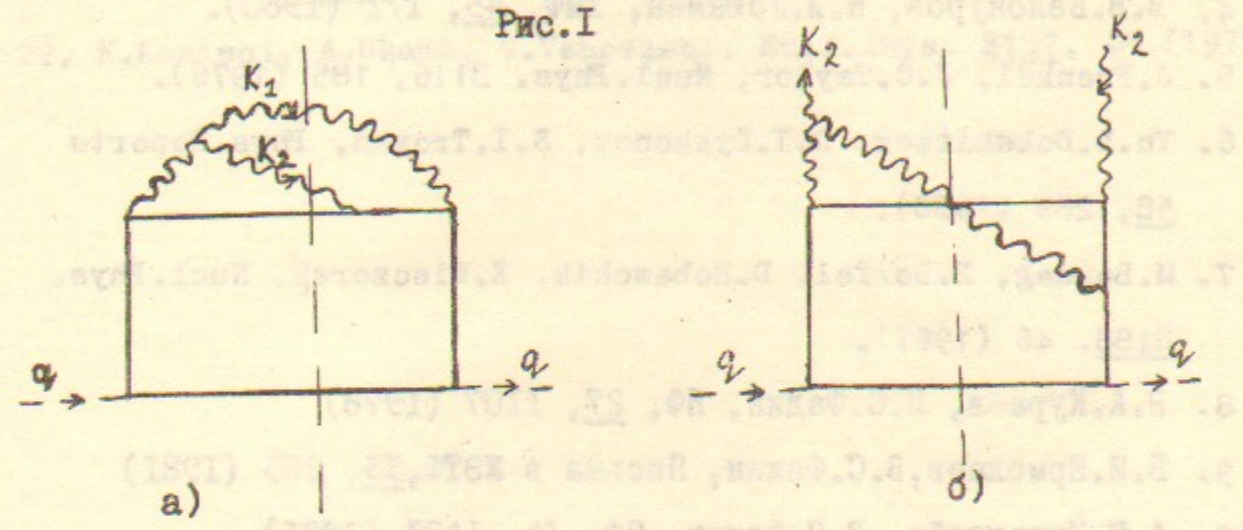


Рис. 2

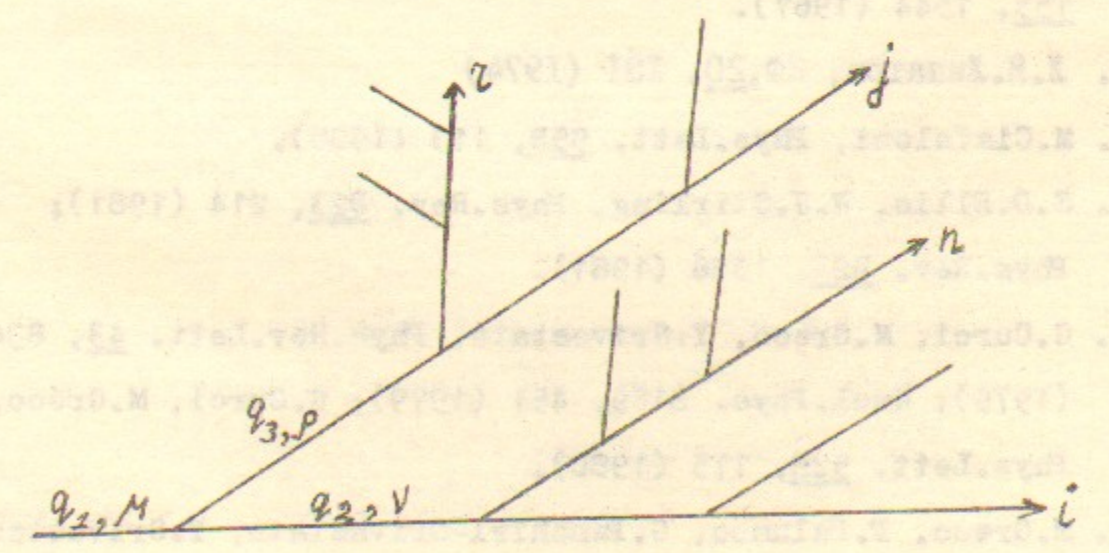


Рис. 3

References

1. A.H.Mueller, Phys.Reports, 73, 237 (1981).
2. J.J.Carazzone, E.R.Poggio, H.R.Quinn, Phys.Rev. D11, 2286 (1975).
3. J.Cornwall, G.Tiktopoulos, Phys.Rev.Lett. 35, 338 (1975), Phys.Rev. D13, 3370 (1976).
4. В.В.Белокуров, Н.И.Уссукина, ТМФ, 45, 171 (1980).
5. J.Frenkel, J.C.Taylor, Nucl.Phys. B116, 185 (1976).
6. Yu.L.Dokshitzer, D.I.Dyakonov, S.I.Troyan, Phys.Reports 58, 269 (1980).
7. M.Bordag, B.Dörfel, D.Robaschik, E.Wieczorek, Nucl.Phys. B188, 46 (1981).
8. Э.А.Кураев, В.С.Фадин, ЯФ, 27, 1107 (1978)
9. Б.И.Ермолаев, В.С.Фадин, Письма в ЖЭТФ, 33, 285 (1981)
10. А.И.Мильштейн, В.С.Фадин, ЯФ, 34, 1403 (1981)
11. A.H.Mueller, Phys.Lett. 104B, 161 (1981).
12. P.W.Higgs, Phys.Rev. 145, 1156 (1966), T.W.Kibble, Phys.Rev. 155, 1544 (1967).
13. Л.Н.Липатов, ЯФ, 20, 181 (1974)
14. M.Ciafaloni, Phys.Lett. 95B, 113 (1980).
15. S.D.Ellis, W.J.Stirling, Phys.Rev. D23, 214 (1981); Phys.Rev. D24, 1386 (1981).
16. G.Curci, M.Greco, Y.Srivastata, Phys.Rev.Lett. 43, 834 (1979); Nucl.Phys. B159, 451 (1979); G.Curci, M.Greco, Phys.Lett. 92B, 175 (1980).
17. M.Greco, F.Palumbo, G.Panchiri-Srivastata, Y.Srivastata, Phys.Lett. 77B, 282 (1978); G.Curci, M.Greco, Phys.Lett. 79B, 406 (1978).
18. G.Parisi, R.Petronzio, Nucl.Phys. B154, 425 (1979).
19. W.Furmanski, R.Petronzio, S.Pokorski, Nucl.Phys. B155, 253 (1979).
20. A.Bassetto, M.Ciafaloni, G.Marchesini, Nucl.Phys. B163, 477 (1980).
21. D.Amati, A.Bassetto, M.Ciafaloni, G.Marchesini, G.Veneziano, Nucl.Phys. B173, 429 (1980).
22. K.Konishi, A.Ukawa, G.Veneziano, Nucl.Phys. B157, 45 (1979).



Работа поступила - 14 января 1982г.

Ответственный за выпуск - С.Г. Попов

Подписано к печати 3.П-1982г. МН 03078

Усл. 1,9 печ.л., 1,5 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно

Заказ № 22.

Отпечатано на ротапинтере ИЯФ СО АН СССР