31

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Б.Г.Конопельченко, И.Б.Формусатик

# о структуре нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых с помощью квадратичного $Z_2$ градуированного пучка

ПРЕПРИНТ 81 - 117

Новосибирск

О СТРУКТУРЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТИЧНОГО $Z_2$-ГРАДУИРОВАННОГО ПУЧКА

Б.Г.Конопельченко, И.Б.Формусатик

АННОТАЦИЯ

Найден общий вид нелинейных эволюционных уравнений и Бэклунд-преобразований, связанных с квадратичной по спектральному параметру матричной спектральной задачей произвольного порядка с $Z_2$-градуировкой. Обсуждается гамильтонова структура эволюционных уравнений рассматриваемого класса. Указано бесконечное семейство скобок Пуассона, соответствующих этим уравнениям. Рассмотрены релятивистски-инвариантные уравнения. Найден явный вид элементарных и солитонных Бэклунд-преобразований. Получен нелинейный принцип суперпозиции, позволяющий чисто алгебраически вычислить бесконечное семейство решений рассматриваемых уравнений.

ON THE STRUCTURE OF NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS INTEGRABLE BY $Z_2$ GRADED QUADRATIC BUNDLE

B.G.Konopelchenko, I.B.Formusatic

Institute of Nuclear Physics,
Novosibirsk-90, 630090, USSR

Abstract

The general form of nonlinear evolution equations and their Backlund transformations connected with the quadratic on spectral parameter, $Z_2$ graded arbitrary order linear matrix spectral problem is found. Hamiltonian structure of the integrable equations is discussed. The infinite family of Poisson brackets which corresponds to the class of the equations under consideration is given. Relativistic-invariant integrable equations are considered. The explicit form of elementary and soliton Backlund transformations are found. Nonlinear superposition principle is obtained. It allows to calculate the infinite family of the solutions of the integrable equations by pure algebraic operations.

# О СТРУКТУРЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТИЧНОГО $Z_2$-ГРАДУИРОВАННОГО ПУЧКА

Б.Г.Конопельченко, И.Б.Формусатик

## I. Введение

Метод обратной задачи рассеяния (ОЗР) позволяет исследовать большое число нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [I,2]). Одной из основных проблем метода ОЗР является описание класса уравнений, к которым он применим. Очень удобное и наглядное описание уравнений, интегрируемых с помощью линейного пучка второго порядка было дано AKNS в работе [3]. Впоследствии метод, предложенный в работе [3] (AKNS-метод), был обобщен на линейный пучок произвольной матричной размерности [4-9], на квадратичный пучок второго порядка [IO] и произвольный полиномиальный пучок [II]. Был также рассмотрен линейный пучок с $Z_2$-градуировкой [I2]. В рамках AKNS-метода удается построить бесконечные группы Бэклунд-преобразований и исследовать гамильтонову структуру сразу всего класса интегрируемых уравнений. Это является важным преимуществом AKNS-метода.

В настоящей работе мы рассмотрим квадратичный пучок

$$\frac{1}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = (\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda)A\Psi + (\alpha\lambda+\beta)P\Psi, \quad (I.I)$$

где $\lambda$ - спектральный параметр, $\alpha$ и $\beta$ - произвольные константы и

$$A = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & -I_M \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix} \quad (I.2)$$

где $I_N$ и $I_M$ - единичные квадратные матрицы порядка $N$ и $M$, $Q$ - прямоугольная матрица $N\times M$, а $R$ - прямоугольная матрица $M\times N$. Матричные элементы потенциала $P(x,t)$

являются элементами бесконечномерной коммутативной $Z_2$-градуированной алгебры (супералгебры) и $P(x,t) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$

Мы найдем общий вид нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых с помощью пучка (I.I), и построим бесконечномерную группу Бэклунд-преобразований для этих уравнений. Мы покажем, что все уравнения, интегрируемые с помощью (I.I), являются гамильтоновыми и вычислим соответствующее этим уравнениям бесконечное семейство скобок Пуассона.

В работе рассмотрены также релятивистски-инвариантные уравнения, интегрируемые с помощью пучка (I.I). Среди этих релятивистски-инвариантных уравнений имеются как новые, так и уравнения эквивалентные известным уравнениям. В частности, интегрируемое уравнение вида (3.9) при $N=p=2$, $M=q=1$, $\Omega(L^+) = \frac{1}{4}(L^+)^{-1}$ и некотором специальном виде $P(x,t)$ эквивалентно уравнениям массивной модели Тирринга с антикоммутирующими полями.

Мы обсудим структуру группы Бэклунд-преобразований. Введем некоторые специальные Бэклунд-преобразования - так называемые элементарные Бэклунд-преобразования. Произвольное дискретное Бэклунд-преобразование является произведением элементарных Бэклунд-преобразований. Мы получим нелинейный принцип суперпозиции, позволяющий чисто алгебраически находить бесконечное семейство решений рассматриваемых интегрируемых уравнений. В работе также обсуждается калибровочная эквивалентность пучка (I.I) линейному и некоторым другим пучкам.

Отметим, что эволюционные уравнения, интегрируемые с помощью (I.I), содержат в общем случае как классические бозонные поля, так и классические антикоммутирующие фермионные поля.

План статьи следующий. Во втором разделе выведены некоторые важные в дальнейшем соотношения и вычислены рекурсионные операторы. Общий вид интегрируемых уравнений и Бэклунд-преобразований найден в третьем разделе. В четвертом разделе обсуждается гамильтонова структура интегрируемых уравнений. В пятом разделе рассматриваются релятивистски-инвариантные уравнения. Калибровочная эквивалентность пучка (I.I) линейному пучку продемонстрирована в шестом разделе. В следующем седьмом разделе обсуждается структура группы Бэклунд-преобразований и вычислены элементарные Бэклунд-преобразования. Нелинейный принцип суперпозиции получен в восьмом разделе. В заключении рассмотрены некоторые



редукции общего пучка (I.I).

## II. Некоторые предварительные соотношения и рекурсионные операторы.

2.I. Приведем здесь для удобства некоторые сведения об $Z_2$-градуированных алгебрах (см., например, [I3-I6] ). Алгебра $g$ называется $Z_2$-градуированной алгеброй (супералгеброй), если она допускает разложение в прямую сумму $g = g_0 \oplus g_1$ четной ($g_0$) и нечетной ($g_1$) компонент. Однородным элементам $b \in g$ сопоставляется число $\delta(b)$ (четность), которое принимает два значения: 0 и I. Элемент $b$ называется четным, если $\delta(b) = 0$ и нечетным, если $\delta(b) = 1$. Компонента $g_0$ состоит из четных элементов, а компонента $g_1$ - из нечетных элементов $g$. $Z_2$-градуированная алгебра называется коммутативной, если для любых $a, b \in g$ выполняется соотношение

$$[a,b] \stackrel{def}{=} ab - (-1)^{\delta(a)\delta(b)} ba = 0.$$

Мы будем предполагать, что элементы потенциала $P(x,t)$ принадлежат бесконечномерной коммутативной $Z_2$-градуированной алгебре, т.е.

$$P_{ik}(x,t) P_{en}(x',t') - (-1)^{\delta(P_{ik})\delta(P_{en})} P_{en}(x',t') P_{ik}(x,t) = 0$$
$$(i,k,\ell,n = 1,\ldots,N+M)$$

Тем самым, четные элементы $P(x,t)$ являются обычными функциями (классическими бозонными полями), а нечетные элементы $P(x,t)$ - антикоммутирующими переменными (классическими антикоммутирующими фермионными полями).

Следуя [I4-I6] , мы будем записывать матрицы $\Phi$ порядка $N+M$ с элементами из $Z_2$-градуированной коммутативной алгебры в следующей форме $\Phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , где $\alpha$ - квадратная $p \times p$ матрица, $\delta$ - квадратная $q \times q$ -матрица, $\beta$ - прямоугольная $p \times q$ матрица и $\gamma$ - прямоугольная $q \times p$ - матрица $(p+q = N+M)$. Матрицы $\alpha$ и $\delta$ содержат четные элементы, а матрицы $\beta$ и $\gamma$ - нечетные элементы матрицы $\Phi$. Пространство таких матриц обозначается $Mat(p,q)$. Алгебра $Mat(p,q)$ изоморфна супералгебре $gl(p,q)$ [I4-I6] . Четность $\delta(\Phi_{ik})$ элемента $\Phi_{ik}$ матрицы $\Phi \in Mat(p,q)$ может быть представлена в виде: $\delta(\Phi_{ik}) = \delta(i) + \delta(k) \pmod 2$ где $\delta(i) = 0$ при $1 \le i \le p$, $\delta(i) = 1$ при $1+p \le i \le N+M$.

Элементы алгебры $Mat(p,q)$ имеют многие свойства, аналогичные свойствам обычных матриц (см., например, [I4-I6]). В частности, аналог матричного следа называется суперследом и определяется формулой $str\,\Phi \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{M+N}(-1)^{\delta(i)}\Phi_{ii}$. Для суперследа имеем $str(\Phi\Phi')=(-1)^{\delta(\Phi)\delta(\Phi')}str(\Phi'\Phi)$, где $\delta(\Phi)$ – четность суперматрицы $\Phi$. Для суперматриц, встречающихся в настоящей работе, $\delta(\Phi)=0$.

Итак, мы будем предполагать, что потенциал $P(x,t)\in Mat(p,q)$ $(p+q=M+N)$. В общем случае прямоугольные матрицы $Q$ и $R$ имеют как четные, так и нечетные элементы. В частном случае $p=N$, $q=M$ матрицы $Q$ и $R$ состоят только из антикоммутирующих переменных.

Далее пусть $\Phi$ – произвольная квадратная матрица порядка $N+M$. Представим ее в виде $\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_1 & \Phi_2\\ \Phi_3 & \Phi_4\end{pmatrix}$, где $\Phi_1$ и $\Phi_4$ – квадратные матрицы соответственно порядка $N$ и $M$, а $\Phi_2$ и $\Phi_3$ – прямоугольные матрицы размеров $N\times M$ и $M\times N$. Мы будем обозначать $\Phi_0 \overset{def}{=} \begin{pmatrix}\Phi_1 & 0\\ 0 & \Phi_4\end{pmatrix}$ и $\Phi_F=\begin{pmatrix}0 & \Phi_2\\ \Phi_3 & 0\end{pmatrix}$. Отметим, что $(\Phi_0\Psi_0)_F=0$, $(\Phi_0\Psi_F)_F=\Phi_0\Psi_F$, $(\Phi_F\Psi_F)_F=0$. Эти свойства разложения $\Phi=\Phi_0+\Phi_F$ часто будут использоваться в дальнейшем. Разложение $\Phi=\Phi_0+\Phi_F$ – это не что иное, как разложение Фиттинга матричной супералгебры $Mat(p,q)$ относительно $A$ (при $q=0$ см., например, [8]). Для суперматрицы потенциала $P(x,t)=P_F(x,t)$.

Перейдем теперь к построению преобразований и уравнений, связанных с пучком (I.I). При $q=0$ пучок (I.I) рассматривался (кратко) в работе [II], а линейный пучок с $Z_2$-градуировкой рассматривался в [I2]. Поскольку основные этапы наших построений те же, что в работах [6,8,9,II,I2], мы будем опускать большинство промежуточных вычислений.

Введем фундаментальные матрицы решения (полагая $P(x,t)\underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow}0$) $F^+(x,t,\lambda)$ и $F^-(x,t,\lambda)$:

$$F^+(x,t,\lambda)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}e^{i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda)x} \qquad F^-(x,t,\lambda)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}e^{i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda)x}$$

и матрицу рассеяния $S(\lambda,t)$:

$$F^+(x,t,\lambda)=F^-(x,t,\lambda)\,S(\lambda,t).$$



Матрицы $F^+$, $F^-$ и $S$ имеют одинаковую $Z_2$ структуру, т.е. $F^+, F^-, S\in Mat(p,q)$.

Пусть $P$ и $P'$ – два различных потенциала и $F^+, (F^+)'$ соответствующие решения задачи (I.I). Можно показать, что имеет место следующее соотношение

$$S'(\lambda,t)-S(\lambda,t)=-i(\alpha\lambda+\beta)\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,(F^+(x,t))^{-1}(P'(x,t)-P(x,t))(F^+(x,t))'. \quad (2.I)$$

В силу (I.I) имеется соответствие между преобразованиями $P\to P'$ и преобразованиями $S\to S'$. Мы будем рассматривать преобразования матрицы рассеяния следующего вида

$$S(\lambda,t)\to S'(\lambda,t)=B^{-1}(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)\,S(\lambda,t)\,C(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t), \quad (2.2)$$

где $B(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)$ и $C(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)$ произвольные суперматрицы, коммутирующие с $A$, т.е. $B=B_0$, $C=C_0$.

Комбинируя соотношение (2.I) и (2.2) и учитывая тождество

$$\left((S(\lambda,t))^{-1}(1-B(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t))S'(\lambda,t)\right)_F=$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}dx\frac{\partial}{\partial x}\left((F^+(x,t,\lambda))^{-1}(1-B(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t))(F^+(x,t,\lambda))'\right)_F=$$

$$=(\alpha\lambda+\beta)\int_{-\infty}^{+\infty}dx\left((F^+(x,t,\lambda))^{-1}\left(P(x,t)(1-B(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t))-(1-B(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t))P'(x,t)\right)(F^+(x,t,\lambda))'\right)_F$$

получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\left((F^+(x,t))^{-1}\left(B(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)P'(x,t)-P(x,t)B(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)\right)(F^+(x,t))'\right)_F=0. \quad (2.3)$$

Представим матрицу $B(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)$ в виде

$$B(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)=\sum_{i=1}^{N^2+M^2}B_i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)\,H_i,$$

где $B_i$ – некоторые функции, а матрицы $H_i$ $(i=1,\dots,N^2+M^2)$ образуют базис подалгебры матриц, коммутирующих с матрицей $A$.

Расписывая матричное равенство (2.3) по компонентам, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, str \Big[ \sum_{i=1}^{N^2+M^2} (H_i P'(x,t) - P(x,t) H_i) B_i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda, t) \overset{++}{\tilde{\Phi}}{}^{F(in)}_{F}(x,t,\lambda) \Big] = 0 \quad (2.4)$$

где $\left(\overset{++}{\tilde{\Phi}}{}^{(in)}(x,t,\lambda)\right)_{\ell k} = (F^+(x,t,\lambda))'_{\ell n} (F^+(x,t,\lambda))^{-1}_{ik}$,

$$\delta(i) = \delta(n) \qquad (i,k,\ell,n = 1,\dots, N+M).$$

2.2. Рекурсионные операторы. Используя уравнение (I.I) и соответствующее уравнение для $\psi^{-1}$, получаем следующее уравнение для $\tilde{\Phi}$

$$\frac{\partial \Phi(x,t,\lambda)}{\partial x} = i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda)[A, \Phi(x,t,\lambda)] + \quad (2.5)$$

$$+ i(\alpha\lambda+\beta)(P'(x,t)\Phi(x,t,\lambda) - \Phi(x,t,\lambda)P(x,t)).$$

Выражая величину $\Phi_0$ через $\Phi_F$ и учитывая, что $\overset{++}{\tilde{\Phi}}{}^{F}_{0}(x=+\infty,t,\lambda) = 0$ и $[A, \Phi_F] = 2A\Phi_F$, получаем $(\chi \overset{def}{=} \overset{++}{\tilde{\Phi}}{}^{F}_{F})$

$$A\frac{\partial \chi}{\partial x} = 2i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda)(1-i\alpha\mathcal{J})\chi + 2\beta^2\mathcal{J}\chi, \quad (2.6)$$

где $\mathcal{J}\chi \overset{def}{=} \frac{1}{2} AP'(x)\int_x^{+\infty} dy\,(P'(y)\chi(y) - \chi(y)P(y))_0 -$

$$- \frac{1}{2} A \int_x^{+\infty} dy\,(P'(y)\chi(y) - \chi(y)P(y))_0 \cdot P(x).$$

Следовательно

$$\Lambda\chi(x,t,\lambda) = (\alpha\lambda^2+2\beta\lambda)\chi(x,t,\lambda), \quad (2.7)$$

где

$$\Lambda = (1-i\alpha\mathcal{J})^{-1}\Big(-\frac{i}{2}A\frac{\partial}{\partial x} + i\beta^2\mathcal{J}\Big) =$$



$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} (i\alpha)^\ell \mathcal{J}^\ell \Big(-\frac{i}{2}A\frac{\partial}{\partial x} + i\beta^2\mathcal{J}\Big).$$

В силу (2.7) для любой функции $B(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda, t)$, целой по первому аргументу, имеем

$$B_i(\Lambda, t)\chi(\lambda) = B_i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda, t)\chi(\lambda) \quad (2.8)$$

Нам также потребуется оператор $\Lambda^+$, сопряженный оператору $\Lambda$ относительно билинейной формы $\langle \Phi, \psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, str\,(\Phi_F(x)\psi_F(x))$. Он равен

$$\Lambda^+ = \Big(-\frac{i}{2}A\frac{\partial}{\partial x} + i\beta^2\mathcal{J}^+\Big)(1-i\alpha\mathcal{J})^{-1} =$$

$$= \Big(-\frac{i}{2}A\frac{\partial}{\partial x} + i\beta^2\mathcal{J}^+\Big)\sum_{\ell=0}^{\infty}(i\alpha)^\ell(\mathcal{J}^+)^\ell \quad (2.9)$$

где $\mathcal{J}^+\chi = -\frac{1}{2}P(x)\int_{-\infty}^{x} dy\,(P(y)A\chi(y) - A\chi(y)P'(y))_0 +$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} dy\,(P(y)A\chi(y) - A\chi(y)P'(y))_0 \cdot P'(x).$$

Оператор $\Lambda^+$ играет фундаментальную роль в наших построениях. При $\beta = 0$ операторы $\Lambda$ и $\Lambda^+$ совпадают с соответствующими рекурсионными операторами работы [II].

## Ш. Общий вид интегрируемых уравнений и Бэклунд-преобразований

Рассмотрим уравнение (2.4) с целыми функциями $B_i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda, t)$. В силу (2.8) равенство (2.4) эквивалентно следующему

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, str \Big[ \sum_{i=1}^{N^2+M^2} (H_i P'(x,t) - P(x,t)H_i) B_i(\Lambda, t) \overset{++}{\tilde{\Phi}}{}^{F(in)}_{F} \Big] = 0 \quad (3.I)$$

$$(\delta(i) = \delta(n)).$$

Из (3.I) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, str\left[\tilde{\Phi}_F^{++F(in)}(x,t,\lambda)\left(\sum_{i=1}^{N^2+M^2} B_i(\Lambda^+,t)\left(H_i P' - P H_i\right)\right)\right] = 0 \qquad (3.2)$$

$$(\delta(i) = \delta(n)),$$

где оператор $\Lambda^+$ дается формулой (2.9). Равенство (3.2) выполняется, если

$$\sum_{i=1}^{N^2+M^2} B_i(\Lambda^+,t)\left(H_i P' - P H_i\right) = 0. \qquad (3.3)$$

Итак, мы нашли преобразования $P \to P'$, соответствующие преобразованиям матрицы рассеяния вида (2.2). Эти преобразования задаются соотношением (3.3), где $B_i(\mu,t)$ – произвольные функции, целые по первому аргументу.

Преобразования (2.2), (3.3) образуют бесконечномерную группу. Действие этой группы на многообразии потенциалов задается соотношением (3.3), а на многообразии матриц рассеяния – формулой (2.2). Группа преобразований (2.2), (3.3) играет фундаментальную роль при анализе нелинейных уравнений, связанных с пучком (I.I), и их групповых свойств.

Бесконечномерная группа преобразований (2.2), (3.3) содержит преобразования различного типа. Рассмотрим ее однопараметрическую подгруппу, заданную матрицами

$$B(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t) = C = \sum_{i=1}^{N^2+M^2} e^{-i\int\limits_t^{t'} ds\,\Omega_i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,s)} H_i \qquad (3.4)$$

где $\Omega_i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)$ – некоторые (произвольные) функции, целые по первому аргументу.

Нетрудно убедиться, что для таких $B$ и $C$ преобразование (2.2) есть сдвиг по времени

$$S(\lambda,t) \longrightarrow S'(\lambda,t) = B^{-1}(\lambda,t)\,S(\lambda,t)\,B(\lambda,t) = \qquad (3.5)$$

$$= S(\lambda,t'),$$

где $B(\lambda,t)$ дается формулой (3.4). Соответствующее преобразование потенциала есть $P(x,t) \to P'(x,t) = P(x,t')$



и задается соотношением*

$$\sum_{i=1}^{N^2+M^2} e^{-i\int\limits_t^{t'} ds\,\Omega_i(\Lambda^+,s)} \left(H_i P(x,t') - P(x,t) H_i\right) = 0, \qquad (3.6)$$

где в операторе $\Lambda^+$ необходимо положить $P'(x,t) = P(x,s)$. Соотношение (3.6) задает в неявной форме поток $Y_\Omega$ : $P(x,t) \to P(x,t')$ или, иначе говоря, эволюционную систему. Эта эволюционная система может быть также описана нелинейным эволюционным уравнением. Действительно, рассмотрим инфинитезимальный сдвиг по времени $t \to t' = t+\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$. В этом случае $P(x,t') = P(x,t) + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial t}$ и, учитывая члены первого порядка по $\varepsilon$, из (3.6) получаем

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} - i\sum_{i=1}^{N^2+M^2} \Omega_i(L^+,t)\,[H_i, P] = 0, \qquad (3.7)$$

где $L^+(P) \overset{def}{=} \Lambda^+(P'=P)$ т.е.

$$L^+ = \left(-\frac{i}{2}A\frac{\partial}{\partial x} + i\beta^2 I^+\right)\left(1 - i\alpha I^+\right)^{-1} =$$

$$= \left(-\frac{i}{2}A\frac{\partial}{\partial x} + i\beta^2 I^+\right)\sum_{e=0}^{\infty}(i\alpha)^e \left(I^+\right)^e,$$

где

$$I^+ \chi = -\frac{1}{2}\left[P(x), \int\limits_{-\infty}^{x} dy\,[P(y), A\,\chi(y)]_o\right].$$

Для матрицы рассеяния соответственно имеем

$$\frac{dS(\lambda,t)}{dt} = i\left[Y(\lambda,t), S(\lambda,t)\right], \qquad (3.8)$$

* Впервые преобразования такого типа были рассмотрены для линейного пучка второго порядка [I7]. Для пучков без $Z_2$ – градуировки см [II].

где
$$Y(\lambda,t)=\sum_{i=1}^{N^2+M^2}\Omega_i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)H_i.$$

Нелинейное эволюционное уравнение (3.7) представляет собой инфенитезимальную форму задания потока $Y_\Omega$. Соотношение (3.6), не содержащее производной $\frac{\partial P}{\partial t}$, суть "проинтегрированная" форма уравнения (3.7). Класс уравнений (3.7) характеризуется числами $N$ и $M$, рекурсионным оператором $L^+$ и $N^2+M^2$ произвольными целыми функциями $\Omega_1,\dots,\Omega_{N^2+M^2}$.

Нелинейные эволюционные уравнения (3.7) – это уравнения, интегрируемые методом ОЗР с помощью спектральной задачи (I.I). Обобщая уравнения обратной задачи рассеяния на случай $Z_2$-градуировки, можно, в принципе, найти точные решения уравнений (3.7).

Можно показать, что с пучком (I.I) связан более широкий класс уравнений, а именно уравнений вида (3.7) с произвольными функциями $\Omega_i(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)$, мероморфными по первому аргументу.

Среди уравнений (3.7) содержится подкласс уравнений с $Y=\Omega(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)A$, где $\Omega(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)$ – произвольная функция, мероморфная по $\alpha\lambda^2+2\beta\lambda$. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}-2i\Omega(L^+,t)AP=0. \qquad (3.9)$$

В частном случае $\Omega(\mu,t)=-2\mu^2$ уравнение (3.9) есть*

$$i\frac{\partial P}{\partial t}+A\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\left(2\beta^2A-i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)P^3=0. \qquad (3.10)$$

В терминах $Q$ и $R$ уравнение (3.10) имеет вид

$$i\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\left(2\beta^2-i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)QRQ=0, \qquad (3.11)$$

* Для вычислений полезны соотношения $I^+AP=0,\ (I^+)^2\frac{\partial P}{\partial x}=0.$



$$i\frac{\partial R}{\partial t}-\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}-\left(2\beta^2+i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)RQR=0,$$

где $Q$ и $R$ – прямоугольные суперматрицы размера соответственно $N\times M$ и $M\times N$.

При $p=N$, $q=M$ матрицы $Q$ и $R$ содержат только антикоммутирующие переменные и уравнения (3.9) описывают чисто фермионные классические системы. Например, при $M=q=1$, $R=Q^+=\begin{pmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_N\end{pmatrix}^+$, $\Omega(\mu)=-2\mu^2$ и вещественных $\alpha$ и $\beta$, мы имеем $N$-компонентное комбинированное нелинейное уравнение Шредингера с антикоммутирующими переменными

$$i\frac{\partial q_k}{\partial t}+\frac{\partial^2 q_k}{\partial x^2}+\left(2\beta^2-i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)q_k\sum_{n=1}^{N}q_n^+q_n=0, \qquad (3.12)$$
$$(k=1,\dots,N)$$

где
$$q_k(x,t)q_n(x,t)+q_n(x,t)q_k(x,t)=$$
$$=q_k(x,t)q_n^+(x,t)+q_n^+(x,t)q_k(x,t)=$$
$$=q_k^+(x,t)q_n^+(x,t)+q_n^+(x,t)q_k^+(x,t)=0\ (k,n=1,\dots,N).$$

При $\alpha=0$ уравнение с $Z_2$-градуировкой вида (3.11) рассматривалось в работе [I8].

Рассмотрим теперь преобразования (3.3) с матрицами $B$ и $C$, коммутирующими с матрицей $Y(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda,t)$, т.е. $B=B_{0(Y)}$, $C=C_{0(Y)}$ и $\frac{\partial B}{\partial t}=\frac{\partial C}{\partial t}=0$. Такие преобразования не меняют, как это следует из (2.2), закона (3.8) эволюции матрицы и поэтому они переводят решения некоторого уравнения вида (3.7) в решения того же самого уравнения. Тем самым, преобразования (3.3) с $B=B_{0(Y)}$ и $\frac{\partial B}{\partial t}=0$ являются авто Бэклунд-преобразованиями для уравнений (3.7). Авто Бэклунд-преобразования (3.3) образуют бесконечномерную группу.

Преобразования (3.3) с $\frac{\partial B}{\partial t}\neq 0$ образуют бесконечномерную группу обобщенных Бэклунд-преобразований: они переводят решения некоторого уравнения вида (3.7) в решения другого уравнение вида (3.7). В частности, преобразование (3.6) суть обобщенное Бэклунд-преобразование от уравнения $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ к уравнению (3.7).

Рассмотрим какое-нибудь конкретное уравнение вида (3.7), т.е. зафиксируем матрицу $Y(\lambda, t)$ и пусть $Y(\lambda, t)$ – полупростая (т.е. диагонализуемая) матрица. Нетрудно видеть, что в силу закона эволюции (3.8) проекция матрицы рассеяния на подалгебру матриц, коммутирующих с матрицей $Y(\lambda, t)$, не зависит от времени:

$$\frac{d S_{0(Y)}(\lambda)}{dt} = 0.$$

Тем самым, при каждом $\lambda$ величина $S_{0(Y)}(\lambda)$ является интегралом движения. Из этого бесконечного набора неявных интегралов движения можно извлечь, следуя стандартной процедуре [1,2,3,9], счетный набор явных и локальных интегралов движения.

## IУ. Гамильтонова структура интегрируемых уравнений.

Рассмотрим интегрируемые уравнения вида (3.9) с

$$\Omega(L^+, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(t) (L^+)^n \qquad (4.1)$$

где $\omega_n(t)$ – произвольные функции. При доказательстве гамильтоновости уравнений (3.9) важную роль играет соотношение (2.1). Из него следует, что

$$\delta S_{nn}(\lambda) = -i(-1)^{\delta(n)}(\alpha\lambda+\beta)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{tr}\left(\delta P\, \overset{-+}{\Phi}{}^{(nn)}\right), \qquad (4.2)$$
$$(n = 1, \dots, N+M)$$

где $\delta P$ – произвольная вариация потенциала, $\delta S$ – соответствующая вариация матрицы рассеяния и $(\overset{-+}{\Phi}{}^{(in)})_{k\ell} = (F^+)_{kn}(F^-)^{-1}_{i\ell}$. Из (4.2) вытекает основное вариационное равенство



$$(\alpha\lambda+\beta)\left(\overset{-+}{\Phi}{}^{(nn)}(\lambda)\right)_{\ell k} = i(-1)^{\delta(k)+\delta(n)} \frac{\vec{\delta}}{\delta P_{k\ell}(x,t)} S_{nn}(\lambda), \qquad (4.3)$$

где $\frac{\vec{\delta}}{\delta P}$ – обозначает левую вариационную производную [I3,I4]. Далее, выписывая для величины $\overset{-+}{\Phi}{}^{(nn)}$ равенство, аналогичное равенству (2.5), находим

$$\left(-\frac{i}{2} A \frac{\partial}{\partial x} + i\beta^2 I^+\right) A\, \overset{-+}{\Phi}{}^{(in)} = \qquad (4.4)$$
$$= (\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda)(1 - i\alpha I^+) \underset{x}{A}\, \overset{-+}{\Phi}{}^{(in)} + \frac{1}{2}(\alpha\lambda+\beta)\left[P(x), \overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_{0}(x=-\infty,\lambda)\right],$$

где $I^+\chi = -\frac{1}{2}\left[P(x), \int_{-\infty}^{x} dy\, [P(y), A\chi(y)]_0\right]$.

Поскольку $\left(\overset{-+}{\Phi}{}^{(nn)}_{0}(x=-\infty, \lambda)\right)_{k\ell} = \delta_{k\ell} S_{nn}(\lambda)$, из соотношения (4.4) получаем

$$\left(-\frac{i}{2} A \frac{\partial}{\partial x} + i\beta^2 I^+\right) A\, \Pi(x,t,\lambda) = \qquad (4.5)$$
$$= (\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda)(1 - i\alpha I^+) A\, \Pi(x,t,\lambda) - (\alpha\lambda+\beta)^2 A P,$$

где

$$\Pi_{k\ell}(x,t,\lambda) = (\alpha\lambda+\beta)\sum_{n=1}^{N^2+M^2} A_{nn} \frac{\left(\overset{-+}{\Phi}{}^{(nn)}(x,t,\lambda)\right)_{k\ell}}{S_{nn}(\lambda)}. \qquad (4.6)$$

Действуя на равенство (4.5) слева оператором $L^+$, получаем соотношение

$$\frac{i}{2}\left(L^+ - (\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda)\right)\mathcal{D}\,\Pi = (\alpha\lambda+\beta)^2 L^+ A P, \qquad (4.7)$$

где

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + \beta^2\left[P(x), \int_{-\infty}^{x} dy\, [P(y), \cdot\,]\right]. \qquad (4.8)$$

Разложим левую и правую части равенства (4.7) в асимптотический ряд по $(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda)^{-1}$. В результате имеем систему соотношений

$$-\frac{i}{2}\mathcal{D}\Pi_{(0)} = \alpha L^+ A P,$$

$$\frac{i}{2}L^+\mathcal{D}\Pi_{(0)} - \frac{i}{2}\mathcal{D}\Pi_{(1)} = \beta^2 L^+ A P, \tag{4.9}$$

$$L^+\mathcal{D}\Pi_{(k)} = \mathcal{D}\Pi_{(k+1)} \qquad (k=1,2,\dots)$$

где

$$\Pi(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\lambda^2+2\beta\lambda)^{-n}\,\Pi_{(n)}(x,t,\lambda),$$

Из рекуррентных соотношений (4.9) находим

$$(L^+)^n AP = \mathcal{D}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{n-1-k}\left(-\frac{i}{2\alpha}\right)\Pi_{(k)} \tag{4.10}$$

$$(n=1,2,\dots)$$

Соотношение (4.10) можно также переписать в форме

$$(L^+)^n AP = (L^+)^q\mathcal{D}\sum_{k=0}^{n-q-1}\left(-\frac{i}{2\alpha}\right)\left(-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{n-q-1-k}\frac{1}{(n-q)!}\,\frac{\partial^{n-q}\Pi(x,t,\lambda)}{\partial((\alpha\lambda^2+2\beta\lambda)^{-1})^{n-q}}\Bigg|_{\lambda=\infty}, \tag{4.11}$$

где $q$ – произвольное целое число.

С учетом (4.11), уравнение (3.9) с функциями $\Omega(L^+,t)$ вида (4.1) может быть записано в виде

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = (L^+)^q\mathcal{D}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(t)\,\times \tag{4.12}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-q}\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{n-q-1-k}\frac{1}{(n-q)!}\,\frac{\partial^{n-q}\Pi(x,t,\lambda)}{\partial((\alpha\lambda^2+2\beta\lambda)^{-1})^{n-q}}\Bigg|_{\lambda=\infty}.$$



Заметим теперь, что для величины $\Pi(x,t,\lambda)$ из соотношений (4.3) и (4.6) имеем

$$\Pi(x,t,\lambda) = i\,\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta P^T(x,t)}\;str\left(A\ln S_{\mathcal{D}}(\lambda)\right)\mathcal{E}, \tag{4.13}$$

где $(S_{\mathcal{D}})_{ik} \overset{def}{=} \delta_{ik}S_{ii}$ и $\mathcal{E}_{ke}\overset{def}{=}\delta_{ke}(-1)^{\delta(k)}$.

В силу (4.13) уравнение (4.12) эквивалентно следующему

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = (L^+)^q\mathcal{D}\,\frac{\overrightarrow{\delta}\mathcal{H}_{-q}}{\delta P^T}, \tag{4.14}$$

где

$$\mathcal{H}_{-q} = i\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(t)\sum_{k=0}^{n-q}\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{n-q-1-k}\frac{1}{(n-q)!}\,\times$$

$$\times\frac{\partial^{n-k}\,str\left(A\ln S_{\mathcal{D}}(\lambda)\right)\mathcal{E}}{\partial((\alpha\lambda^2+2\beta\lambda)^{-1})^{n-q}}\Bigg|_{\lambda=\infty}. \tag{4.15}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (4.14) является гамильтоновым, а именно оно представимо в виде

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \left\{P(x,t)\;\mathcal{H}_{-q}\right\}_q \tag{4.16}$$

относительно бесконечного семейства гамильтонианов $\mathcal{H}_{-q}$ (4.15) и скобок Пуассона $\{\ ,\ \}_q$ :

$$\{F,\mathcal{H}\}_q = \int_{-\infty}^{+\infty}dy\;str\left(F\,\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta P^T(y,t)}(L^+)^q\mathcal{D}\,\frac{\overrightarrow{\delta}\mathcal{H}}{\delta P^T}\right), \tag{4.17}$$

где $q$ – произвольное целое число, $\mathcal{F}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta P}$ обозначает правую вариационную производную $\mathcal{F}$ [I3], а оператор $\mathcal{D}$ дается формулой (4.8).

Тот факт, что скобки (4.I7) действительно являются скобками Пуассона, т.е. что для четных функционалов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ они кососимметричны и удовлетворяют тождеству Якоби проверяется непосредственным вычислением. Однако, для нечетных функционалов скобки (4.I7) симметричны. В общем случае
$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_q = -(-1)^{\delta(\mathcal{F})\delta(\mathcal{H})}\{\mathcal{H},\mathcal{F}\}_q$ и скобки (4.I7) удовлетворяют тождествам Якоби с $Z_2$-градуировкой [I4-I6]. Тем самым, скобки (4.I7) представляют собой обобщение обычных скобок Пуассона на случай $Z_2$-градуированной алгебры. Скобки (4.I7) превращают алгебру функционалов в супералгебру Ли. В механике точки такое обобщение скобок Пуассона рассматривалось в работах [I9,20] (см., также [I4]).

В частном случае $\alpha = 0$, $\beta = I$ семейство скобок (4.I7) совпадает с семейством скобок Пуассона для линейного пучка с $P = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix}$ [9]. При $q = 0$ семейство скобок (4.I7) переходит в семейство скобок Пуассона, указанное в работе [II].

Тот факт, что с интегрируемыми уравнениями связано бесконечное семейство скобок Пуассона впервые заметил Ф.Магри [2I]. Для линейного пучка второго порядка иерархия скобок Пуассона обсуждалась в работах [22,23], а для других спектральных задач в работах [9,II,23-26].

Итак, мы показали, что уравнения (3.9) являются гамильтоновыми относительно бесконечного семейства гамильтоновых структур. Замкнутые симплектические 2-формы, соответствующие скобкам (4.I7), есть

$$\omega^q(\delta_1 P, \delta_2 P) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{str}\left(\delta_2 P\, \mathcal{D}^{-1}(L^+)^{-q}\delta_1 P - \delta_1 P\, \mathcal{D}^{-1}(L^+)^{-q}\delta_2 P\right), \quad (q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4.I8}$$

Две простейшие скобки Пуассона из семейства скобок (4.I7) имеют вид:



$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{str}\left(\frac{\mathcal{F}\overleftarrow{\delta}}{\delta P^T}\, \mathcal{D}\, \frac{\overrightarrow{\delta}\mathcal{H}}{\delta P^T}\right) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{str}\left(\frac{\mathcal{F}\overleftarrow{\delta}}{\delta P^T}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\delta}\mathcal{H}}{\delta P^T} + \beta^2 \frac{\mathcal{F}\overleftarrow{\delta}}{\delta P^T}\left[P(x), \int_{-\infty}^{x} dy \left[P(y), \frac{\overrightarrow{\delta}\mathcal{H}}{\delta P^T}\right]_0\right]\right), \tag{4.I9}$$

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_{-1} = 2i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{str}\left(\frac{\mathcal{F}\overleftarrow{\delta}}{\delta P^T}(1 - i\alpha I^+)A\, \frac{\overrightarrow{\delta}\mathcal{H}}{\delta P^T}\right) =$$
$$= 2i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{str}\left(\frac{\mathcal{F}\overleftarrow{\delta}}{\delta P^T} A \frac{\overrightarrow{\delta}\mathcal{H}}{\delta P^T} + \frac{i\alpha}{2}\frac{\mathcal{F}\overleftarrow{\delta}}{\delta P^T}\left[P(x), \int_{-\infty}^{x}\left[P(y), \frac{\overrightarrow{\delta}\mathcal{H}}{\delta P^T}\right]_0\right]\right). \tag{4.20}$$

Введем скобку

$$\{\ ,\ \} \stackrel{def}{=} \alpha\{\ ,\ \}_0 + \beta^2\{\ ,\ \}_{-1}.$$

Легко видеть из (4.I9) и (4.20), что

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\} = i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{str}\left(\frac{\mathcal{F}\overleftarrow{\delta}}{\delta P^T}\left(2\beta^2 A - i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\overrightarrow{\delta}\mathcal{H}}{\delta P^T}\right). \tag{4.2I}$$

Нетрудно убедиться, что скобка $\{\ ,\ \}$ (4.2I) является скобкой Пуассона: кососимметричность скобки (4.2I) очевидна, выполнение тождества Якоби немедленно следует из независимости ядра скобки, т.е. $i\left(2\beta^2 A - i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)$ от $P(x,t)$.

## У. Релятивистски-инвариантные уравнения.

В третьем разделе мы рассмотрели примеры уравнений (3.9) с целой функцией $\Omega(L^+,t)$. В случае мероморфной функции $\Omega(L^+,t)$ уравнение (3.9) можно записать в эквивалентной форме

$$g(L^+,t)\frac{\partial P}{\partial t} - 2i\,f(L^+,t)\,AP = 0, \tag{5.1}$$

где $g(L^+,t)$ и $f(L^+,t)$ – целые функции первых аргументов такие, что $\Omega(\mu,t) = \frac{f(\mu,t)}{g(\mu,t)}$.

Среди уравнений (3.9) с сингулярными $\Omega(L^+,t)$ наибольший интерес представляют уравнения с $\beta = 0$ и $\Omega(L^+) = \omega(L^+)^{-1}$, где $\omega$ – константа. В этом случае уравнение (3.9) в силу $(L^+)^{-1} = 2i\,(1 - i\alpha I^+)\,A\int_{-\infty}^{x} dy\cdot$ имеет вид

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + 4\omega\int_{-\infty}^{x} dy\,P(y,t) + 2i\omega\alpha\Big[P(x),\int_{-\infty}^{x} dy\,[P(y), A\int_{-\infty}^{y} dz\,P(z)]_0\Big] = 0. \tag{5.2}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (5.2) инвариантно относительно преобразований Лоренца

$$x \to x' = \rho x, \quad t \to t' = \rho^{-1} t, \quad P(x,t) \to P'(x',t') = \rho^{-\frac{1}{2}} P(x,t), \tag{5.3}$$

где $\rho$ – параметр преобразований.

Введем матрицу $W(x,t)$ такую, что $P(x,t) = \frac{\partial W(x,t)}{\partial x}$. Для "потенциала" $W(x,t)$ уравнение (5.2) является локальным

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t} + 4\omega\,W(x,t) - 2i\omega\alpha\Big[\frac{\partial W(x,t)}{\partial x}, A W^2(x,t)\Big] = 0. \tag{5.4}$$

Напомним, что $A = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & -I_M \end{pmatrix}$ и $W(x,t) \in Mat(p,q)$. Уравнение (5.4) также релятивистски-инвариантно и при преобразованиях Лоренца $W(x,t) \to W'(x',t') = \rho^{\frac{1}{2}} W(x,t)$. В компонентах $W_1$ и $W_2$ $\left(W = \begin{pmatrix} 0 & W_1 \\ W_2 & 0 \end{pmatrix}\right)$ – прямоугольных суперматрицах размеров соответственно $N\times M$ и $M\times N$ уравнение (5.4) имеет вид



$$\frac{\partial^2 W_1(x,t)}{\partial x\,\partial t} + 4\omega W_1 - 2i\omega\alpha\Big(\frac{\partial W_1}{\partial x} W_2 W_1 + W_1 W_2 \frac{\partial W_1}{\partial x}\Big) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 W_2(x,t)}{\partial x\,\partial t} + 4\omega W_2 + 2i\omega\alpha\Big(\frac{\partial W_2}{\partial x} W_1 W_2 + W_2 W_1 \frac{\partial W_2}{\partial x}\Big) = 0. \tag{5.5}$$

При $N = M = 1$ система уравнений (5.5) впервые была получена А.В.Михайловым (см. [10]) и связь ее с пучком (1.1) ( $N = M = 1$, $q = 0$ ) обсуждалась в [10].

Система (5.5) содержит в качестве частных случаев ряд интересных релятивистски-инвариантных уравнений. Например, при вещественных $\omega$ и $\alpha$ и $W_1 = W_2^+ = \mathcal{U}$ система (5.5) эквивалентна матричному уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x\,\partial t} + 4\omega\,\mathcal{U} - 2i\omega\alpha\Big(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\mathcal{U}^+\mathcal{U} + \mathcal{U}\mathcal{U}^+\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\Big) = 0. \tag{5.6}$$

В частном случае $M = 1$ уравнение (5.6) есть $(\mathcal{U}^T = (\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_N))$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}_i}{\partial x\,\partial t} + 4\omega\,\mathcal{U}_i - 2i\omega\alpha\Big(\frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial x}\sum_{k=1}^{N}\mathcal{U}_k^+\mathcal{U}_k + \mathcal{U}_i\sum_{k=1}^{N}\mathcal{U}_k^+\frac{\partial \mathcal{U}_k}{\partial x}\Big) = 0 \tag{5.7}$$
$$(i = 1,\dots,N)$$

Отметим, что среди полей $\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_N$ удовлетворяющих системе уравнений (5.7), $\rho$ полей $(\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_\rho)$ – классические антикоммутирующие фермионные поля, а $N-\rho$ полей $(\mathcal{U}_{\rho+1},\dots,\mathcal{U}_N)$ – классические бозонные поля. При $\rho = N$ система уравнений (5.7) описывает чисто фермионную классическую систему, а при $\rho = N+1$ – чисто бозонную систему. В частности, при $N = 1$, $\rho = 2$ имеем уравнения для одного комплексного бозонного поля $\mathcal{U}_1(x,t)$ с массой $4\omega$:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x\,\partial t} + 4\omega\,\mathcal{U}_1 - 2i\omega\alpha\,\mathcal{U}_1^*\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{U}_1^2) = 0. \tag{5.8}$$

При $N = \rho = 2$ и редукции $\mathcal{U}_1 = \Psi$, $\mathcal{U}_2 = \gamma\Psi^+$, где $\gamma$ – произвольная константа, Система (5.7) сводится к уравнению для одного фермионного поля $\psi(x,t)$ со значениями в бесконечномерной алгебре Грассмана

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\,\partial t} + 4\omega\,\psi(x,t) - 2i\omega\alpha|\gamma|^2\psi\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \qquad (5.9)$$

Поле $\psi(x,t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\psi(x,t)\psi(y,t)+\psi(y,t)\psi(x,t) = \psi(x,t)\psi^+(y,t)+\psi^+(y,t)\psi(x,t) =$$
$$= \psi^+(x,t)\psi^+(y,t)+\psi^+(y,t)\psi^+(x,t) = 0.$$

Релятивистски-инвариантные уравнения (5.4) - (5.9) описывают двумерные модели теории поля, интегрируемые методом ОЗР с помощью пучка (1.1). Эти уравнения могут иметь и другие применения.

Обратим теперь внимание на то, что уравнения (5.2) можно переписать в эквивалентной форме (5.1), т.е. в виде

$$\left(1-i\alpha I^+\right)^{-1} i\frac{\partial P}{\partial t} = -i\int_{-\infty}^{x} dy\, P(y)\,, \qquad (5.10)$$

где мы положили $\omega = \frac{1}{4}$. Левая часть уравнения (5.10) представляет собой бесконечный "степенный" ряд по оператору $I^+$. В двух случаях этот ряд обрывается на члене $i\alpha I^+ i\frac{\partial P}{\partial t}$.

<u>Первый случай:</u> $N=M=1$, $q=0$, $\alpha=1$. При этом $I^{+2}=0$ и уравнение (5.10) при $P=\begin{pmatrix}0 & q_1\\ q_1^+ & 0\end{pmatrix}$ эквивалентно уравнениям массивной модели Тирринга [10].

<u>Второй случай:</u> $N=2$, $M=1$, $\rho=2$, $\alpha=1$ и

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi \\ 0 & 0 & -\varphi^+ \\ \varphi^+ & -\varphi & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5.11)$$

где $\varphi$ - антикоммутирующая (Грассманова) переменная и + обозначает инволюцию в алгебре Грассмана (см. [13]). В этом



случае $I^{+2}\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ и уравнение (5.10) сводится к уравнению:

$$i\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + i\int_{-\infty}^{x} dy\,\varphi(y) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} dy\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(y,t)\varphi^+(y,t)\right)\cdot\varphi(x,t) = 0 \qquad (5.12)$$

и соответствующему уравнению для $\varphi^+$. Введем величины $\Psi_1(x,t)$ и $\Psi_2(x,t)$:

$$\Psi_1(x,t) = \frac{1}{2}\,\varphi(x,t)\,e^{-\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{x} dy\,\varphi(y,t)\varphi^+(y,t)}\,,$$
$$\Psi_2(x,t) = -\frac{i}{2}\,e^{-\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{x} dy\,\varphi(y,t)\varphi^+(y,t)}\int_{-\infty}^{x} dz\,\varphi(z,t). \qquad (5.13)$$

Из уравнения (5.12) вытекает

$$\int_{-\infty}^{x} dy\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(y)\varphi^+(y)\right) = \int_{-\infty}^{x} dy\,\varphi^+(y)\int_{-\infty}^{y} dz\,\varphi(z) - \int_{-\infty}^{x} dy\,\varphi(y)\int_{-\infty}^{y} dz\,\varphi^+(z). \qquad (5.14)$$

Далее, имеет место тождество

$$\int_{-\infty}^{x} dy\,\varphi(y)\int_{-\infty}^{y} dz\,\varphi^+(z) - \int_{-\infty}^{x} dy\,\varphi^+(y)\int_{-\infty}^{y} dz\,\varphi(z) = \int_{-\infty}^{x} dy\,\varphi(y)\cdot\int_{-\infty}^{x} dz\,\varphi^+(z)\,, \qquad (5.15)$$

Напомним, что $\varphi(x,t)\varphi^+(y,t)+\varphi^+(y,t)\varphi(x,t)=0$. Комбинируя (5.14) и (5.15) и учитывая (5.13), имеем

$$\int_{-\infty}^{x} dy\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(y)\varphi^+(y)\right) = -4\,\Psi_2(x,t)\,\Psi_2^+(x,t). \qquad (5.16)$$

Используя (5.16) и определения (5.13) из (5.12), получаем уравнения

$$i\,\frac{\partial\Psi_1(x,t)}{\partial t} - \Psi_2 + \Psi_1\Psi_2^+\Psi_2 = 0,$$
$$i\,\frac{\partial\Psi_2(x,t)}{\partial x} - \Psi_1 + \Psi_2\Psi_1^+\Psi_1 = 0. \tag{5.I7}$$

Отметим, что первое из уравнений (5.I7) вытекает из уравнения (5.I2), а второе – прямо из определения $\Psi_2(x,t)$ (5.I3).

Уравнения (5.I7) – это уравнения массивной модели Тирринга с антикоммутирующими переменными, применимость метода ОЗР к которым была продемонстрирована в [27].

Таким образом, в рассмотренных нами случаях уравнения (5.I0) эквивалентны уравнениям массивной модели Тирринга: в первом случае с полями $\Psi_1$, $\Psi_2$, являющимися обычными функциями, во втором случае – с полями, принимающими значения в алгебре Грассмана.

Отметим, что уравнение (5.9) с $\gamma = -I$, $\alpha = +I$, и $\omega = \frac{I}{4}$ эквивалентно уравнениям массивной модели Тирринга (5.I7). Действительно, вводя величину $\varphi(x,t) = \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}$ из уравнения (5.9) получаем уравнение (5.I2), а отсюда вводя $\Psi_1$ и $\Psi_2$ по формулам (5.I3) приходим к уравнениям (5.I7). Так что уравнения (5.9) и (5.I7) представляют собой различные формы описания одной и той же нелинейной системы.

## УI. О калибровочной эквивалентности пучка (I.I) линейной спектральной задаче.

Калибровочная эквивалентность различных уравнений, интегрируемых методом ОЗР, весьма полезна при анализе этих уравнений (см. [28,29]).

А.В.Михайлов заметил (см. [I0]), что квадратичный пучок (I.I) при $N = M = I$, $q = 0$, $\beta = 0$ калибровочно эквивалентен линейному пучку. Здесь мы обобщим результат Михайлова.

Рассмотрим общий пучок (I.I) с произвольными $N, M, p, q, \alpha$ и $\beta$. Совершим калибровочное преобразование

$$\Psi(x,t,\lambda) \longrightarrow \tilde\Psi(x,t,\lambda) = V(x,t,\lambda)\,\Psi(x,t,\lambda) \tag{6.I}$$



с матрицей $V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ V_2 & V_3 \end{pmatrix}$ где $V_1$ и $V_3$ – квадратные матрицы порядков $N$ и $M$, а $V_2$ – прямоугольная матрица размера $M \times N$, равные

$$V_1(x,t,\lambda) = (\alpha\lambda+\beta)^{-\frac{1}{2}}\,\mathcal{P}_x\left\{\exp\left(\frac{i\alpha}{2}\int_x^{-\infty} dy\, Q(y,t)R(y,t)\right)\right\},$$
$$V_2(x,t,\lambda) = -\frac{\alpha}{2}(\alpha\lambda+\beta)^{-\frac{1}{2}}\,\mathcal{P}_x\left\{\exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\int_x^{-\infty} dy\, R(y,t)Q(y,t)\right)\right\}\cdot R(x,t), \tag{6.2}$$
$$V_3(x,t,\lambda) = (\alpha\lambda+\beta)^{\frac{1}{2}}\,\mathcal{P}_x\left\{\exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\int_x^{-\infty} dy\, R(y,t)Q(y,t)\right)\right\}.$$

Здесь $\mathcal{P}_x\left(\exp\int_{-\infty}^{x} dy\, f(y)\right)$ обозначает хорошо известную $x$ – упорядоченную экспоненту, которая является решением матричного уравнения $\frac{\partial Z(x)}{\partial x} = f(x)\,Z(x)$ $\left(Z(x) = \mathcal{P}_x\left\{\exp\int_{-\infty}^{x} dy\, f(y)\right\}\right)$. Отметим, что $\left(\mathcal{P}_x\left\{\exp\int_{-\infty}^{x} dy\, f(y)\right\}\right)^{-1} = \mathcal{P}_x\left\{\exp\int_x^{-\infty} dy\, f(y)\right\}$.

Нетрудно убедиться, что при калибровочном преобразовании (6.I), (6.2) пучок (I.I) переходит в линейный пучок

$$\frac{\partial\tilde\Psi}{\partial x} = i\mu A\tilde\Psi + i\begin{pmatrix} 0 & \tilde Q(x,t) \\ \tilde R(x,t) & 0 \end{pmatrix}\tilde\Psi, \tag{6.3}$$

где $\mu = \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda$, $A = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & -I_M \end{pmatrix}$ и $\tilde Q$, $\tilde R$ – прямоугольные матрицы размеров $N \times M$ и $M \times N$, равные

$$\tilde Q(x,t) = \mathcal{P}_x\left\{\exp\left(\frac{i\alpha}{2}\int_x^{-\infty} dy\, Q(y)R(y)\right)\right\} Q(x,t)\, \mathcal{P}_x\left\{\exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\int_{-\infty}^{x} dy\, R(y)Q(y)\right)\right\},$$
$$\tilde R(x,t) = \mathcal{P}_x\left\{\exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\int_x^{-\infty} dy\, R(y)Q(y)\right)\right\} \times \tag{6.4}$$
$$\times\left(\beta^2 R(x,t) - \frac{\alpha^2}{4}R(x,t)Q(x,t)R(x,t) + \frac{i\alpha}{2}\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}\right)\mathcal{P}_x\left\{\exp\left(\frac{i\alpha}{2}\int_{-\infty}^{x} dy\, Q(y)R(y)\right)\right\}.$$

Калибровочное преобразование (6.I)– (6.2) представляет собой обобщение преобразования Михайлова на случай общего квадратичного пучка (I.I). При $\alpha = 0$ и $\beta = I$ преобразование

(6.I) – (6.2) является тождественным.

В двух случаях $\chi$ – упорядоченная экспонента превращается в обычную экспоненту и преобразование (6.I) упрощается.

Первый случай: $M = N = 1$. При $q = 0$ матрицы $V_1$, $V_2$ и $V_3$ есть

$$V_1 = \frac{1}{V_3} = (\alpha\lambda+\beta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}\int_{-\infty}^{x} dy\, Q(y,t)R(y,t)},$$

$$V_2 = -\frac{\alpha}{2}(\alpha\lambda+\beta)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}\int_{-\infty}^{x} dy\, Q(y,t)R(y,t)} \cdot R(x,t) \qquad (6.5)$$

и

$$\tilde{Q}(x,t) = Q(x,t)\, e^{-i\alpha\int_{-\infty}^{x} dy\, Q(y,t)R(y,t)},$$

$$\tilde{R}(x,t) = \left(\beta^2 R(x,t) - \frac{\alpha^2}{4}R^2(x,t)Q(x,t) + \frac{i\alpha}{2}\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}\right) e^{i\alpha\int_{-\infty}^{x} dy\, Q(y)R(y)}. \qquad (6.6)$$

В частном случае $\beta = 0$ мы получаем калибровочное преобразование Михайлова.

При $q = 1$ переменные $Q(x,t)$ и $R(x,t)$ являются грассмановыми переменными и

$$V_1 = (\alpha\lambda+\beta)^{-1} V_3 = (\alpha\lambda+\beta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}\int_{-\infty}^{x} dy\, Q(y,t)R(y,t)},$$

$$V_2 = -\frac{\alpha}{2}(\alpha\lambda+\beta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}\int_{-\infty}^{x} dy\, Q(y,t)R(y,t)} \cdot R(x,t). \qquad (6.7)$$

При этом для линейного пучка

$$\tilde{Q}(x,t) = Q(x,t), \quad \tilde{R}(x,t) = \beta^2 R(x,t) + \frac{i\alpha}{2}\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}. \qquad (6.8)$$

Второй случай: $N = 2$, $M = 1$, $\rho = 2$, и

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi \\ 0 & 0 & -\varphi^+ \\ \varphi^+ & -\varphi & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6.9)$$



где $\varphi$ – грассманова переменная. В этом случае, в силу $\varphi^+\varphi^+ = \varphi\varphi = 0$ имеем

$$QR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\varphi\varphi^+, \quad RQ = 0$$

и матрицы $V_1$, $V_2$, $V_3$ равны

$$V_1 = (\alpha\lambda+\beta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}\sigma_3\int_{-\infty}^{x} dy\, \varphi(y,t)\varphi^+(y,t)},$$

$$V_2 = -\frac{\alpha}{2}(\alpha\lambda+\beta)^{-\frac{1}{2}}(\varphi^+, -\varphi), \quad V_3 = (\alpha\lambda+\beta)^{\frac{1}{2}}, \qquad (6.10)$$

где $\sigma_3 \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Матрица потенциала $\tilde{P}(x,t)$ соответствующего линейного пучка (6.3) имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{\varphi}_1 \\ 0 & 0 & \tilde{\varphi}_2 \\ \tilde{\varphi}_3 & \tilde{\varphi}_4 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\varphi_1(x,t) = \varphi(x,t)\, e^{-\frac{i\alpha}{2}\sigma_3\int_{-\infty}^{x} dy\, \varphi(y,t)\varphi^+(y,t)},$$

$$\varphi_2(x,t) = -\varphi^+(x,t)\, e^{-\frac{i\alpha}{2}\sigma_3\int_{-\infty}^{x} dy\, \varphi(y,t)\varphi^+(y,t)}, \qquad (6.11)$$

$$\varphi_3(x,t) = \frac{1}{2}\left(2\beta^2 + i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi^+(x)\, e^{\frac{i\alpha}{2}\sigma_3\int_{-\infty}^{x} dy\, \varphi(y,t)\varphi^+(y,t)},$$

$$\varphi_4(x,t) = -\frac{1}{2}\left(2\beta^2 + i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\, e^{\frac{i\alpha}{2}\sigma_3\int_{-\infty}^{x} dy\, \varphi(y,t)\varphi^+(y,t)}.$$

Обратим внимание на то, что рассмотренные выше два случая при $\beta = 0$ – это как раз те два случая, при которых релятивистски-инвариантные уравнения (5.IO) эквивалентны уравнениям массивной модели Тирринга (см. предыдущий раздел).

Кроме того, в этих двух случаях (первый: $N = M = 1$, $q = 0$, $\beta = 0$; второй: $N = 2$, $M = 1$, $\rho = 2$, $\beta = 0$ и матрица $P$ вида (6.9)) пучок (I.I) калибровочно эквивалентен спектральным задачам, используемым при интегрировании уравнений массивной модели Тирринга. Соответствующие калибровочные преобразования приведены в работах [10,27].

## VII. Структура группы Бэклунд-преобразований

В третьем разделе мы показали, что преобразования (3.3) с $B = B_{0(\nu)}$ и $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ образуют бесконечномерную группу Бэклунд-преобразований (БП) для уравнений (3.7). Произвольные целые функции $B_i(\Lambda^+)$, которыми характеризуются БП, можно представить в виде

$$B_i(\Lambda^+) = \prod_{k=0}^{n} \left(\Lambda^+ - \lambda^{(i)}_k\right) f_i(\Lambda^+), \tag{7.1}$$

где $f_i(\Lambda^+)$ – функции, не имеющие нулей, и $n$ – некоторое целое число. В силу (7.1) произвольное БП B является комбинацией двух типов БП:

$$B = B_d \cdot B_c$$

где $B_d$ – дискретное БП, т.е. БП (3.3) с функциями $B_i(\Lambda^+) = \sum\limits_{k=0}^{n}(\Lambda^+ - \lambda^{(i)}_k)$, а $B_c$ – континуальное БП, т.е. БП (3.3) с функциями $B_i = f_i(\Lambda^+)$.

Рассмотрим подробнее структуру дискретных БП. Введем аналогично случаю линейного пучка [30,8,31] понятие элементарного БП. Элементарное БП $B^{(\alpha)}_{\lambda^{(\alpha)}_0}$ – это БП (3.3) с функциями $B_i$ равными ($r = dim\, g_{0(\nu)}$)

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_{\alpha-1} = B_{\alpha+1} = \ldots = B_r \equiv 1, \tag{7.2}$$
$$B_\alpha(\Lambda^+) = \Lambda^+ - \lambda^{(\alpha)}_0.$$

Произвольное дискретное БП есть произведение элементарных БП

$$B_d = \prod_{k=1}^{n_1} B^{(1)}_{\lambda^{(1)}_{0k}} \prod_{k=1}^{n_2} B^{(2)}_{\lambda^{(2)}_{0k}} \ldots \prod_{k=1}^{n_r} B^{(r)}_{\lambda^{(r)}_{0k}}. \tag{7.3}$$

Элементарные БП являются весьма полезным инструментом исследо-



вания интегрируемых уравнений (для линейного пучка см. [31]. Здесь в качестве иллюстрации мы рассмотрим простейший случай $N = M = 1$, $q = 0$. В этом случае $H_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix}0&q\\r&0\end{pmatrix}$ и мы имеем два элементарных БП: $B^{(1)}_{\lambda_0}$ и $B^{(2)}_{\lambda_0}$.

Рассмотрим сначала преобразование $B^{(1)}_{\lambda_0}$ ($B_1 = \lambda - \lambda_0$, $B_2 \equiv 1$). Используя явный вид оператора $\Lambda$ и равенство $y^+\begin{pmatrix}0&q'\\-r&0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&q'\\-r&0\end{pmatrix}\int\limits_{-\infty}^{x} dy(rq - r'q')$, из (3.3) получаем следующую систему уравнений, задающую преобразование $B^{(1)}_{\lambda_0}$:

$$-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(q'\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{i\alpha}{2}\right)^{\ell} K_\ell(x)\right) + \frac{i\beta^2}{2} q' \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{i\alpha}{2}\right)^{\ell} K_{\ell+1}(x) - \lambda_0 q' - q = 0,$$
$$\tag{7.4}$$
$$-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(r\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{i\alpha}{2}\right)^{\ell} K_\ell(x)\right) - \frac{i\beta^2}{2} r \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{i\alpha}{2}\right)^{\ell} K_{\ell+1}(x) + \lambda_0 r + r' = 0$$

где

$$K_\ell(x) \stackrel{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{x} dx_1 (rq - r'q') \int\limits_{-\infty}^{x_1} dx_2 (rq - r'q') \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_{\ell-1}} dx_\ell (rq - r'q').$$

Используя тождество $K_\ell(x) = \frac{1}{\ell!}\left(K_1(x)\right)^{\ell}$, перепишем (7.4) в следующей форме

$$-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(q' e^{\frac{i\alpha}{2}K_1(x)}\right) + \frac{\beta^2}{\alpha} q' e^{\frac{i\alpha}{2}K_1(x)} - \frac{\beta^2}{\alpha} q' - \lambda_0 q' - q = 0, \tag{7.5a}$$

$$-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(r e^{\frac{i\alpha}{2}K_1(x)}\right) - \frac{\beta^2}{\alpha} r e^{\frac{i\alpha}{2}K_1(x)} + \frac{\beta^2}{\alpha} r + \lambda_0 r + r' = 0. \tag{7.5в}$$

Интегральные члены в (7.5) можно преобразовать в локальные. Действительно, умножая уравнение (7.5а) на $r e^{\frac{i\alpha}{2}K_1(x)}$, уравнение (7.5в) на $q' e^{\frac{i\alpha}{2}K_1(x)}$ и складывая получившиеся равенства имеем

$$-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(q' r e^{i\alpha K_1(x)}\right) = (rq - r'q') e^{\frac{i\alpha K_1(x)}{2}} = -\frac{2i}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{i\alpha}{2}K_1(x)}. \tag{7.6}$$

Из (7.6) находим

$$e^{\frac{i\alpha K_0(x)}{2}} = \frac{2}{\alpha q' r}\left(1-\sqrt{1-\alpha q' r}\right). \qquad (7.7)$$

Подставляя (7.7) в (7.5), окончательно получаем соотношения, задающие элементарное БП $B^{(1)}_{\lambda_0}$:

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(2\beta^2 - i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha q' r}}{r}\right) - \left(\lambda_0 + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)q' - q = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(2\beta^2 + i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha q' r}}{q'}\right) - \left(\lambda_0 + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)r - r' = 0. \qquad (7.8)$$

Аналогичным образом вычисляется и второе элементарное БП $B^{(2)}_{\lambda_0}$ $(B_1 \equiv 1,\ B_2 = \lambda - \lambda_0)$. Оно имеет вид

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(2\beta^2 - i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha q r'}}{r'}\right) - \left(\lambda_0 + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)q - q' = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(2\beta^2 + i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha q r'}}{q}\right) - \left(\lambda_0 + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)r' - r = 0. \qquad (7.9)$$

При $\alpha \to 0$ элементарные БП $B^{(1)}_{\lambda_0}$ (7.8) и $B^{(2)}_{\lambda_0}$ (7.9) переходят в соответствующие элементарные БП для линейного пучка (с $\alpha = 0$ и $N = 1$) (см. [31] ).

Преобразования (7.8) и (7.9) - суть пространственные части элементарных Бэклунд-преобразований и являются универсальными. Временные части элементарных БП различны для разных уравнений (3.7) и их вид нетрудно найти, используя явный вид уравнений и (7.8) или (7.9).

Нетрудно убедиться, что элементарные БП (7.8) и (7.9) коммутируют - $B^{(1)}_{\lambda_0^{(1)}} B^{(2)}_{\lambda_0^{(2)}} = B^{(2)}_{\lambda_0^{(2)}} B^{(1)}_{\lambda_0^{(1)}}$, и в частности $B^{(1)}_{\lambda_0} B^{(2)}_{\lambda_0} = B^{(2)}_{\lambda_0} B^{(1)}_{\lambda_0} = 1$. Так, что преобразования $B^{(1)}_{\lambda_0}$ и $B^{(2)}_{\lambda_0}$ взаимнообратны.

Простейшее нетривиальное неэлементарное БП есть $B_{\lambda_0^{(1)},\lambda_0^{(2)}} = B^{(1)}_{\lambda_0^{(1)}} \cdot B^{(2)}_{\lambda_0^{(2)}} = B^{(2)}_{\lambda_0^{(2)}} \cdot B^{(1)}_{\lambda_0^{(1)}}$. Его явный вид можно найти, используя (7.8) и (7.9) по формуле



$$B_{\lambda_0^{(1)},\lambda_0^{(2)}}(P \to P'') = B^{(1)}_{\lambda_0^{(1)}}(P' \to P'') \cdot B^{(2)}_{\lambda_0^{(2)}}(P \to P') = B^{(2)}_{\lambda_0^{(2)}}(P' \to P'') \cdot B^{(1)}_{\lambda_0^{(1)}}(P \to P').$$

Преобразование $B_{\lambda_0^{(1)},\lambda_0^{(2)}}$ задается соотношениями

$$\frac{1}{2\alpha}\left(2\beta^2 - i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(q''K - q\frac{1}{K}\right) - \left(\lambda_0^{(1)} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)q'' + \left(\lambda_0^{(2)} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)q = 0, \qquad (7.10)$$

$$\frac{1}{2\alpha}\left(2\beta^2 + i\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(rK - r''\frac{1}{K}\right) - \left(\lambda_0^{(1)} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)r + \left(\lambda_0^{(2)} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)r'' = 0,$$

где $K(x) = \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\int_{-\infty}^{x} dy\,(rq - r''q'')\right)$. Эту интегральную величину $K$ можно преобразовать в локальную, а именно можно показать, что $K(x)$ является решением алгебраического уравнения

$$rq''K^4 + \frac{4}{\alpha}\left(\lambda_0^{(2)} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)K^3 - \left(r''q'' + rq + \frac{4}{\alpha}\left(\lambda_0^{(1)} + \lambda_0^{(2)} + \frac{2\beta^2}{\alpha}\right)\right)K^2 + \frac{4}{\alpha}\left(\lambda_0^{(1)} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)K + r''q = 0.$$

Явный вид $K(x)$ через $q,\ q'',\ r,\ r''$ мы не выписываем в силу его громоздкости.

Мы видим, таким образом, что уже простейшее неэлементарное БП достаточно сложно. Тем более важны сравнительно простые элементарные БП (7.8) и (7.9).

## VIII. Элементарные Бэклунд-преобразования, нелинейный принцип суперпозиции и решения интегрируемых уравнений.

Элементарные БП оказываются эффективным инструментом исследования интегрируемых уравнений. Они позволяют, как мы увидим, построить бесконечное семейство решений уравнений (3.9) (с $N = M = 1$, $q = 0$).

Заметим прежде всего, что элементарные БП (7.8) и (7.9) можно после некоторых преобразований переписать в виде:

$$
B^{(1)}_{\lambda_0}:\ (p\to p')\quad
\begin{cases}
i\dfrac{\partial q'}{\partial x}+(\lambda_0 q'+q)(1+I)-\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-I)q'+\dfrac{\alpha q'}{2}(rq+r'q')=0,\\[2ex]
i\dfrac{\partial r}{\partial x}-(\lambda_0 r+r')(1+I)+\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-I)r-\dfrac{\alpha r}{2}(rq+r'q')=0,
\end{cases}
\tag{8.1}
$$

где $I=\sqrt{1-\alpha q' r}$ и

$$
B^{(2)}_{\lambda_0'}:\ (p\to p')\quad
\begin{cases}
i\dfrac{\partial q}{\partial x}+(\lambda_0 q+q')(1+\tilde I)-\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-\tilde I)q+\dfrac{\alpha q}{2}(rq+r'q')=0,\\[2ex]
i\dfrac{\partial r'}{\partial x}-(\lambda_0 r'+r)(1+\tilde I)+\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-\tilde I)r'-\dfrac{\alpha r'}{2}(rq+r'q')=0,
\end{cases}
\tag{8.2}
$$

где $\tilde I=\sqrt{1-\alpha q r'}$.

Воспользуемся теперь коммутативностью элементарных БП, которую можно изобразить в виде диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & (q_1, r_1) \arrow[dr, "B^{(2)}_\mu"] & \\
(q_0, r_0) \arrow[ur, "B^{(1)}_\lambda"] \arrow[dr, "B^{(2)}_\mu"'] & & (q_3, r_3) \\
 & (q_2, r_2) \arrow[ur, "B^{(1)}_\lambda"'] &
\end{tikzcd}
\tag{8.3}
$$

где $(q_i, r_i)$ $(i=0,1,2,3)$ – это решения конкретного уравнения (3.9). Преобразование $B^{(2)}_\mu\ B^{(1)}_\lambda$ задается системой уравнений:

$$
B^{(1)}_{\lambda}:\ (p_0\to p_1)\quad
\begin{cases}
i\dfrac{\partial q_1}{\partial x}+(\lambda q_1+q_0)(1+I_{10})-\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-I_{10})q_1+\dfrac{\alpha q_1}{2}(r_0q_0+r_1q_1)=0,\\[2ex]
i\dfrac{\partial r_0}{\partial x}-(\lambda r_0+r_1)(1+I_{10})+\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-I_{10})r_0-\dfrac{\alpha r_0}{2}(r_0q_0+r_1q_1)=0;
\end{cases}
\tag{8.4}
$$

$$
B^{(2)}_{\mu}:\ (p_1\to p_3)\quad
\begin{cases}
i\dfrac{\partial q_1}{\partial x}+(\mu q_1+q_3)(1+I_{13})-\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-I_{13})q_1+\dfrac{\alpha q_1}{2}(r_1q_1+r_3q_3)=0,\\[2ex]
i\dfrac{\partial r_3}{\partial x}-(\mu r_3+r_1)(1+I_{13})+\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-I_{13})r_3-\dfrac{\alpha r_3}{2}(r_1q_1+r_3q_3)=0,
\end{cases}
\tag{8.5}
$$



где $I_{ik}\overset{def}{=}\sqrt{1-\alpha q_i r_k}$. Преобразование же $B^{(1)}_\lambda\ B^{(2)}_\mu$ задается уравнениями

$$
B^{(2)}_{\mu}:\ (p_0\to p_2)\quad
\begin{cases}
i\dfrac{\partial q_0}{\partial x}+(\mu q_0+q_2)(1+I_{02})-\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-I_{02})q_0+\dfrac{\alpha q_0}{2}(r_0q_0+r_2q_2)=0,\\[2ex]
i\dfrac{\partial r_2}{\partial x}-(\mu r_2+r_0)(1+I_{02})+\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-I_{02})r_2-\dfrac{\alpha r_2}{2}(r_0q_0+r_2q_2)=0;
\end{cases}
\tag{8.6}
$$

$$
B^{(1)}_{\lambda}:\ (p_2\to p_3)\quad
\begin{cases}
i\dfrac{\partial q_3}{\partial x}+(\lambda q_3+q_2)(1+I_{32})-\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-I_{32})q_3+\dfrac{\alpha q_3}{2}(r_2q_2+r_3q_3)=0,\\[2ex]
i\dfrac{\partial r_2}{\partial x}-(\lambda r_2+r_3)(1+I_{32})+\dfrac{\beta^2}{\alpha}(1-I_{32})r_2-\dfrac{\alpha r_2}{2}(r_2q_2+r_3q_3)=0.
\end{cases}
\tag{8.7}
$$

Подчеркнем, что уравнения (8.4) - (8.7) являются следствием коммутативности элементарных БП.

В предыдущем разделе при построении солитонного БП (7.10) мы уже использовали системы уравнений (8.4) - (8.7). Здесь мы получим еще одно интересное следствие уравнений (8.4) - (8.7).

Сравнивая первые уравнения систем (8.4) и (8.5) и вторые уравнения ситтем (8.6) и (8.7), получаем

$$
(\lambda q_1+q_0)(1+I_{10})-(\mu q_1+q_3)(1+I_{13})+\frac{\beta^2}{\alpha}q_1(I_{10}-I_{13})+\frac{\alpha q_1}{2}(r_0q_0-r_3q_3)=0,
\tag{8.8а}
$$

$$
(\lambda r_2+r_3)(1+I_{32})-(\mu r_2+r_0)(1+I_{02})+\frac{\beta^2}{\alpha}r_2(I_{32}-I_{02})-\frac{\alpha r_2}{2}(r_0q_0-r_3q_3)=0.
\tag{8.8б}
$$

Уравнения (8.8) представляют собой алгебраическую систему и дакт возможность, в принципе, по заданным ( $q_0$, $r_0$ ), ( $q_1$, $r_1$ ) и ( $q_2$, $r_2$ ) вычислить ( $q_3$, $r_3$ ). Таким образом, соотношения (8.8) - это не что иное, как нелинейный принцип суперпозиции для уравнений (3.9): по трем заданным решениям ( $q_0$, $r_0$ ), ( $q_1$, $r_1$ ), ( $q_2$, $r_2$ ) он позволяет чисто алгебраически вычислить четвертое решение*.

Формулы (8.8) дают возможность чисто алгебраически построить бесконечное семейство решений уравнений (3.9) с $M=N=1$, $q=0$. Действительно, рассмотрим тривиальное решение $q=0, r=0$. Обозначим его $P_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Подействуем на это решение всевозможными дискретными БП (7.3) ( $r = 2$). В результате мы получим бесконечное семейство решений $P_{(n_1,n_2)} = \begin{pmatrix} 0 & q_{(n_1,n_2)} \\ r_{(n_1,n_2)} & 0\end{pmatrix}$:

$$P_{(n_1,n_2)} \overset{def}{=\!=} \prod_{i=1}^{n_1} B^{(1)}_{\lambda_i} \prod_{k=1}^{n_2} B^{(2)}_{\mu_k} P_0 , \tag{8.9}$$

где $n_1$ и $n_2$ – любые целые числа. Решения $P_{(n_1,0)}$ и $P_{(0,n_2)}$ легко находятся непосредственно из формул (8.1) и (8.2). Они имеют вид

$$q_{(n_1,0)} = \sum_{i=1}^{n_1} e^{2i\Omega(\lambda_i)t + 2i\lambda_i(x-x_{0i})} , \quad r_{(n_1,0)}=0; \tag{8.10}$$

$$q_{(0,n_2)} = 0, \qquad r_{(0,n_2)} = \sum_{k=1}^{n_2} e^{-2i\Omega(\mu_k)t-2i\mu_k(x-\tilde{x}_{0k})} , \tag{8.11}$$

где $x_{0i}$ и $\tilde{x}_{0k}$ – произвольные константы.

Используя решения $P_{(n_1,0)}$ и $P_{(0,n_2)}$, мы с помощью соотношений (8.8) можем рекуррентным образом вычислить любое решение $P_{(n_1,n_2)}$. Действительно по $P_{(0,0)}, P_{(1,0)}, P_{(0,1)}$ мы находим $P_{(1,1)}$:

*Нелинейные принципы суперпозиции для некоторых конкретных уравнений (например, для уравнения синус-Гордон) хорошо известны (см., например [32] ).



$$q_{(1,1)} = 2(\lambda_1-\mu_1)\frac{\sqrt{\alpha\mu_1+\beta^2}}{\alpha\lambda_1+\beta^2} e^{i(\Omega(\lambda_1)+\Omega(\mu_1))t+i(\lambda_1+\mu_1)x+i\varphi_0} \times$$

$$\times \frac{ch\{i(\Omega(\lambda_1)-\Omega(\mu_1))t+i(\lambda_1-\mu_1)(x-x_{02})\}}{ch^2\{i(\Omega(\lambda_1)-\Omega(\mu_1))t+i(\lambda_1-\mu_1)(x-x_{01})\}} , \tag{8.12}$$

$$r_{(1,1)} = 2(\mu_1-\lambda_1)\frac{\sqrt{\alpha\lambda_1+\beta^2}}{\alpha\mu_1+\beta^2} e^{-i(\Omega(\lambda_1)+\Omega(\mu_1))t-i(\lambda_1+\mu_1)x-i\varphi_0} \times$$

$$\times \frac{ch\{i(\Omega(\lambda_1)-\Omega(\mu_1))t+i(\lambda_1-\mu_1)(x-x_{01})\}}{ch^2\{i(\Omega(\lambda_1)-\Omega(\mu_1))t+i(\lambda_1-\mu_1)(x-x_{02})\}} , \tag{8.13}$$

где $x_{01} = -\frac{i}{2}(\lambda_1-\mu_1)^{-1}\ln\frac{2a(\lambda_1-\mu_1)}{\lambda_1+\frac{\beta^2}{\alpha}}$,

$x_{02} = -\frac{i}{2}(\lambda_1-\mu_1)^{-1}\ln\frac{2a(\lambda_1-\mu_1)}{\mu_1+\frac{\beta^2}{\alpha}}$,

$a$ и $\varphi_0$ –

– произвольные константы.

Далее по решениям $P_{(0,1)}$, $P_{(0,2)}$ и $P_{(1,0)}$, используя формулы (8.8), находим $P_{(1,2)}$. Зная $P_{(0,1)}$, $P_{(1,1)}$ и $P_{(2,0)}$ находим $P_{(2,1)}$. По решениям $P_{(1,1)}$, $P_{(1,2)}$, $P_{(2,1)}$ вычисляем $P_{(2,2)}$. Продолжая эту процедуру мы можем вычислить любое решение $P_{(n_1,n_2)}$.

Подчеркнем, что используя описанную выше процедуру, мы получаем решения уравнения (3.9) с произвольной функцией $\Omega(L^+)$

Отметим, что решения $p_{(n_1, n_2)}$ являются алгебраическими функциями решений $q_{(1,0)}, \dots, q_{(n_1,0)}$ и $r_{(0,1)}, \dots, r_{(0,n_2)}$, т.е. плоских волн. Иначе говоря, решения $p_{(n_1, n_2)}$ нелинейных уравнений (3.9) суть нелинейные суперпозиции решений соответствующих линеаризованных уравнений.

Нелинейный принцип суперпозиции (8.8) существенно упрощается в случае $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Нетрудно видеть, что в этом случае уравнения (8.8) имеют вид

$$2(\lambda-\mu) q_1 + 2(q_0 - q_3) + \frac{1}{2} q_1^2 (r_0 - r_3) = 0,$$
$$2(\lambda-\mu) r_2 + 2(r_3 - r_0) + \frac{1}{2} r_2^2 (q_3 - q_0) = 0. \tag{8.14}$$

Из (8.14) получаем

$$q_3 = q_0 + \frac{2(\lambda-\mu)}{\frac{r_2}{2} + \frac{2}{q_1}},$$
$$r_3 = r_0 - \frac{2(\lambda-\mu)}{\frac{q_1}{2} + \frac{2}{r_2}}. \tag{8.15}$$

Формулы (8.15) представляют собой нелинейный принцип суперпозиции для уравнений (3.9) $(q=0,\ M=N=1)$ интегрируемых с помощью линейного пучка (1.1) $(\alpha=0,\ \beta=1)$.

## IX. Заключение.

В данной работе мы рассмотрели структуру и свойства уравнений, интегрируемых с помощью пучка (1.1) в общем положении, т.е. когда величины $Q$ и $R$ являются независимыми. Представляют однако большой интерес всевозможные редукции общих уравнений. Отметим две простейшие редукции.

Первая: $(N=M)$

$$A = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & -I_N \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$



Вторая: $(M=N)$

$$A = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & -I_N \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & U \\ I_N & 0 \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

где $U$ – квадратная матрица $N \times N$, а $I_N$ – единичная матрица $N \times N$.

При редукции (9.1) пучок (1.1) эквивалентен пучку

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + (\alpha\lambda+\beta)^2 Q^2 \chi - i(\alpha\lambda+\beta)\frac{\partial Q}{\partial x}\chi + (\alpha\lambda^2+2\beta\lambda)^2 \chi = 0, \tag{9.3}$$

где $\chi = \psi_1 + \psi_2$. При редукции (9.2) пучок (1.1) эквивалентен следующему пучку

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + (\alpha\mu+\beta^2) U \psi_2 + \mu^2 \psi_2 = 0, \tag{9.4}$$

где $\mu = \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda$.

Полиноминальные пучки (9.3) и (9.4) представляют собой обобщения хорошо известных спектральных задач ( с $\alpha = 0$). Общий вид интегрируемых уравнений (3.7) при редукциях (9.1) и (9.2) и их гамильтонова структура будут рассмотрены в отдельной работе.

## Литература


I. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский, Теория солитонов. Метод обратной задачи, под ред.С.П.Новикова, Москва, Наука, 1980.

2. "Solitons", Topics in Current Physics, v. 17, Eds. R.Bullough, P.Caudrey, Springer-Verlag, 1980.

3. M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell, H.Segur, Stud.Appl. Math., 53, 249 (1974).

4. I.Miodek, J.Math.Phys., 19, 19 (1978).

5. A.C.Newell, Proc.Roy.Soc.(London), A365, 283 (1979).

6. B.G.Konopelchenko, Phys.Lett., 75A, 447 (1980); preprint Institute of Nuclear Physics 79-82 (1979).

7. П.П.Кулиш, Записки научных семинаров ЛОМИ, 96, I05 (1980); препринт ЛОМИ Р-3-79 (1979).

8. B.G.Konopelchenko, Phys.Lett., 79A, 39 (1980);100B,254 (1981).

9. B.G.Konopelchenko, J.Phys.A;Math. and Gen., 14, 1237 (1981); preprint Institute of Nuclear Physics 80-16 (1980).

IO. В.С.Герджиков, М.И.Иванов, П.П.Кулиш, ТМФ, 44, 342 (1980).

II. B.G.Konopelchenko, J.Phys.A;Math. and Gen., 14, N11, (1981).

I2. B.G.Konopelchenko, Phys.Lett., 95B, 83 (1980).

I3. Ф.А.Березин, Метод вторичного квантования, Наука, I965.

I4. Ф.А.Березин, ЯФ, 29, I670 (1979).

I5. Д.А.Лейтес, УМН, 35, № I, 3 (1980).

I6. V.G.Kac, Adv.Math., 26, 8 (1977).

I7. F.Calogero, A.Degasperis, Nuovo Cimento, 32B, 201 (1976).

I8. П.П.Кулиш, ДАН СССР, 255, 323 (1980).

I9. R.Casalbuoni, Nuovo Cimento, 33A, 115, 389 (1976).

20. F.A.Berezin, M.S.Marinov, Ann.Phys.(N.Y.), 104, 336 (1977).

2I. F.Magri, J.Math.Phys., 19, 1156 (1978).

22. П.П.Кулиш, А.Г.Рейман, Записки научных семинаров ЛОМИ, 77, I34 (1978).





23. F.Magri, Lecture Notes in Physics, v. 120, 233 (1980).

24. И.М.Гельфанд, И.Я.Дорфман, Функц. анализ и его прилож., I3, № 4, I3 (1979); I4, № 3, 7I (1980).

25. А.Г.Рейман, М.А.Семенов-Тян-Шанский, Функц. анализ и его прилож., I4, № 2, 77 (1980).

26. B.G.Konopelchenko, preprint Institute of Nuclear Physics, 81-99 (1981).

27. А.Г.Изергин, П.П.Кулиш, Записки научных семинаров ЛОМИ, 77, 76 (1978).

28. В.Е.Захаров, Л.А.Тахтаджян, ТМФ, 38, 26 (1979).

29. В.Е.Захаров, А.В.Михайлов, ЖЭТФ, 74, I953 (1978).

30. B.G.Konopelchenko, Phys.Lett., 74A, 189 (1979).

3I. B.G.Konopelchenko, Proc. XVIII Winter School of Theor. Physics in Karpacz, Poland, February-March 1981.

32. Backlund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons and their Applications, Ed. R.Miura, Lecture Notes in Mathematics, v. 515 (1976).