Н 61

30

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

С.А.Никитин,
Е.Л.Салдин, М.В.Юрков

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКОВ НА НАКОПИТЕЛЕ ВЭПП—4 В ОБЛАСТИ ЭНЕРГИЙ ИПСИЛОН—РЕЗОНАНСОВ

ПРЕПРИНТ 81-116

Новосибирск

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКОВ НА НАКОПИТЕЛЕ ВЭПП-4 В ОБЛАСТИ ЭНЕРГИЙ ИПСИЛОН-РЕЗОНАНСОВ

С.А.Никитин, Е.Л.Салдин, М.В.Юрков

АННОТАЦИЯ

Рассчитан вариант получения продольной поляризации в центре магнитного детектора с поперечным магнитным полем (MD) при помощи сверхпроводящих соленоидов, расположенных в прямолинейных промежутках по обе стороны от MD. Возмущение, вносимое соленоидами в орбитальное движение, и их деполяризующее воздействие на спин компенсируется за счет специального выбора оптики экспериментального промежутка. При этом удалось одновременно получить приемлемую равновесную степень продольной поляризации и фокусировку пучков в месте встречи, близкую к обычной. Сделана оценка деполяризующего влияния погрешностей магнитной системы.

§ I. Введение

В работе [1] разработана схема получения встречных продольно поляризованных пучков в области ψ-резонансов. Схема основана на использовании соленоида, размещенного в техническом промежутке накопителя ВЭПП-4 и поворачивающего спин на угол π. Возможность получения продольной поляризации пучков таким простейшим способом основана на замечательной особенности комплекса ВЭПП-4, а именно, на наличии бустерного накопителя ВЭПП-3 с коротким временем поляризации на энергии перепуска.

Данная работа посвящена разработке схемы получения продольной поляризации пучков на накопителе ВЭПП-4 в области ипсилон-резонансов. Упрощение такой задачи во многом обязано другой уникальной особенности накопителя ВЭПП-4: в его экспериментальном промежутке размещен магнитный детектор (МД) с вертикальным полем, поворачивающим спин на угол π (на энергии Υ'-резонанса угол поворота равен 182°). Это позволяет получать продольную поляризацию в центре МД и восстанавливать вертикальную поляризацию в полукольцах с помощью соленоидов, размещенных в прямолинейных промежутках по обе стороны от МД (см. схему на рис. I).

Сформулируем проблемы, которые возникают при решении поставленной задачи:

I) компенсация связи, вносимой соленоидами в бетатронное движение;

2) сохранение оптимальной фокусировки пучков в месте встречи (центр МД);

3) компенсация деполяризующего влияния соленоидов с целью получения достаточно высокой степени продольной поляризации;

4) минимальность переделок накопителя (размещения вставок с соленоидами на существующих прямолинейных участках экспериментального промежутка).

Для удовлетворения перечисленных требований нами выбрана следующая схема. Каждая вставка с соленоидами вращает спин вокруг скорости на угол 45° (из геометрии ясно, что при этом степень продольной поляризации меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$). Вставка имеет полную длину I0 м и состоит из 2-х соленоидов длиной 85 см и продольным полем $\sim$ 80 кГс, каждый из которых вращает спин на угол $\varphi = 22{,}5^0$. Между соленоидами размещены 6 квадрупольных линз (длина каждой 80 см, градиент поля ~ 3 кГс/см), с помощью которых связь бетатронных колебаний локализована на участке вставки. При этом вертикальные колебания на остальной части накопителя не возбуждаются из-за отсутствия синхротронного излучения на вставке.

В рассматриваемой схеме удалось подбором параметров магнитной структуры экспериментального промежутка ВЭПП-4 достигнуть фокусировки пучков в месте встречи достаточно близкой к существующей в обычном варианте накопителя.

Общая оптимизация структуры вставок и экспериментального промежутка кроме того включала в себя компенсацию спин-орбитальной связи, вносимой соленоидами. Важным моментом при этом являлся учет вклада бетатронного движения в кинетику спина. Степень продольной поляризации существенно зависит от бетатронной частоты и достигает в выбранной схеме $\sim 50\%$.

В предлагаемом варианте размещения вставок в экспериментальном промежутке остаются без изменения центральный участок МД с прилегающими к нему с обеих сторон двумя дублетами и участок с затухателем и 2-х градусным поворотным магнитом.

Таким образом, имеются реальные предпосылки для разработки детального проекта получения продольной поляризации пучков для экспериментов по измерению вклада слабых взаимодействий в сечение γ - резонансов [2].

§ 2. Компенсация связи, вносимой соленоидами в поперечное движение, и оптимизация магнитной структуры экспериментального промежутка

Действие сильных продольных полей в обсуждаемой схеме на бетатронное движение необходимо компенсировать таким образом, чтобы избежать появления в пучке значительного вертикального фазового объема. Для этого, как и в работе [1], нами применен способ локализации связи поперечных колебаний на участке специальной вставки с соленоидами. Способ состоит в организации такой фокусировки у вставки, чтобы радиальные колебания частиц, возбуждаемые квантовыми флуктуациями излучения в кольце, переходили в вертикальные отклонения только внутри самой вставки. При этом возбуждение вертикального фазового объема в остальной части кольца не происходит из-за отсутствия синхротронного излучения на вставке. Локализация связи осуществляется в схеме*, которая состоит из 2-х одинаковых соленоидов (углы поворота спина в них равны $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$) и 6-ти обычных квадрупольных линз между ними (рис. 2)

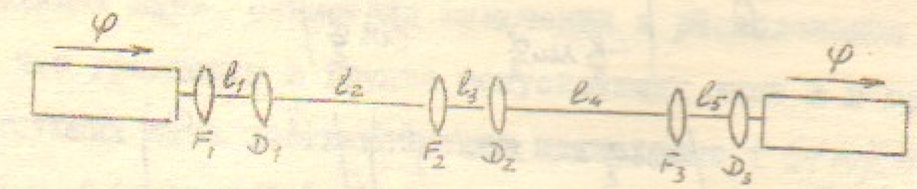


Рис. 2

Матрицу преобразования фазового пространства $(x, x'; z, z')$ при полном прохождении частицей соленоида можно представить в виде (см., например [3])

$$M_s = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ -R_2 & R_1 \end{pmatrix} \qquad (I)$$

* Мы благодарны В.Н.Литвиненко за указание на возможность использования такой схемы.

где R_1 и R_2 – блочные матрицы 2x2:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\alpha}{2} & \frac{\sin\alpha}{K} \\ -\frac{K}{4}\sin\alpha & \frac{1+\cos\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sin\alpha}{2} & \frac{1-\cos\alpha}{K} \\ -\frac{K}{4}(1-\cos\alpha) & \frac{\sin\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Здесь $\alpha = K\ell_s$, ℓ_s – длина соленоида, $K = H_{\parallel}/HR$ ($H_{\parallel}$ – поле соленоида, HR – жесткость накопителя). Угол α с точностью 10^{-3} для электрона равен углу поворота спина φ.

Можно также записать, что

$$M_s = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} R_+ \qquad (2)$$

где использовано известное свойство матрицы соленоида [3]:

$$M_s R_- = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \frac{2}{K}\sin\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{K}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_{\pm} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \pm\sin\frac{\alpha}{2} \\ \mp\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

(I – единичная матрица 2x2)

Матрица фокусирующей системы из последовательности обычных квадрупольных линз, помещенных между соленоидами, имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

где $T_{1,2}$ – блочные матрицы 2x2 по X и Z – направлениям. Найдем полное преобразование на всей вставке с учетом представления (2):

$$M_{tot} = M_s T M_s =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2}\, QT_1Q - \sin^2\frac{\alpha}{2}\, QT_2Q & \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}[QT_1Q + QT_2Q] \\ -\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}[QT_1Q + QT_2Q] & \cos^2\frac{\alpha}{2}\, QT_2Q - \sin^2\frac{\alpha}{2}\, QT_1Q \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Условие локализации связи на вставке требует, чтобы адиагональные члены в M_{tot} равнялись нулю. Из этого требования следует[ж]

$$T_1 = -T_2 \qquad (5)$$

при этом

$$M_{tot} = \begin{pmatrix} QT_1Q & 0 \\ 0 & -QT_1Q \end{pmatrix}$$

Условие (5) не зависит от α и поэтому справедливо для любых соленоидов в данной схеме. Для реализации (5) используются 6 квадрупольных линз, симметрия включения и расположения которых такова, что градиенты в группе фокусирующих линз и в группе дефокусирующих линз соответственно одинаковые ($G(F_1) = G(F_2) = G(F_3)$, $G(D_1) = G(D_2) = G(D_3)$), а $\ell_1 = \ell_3 = \ell_5$, $\ell_4 = \ell_2$. Длина у всех линз одна и та же. Перестановка фокусирующих и дефокусирующих линз местами ведет лишь к изменению общего знака M_{tot} (5). В то же время изменение знака угла поворота

[ж] Если бы углы поворота спина в соленоидах были противоположны ($\varphi_1 = -\varphi_2$), мы бы пришли к условию $T_1 = T_2$.

спина φ никак не меняет M_{tot} (см. (4) и (5)). Приведем параметры выбранной нами схемы, рассчитанной на ЭВМ методом случайного поиска:

энергия E (GeV)	= 5
угол поворота спина φ	= 22,5°
длина соленоида ℓ_s (см)	= 85
поле соленоида (кГс)	= 77
градиент F -линз (кГс/см)	= 2.3186
градиент D -линз (кГс/см)	= 3.0000
длина линз (см)	= 80
ℓ_1 (см)	= 10
ℓ_2 (см)	= 160
полная длина вставки (см)	= 1000

Матрица M_{tot} такой вставки очень напоминает единичную матрицу (с точностью до знака в одном из блоков 2х2)

$$M_{tot} = \begin{pmatrix} 0.994 & 11.7 & 0 & 0 \\ -0.001 & 0.995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.994 & -11.7 \\ 0 & 0 & 0.001 & -0.995 \end{pmatrix}$$

Выбор структуры вставки был неразрывно связан с оптимизацией всего экспериментального промежутка в целом. Оптимизация велась по 3-м основным пунктам. Это, во-первых, сохранение единичности промежутка с тем, чтобы не перестраивать фокусировку остальной части накопителя. Во-вторых, обеспечение в месте встречи (центр MD) такой же фокусировки, что и в обычном варианте накопителя. В-третьих, получение оптимальных параметров спин-орбитальной связи, которая в данной схеме существенно зависит

от фокусировки. Наконец, при всем этом мы стремились удовлетворить условию минимальности переделок промежутка. С учетом последнего были оставлены нетронутыми два больших участка промежутка: центральный участок MD с прилегающими к нему с двух сторон двумя симметричными дублетами, которые служат для создания минимума β -функций в месте встречи; и участок затухателя с двухградусным магнитом. Кроме 2-х вставок и перечисленных нетронутых элементов в структуру промежутка включены еще 5 квадрупольных линз. Оптимальное согласование градиентов во всех линзах проводилось с помощью программы [4]. На рис. 3 показан вид β -функций в полученном варианте промежутка. В месте встречи при этом

$$\beta_z = 55 \text{ см}$$
$$\beta_x = 670 \text{ см}$$

(в обычном варианте накопителя $\beta_z = 45$ см, $\beta_x = 400$ см).

В заключении приведем данные о требуемой полной апертуре камеры на участках вставок с соленоидами. На рис. 4 и рис. 5 показано поведение проекций полной апертуры камеры на оси X и Z ($2A_x$ и $2A_z$) внутри первой и второй вставок. За основу принята апертура в кольце накопителя, соответствующая расстоянию от центра камеры до ее стенок ~ $10\,\sigma_{x,z}$, где $\sigma_{x,z}$ - размеры пучка на энергии 5 GeV. Величина $\sigma_{x,z}$ подставлялась из данных по измерению размеров пучка на ВЭПП-4.

§ 3 Кинетика поляризации

Согласно работе [5] в накопителе с произвольной магнитной структурой всегда существует периодическое решение в движении спина $\vec{n}(\theta) = \vec{n}(\theta + 2\pi)$, где $\vec{n}$ – направление спина на азимуте θ ($|\vec{n}| = 1$). Равновесная степень радиационной поляризации частиц равна [6]:

$$\zeta = \frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{\langle |\dot{\vec{v}}|^2 \vec{v} \times \dot{\vec{v}} (\vec{n} - \gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}) \rangle}{\langle |\dot{\vec{v}}|^3 [1 - \frac{2}{9} (\vec{n} \cdot \vec{v})^2 + \frac{11}{18} (\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma})^2] \rangle} . \quad (1)$$

где $\vec{v}$, $\dot{\vec{v}}$ – скорость и ускорение частицы ($C = 1$) на азимуте θ, $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ – параметр спин-орбитальной связи, скобки $\langle \ldots \rangle$ означают усреднение по азимуту накопителя.

Физический смысл параметра $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ можно пояснить следующим образом. При движении частицы по равновесной траектории проекция спина на ось $\vec{n}$ является интегралом движения т.е. $S_n = \vec{S} \cdot \vec{n} = const$. Пусть на азимуте θ_0 частица испытала скачок в энергии $\delta\gamma$. Будем полагать, что направление спина при скачке не меняется. При движении частицы по неравновесной траектории на спин действуют дополнительные поля, которые отклоняют его от равновесного направления $\vec{n}$. За время радиационного затухания λ^{-1} орбитальное движение релаксирует к равновесному, однако проекция S_n при этом не восстанавливается. Набранное за это время изменение δS_n можно представить в виде ($\vec{S} \cdot \delta\vec{S} = 0$):

$$\delta S_n = - \vec{S}(\theta_0 + 2\pi N) \cdot \delta\vec{S}_\perp(\theta_0 + 2\pi N) / S_n \quad (2)$$

где $\delta\vec{S}_\perp$ – изменение спина, ортогональное к $\vec{n}$, обусловленное действием на спин дополнительных полей, N – число оборотов, совершенных частицей с момента скачка энергии. Обозначим через $\delta\vec{S}_\perp^{\kappa}$ – дополнительное изменение поперечной компоненты спина на κ – обороте. Вследствие малости возмущающих полей всегда можно записать, что

$$\delta\vec{S}_\perp^{\kappa}(\theta) = \vec{a}_\kappa(\theta) S_n \frac{\delta\gamma}{\gamma} e^{-2\pi\kappa\lambda} \quad (3)$$

Суммарное изменение спина за N оборотов составит

$$\Delta\vec{S}_\perp(N) = Re\Big[\sum_{\kappa=1}^{N} \delta\vec{S}_\perp^{\kappa} e^{i2\pi(N-\kappa)\nu_0}\Big] + \vec{n} \times Im\Big[\sum_{\kappa=1}^{N} \delta\vec{S}_\perp^{\kappa} e^{i2\pi(N-\kappa)\nu_0}\Big] \quad (4)$$

(ν_0 – частота процессии спина вокруг $\vec{n}$). Выделим в явном виде вращение в выражении (4):

$$\Delta\vec{S}_\perp(N) = \vec{b} \cos 2\pi N\nu_0 + \vec{n} \times \vec{b} \sin 2\pi N\nu_0 \quad (5)$$

Из (3–5) имеем:

$$\vec{b} = S_n [\vec{P} + \vec{n} \times \vec{Q}] \frac{\delta\gamma}{\gamma} \quad (6)$$

где

$$\vec{P} = Re\Big[\sum_{\kappa=1}^{N} \vec{a}_\kappa e^{-i2\pi\kappa(\nu_0 - i\lambda)}\Big],$$

$$\vec{Q} = Im\Big[\sum_{\kappa=1}^{N} \vec{a}_\kappa e^{-i2\pi\kappa(\nu_0 - i\lambda)}\Big], \quad \vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{Q} \cdot \vec{n} = 0$$

Для $2\pi N\lambda \gg 1$ $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ независят от N. Учитывая, что

$$\vec{S}(\theta_0 + 2\pi N) = (\vec{S} \cdot \vec{n})\vec{n} + \vec{S}_\perp(\theta_0) \cos 2\pi N\nu_0 + \vec{n} \times \vec{S}_\perp(\theta_0) \sin 2\pi N\nu_0$$

и подставляя (6) в (2), получим

$$\delta S_n = - \vec{S}(\theta_0) [\vec{P} + \vec{n} \times \vec{Q}] \frac{\delta\gamma}{\gamma}$$

Исходя из определения параметра спин-орбитальной связи [6–8]:

$$\delta S_n = \vec{S} \cdot \Big(\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}\Big) \frac{\delta\gamma}{\gamma}$$

имеем в итоге *)

$$\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma} = -\left[\vec{P} + \vec{n} \times \vec{Q}\right] \qquad (7)$$

На рис.I приведена кинематика движения спина в рассматриваемом нами способе получения продольной поляризации **). Выражение для $\vec{n}$ при любой энергии и произвольных, но одинаковых углах поворота в соленоидах получено в приложении I. В случае, если угол поворота спина в магнитном детекторе МД равен π, то в полукольцах $\vec{n}$ направлен вертикально, а в детекторе его проекции равны

$$n_x(\theta) = -\sin 2\varphi \cos\alpha\,,\; n_y(\theta) = \sin 2\varphi \sin\alpha\,,\; n_z(\theta) = \cos 2\varphi \qquad (8)$$

где 2φ – угол поворота спина на вставке с соленоидами, α определяется следующим образом

$$\alpha(\theta) = \nu \int\limits_{\theta}^{\theta_1} \mathcal{K}(\theta')\,d\theta'$$

(θ_1 – азимут границы детектора, $\mathcal{K}$ – безразмерная кривизна траектории частицы, ν = E (МэВ)/440.64). Из (8) видно, что изменением знака поля в соленоидах (знак 2φ) можно менять знак спиральности встречных пучков.

Если угол поворота спина в МД не равен π, то в полукольцах $\vec{n}$ может отклоняться от вертикали на угол порядка единицы. В этом случае основной вклад в величину $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ дает хроматичность поворота спина в соленоидах и в ведущем поле. Этот вклад вычисляется дифференцированием полного выражения для $\vec{n}(\theta)$ по энергии (см.приложение I).

---

*) Строго говоря, выражение для $\delta \vec{S}_{\perp}^{K}$ представляет собой сумму слагаемых с разными декрементами затухания (бетатронными λ_x, λ_z и синхротронным λ). Однако, очевидно, результат (7) от этого не изменится. В приведенных выше рассуждениях не учитывались также синхротронные колебания, что справедливо, если отстройка от спиновых резонансов много больше синхротронной частоты ν_γ (для ВЭПП-4 $\nu_\gamma \simeq 0{,}01$).

**) На возможность реализации для накопителя ВЭПП-4 такой кинематической схемы получения продольной поляризации в области энергий Е $\simeq$ 5 ГэВ первым обратил внимание Ю.М.Шатунов.

Из формул (III-4) следует, что при этом $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma} \sim \nu$. Последнее является неприемлемым, если поляризация происходит за счет ведущего поля. Таким образом,восстановление вертикального направления спина в полукольцах является в рассматриваемой схеме обязательным условием. В оптимальном случае вклад хроматичности поворотов в $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ порядка $\pi \sin 2\varphi \sim$ I. Вклад бетатронных колебаний [7] составляет по порядку величины ν/ν_x (частота бетатронных колебаний $\nu_x \simeq 9$, $\nu = 11{,}3$), что сравнимо с вкладом от хроматичности. В области спиновых резонансов $\nu_x \pm \nu_0$ = К (ν_0 – частота прецессии спина, равная в выбранной схеме параметру ν, К = 0 $\pm$ I,...) вклад бетатронного движения в спин-орбитальную связь становится доминирующим. Важно отметить, что при фиксированной кинематике спина бетатронной частью параметра $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ можно управлять с помощью настройки фокусировки вставок и промежутка, а также выбором частоты ν_x (в отличии от вклада хроматичности). Это дает возможность за счет оптимизации величины $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ получить достаточно высокую степень продольной поляризации в центре МД (см. формулу (I)).

В приложении П приведен метод вычисления параметра $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ для любых схем, в которых возбуждение бетатронных колебаний квантовыми флуктуациями в магнитах происходит только по радиусу, а вертикальное движение учитывается внутри вставок с локализованной в них связью поперечных степеней свободы. Величина $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ рассчитывается в этом приближении последующим формулам:

$$\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma} = -\left[\vec{P} + \vec{n} \times \vec{Q}\right]$$

$$P_j = -\sqrt{\frac{\mathcal{H}}{\beta_1}}\,\frac{1}{4\sin\pi(\nu_x+\nu_0)\sin\pi(\nu_x-\nu_0)}\Big\{(A_j\beta_1 - B_j\alpha_1)\big[\cos\Phi_0\cos 2\pi\nu_0 - \cos(2\pi\nu_x + \Phi_0)\big] + B_j\big[\sin(2\pi\nu_x+\Phi_0) - \sin\Phi_0\cos 2\pi\nu_0\big]\Big\} - \frac{1}{2}D_j$$

$$Q_j = -\sqrt{\frac{\mathcal{H}}{\beta_1}}\,\frac{\sin 2\pi\nu_0}{4\sin\pi(\nu_x+\nu_0)\sin\pi(\nu_x-\nu_0)}\Big\{-(A_j\beta_1 - B_j\alpha_1)\cos\Phi_0 + B_j\sin\Phi_0\Big\} - \frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_0\,D_j \qquad (9)$$

$$j = x, y, z$$

где $\mathcal{H}(\theta) = [\psi_x^2 + (\alpha_x\psi_x + \beta_x\psi_x')^2]/\beta_x$; $\beta_x, \psi_x, \alpha_x = -\beta_x'/2$, ψ_x' – – амплитудная, дисперсионная функции и их производные на азимуте θ; $\phi_o = \arccos(-\psi_x/\sqrt{\mathcal{H}\beta_x}) - \int_0^\theta \frac{R\,d\theta'}{\beta_x}$ (R – средний радиус машины); $\beta_1 = \beta_x(0)$, $\alpha_1 = \alpha_x(0)$; коэффициенты A_j , B_j , D_j рассчитываются при интегрировании изменений спина $\Delta\vec{S}_\perp$ неравновесной частицы в пределах от θ до $\theta + 2\pi$ так, как показано в приложении П.

Выбор схемы экспериментального промежутка и структуры внутри вставок проводился с учетом оптимизации величин A_j , B_j , D_j . Для полученного оптимального варианта на рис.6 приведена рассчитанная по формулам (9) зависимость степени продольной поляризации $\zeta \cdot n_\parallel$ (в схеме $2\varphi = 45^\circ$, поэтому из (8) имеем в центре МД $n_\parallel = \sqrt{2}/2$) от радиальной бетатронной частоты ν_x . Около точки $\nu_x = 0.76$ величина $\zeta \cdot n_\parallel$ близка к 50%, а в узкой области резонансов $\nu_x \pm \nu_o$ = К она падает до нуля. Соответствующее время поляризации τ_p вычислялось по формуле [6] :

$$\tau_p = \tau_p^o \langle |K|^3 \rangle \left[\left\langle \left(1 - \frac{2}{9}(\vec{n}\cdot\vec{v})^2 + \frac{11}{18}\left(\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}\right)^2\right)|K|^3 \right\rangle \right]^{-1}$$

где τ_p^o – время поляризации в накопителе без соленоидов, равное

$$\tau_p^o = \left[\frac{5\sqrt{3}}{8} \frac{r_e \lambda_c \gamma^5}{R^3} \langle |K|^3 \rangle \right]^{-1}$$

$$\left(\lambda_c = \frac{\hbar}{m} ,\ r_e = e^2/m \right)$$

Для ВЭПП-4

$$\tau_p^o = \frac{2000\ (\text{час})}{E^5\ (\text{ГэВ})}$$

Как видно из рис.7, на котором изображена зависимость τ_p от частоты ν_x , время поляризации на энергии 5 ГэВ является вполне приемлемым для проведения экспериментов с продольно поляризованными пучками при условии, что их время жизни составляет порядка нескольких часов.

Кроме расчетной величины $\gamma\frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ в общем случае следует ожидать появления в накопителе паразитной спин-орбитальной связи вследствие погрешностей в магнитной структуре. Так как в рассматриваемой схеме $\vec{n}$ на большей части кольца совпадает с вертикалью, то представляется возможным для оценки паразитной $\gamma\frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ использовать приближение обычного накопителя с вертикальной поляризацией. В обычном накопителе без соленоидов основное деполяризующее действие на спин оказывают радиальное поле H_x и его радиальный градиент $\partial H_x/\partial x$, причем, это действие усиливается вблизи резонансов ν = К и $\nu_{x,z} \pm \nu$ = К [7,8] . Причиной появления радиального поля в основном служат вертикальные смещения линз, приводящие к вертикальным искажениям замкнутой орбиты. Градиент $\partial H_x/\partial X$ возникает из-за поворотов линз вокруг своих осей и обуславливает связь бетатронных колебаний по X , Z -направлениям. В приложении Ш приведена схема расчета спин-орбитальной связи в обычном накопителе при наличии перечисленных возмущений. На рис. (9,10) приведена расчитанная для ВЭПП-4 степень равновесной поляризации ζ в неидеальном накопителе, нормированная на степень поляризации в идеальном накопителе (ζ_o = 0,92), как функция энергии (ν). Рис.9(а) показывает эффект некоррелированного действия поворотов всех линз накопителя с разбросом углов поворота 10^{-3} (в соответствии с данными измерения величины коэффициента связи бетатронных колебаний на ВЭПП-4). Для сравнения на рис.9(б) приведен результат поворота одной из сильных линз (L 7) экспериментального промежутка на угол $5 \cdot 10^{-4}$. Деполяризующее влияние вертикальных смещений линз иллюстрирует рис.10. Рис.10(а) соответствует среднеквадратичному разбросу смещений $2 \cdot 10^{-2}$ см. Рис.10(б) соответствует смещению линзы L 7 на 0.05 см. Используемые величины смещений согласуются с реально имеющимися вертикальными искажениями орбиты (порядка 1 мм). Приведенные оценки показывают, что в выбранной кинематической схеме паразитная связь, вносимая вертикальными искажениями замкнутой орбиты, сильно подавлена из-за большой отстройки частоты прецессии спина ν_o от целого резонанса ($\nu_o = \nu$ = 11,36 при энергии ψ'-мезона). Из расчета степени продольной поляризации (рис.6) следует, что оптимальная рабочая точка по ν_x должна отстоять от резонанса $\nu_x + \nu_o$ = 20 на величину порядка 0,1. Оценки деполяризующего влияния погрешностей магнитной системы показывают, что при таких отстройках приближение идеального накопителя можно считать правомерным.

В заключении мы хотим выразить глубокую благодарность Я.С.Дербеневу и А.М.Кондратенко за неизменную поддержку в течение всего времени выполнения этой работы.

Литература

I. С.А.Никитин, Е.Л.Салдин. Препринт ИЯФ 8I-I9 (I98I).

2. Ю.И.Сковпень, И.Б.Хриплович, ЯФ, 30, 589 (I979).

3. R. Larsen, SPEAR 107 (1971)

4. А.А.Жоленц, И.Я.Протопопов, А.Н.Скринский. Препринт ИЯФ 76-II0 (I976).

5. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский. ЖЭТФ, 60, I2I6 (I97I), ДАН СССР, I92, I255 (I970).

6. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко. Препринт ИЯФ 72-68 (I972), ЖЭТФ, 64, I9I8 (I973).

7. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, ЖЭТФ, 62, 430 (I972).

8. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский. Препринт ИЯФ 77-60 (I977), Part. Acc. 9 (I979).

Приложение I

Вычислим равновесное направление спина $\vec{n}(\theta)=\vec{n}(\theta+2\pi)$ для схемы (Рис. 1). Пусть угол поворота спина в МД произвольный – φ_1. Каждая вставка вращает спин вокруг скорости на угол 2φ. Используем для наших целей формализм спинорных матриц [5]. Спинорная матрица произвольного вращения имеет вид

$$M = I\cos\frac{\Phi}{2} - i\sin\frac{\Phi}{2}(\sigma_x\cos\alpha_x+\sigma_y\cos\alpha_y+\sigma_z\cos\alpha_z) \qquad (I)$$

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

где Φ – угол поворота спина вокруг вектора, задаваемого направляющими косинусами $\cos\alpha_j$, $j=x,y,z$. Для вычисления $\vec{n}(\theta)$ необходимо для данного азимута θ_0 перемножением матриц поворота на отдельных участках накопителя получить оборотную матрицу

$$M(\theta_0) = I C_0 - i(\sigma_x C_x+\sigma_y C_y+\sigma_z C_z)$$

где $C_{0,x,y,z}$ – действительные коэффициенты.
Из определения M через Φ и $\cos\alpha_j$ следует

$$n_j(\theta_0) = \pm\frac{C_j}{\sqrt{1-C_0^2}}, \quad j=x,y,z \qquad (2)$$

частота прецессии спина ν_0 определяется из соотношения = = $C_0 = \cos\pi\nu_0$

Если θ_0 находится в одном из полуколец (см.рис. I.1), то полная матрица $M(\theta_0)$ на обороте равна

$$M(\theta_0) = M_z(\varphi_3)\,M_y(2\varphi)\,M_z(\varphi_1)\,M_y(2\varphi)\,M_z(\varphi_2)$$

где

$$\varphi_2 = \nu\int_{\theta_0}^{2\pi}\mathcal{K}\,d\theta, \quad \varphi_3 = 2\pi\nu-\varphi_1-\varphi_2$$

$\mathcal{K}$ – безразмерная кривизна орбиты, $M_z(x)$ – матрица поворота спина вокруг оси Z на угол x

$$M_z(x) = I\cos\frac{x}{2} - i\sigma_z\sin\frac{x}{2}$$

и $M_y(2\varphi)$ – матрица поворота спина на вставке $M_y(2\varphi)=I\cos\varphi-i\sigma_y\sin\varphi$

Из (2) получим, что в кольце

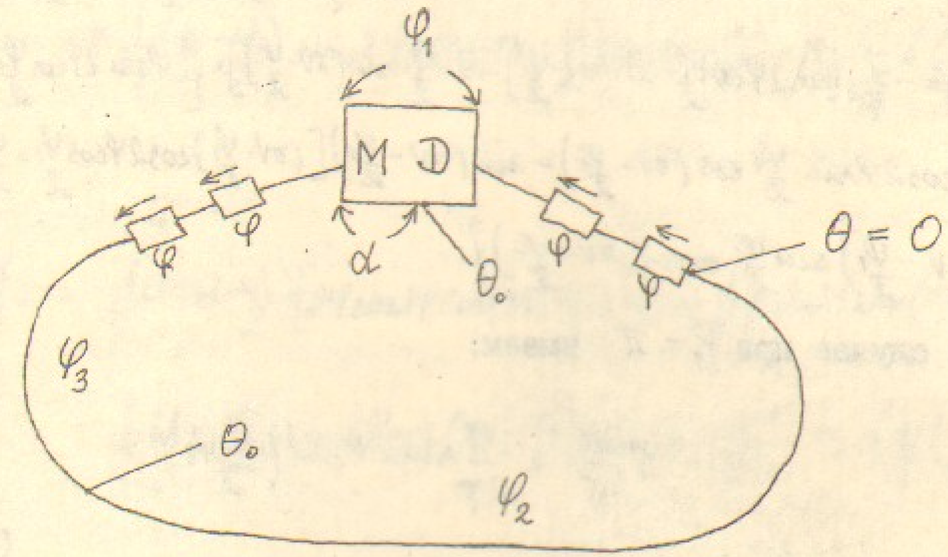


Рис I.1

$$n_x = \sin 2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right)/\xi$$

$$n_y = \sin 2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right)/\xi$$

$$n_z = \left[\cos 2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)+\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]/\xi \qquad (3)$$

$$\xi = \pm\left\{1-\left[\cos 2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)-\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]^2\right\}^{1/2}$$

Дифференцируя (3) по энергии, найдем величину $\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}(\theta)$ без учета бетатронного движения:

$$\gamma\frac{\partial n_x}{\partial\gamma} = -\frac{1}{\xi}\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right)\left[2\varphi\cos 2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}+\frac{\varphi_1}{2}\sin 2\varphi\sin\frac{\varphi_1}{2}\right]+$$
$$+\frac{1}{2\xi}(\varphi_2-\varphi_3)\sin 2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right)-n_x\left(\frac{1}{\xi}\gamma\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\right) \qquad (4)$$

$$\gamma\frac{\partial n_y}{\partial\gamma} = -\frac{1}{\xi}\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right)\left[2\varphi\cos 2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}+\frac{\varphi_1}{2}\sin 2\varphi\sin\frac{\varphi_1}{2}\right]-$$
$$-\frac{1}{2\xi}(\varphi_2-\varphi_3)\sin 2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right)-n_y\left(\frac{1}{\xi}\gamma\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\right)$$

$$\gamma\frac{\partial n_z}{\partial\gamma}=\frac{1}{\xi}\sin\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\left[2\varphi\sin2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}-\frac{\varphi_1}{2}\cos2\varphi\sin\frac{\varphi_1}{2}\right]+$$
$$+\frac{1}{\xi}\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos\frac{\varphi_1}{2}\left[\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos2\varphi+\frac{\varphi_1}{2}\right]-\frac{1}{\xi}\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)-n_z\left(\frac{1}{\xi}\gamma\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\xi}\gamma\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\right)=-\frac{1}{\xi^2}\left[\cos2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)-\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]\times\left\{2\varphi\sin2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)-\right.$$
$$-\frac{\varphi_1}{2}\cos2\varphi\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)-\sin\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\left[\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos2\varphi\cos\frac{\varphi_1}{2}+\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2}\right]-$$
$$\left.-\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\right\}$$

В частном случае при $\varphi_1=\pi$ имеем:

$$n_x=0,\qquad \gamma\frac{\partial n_x}{\partial\gamma}=-\frac{\pi}{2\xi}\sin2\varphi\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right)$$

$$n_y=0,\qquad \gamma\frac{\partial n_y}{\partial\gamma}=-\frac{\pi}{2\xi}\sin2\varphi\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right) \tag{5}$$

$$n_z=\pm1,\qquad \gamma\frac{\partial n_z}{\partial\gamma}=0$$

$$\xi=\pm\sin\pi\nu$$

$$\left(\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}\right)^2=\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sin2\varphi}{\sin\pi\nu}\right)^2$$

Частота прецессии спина ν_0 равна при этом параметру ν

$$\nu_0=\nu=\frac{E\,(MeV)}{440{,}64}$$

Если θ_0 находится в магните МД, то аналогичным образом получим

$$n_x=\sin2\varphi\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\varphi_1}{2}\right)/\xi$$

$$n_y=\sin2\varphi\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\varphi_1}{2}\right)/\xi \tag{6}$$

$$n_z=\left[\cos2\varphi\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)+\cos\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]/\xi$$

$$\gamma\frac{\partial n_x}{\partial\gamma}=-\frac{1}{\xi}\sin\left(\alpha-\frac{\varphi_1}{2}\right)\left[2\varphi\cos2\varphi\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)+\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin2\varphi\sin\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\xi}\left(\alpha-\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin2\varphi\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\varphi_1}{2}\right)-n_x\left(\frac{1}{\xi}\gamma\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\right)$$

$$\gamma\frac{\partial n_y}{\partial\gamma}=-\frac{1}{\xi}\cos\left(\alpha-\frac{\varphi_1}{2}\right)\left[2\varphi\cos2\varphi\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)+\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin2\varphi\sin\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]-$$
$$-\frac{1}{\xi}\left(\alpha-\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin2\varphi\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\varphi_1}{2}\right)-n_y\left(\frac{1}{\xi}\gamma\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\right)$$

$$\gamma\frac{\partial n_z}{\partial\gamma}=\frac{2\varphi}{\xi}\sin2\varphi\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)+\frac{1}{\xi}\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\left[\frac{\varphi_1}{2}\cos2\varphi+\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right]-$$
$$-\frac{1}{\xi}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\left[\frac{\varphi_1}{2}+\left(\pi\nu-\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos2\varphi\right]-$$
$$-n_z\left(\frac{1}{\xi}\gamma\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\right)$$

величины ξ и $\left(\frac{1}{\xi}\gamma\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\right)$ определены выше. При $\varphi_1=\pi$ имеем

$$n_x=-\sin2\varphi\sin\pi\nu\cos\alpha/\xi$$

$$n_y=\sin2\varphi\sin\pi\nu\sin\alpha/\xi \tag{7}$$

$$n_z=\cos2\varphi\sin\pi\nu/\xi$$

Приложение II

Метод вычисления параметра спин-орбитальной связи $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ в накопителях в общем случае содержится в работе [7]. В данной работе для нахождения величины $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}$ применим менее компактный, но более наглядный способ, заключающийся в суммировании изменений спина по оборотам [1].

Пусть на азимуте θ_0 частица со спином $\vec{S}_0$, направленным по $\vec{n}$, получает приращение энергии $\frac{\delta\gamma}{\gamma}$. При движении по неравновесной траектории на спин действуют дополнительные поля, которые отклоняют его от равновесного направления $\vec{n}$. За время радиационного затухания λ^{-1} орбитальное движение релаксирует к равновесному, однако направление спина при этом не восстанавливается. Набранное за это время изменение спина $\Delta\vec{S}=\vec{S}-\vec{S}_0$ лежит в плоскости, перпендикулярной к $\vec{n}$, и вращается с частотой прецессии ν_0. Для случая $2\pi\lambda N \gg 1$ (N – число оборотов частицы в накопителе после скачка энергии) определим вектор $\vec{b}(\theta)$ такой, что полное изменение спина за N оборотов можно записать в виде:

$$\Delta\vec{S}_N = \vec{b}\cos 2\pi\nu_0 N + \vec{n}\times\vec{b}\sin 2\pi\nu_0 N \tag{1}$$

Знак поворота спина в (1) выбран в соответствии с определением $\vec{n}$ (см.приложение I).

Очевидно, что $\vec{b}$ пропорционален скачку энергии $\frac{\delta\gamma}{\gamma}$, при этом коэффициент пропорциональности с обратным знаком носит название параметра спин-орбитальной связи

$$\vec{b}(\theta) = -\left[\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}(\theta)\right]\frac{\delta\gamma}{\gamma} \tag{2}$$

Обозначим через $\delta\vec{S}_K$ изменение спина на К-обороте. Суммарное изменение спина за N оборотов составит

$$\Delta\vec{S}_N = Re\left[\sum_{K=1}^{N}\delta\vec{S}_K e^{i2\pi\nu_0(N-K)}\right] + \vec{n}\times Jm\left[\sum_{K=1}^{N}\delta\vec{S}_K e^{i2\pi\nu_0(N-K)}\right] \tag{3}$$

Введем обозначения:

$$\frac{\delta\gamma}{\gamma}\vec{P} = Re\left[\sum_{K=1}^{N}\delta\vec{S}_K e^{-i2\pi\nu_0 K}\right] \tag{4}$$

$$\frac{\delta\gamma}{\gamma}\vec{Q} = Jm\left[\sum_{K=1}^{N}\delta\vec{S}_K e^{-i2\pi\nu_0 K}\right]$$

Тогда из сравнения (1), (2) и (3) получим:

$$\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma} = -(\vec{P}+\vec{n}\times\vec{Q}) \tag{5}$$

Суммирование в (4) предполагает, конечно, наличие множителя $e^{-2\pi\lambda K}$, учитывающего затухание. В дальнейшем мы этот множитель явно выписывать не будем, производя суммирование по тем же правилам, что и в работе [1].

Таким образом, для определения $\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}(\theta)$ необходимо найти выражение для $\delta\vec{S}_K$ и вычислить сумму (4).

Величина $\delta\vec{S}_K$ дается интегрированием уравнения для спина неравновесной частицы [8]

$$\frac{d\vec{S}}{d\theta} = \vec{W}\times\vec{S} \tag{6}$$

В обычном ускорительном базисе $\vec{e}_{x,y,z}$ ($\vec{e}_y$ направлен по равновесной скорости) частота прецессии $\vec{W}$ для накопителя с плоской орбитой и продольным полем $H_\parallel$ согласно [8] имеет вид:

$$\begin{aligned} W_x &= (\nu+1)z'' - W_0 x' \\ W_y &= -W_0\left(1-\frac{\delta\gamma}{\gamma}\right) \\ W_z &= \nu K\left(1+\frac{\delta\gamma}{\gamma}\right) - (\nu+1)x'' - W_0 z' \end{aligned} \tag{7}$$

где К – безразмерная кривизна орбиты, отклонения x и z нормированы на средний радиус R накопителя, $\nu = \gamma q'/q_0$ (γ – релятивистский фактор, $q_0 = e/mc$ – магнитный момент, q' – его аномальная часть), $W_0 = q_0 H_\parallel/\gamma\omega_0$, ω_0 – равновесная частота обращения. Для наших целей мы будем использовать другой базис, связанный со скоростью неравновесной частицы $\vec{v}$ [8]:

$$\vec{l}_1 = \frac{\vec{v}\times\vec{e}_z}{|\vec{v}\times\vec{e}_z|}\ ; \quad \vec{l}_2 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\ , \quad \vec{l}_3 = \vec{l}_1\times\vec{l}_2$$

$$\vec{v} = \frac{c}{(1+\mathcal{K}x)}\left[\vec{e}_x x' + (1+\mathcal{K}x)\vec{e}_y + \vec{e}_z z'\right]$$

Переходя к этому базису с учетом того, что он вращается относительно ускорительного базиса с угловой скоростью $W_0 = -z''\vec{e}_x - x''\vec{e}_z$ получим:

$$W_1 = \nu z'' \qquad (8)$$

$$W_2 = -W_0\left(1 - \frac{\delta\gamma}{\gamma}\right)$$

$$W_3 = \nu\mathcal{K}\left(1 + \frac{\delta\gamma}{\gamma}\right) - \nu x''$$

Интересно отметить, что в соленоиде ($W_0 \neq 0$) частота прецессии $\vec{W}$ в обоих базисах одинакова (ср. (7) и (8). Вопрос выбора системы ортов для вычисления суммы (4) не является принципиальным. Это связано с тем, что до скачка энергии и после релаксации к равновесному состоянию базисы $\vec{e}_{x,y,z}$ и $\vec{e}_{1,2,3}$ совпадают. Поэтому интегральные изменения спина $\Delta\vec{S}_N$ в обоих базисах равны.

Учитывая это, а также то, что $S_{1,2,3} = S_{x,y,z} + O(x', z')$, получим уравнение для отклонений спина от равновесного направления в базисе, связанном со скоростью частицы: ( )

$$(\delta S)_1' = S_z W_0 \frac{\delta\gamma}{\gamma} - \nu S_y\left(\mathcal{K}\frac{\delta\gamma}{\gamma} - x''\right) - W_0\,\delta S_3 - \nu\mathcal{K}\,\delta S_2$$

$$(\delta S)_2' = \nu S_x\left(\mathcal{K}\frac{\delta\gamma}{\gamma} - x''\right) - \nu S_z z'' + \nu\mathcal{K}\,\delta S_1$$

$$(\delta S)_3' = -S_x W_0\frac{\delta\gamma}{\gamma} + \nu S_y z'' + W_0\,\delta S_1$$

где $\delta\vec{S} = \vec{S} - \vec{S}_0$

Прежде всего необходимо найти выражение для $\delta\vec{S}$, набираемых при прохождении характерных элементов накопителя в данной схеме.

а) Соленоид (К = 0, $W_0 \neq 0$) осуществляет поворот спина вокруг оси y на угол $\varphi = W_0\Delta\theta_s$ ($\Delta\theta_s$ – протяженность соленоида по азимуту)

$$\vec{S}(4) = R_y(\varphi)\vec{S}(1)$$

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

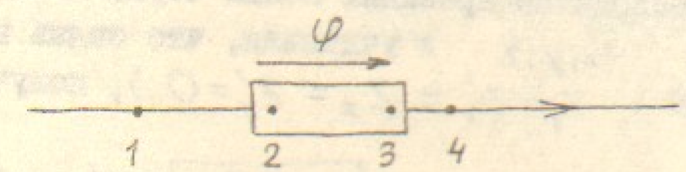


Рис. II.1

где $\vec{S}(1)$ и $\vec{S}(4)$ вектор $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ в точках, указанных на рис. II.1. Следуя работе [1], из уравнений (9) получим:

$$\delta S_1 = S_x\varphi\sin\varphi\frac{\delta\gamma}{\gamma} + \nu S_y\left[x_4' - (x_1' - \varphi z_2')\cos\varphi - (z_1' + \varphi x_2')\sin\varphi\right] - S_z\varphi\cos\varphi\frac{\delta\gamma}{\gamma}$$

$$\delta S_2 = \nu S_x\left[x_1' - x_4'\cos\varphi + z_4'\sin\varphi - \varphi z_2'\right] + \nu S_z\left[z_1' - x_4'\sin\varphi - z_4'\cos\varphi + \varphi x_2'\right]$$

$$\delta S_3 = S_x\varphi\cos\varphi\frac{\delta\gamma}{\gamma} + \nu S_y\left[z_4' + (x_1' - \varphi z_2')\sin\varphi - (z_1' + \varphi x_2')\cos\varphi\right] + S_z\varphi\sin\varphi\frac{\delta\gamma}{\gamma}$$

точка 2 соответствует началу области в соленоиде с однородным полем, $S_{x,y,z}$ проекции в точке I.

б) Для вставки (рис. II. 2) с двумя одинаковыми соленоидами и линзами между ними, компенсирующими связь, имеем

$$\vec{\delta S} = R_y(\varphi)\,\vec{\delta S_I} + \vec{\delta S_{II}}$$

где $\vec{\delta S_I}$ и $\vec{\delta S_{II}}$ изменения на I и II соленоидах (см.пункт а)

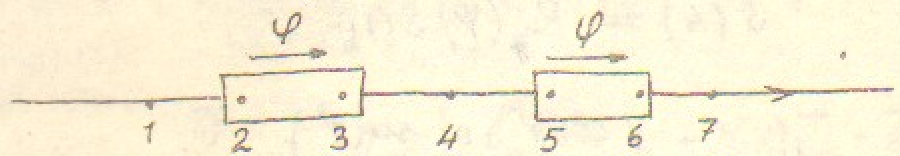


Рис.II.2

Выражая все необходимые проекции спина через его входные в точке I значения $S_{x,y,z}$ и учитывая, что связь вне вставки скомпенсирована ($z_1 = z_1' = z_7 = z_7' = 0$), получим

$$\delta S_1 = 2S_x\varphi\sin 2\varphi\frac{\delta\gamma}{\gamma} + \nu S_y\left[x_7' - x_1'\cos 2\varphi + \varphi\left(z_2'\cos 2\varphi - x_2'\sin 2\varphi + z_5'\cos\varphi - x_5'\sin\varphi\right)\right] - 2S_z\varphi\cos 2\varphi\frac{\delta\gamma}{\gamma}$$

$$\delta S_2 = \nu S_x\left[x_1' - x_7'\cos 2\varphi - \varphi\left(z_2' + z_5'\cos\varphi + x_5'\sin\varphi\right)\right] + \nu S_z\left[-x_7'\sin 2\varphi + \varphi\left(x_2' - z_5'\sin\varphi + x_5'\cos\varphi\right)\right]$$

$$\delta S_3 = 2S_x\varphi\cos 2\varphi\frac{\delta\gamma}{\gamma} + \nu S_y\left[x_1'\sin 2\varphi - \varphi\left(z_2'\sin 2\varphi + x_2'\cos 2\varphi + z_5'\sin\varphi + x_5'\cos\varphi\right)\right] + 2S_z\varphi\sin 2\varphi\frac{\delta\gamma}{\gamma}$$

в) На участке с обычной фокусировкой и ведущим полем, поворачивающим спин вокруг оси Z на угол $\alpha = \nu\int K\,d\theta$, имеем

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и изменение проекций из (9) в приближении, когда отсутствуют колебания по Z ($Z'' = 0$):

$$\delta S_3 = 0\,,\quad \delta(S_1 + iS_2) = i\,(S_x + iS_y)\big|_2\left[\alpha\frac{\delta\gamma}{\gamma} - \nu(x_2' - x_1')\right]$$

где $(S_x + iS_y)\big|_2$ – комбинация из проекций спина на выходе участка в точке 2. То же самое можно записать в виде:

$$\vec{\delta S} = R_z\left(\tfrac{\pi}{2}\right) Y \vec{S}(2) = R_z\left(\alpha + \tfrac{\pi}{2}\right) Y \vec{S}(1)$$

$$Y = \left[\alpha\frac{\delta\gamma}{\gamma} - \nu(x_2' - x_1')\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

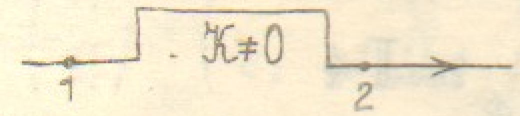


Рис.II.3

Используя результаты пунктов а, б, в легко просуммировать изменения спина в пределах от $\theta_0 + 2\pi(K-1)$ до $\theta_0 + 2\pi K$ и тем самым найти вектор $\vec{\delta S_K}$. С точки зрения кинетики спина необходимо посчитать величину $\vec{\delta S_K}$ в точках накопителя, где есть поперечное к скорости магнитное поле, – в полукольцах с ведущим и в магните MD (см. рис.II.4), вклад которого в диффузию довольно велик (интеграл куба поля в нем составляет ~ 30% от интеграла по всему кольцу).

Ограничимся рассмотрением простой кинематической схемы (см.§ I), в которой MD вращает спин на π, а угол поворота на вставках с соленоидами I и II равны: $2\varphi_I = 2\varphi_{II} = 2\varphi$. После скачка энергии на азимуте θ_0 частица движется с отклонением от равновесной траектории

$$x = x_b + \psi\frac{\delta\gamma}{\gamma} \tag{10}$$

где бетатронную часть x_b удобно представить в виде, аналогичном форме Флоке: $x_b = \frac{\delta\gamma}{\gamma} c f e^{i\nu_x\theta} + \text{к.с.}$

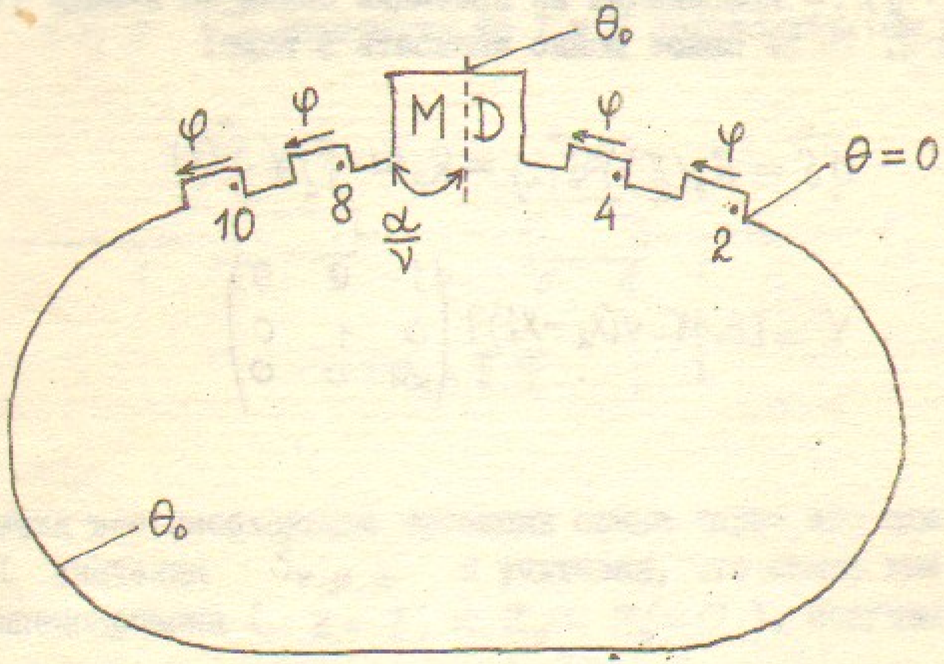


Рис. II.4

Константу $C=|C|e^{i\Phi_0}$ нетрудно найти из начальных условий в момент скачка $x_0=x_0'=0$ [1]

$$|C|=\frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{H}_0} \qquad (11)$$

$$\Phi_0=\arccos\left(-\psi_0/\sqrt{\mathcal{H}_0\beta_0}\right)-\int_0^{\theta_0}\frac{R\,d\theta}{\beta}$$

где $\mathcal{H}_0=\frac{\psi_0^2+(\alpha_0\psi_0+\beta_0\psi_0')^2}{\beta_0}$, α_0, β_0, ψ_0, ψ_0' – амплитудные и дисперсионная функции накопителя в точке θ_0. Вертикальные колебания отсутствуют всюду кроме участков внутри вставок с соленоидами. В этом приближении вследствие вертикальной направленности спина в полукольцах ($S_x=S_y=0$) вклад этой части накопителя в $\vec{\delta S}_K$ равен нулю (см. пункт в).

Если θ_0 находится где-то в полукольце, то $\vec{\delta S}_K$ равен изменению спина на экспериментальном промежутке $\vec{\delta S}^{пр}$, повернутому на угол $\chi_0=\nu\int_{\pi/\nu}^{\theta_0}\mathcal{K}\,d\theta$ вокруг оси Z (см. рис. II.4)

$$\vec{\delta S}_K=R_z(\chi_0)\,\vec{\delta S}^{пр} \qquad (12)$$

В данной кинематической схеме

$$\delta S_1^{пр}=\delta S_3^{пр}=0$$

$$\delta S_2^{пр}=\nu\varphi\left[-X_2'+Z_4'\sin\varphi-X_4'\cos\varphi+Z_8'\sin2\varphi+X_8'\cos2\varphi+Z_{10}'\sin\varphi+X_{10}'\cos\varphi\right]-\pi\sin2\varphi\,\frac{\delta\gamma}{\gamma} \qquad (13)$$

(производные X_i', Z_i' взяты в точках, где начинается область однородного поля каждого из соленоидов). Используя преобразование

$$\begin{pmatrix}X_i'\\ Z_i'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_1'\end{pmatrix}$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – элементы соответствующих матриц перехода, X_1, X_1' – радиальные координата и угол в точке $\theta=0$ на К-обороте, и представление Х-колебаний в виде (10 , 11), найдем, что

$$\delta S_2^{пр}=\left\{C\left[A|f_1|+B\left(|f_1|'+\frac{i}{|f_1|}\right)\right]e^{i2\pi\nu_x K}+к.с.\right\}+Д\,\frac{\delta\gamma}{\gamma} \qquad (14)$$

(здесь $|f_1|^2=\beta_1$ и $|f_1|'=-\alpha_1/|f_1|$, $\alpha_1=-\beta_1'/2$ также относятся к точке $\theta=0$). Коэффициенты А, В, Д имеют вид

$$\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\nu\varphi'\left[-\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}+\sin\varphi\begin{pmatrix}c_4+c_{10}\\ d_4+d_{10}\end{pmatrix}-\cos\varphi\begin{pmatrix}a_4-a_{10}\\ b_4-b_{10}\end{pmatrix}+\sin2\varphi\begin{pmatrix}c_8\\ d_8\end{pmatrix}+\cos2\varphi\begin{pmatrix}a_8\\ b_8\end{pmatrix}\right] \qquad (15)$$

$$Д=-\pi\sin2\varphi+\nu\varphi\left[-\psi_{x2}'+\psi_{z4}'\sin\varphi-\psi_{x4}'\cos\varphi+\psi_{z8}'\sin2\varphi+\psi_{x8}'\cos2\varphi+\psi_{z10}'\sin\varphi+\psi_{x10}'\cos\varphi\right]$$

Найдем сумму

$$\frac{\delta\gamma}{\gamma} T = \sum_{k=1}^{N} \delta S_2^{np} e^{-i2\pi\nu_0 k}$$

Подставляя сюда δS_2^{np} в виде (14), получим

$$Re(T) = -\frac{|C|}{2\sqrt{\beta_1}\,\sin\pi(\nu_x+\nu_0)\sin\pi(\nu_x-\nu_0)}\Big\{(A\beta_1 - B\alpha_1)\big[\cos\phi_0\cos 2\pi\nu_0 - \cos(2\pi\nu_x+\phi_0)\big] + \tag{16}$$

$$+ B\big[\sin(2\pi\nu_x+\phi_0) - \sin\phi_0\cos 2\pi\nu_0\big]\Big\} - \frac{1}{2} D$$

$$Im(T) = -\frac{|C|}{2\sqrt{\beta_1}\,\sin\pi(\nu_x+\nu_0)\sin\pi(\nu_x-\nu_0)}\Big\{-(A\beta_1 - B\alpha_1)\sin 2\pi\nu_0\cos\phi_0 +$$

$$+ B\sin\phi_0\sin 2\pi\nu_0\Big\} - \frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_0\, D$$

Из формул (4 , 5) с учетом (12) имеем

$$\begin{aligned}
P_x &= -Re(T)\sin\chi_0 \qquad (16)\\
P_y &= Re(T)\cos\chi_0\\
P_z &= 0\\
Q_x &= -Im(T)\sin\chi_0\\
Q_y &= Im(T)\cos\chi_0\\
Q_z &= 0\\
\gamma\frac{\partial n_x}{\partial\gamma} &= -P_x + Q_y\\
\gamma\frac{\partial n_y}{\partial\gamma} &= -P_y - Q_x\\
\gamma\frac{\partial n_z}{\partial\gamma} &= 0\\
\Big(\gamma\frac{\partial\vec n}{\partial\gamma}\Big)^2 &= |T|^2
\end{aligned}$$

В случае, если θ_0 находится в магните МД (недоворот спина вокруг оси z до полного угла π в этой точке равен α - см. Рис. II.4), то величина $\delta\vec S_k$ определится суммой вкладов от отдельных частей экспериментального промежутка. Вклад α-части МД равен

$$R_z(\pi-\alpha)\,R_y(2\varphi)\,R_z(2\pi\nu-\pi)\,R_y(2\varphi)\,\delta\vec S^{\alpha}$$

вклад вставки II

$$R_z(\pi-\alpha)\,R_y(2\varphi)\,R_z(2\pi\nu-\pi)\,\delta\vec S^{II}$$

вклад вставки I

$$R_z(\pi-\alpha)\,\delta\vec S^{I}$$

вклад $(\pi-\alpha)$ - части МД

$$\delta\vec S^{\pi-\alpha}$$

($\delta\vec S^{\alpha}$, $\delta\vec S^{II}$, $\delta\vec S^{I}$, $\delta\vec S^{\pi-\alpha}$ - изменение спина при прохождении частицей соответствующей части промежутка). Суммарное имеем изменения спина на обороте

$$\begin{aligned}
\delta S_1(k) &= (-\cos\alpha\cos 2\varphi\sin 2\pi\nu + \sin\alpha\cos 2\pi\nu)\Big[-\alpha\sin 2\varphi\frac{\delta\gamma}{\gamma} + E_1(k)\Big] +\\
&+ \frac{\delta\gamma}{\gamma}\Big\{2\varphi\big[\cos\alpha\cos 2\varphi(1-\cos 2\pi\nu) - \sin\alpha\sin 2\pi\nu\big] -\\
&- (\pi-\alpha)\sin\alpha\sin 2\varphi\Big\} - \sin\alpha\, E_2(k)\\
\delta S_2(k) &= (\sin\alpha\cos 2\varphi\sin 2\pi\nu + \cos\alpha\cos 2\pi\nu)\Big[-\alpha\sin 2\varphi\frac{\delta\gamma}{\gamma} + E_1(k)\Big] +\\
&+ \frac{\delta\gamma}{\gamma}\Big\{-2\varphi\big[\sin\alpha\cos 2\varphi(1-\cos 2\pi\nu) + \cos\alpha\sin 2\pi\nu\big] -\\
&- (\pi-\alpha)\cos\alpha\sin 2\varphi\Big\} - \cos\alpha\, E_2(k)
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\delta S_3(k) &= -\sin 2\varphi\sin 2\pi\nu\Big[-\alpha\sin 2\varphi\frac{\delta\gamma}{\gamma} + E_1(k)\Big] +\\
&+ 2\varphi\sin 2\varphi(1-\cos 2\pi\nu)\frac{\delta\gamma}{\gamma}
\end{aligned}$$

Функции $E_{1,2}(K)$ выражаются через производные X_i', Z_i', взятые в нескольких точках экспериментального промежутка и зависящие от номера оборота K :

$$E_1(K) = \nu\left[-\sin 2\varphi\, X_0'(K-1) + \varphi\left(\sin 2\varphi\, Z_8'(K) + \cos 2\varphi\, X_8'(K) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sin\varphi\, Z_{10}'(K) + \cos\varphi\, X_{10}'(K)\right]\right. \tag{19}$$

$$E_2(K) = \nu\left[-\sin 2\varphi\, X_0'(K) - \varphi\left(-X_2'(K) + \sin\varphi\, Z_4'(K) - \cos\varphi\, X_4'(K)\right)\right]$$

Величины X_i', Z_i', i=2,4,8,I0 относятся к точкам в соленоидах (см.Рис. 12), где в них начинается область однородного поля. Производные $X_0'(K)$ и $X_0'(K-1)$ взяты в точке с азимутом θ_0 в МД, где произошел скачок энергии, и отличаются номером оборота.

Покажем, что вклад в (18) членов, содержащих $X_0'(K)$ и $X_0'(K-1)$ исчезает при суммировании по оборотам. Обозначим этот вклад через $\vec{\Delta}(K)$. Тогда для первых двух оборотов, совершенных после скачка энергии, можно записать сумму их вкладов, используя (1):

$$\cos 2\pi\nu_0\, \vec{\Delta}(1) + \vec{n}\times\vec{\Delta}(1)\sin 2\pi\nu_0 + \vec{\Delta}(2) =$$
$$= \nu \sin 2\varphi\left(\vec{e}_1 \sin\alpha + \vec{e}_2\cos\alpha\right) X_0'(2)$$

Для вычисления последней суммы учтено, что $X_0' = 0$ в момент скачка, и подставлены проекции вектора $\vec{n}$ в точке θ_0 . (см.приложение I), равные:

$$n_x = -\cos\alpha \sin 2\varphi \ , \quad n_y = \sin\alpha \sin 2\varphi, \quad n_z = \cos 2\varphi$$

Нетрудно далее показать, что сумма вкладов N оборотов всегда будет равна $\vec{\Delta}_N = \nu \sin 2\varphi\left(\vec{e}_1 \sin\alpha + \vec{e}_2\cos\alpha\right) X_0'(N)$ и вследствие радиационного затухания при $2\pi\lambda N \gg 1$ $X_0'(N) \to 0$, $\Delta_N \to 0$

Таким образом, радиальные колебания в магните МД, где $\vec{n}$ отклонено от вертикали, не дают вклада в интегральные изменения спина в нем самом, подобно тому, как это имеет место в полукольцах, где n_z = I. Этот результат является общим для случая, когда вертикальное движение учитывается только на вставках, в которых локализована связь поперечных колебаний и не содержится магнитов с поперечным к скорости полем (см.работу [1]).

Произведя алгебраизацию выражений для $\delta\vec{S}(K)$ (18) с учетом вышесказанного, получим

$$\delta S_j(K) = \frac{\delta\gamma}{\gamma}\left\{c\left[A_j|f_1| + B_j\left(|f_1|' + \frac{i}{|f_1|}\right)\right]e^{i2\pi\nu_x K} + \text{к.с.}\right\} + D_j\frac{\delta\gamma}{\gamma}$$

$$j = 1,2,3 \ (x, y, z)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \left(-\cos\alpha\cos 2\varphi \sin 2\pi\nu + \sin\alpha\cos 2\pi\nu\right)\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \end{pmatrix} - \sin\alpha\begin{pmatrix} G_A \\ G_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \left(\sin\alpha\cos 2\varphi\sin 2\pi\nu + \cos\alpha\cos 2\pi\nu\right)\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \end{pmatrix} - \cos\alpha\begin{pmatrix} G_A \\ G_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = -\sin 2\varphi\sin 2\pi\nu\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \left(-\cos\alpha\cos 2\varphi\sin 2\pi\nu + \sin\alpha\cos 2\pi\nu\right)\left(-\alpha\sin 2\varphi + F_D\right) +$$
$$+ 2\varphi\left[\cos\alpha\cos 2\varphi\left(1-\cos 2\pi\nu\right) - \sin\alpha\sin 2\pi\nu\right] -$$
$$-(\pi-\alpha)\sin\alpha\sin 2\varphi - \sin\alpha\, G_D$$

$$D_2 = \left(\sin\alpha\cos 2\varphi\sin 2\pi\nu + \cos\alpha\cos 2\pi\nu\right)\left(-\alpha\sin 2\varphi + F_D\right) -$$
$$- 2\varphi\left[\sin\alpha\cos 2\varphi\left(1-\cos 2\pi\nu\right) + \cos\alpha\sin 2\pi\nu\right] -$$
$$-(\pi-\alpha)\cos\alpha\sin 2\varphi - \cos\alpha\, G_D$$

$$D_3 = -\sin 2\varphi\sin 2\pi\nu\left(-\alpha\sin 2\varphi + F_D\right) + 2\varphi\sin 2\varphi\left(1-\cos 2\pi\nu\right)$$

где коэффициенты F_A, F_B, F_D, G_A, G_B, G_D , имеют вид:

$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \end{pmatrix} = \nu\varphi\left[\sin 2\varphi\begin{pmatrix} c_8 \\ d_8 \end{pmatrix} + \cos 2\varphi\begin{pmatrix} a_8 \\ b_8 \end{pmatrix} + \sin\varphi\begin{pmatrix} c_{10} \\ d_{10} \end{pmatrix} + \cos\varphi\begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{10} \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} G_A \\ G_B \end{pmatrix} = \nu\varphi\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} - \sin\varphi\begin{pmatrix} c_4 \\ d_4 \end{pmatrix} + \cos\varphi\begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix}\right]$$

$$F_D = \nu\varphi\left(\sin 2\varphi\, \Psi'_{z8} + \cos 2\varphi\, \Psi'_{x8} + \sin\varphi\, \Psi'_{z10} + \cos\varphi\, \Psi'_{x10}\right)$$

$$G_D = \nu\varphi\left(\Psi'_{x_2} - \sin\varphi\, \Psi'_{z4} + \cos\varphi\, \Psi'_{x4}\right)$$

Суммируя по оборотам (3), получим выражения, которые являются обобщением (16)

$$P_j = -\frac{|C|}{2\sqrt{\beta_1}\sin\pi(\nu_x-\nu_0)\sin\pi(\nu_x+\nu_0)}\Big\{(A_j\beta_1 - B_j\alpha_1)\left[\cos\varphi_0\cos 2\pi\nu_0 - \cos(2\pi\nu_x+\varphi_0)\right] +$$
$$+ B_j\left[\sin(2\pi\nu_x+\varphi_0) - \sin\varphi_0\cos 2\pi\nu_0\right]\Big\} - \frac{1}{2}D_j$$

$$Q_j = -\frac{|C|}{2\sqrt{\beta_1}\sin\pi(\nu_x-\nu_0)\sin\pi(\nu_x+\nu_0)}\Big\{-(A_j\beta_1 - B_j\alpha_1)\sin 2\pi\nu_0\cos\varphi_0 +$$
$$+ B_j\sin\varphi_0\sin 2\pi\nu_0\Big\} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\pi\nu_0\, D_j \qquad (20)$$

$$j = x, y, z$$

$$\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma} = -\left(\vec{P} + \vec{n}\times\vec{Q}\right)$$

Полученные формулы (20) для вычисления параметра спин-орбитальной связи в магните МЦ, где спинможет быть направлен произвольно в зависимости от параметров φ и α, носят общий характер для любых схем, в которых возбуждение бетатронных колебаний квантовыми флуктуациями в магнитах происходит только по радиусу, а вертикальное движение учитывается внутри вставок с локальной связью поперечных степеней свободы. Коэффициенты A_j, B_j, D_j рассчитываются при получении выражения для $\frac{\partial\vec{A}}{\partial\zeta_x}$.

Деполяризующие факторы для обычного накопителя с поперечной поляризацией рассмотрены в [8]. Следуя этой работе, запишем в первом порядке величин $\frac{\delta\gamma}{\gamma}$, X, Z выражение для частоты прецессии $\vec{W}$ спина неравновесной частицы в базисе, связанном со скоростью (см.приложение II):

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \nu Z'' \\
W_2 &= (\mathcal{K}Z)' - (H_x X)' \qquad\qquad (I) \\
W_3 &= \nu\mathcal{K}\left(1+\frac{\delta\gamma}{\gamma}\right) - \nu X'',
\end{aligned}
$$

H_x - радиальное поле в единицах среднего поля накопителя. С учетом замены $Z \to Z_0 + Z$ (Z_0 - искажения замкнутой орбиты, а Z - свободные колебания по вертикали) для величин X и Z имеют место уравнения:

$$
\begin{aligned}
X'' + g_x X &= \mathcal{K}\frac{\delta\gamma}{\gamma} \\
Z_0'' + g_z Z_0 &= -H_x \qquad\qquad (2) \\
Z'' + g_z Z &= H_x\frac{\delta\gamma}{\gamma} + \varkappa X
\end{aligned}
$$

где $\varkappa = -\frac{\partial H_x}{\partial x}$ в единицах среднего поля. В (2) пренебрегается вкладом члена $\varkappa Z$ в X-движение ж). Кроме того, мы здесь не рассматриваем радиальные искажения орбиты, т.к. их учет приводит просто к когерентному сдвигу эффективной частоты прецессии спина. Используя форму Флоке, имеем из (2):

$$
\begin{aligned}
Z &= A_z f_z + A_z^* f_z^* \qquad\qquad (3) \\
A_z' &= \frac{1}{2i}\left(H_x\frac{\delta\gamma}{\gamma} + \varkappa X\right) f_z^*
\end{aligned}
$$

ж) Справедливо для случая, когда не происходит значительного возбуждения вертикального размера пучка (например, вдали от линейного резонанса связи X- и Z-колебаний, или при компенсации этого резонанса специальными повернутыми линзами)

$$X = A_x f_x + A_x^* f_x^*$$

$$A_x = \frac{1}{2i}\,\mathcal{K}\,\frac{\delta\gamma}{\gamma}\,f_x^*$$

или

$$X = \frac{\delta\gamma}{\gamma}\left(C_0 f_x + C_0^* f_x^*\right) + \Psi_x \frac{\delta\gamma}{\gamma}$$

$\Psi_x(\theta)$ – дисперсионная функция, C_0 определена в приложении П.

Для $\nu \gg 1$ в (I) можно положить $w_2 = 0$. Тогда решение уравнения для спина имеет вид ($S_3 \equiv S_z = 1$):

$$\eta(\theta) = e^{i\tilde{w}_3}\eta(\theta_0) - i\,e^{i\tilde{w}_3}\int_{\theta_0}^{\theta} w_1 e^{-i\tilde{w}_3}\,d\theta' \qquad (4)$$

где $\eta(\theta) = S_1(\theta) + i S_2(\theta)$, $\tilde{w}_3 = \int_{\theta_0}^{\theta} w_3\,d\theta'$.

Вертикальные искажения орбиты Z_0 приводят к отклонению вектора $\vec{n}$ от вертикали. Из (4) получаем периодическое решение для поперечных к ведущему полю компонент спина $\eta_0(\theta) = \eta_0(\theta + 2\pi)$

$$\eta_0(\theta) = \frac{i\nu\, e^{i\nu\tilde{\mathcal{K}}}}{1 - e^{-i2\pi\nu}}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} Z_0''\, e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}\,d\theta' \qquad (5)$$

где $\tilde{\mathcal{K}}(\theta) = \int_0^{\theta}\mathcal{K}\,d\theta'$.

Параметр спин – орбитальной связи найдется из (см. приложение П):

$$\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}(n_x + i n_y)\frac{\delta\gamma}{\gamma} = -\sum_{K=1}^{\infty}\Delta_K e^{-i2\pi K\nu} \qquad (6)$$

$\Delta_K = \Delta\eta_K$ – изменение поперечных компонент спина на K-обороте, связанное с воздействием дополнительных полей на неравновесную частицу. Используя разложение

$$e^{i\tilde{w}_3} \approx e^{i\nu[\tilde{\mathcal{K}}(\theta) - \tilde{\mathcal{K}}(\theta_0)]}\left[1 + i\nu\left(\tilde{\mathcal{K}}\frac{\delta\gamma}{\gamma} - X'\right)\Big|_{\theta_0}^{\theta}\right]$$

и то обстоятельство, что время релаксации энергии частицы к равновесному значению много больше периода обращения, найдем из (4):

$$\Delta_K(\theta) = i\nu\left[2\pi\left(\frac{\delta\gamma}{\gamma}\right)_K - \Delta X_K'\right]\eta_0(\theta)\,e^{i2\pi\nu} -$$
$$-\nu^2\left(\frac{\delta\gamma}{\gamma}\right)_K e^{i\nu(2\pi+\tilde{\mathcal{K}})}\left[\int_{\theta}^{\theta+2\pi} Z_0''\tilde{\mathcal{K}} e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}\,d\theta' - \tilde{\mathcal{K}}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} Z_0'' e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}\,d\theta'\right] +$$
$$+\nu^2 e^{i\nu(2\pi+\tilde{\mathcal{K}})}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} Z_0''\Delta X_K' e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}\,d\theta' - \qquad (7)$$
$$-i\nu\, e^{i\nu(2\pi+\tilde{\mathcal{K}})}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} Z_K'' e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}\,d\theta', \quad \Delta X_K' = X_K'(\theta') - X_K'(\theta)$$

индекс K показывает, что соответствующая величина берется на K-обороте с момента скачка энергии. Рассмотрим вклад в (6) возмущений, связанных с радиальным градиентом $\mathcal{K}(\theta)$ (последнее слагаемое в (7))

$$\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}(n_x + i n_y) = i\nu\sum_{K=1}^{\infty} e^{i\nu[\tilde{\mathcal{K}} - 2\pi(K-1)]}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} Z_K'' e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}\,d\theta' =$$
$$= i\nu\, e^{i\nu\tilde{\mathcal{K}}}\int_{\theta}^{\infty} Z'' e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}\,d\theta' = \qquad (8)$$
$$= -\nu^2 e^{i\nu\tilde{\mathcal{K}}}\int_{\theta}^{\infty} Z'\mathcal{K} e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}\,d\theta'$$

(использовано свойство $Z'(\theta_0) = Z'(\infty) = 0$).
Так как (см. (2))

$$A_z' f_z + A_z^{*\prime} f_z \equiv 0$$

то интегрируя (8) по частям, получим ($A_z'(\theta_0) = A_z'(\infty) = 0$):

$$\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}(n_x+in_y)=\nu^2 e^{i\nu\tilde{\mathcal{X}}}\int_{\theta}^{\infty}\Big[A_z'\int_{-\infty}^{\theta'}f_z'\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta''+A_z^{*'}\int_{-\infty}^{\theta'}f_z^{*'}\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta\Big]d\theta'=$$

$$=\frac{i\nu^2}{2}e^{i\nu\tilde{\mathcal{X}}}\int_{\theta}^{\infty}\varkappa x\Big[f_z\int_{-\infty}^{\theta'}f_z^{*'}\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta''-f_z^{*}\int_{-\infty}^{\theta'}f_z'\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta''\Big]d\theta' \qquad (9)$$

В интегралах $\int_{-\infty}^{\theta}f_z'\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'$ и $\int_{-\infty}^{\theta}f_z^{*'}\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta$, возникающих при интегрировании по частям и определенных с точностью до аддитивной константы, выбран нижний предел $-\infty$. Интегрировать при этом надо с малой добавкой в показателе экспоненты, которая не меняет подынтегральную функцию на физически значимом интервале переменной θ. Удобно теперь определить периодическую функцию $F^{\nu}(\theta)$, как это впервые сделано в [8]:

$$F^{\nu}(\theta)=\frac{\nu}{2}\Big(f_z\int_{-\infty}^{\theta}f_z^{*'}\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'-f_z^{*}\int_{-\infty}^{\theta}f_z'\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'\Big)e^{i\nu\theta}=$$

$$=\frac{\nu}{2}\left[\frac{f_z\int_{\theta-2\pi/\rho}^{\theta}f_z^{*'}\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'}{\left(1-e^{i\frac{2\pi}{\rho}(\nu_z+\nu)}\right)}-\frac{f_z^{*}\int_{\theta-2\pi/\rho}^{\theta}f_z'\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'}{\left(1-e^{i\frac{2\pi}{\rho}(\nu-\nu_z)}\right)}\right]e^{i\nu\theta} \qquad (10)$$

где ρ – число суперпериодов в машине (для ВЭПП-4 ρ = I). Тогда (9) примет вид:

$$\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}(n_x+in_y)=i\nu e^{i\nu\tilde{\mathcal{X}}}\int_{\theta}^{\infty}\varkappa x F^{\nu}e^{-i\nu\theta'}d\theta' \qquad (11)$$

Подставляя в (II) в виде (3) получаем после частичного интегрирования

$$\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}(n_x+in_y)=\frac{i\nu}{2}e^{i\nu\tilde{\mathcal{X}}}\Big\{C_o[1+i\,ctg\,\pi(\nu_x-\nu)]\int_{\theta}^{\theta+2\pi}\varkappa\beta_x^{1/2}F^{\nu}e^{i(\mu_x-\nu\theta')}d\theta'+$$

$$+C_o^{*}[1-i\,ctg\,\pi(\nu_x+\nu)]\int_{\theta}^{\theta+2\pi}\varkappa\beta_x^{1/2}F^{\nu}e^{-i(\mu_x+\nu\theta')}d\theta'+ \qquad (12)$$

$$+(1-i\,ctg\,\pi\nu)\int_{\theta}^{\theta+2\pi}\varkappa\Psi_x F^{\nu}e^{-i\nu\theta'}d\theta'\Big\}$$

Подобным образом суммируя по оборотам оставшиеся члены в (6), можно найти вклад в $\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}$ от радиального поля H_x:

$$\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}(n_x+in_y)=e^{i\nu\tilde{\mathcal{X}}}\Big\{-\frac{\pi\nu^2}{2}(1+ctg^2\pi\nu)\int_{\theta}^{\theta+2\pi}Z_o''e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'+$$

$$+\frac{\nu^2}{2}(1-i\,ctg\,\pi\nu)\Big[\int_{\theta}^{\theta+2\pi}Z_o''\tilde{\mathcal{X}}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'-\tilde{\mathcal{X}}\int_{\theta}^{\theta+2\pi}Z_o''e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'\Big]+$$

$$+\frac{i\nu^2}{2}\beta_x^{-1/2}\Big[C_o(i-\alpha_x)e^{i\mu_x}(ctg\,\pi(\nu_x-\nu)+ctg\,\pi\nu)+C_o^{*}(i+\alpha_x)e^{-i\mu_x}(ctg\,\pi(\nu_x+\nu)-ctg\,\pi\nu)\Big]\int_{\theta}^{\theta+2\pi}Z_o''e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'-$$

$$-\frac{\nu^2}{2}\Big[C_o(1+i\,ctg\,\pi(\nu_x-\nu))\int_{\theta}^{\theta+2\pi}Z_o''\beta_x^{-1/2}(i-\alpha_x)e^{i(\mu_x-\nu\tilde{\mathcal{X}})}d\theta'-$$

$$-C_o^{*}(1-i\,ctg\,\pi(\nu_x+\nu))\int_{\theta}^{\theta+2\pi}Z_o''\beta_x^{-1/2}(i+\alpha_x)e^{-i(\mu_x+\nu\tilde{\mathcal{X}})}d\theta'+ \qquad (13)$$

$$+(1-i\,ctg\,\pi\nu)\int_{\theta}^{\theta+2\pi}Z_o''\Psi_x'e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'\Big]+$$

$$+\frac{i\nu}{2}(1-i\,ctg\,\pi\nu)\int_{\theta}^{\theta+2\pi}H_x F^{\nu}e^{-i\nu\theta}d\theta'\Big\}$$

(первые два члена (I3) можно получить дифференцированием (5) по энергии).

В заключении приведем алгоритмы вычисления F^{ν} и $\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}$. Удобно представить интегралы в (I0) в виде (ρ = I):

$$\frac{\int_{\theta-2\pi}^{\theta}f_z^{*'}\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'}{\left(1-e^{i2\pi(\nu+\nu_z)}\right)}=\frac{\int_{-2\pi}^{0}f_z^{*'}\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'}{\left(1-e^{i2\pi(\nu+\nu_z)}\right)}+\int_{0}^{\theta}f_z^{*'}\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'$$

$$\frac{\int_{\theta-2\pi}^{\theta}f_z'\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'}{\left(1-e^{i2\pi(\nu-\nu_z)}\right)}=\frac{\int_{-2\pi}^{0}f_z'\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'}{\left(1-e^{i2\pi(\nu-\nu_z)}\right)}+\int_{0}^{\theta}f_z'\mathcal{X}e^{-i\nu\tilde{\mathcal{X}}}d\theta'$$

Это позволяет убыстрить счет при дискретном интегрировании в $n/2$ раз, где n - число элементов, в которых надо найти F^{ν}. Введем обозначения ($f_z = \beta_z^{1/2} e^{i\mu_z}$, $\alpha_z = -\frac{1}{2}\beta_z'$):

$$S_{F1}(\theta) = -\int_0^{\theta} \mathcal{X}\beta_z^{-1/2}\left[-\alpha_z\cos(\mu_z+\nu\tilde{\mathcal{X}}) - \sin(\mu_z+\nu\tilde{\mathcal{X}})\right]d\theta' \qquad (14)$$

$$S_{F2}(\theta) = -\int_0^{\theta} \mathcal{X}\beta_z^{-1/2}\left[\cos(\mu_z+\nu\tilde{\mathcal{X}}) - \alpha_z\sin(\mu_z+\nu\tilde{\mathcal{X}})\right]d\theta'$$

$$S_{F3}(\theta) = -\int_0^{\theta} \mathcal{X}\beta_z^{-1/2}\left[-\alpha_z\cos(\mu_z-\nu\tilde{\mathcal{X}}) - \sin(\mu_z-\nu\tilde{\mathcal{X}})\right]d\theta'$$

$$S_{F4}(\theta) = -\int_0^{\theta} \mathcal{X}\beta_z^{-1/2}\left[\cos(\mu_z-\nu\tilde{\mathcal{X}}) - \alpha_z\sin(\mu_z-\nu\tilde{\mathcal{X}})\right]d\theta'$$

$$\mathfrak{S}_{Fj} = S_{Fj}(-2\pi), \quad j = 1,2,3,4$$

$$\bar{S}_{F1} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_{F1} + \mathfrak{S}_{F2}\,\mathrm{ctg}\,\pi(\nu+\nu_z)\right) - S_{F1}$$

$$\bar{S}_{F2} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_{F1}\,\mathrm{ctg}\,\pi(\nu+\nu_z) - \mathfrak{S}_{F2}\right) + S_{F2}$$

$$\bar{S}_{F3} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_{F3} - \mathfrak{S}_{F4}\,\mathrm{ctg}\,\pi(\nu-\nu_z)\right) - S_{F3}$$

$$\bar{S}_{F4} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_{F3}\,\mathrm{ctg}\,\pi(\nu-\nu_z) + \mathfrak{S}_{F4}\right) - S_{F4}$$

Тогда:

$$\mathrm{Re}\,F^{\nu}(\theta) = \frac{\nu}{2}\beta_z^{1/2}\left[\bar{S}_{F1}\cos(\mu_z+\nu\theta) - \bar{S}_{F2}\sin(\mu_z+\nu\theta) - \bar{S}_{F3}\cos(\mu_z-\nu\theta) - \bar{S}_{F4}\sin(\mu_z-\nu\theta)\right] \qquad (15)$$

$$\mathrm{Im}\,F^{\nu}(\theta) = \frac{\nu}{2}\beta_z^{1/2}\left[\bar{S}_{F2}\cos(\mu_z+\nu\theta) + \bar{S}_{F1}\sin(\mu_z+\nu\theta) + \bar{S}_{F3}\sin(\mu_z-\nu\theta) - \bar{S}_{F4}\cos(\mu_z-\nu\theta)\right]$$

График $|F^{\nu}(\theta)|$ для ВЭПП-4 приведен на Рис. 8

При вычислении $\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}$ воспользуемся тем же приемом, что и для F^{ν} (см. (12), (13))

$$S_1 = \int_0^{\theta}\beta_x^{1/2}\varkappa\left[\mathrm{Re}\,F^{\nu}\cos(\mu_x-\nu\theta') - \mathrm{Im}\,F^{\nu}\sin(\mu_x-\nu\theta')\right]d\theta' \qquad (16)$$

$$S_2 = \int_0^{\theta}\beta_x^{1/2}\varkappa\left[\mathrm{Re}\,F^{\nu}\sin(\mu_x-\nu\theta') + \mathrm{Im}\,F^{\nu}\cos(\mu_x-\nu\theta')\right]d\theta'$$

$$S_3 = \int_0^{\theta}\beta_x^{1/2}\varkappa\left[\mathrm{Re}\,F^{\nu}\cos(\mu_x+\nu\theta') + \mathrm{Im}\,F^{\nu}\sin(\mu_x+\nu\theta')\right]d\theta'$$

$$S_4 = \int_0^{\theta}\beta_x^{1/2}\varkappa\left[\mathrm{Im}\,F^{\nu}\cos(\mu_x+\nu\theta') - \mathrm{Re}\,F^{\nu}\sin(\mu_x+\nu\theta')\right]d\theta'$$

$$S_5 = \int_0^{\theta}(H_x+\Psi_x\varkappa)(\mathrm{Re}\,F^{\nu}\cos\nu\theta' + \mathrm{Im}\,F^{\nu}\sin\nu\theta')\,d\theta'$$

$$S_6 = \int_0^{\theta}(H_x+\Psi_x\varkappa)(\mathrm{Im}\,F^{\nu}\cos\nu\theta' - \mathrm{Re}\,F^{\nu}\sin\nu\theta')\,d\theta'$$

$$S_7 = \int_0^{\theta}Z_0''\beta_x^{-1/2}\left(-\sin(\mu_x-\nu\tilde{\mathcal{X}}) - \alpha_x\cos(\mu_x-\nu\tilde{\mathcal{X}})\right)d\theta' + \beta_x^{-1/2}(\sin\mu_x+\alpha_x\cos\mu_x)S_{13} + \beta_x^{-1/2}(\cos\mu_x-\alpha_x\sin\mu_x)S_{14}$$

$$S_8 = \int_0^{\theta}Z_0''\beta_x^{-1/2}\left(\cos(\mu_x-\nu\tilde{\mathcal{X}}) - \alpha_x\sin(\mu_x-\nu\tilde{\mathcal{X}})\right)d\theta' - \beta_x^{-1/2}(\cos\mu_x-\alpha_x\sin\mu_x)S_{13} + \beta_x^{-1/2}(\sin\mu_x+\alpha_x\cos\mu_x)S_{14}$$

$$S_9 = \int_0^{\theta}Z_0''\beta_x^{-1/2}\left(\sin(\mu_x+\nu\tilde{\mathcal{X}}) + \alpha_x\cos(\mu_x+\nu\tilde{\mathcal{X}})\right)d\theta' - \beta_x^{-1/2}(\sin\mu_x+\alpha_x\cos\mu_x)S_{13} + \beta_x^{-1/2}(\cos\mu_x-\alpha_x\sin\mu_x)S_{14}$$

$$S_{10} = \int_0^{\theta}Z_0''\beta_x^{-1/2}\left(\cos(\mu_x+\nu\tilde{\mathcal{X}}) - \alpha_x\sin(\mu_x+\nu\tilde{\mathcal{X}})\right)d\theta' - \beta_x^{-1/2}(\cos\mu_x-\alpha_x\sin\mu_x)S_{13} - \beta_x^{-1/2}(\sin\mu_x+\alpha_x\cos\mu_x)S_{14}$$

$$S_{11} = \int_0^\theta Z_0'' \Psi_x' \cos\nu\tilde{\varkappa}\, d\theta' - \Psi_x' S_{13}$$

$$S_{12} = -\int_0^\theta Z_0'' \Psi_x' \sin\nu\tilde{\varkappa}\, d\theta' - \Psi_x' S_{14}$$

$$S_{13} = \int_0^\theta Z_0'' \cos\nu\tilde{\varkappa}\, d\theta'$$

$$S_{14} = -\int_0^\theta Z_0'' \sin\nu\tilde{\varkappa}\, d\theta'$$

$$S_{15} = \int_0^\theta Z_0'' \tilde{\varkappa} \cos\nu\tilde{\varkappa}\, d\theta' .$$

$$S_{16} = -\int_0^\theta Z_0'' \tilde{\varkappa} \sin\nu\tilde{\varkappa}\, d\theta'$$

$$\mathfrak{S}_j = S_j(2\pi), \quad j = 1 \div 16$$

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2 \operatorname{ctg}\pi(\nu_x-\nu)\right) - S_1$$

$$\bar{S}_2 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \operatorname{ctg}\pi(\nu_x-\nu)\right) - S_2$$

$$\bar{S}_3 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_3 + \mathfrak{S}_4 \operatorname{ctg}\pi(\nu_x+\nu)\right) - S_3$$

$$\bar{S}_4 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_4 - \mathfrak{S}_3 \operatorname{ctg}\pi(\nu_x+\nu)\right) - S_4$$

$$\bar{S}_5 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_5 + \mathfrak{S}_6 \operatorname{ctg}\pi\nu\right) - S_5 .$$

$$\bar{S}_6 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_6 - \mathfrak{S}_5 \operatorname{ctg}\pi\nu\right) - S_6$$

$$\bar{S}_7 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_7 - \mathfrak{S}_8 \operatorname{ctg}\pi(\nu_x-\nu)\right) - S_7$$

$$\bar{S}_8 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_8 + \mathfrak{S}_7 \operatorname{ctg}\pi(\nu_x-\nu)\right) - S_8$$

$$\bar{S}_9 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_9 + \mathfrak{S}_{10} \operatorname{ctg}\pi(\nu_x+\nu)\right) - S_9$$

$$\bar{S}_{10} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_{10} - \mathfrak{S}_9 \operatorname{ctg}\pi(\nu_x+\nu)\right) - S_{10}$$

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_{11} + \mathfrak{S}_{12} \operatorname{ctg}\pi\nu\right) - S_{11}$$

$$\bar{S}_{12} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_{12} - \mathfrak{S}_{11} \operatorname{ctg}\pi\nu\right) - S_{12}$$

$$\bar{S}_{13} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_{13} + \mathfrak{S}_{14} \operatorname{ctg}\pi\nu\right) - S_{13}$$

$$\bar{S}_{14} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_{14} - \mathfrak{S}_{13} \operatorname{ctg}\pi\nu\right) - S_{14}$$

$$\bar{S}_{15} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_{15} + \mathfrak{S}_{16} \operatorname{ctg}\pi\nu\right) - S_{15}$$

$$\bar{S}_{16} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}_{16} - \mathfrak{S}_{15} \operatorname{ctg}\pi\nu\right) - S_{10}$$

Вклад $\varkappa$ - возмущений в $\rho\frac{\partial\vec{n}}{\partial\rho}$ равен (общий множитель $e^{i\nu\tilde{\varkappa}}$ не существенен):

$$\gamma \frac{\partial n_x}{\partial \gamma}(\theta) = -\nu\,|C_0|\left[\sin\Phi_0(\bar{S}_1-\bar{S}_3)+\cos\Phi_0(\bar{S}_2+\bar{S}_4)\right]-\nu\bar{S}_6$$

$$\gamma \frac{\partial n_y}{\partial \gamma}(\theta) = \nu|C_0|\left[\cos\Phi_0(\bar{S}_1+\bar{S}_3)+\sin\Phi_0(\bar{S}_4-\bar{S}_2)\right]+\nu\bar{S}_5 \qquad (17)$$

Вклад радиального поля равен:

$$\gamma \frac{\partial n_x}{\partial \gamma}(\theta) = \nu^2\Big\{-\frac{\pi}{2}(1+ctg^2\pi\nu)\,\mathfrak{S}_{13}+\bar{S}_{15}-\tilde{\varkappa}\bar{S}_{13}-$$

$$-|C_0|\left[\cos\Phi_0(\bar{S}_7-\bar{S}_9)-\sin\Phi_0(\bar{S}_8+\bar{S}_{10})\right]-\bar{S}_{11}\Big\}$$

$$\gamma \frac{\partial n_y}{\partial \gamma}(\theta) = \nu^2\Big\{-\frac{\pi}{2}(1+ctg^2\pi\nu)\,\mathfrak{S}_{14}+\bar{S}_{16}-\tilde{\varkappa}\bar{S}_{14}- \qquad (18)$$

$$-|C_0|\left[\cos\Phi_0(\bar{S}_8-\bar{S}_{10})+\sin\Phi_0(\bar{S}_7+\bar{S}_{10})\right]-\bar{S}_{12}\Big\}$$

Необходимо следить за тем, чтобы при дискретном интегрировании (I4,I6) шаг интегрирования $\Delta\theta$ удовлетворял условию

$$\Delta\theta \ll \frac{2\pi}{\nu_{x,z}} \quad и \quad \Delta\theta \ll \frac{2\pi}{\nu}.$$

Подписи к рисункам

Рис.I. Кинематика спина в схеме получения продольной поляризации (E = 5 ГэВ , $\nu_0 = \nu$ = II.3).

Рис.3. Вид β -функций в экспериментальном промежутке (разрывами на чертеже обозначены места расположения вставок с соленоидами).

Рис.4. Требуемая полная апертура камеры на вставке, расположенной слева от MD

Рис.5. Требуемая полная апертура камеры на вставке, расположенной справа от MD

Рис.6. Зависимость степени продольной поляризации $\zeta \cdot S_{\parallel}$ ($S_{\parallel} = \sqrt{2}/2$) от частоты радиальных бетатронных колебаний Q_x .

Рис.7. Зависимость времени радиационной поляризации τ_p от частоты Q_x в схеме получения продольной поляризации при E = 5 ГэВ .

Рис.8. Функция $F^{\nu}(\theta)$ для ВЭПП-4 (ν_z = 9.57).
а) E = 5 ГэВ (ν = II,36);
б) E = 4.75 ГэВ (ν = I0,79).

Рис.9. Зависимость степени равновесной поляризации от ν (ν_z = 9,57, ν_x = 8,60).
а) среднеквадратичный разброс углов поворота линз 10^{-3};
б) повернута только линза L 7 на угол $5 \cdot 10^{-4}$.

Рис.I0. Зависимость степени равновесной поляризации от ν (ν_z = 9,57, ν_x = 8,60).
а) среднеквадратичный разброс вертикальных смещений линз 0,02 см; $\langle z_0^2\rangle^{1/2} \simeq 0{,}13$ см
б) линза L 7 смещена на 0,05 см , $\langle z_0^2\rangle^{1/2}$ = 0,I8 см.

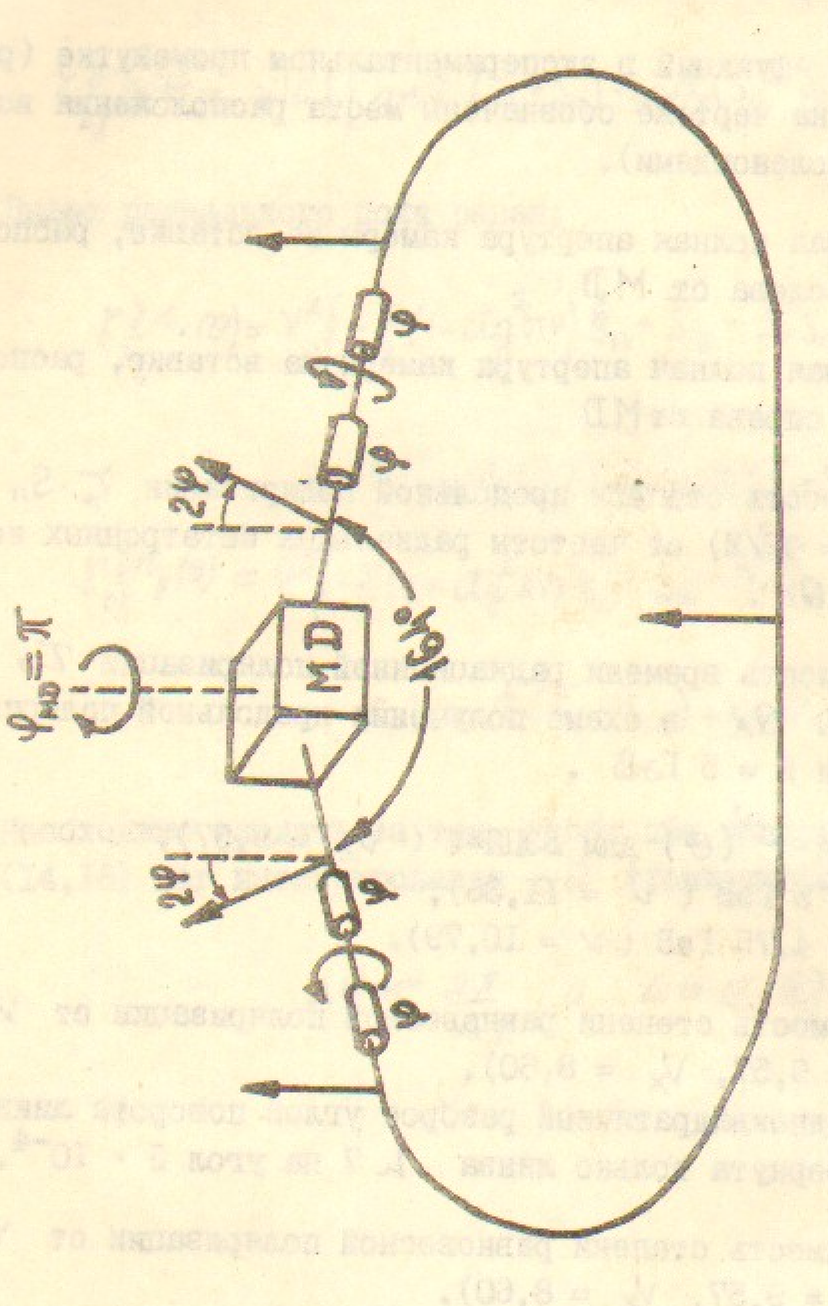

MD
$\varphi_{MD} = \pi$
2φ
φ
2φ
φ

Рис.I

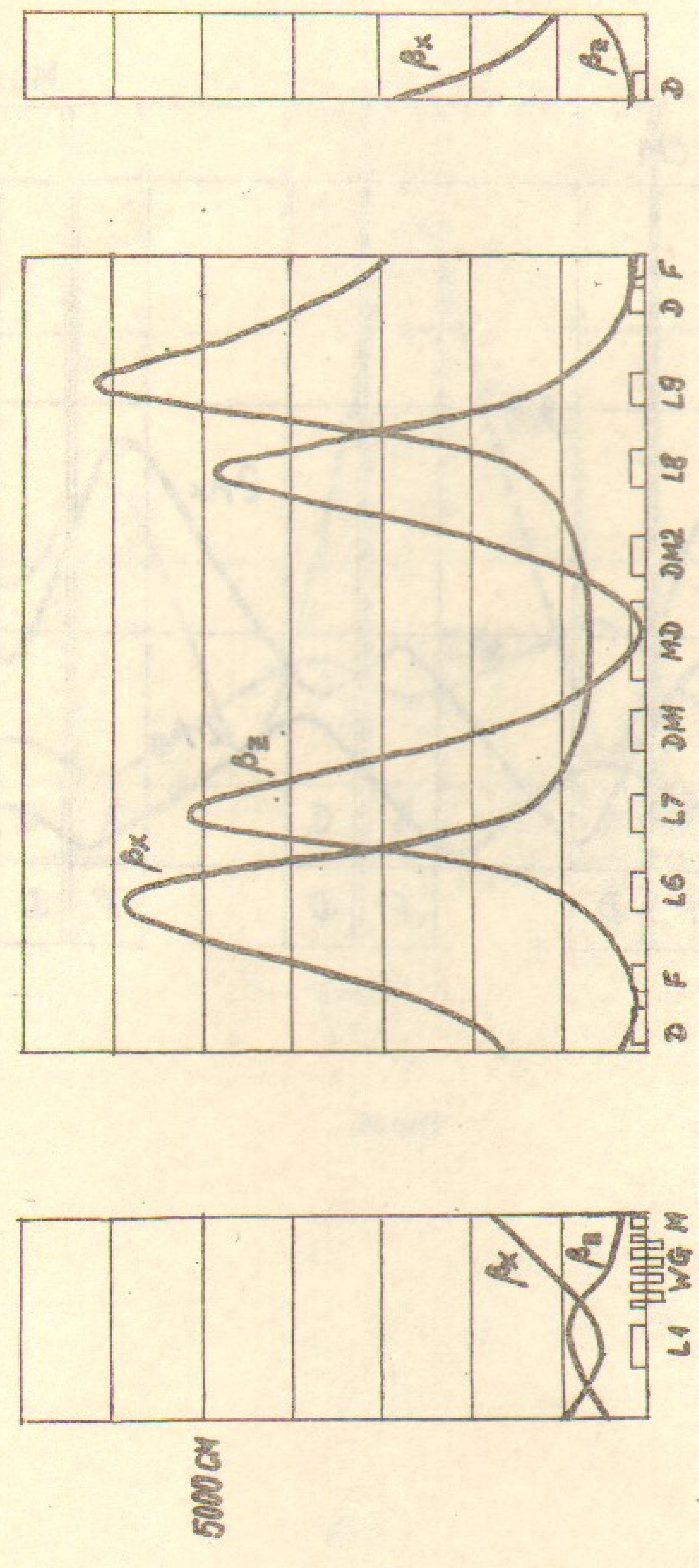

β_x
β_z
D
F
L9
L8
DM2
MD
DM1
L7
L6
F
D
L4
WG
M
5000 см

Рис.3

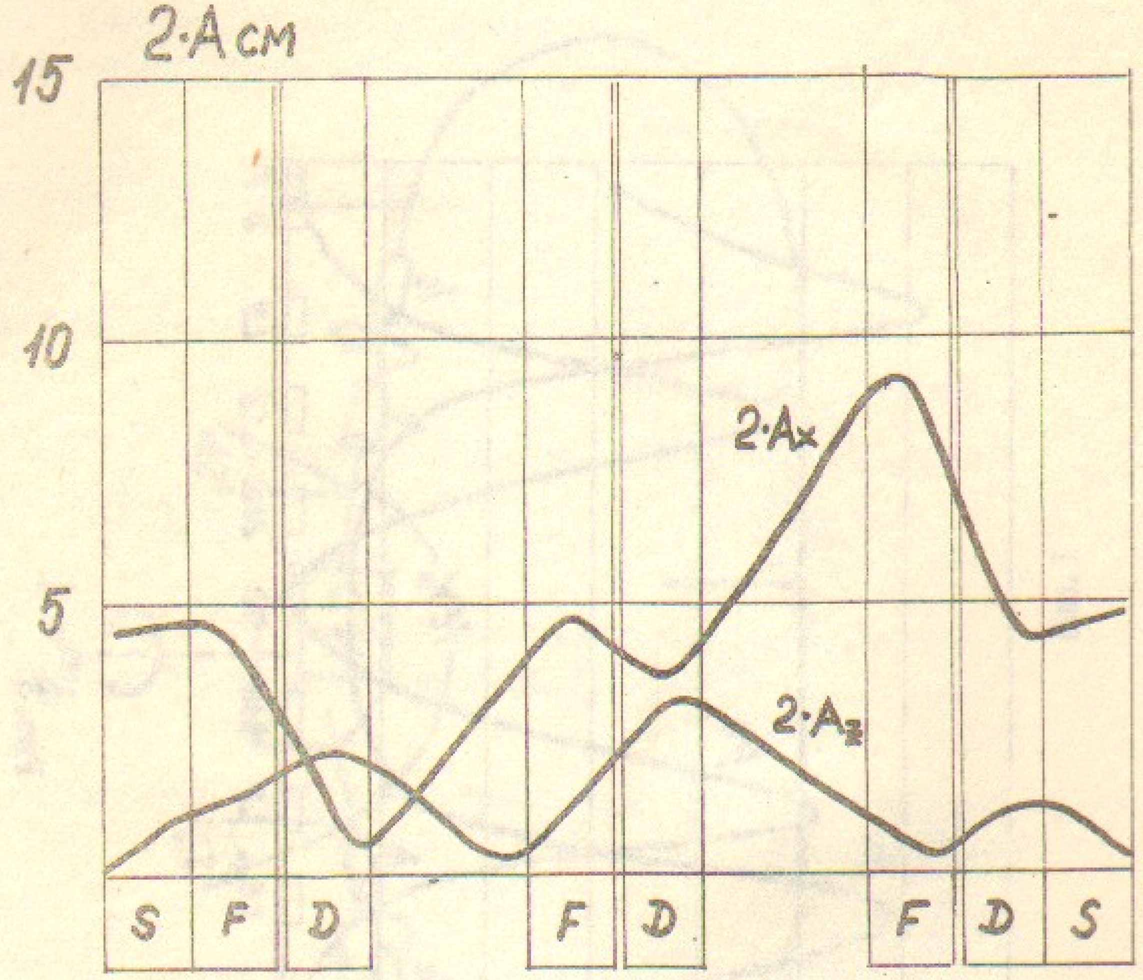


Рис.4

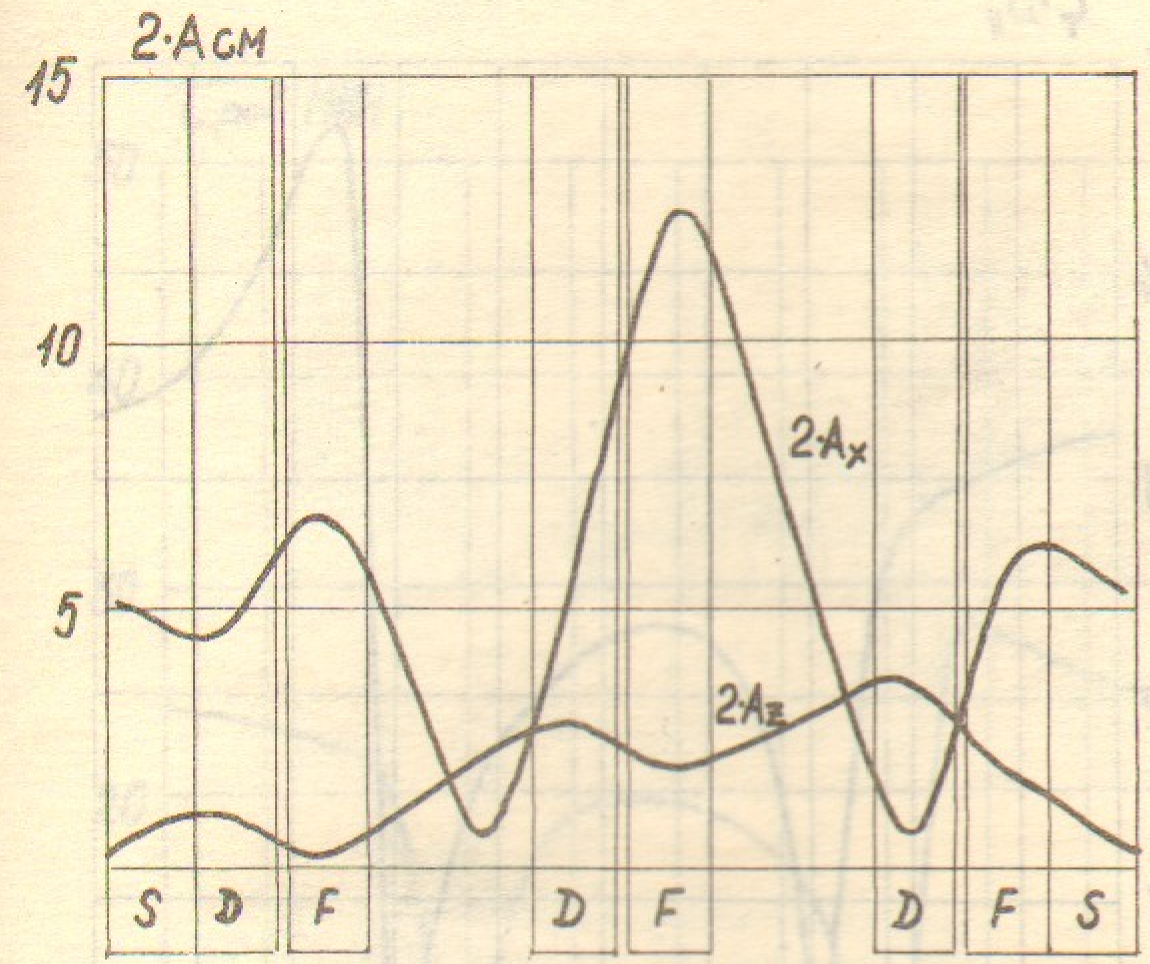
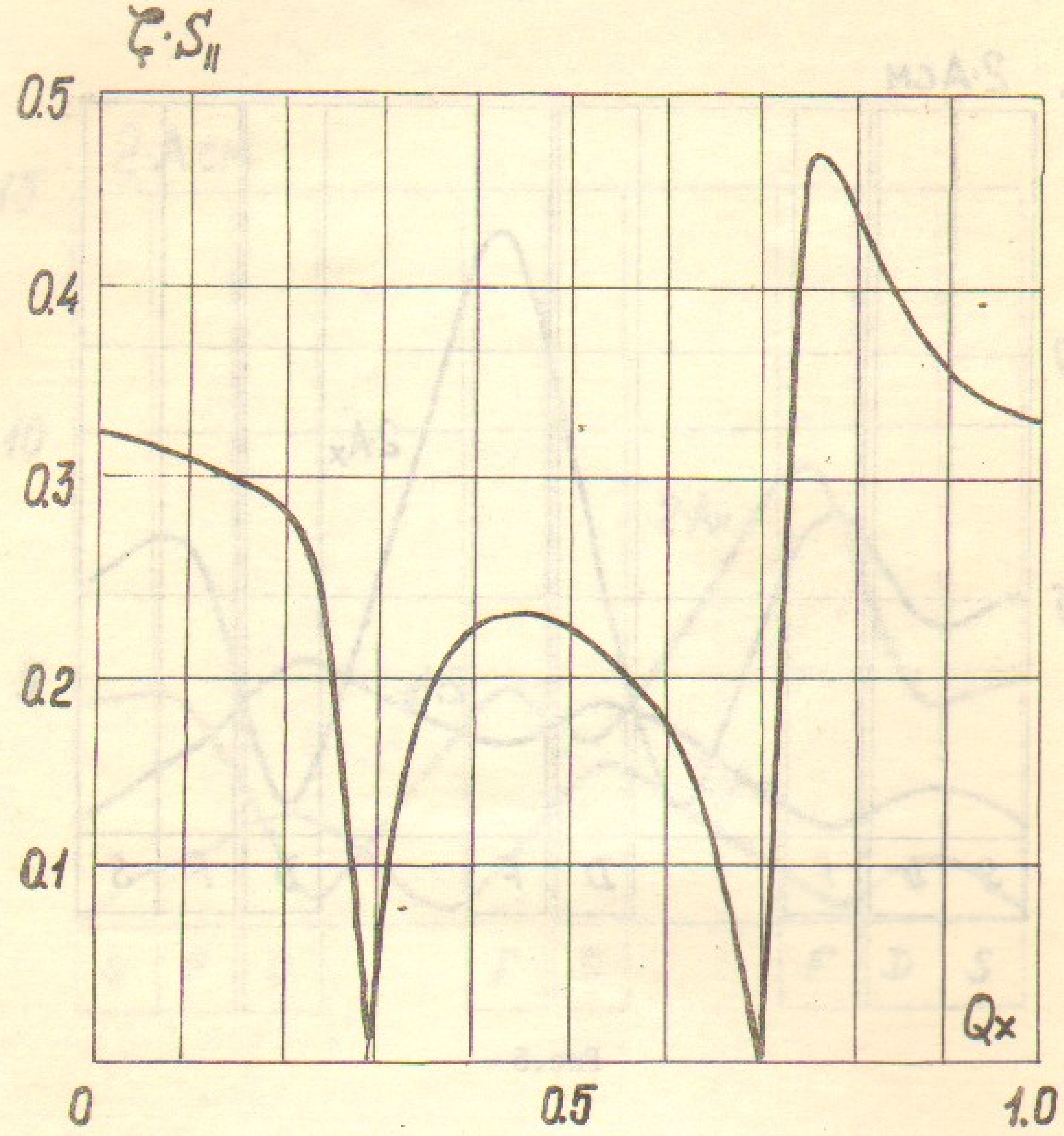
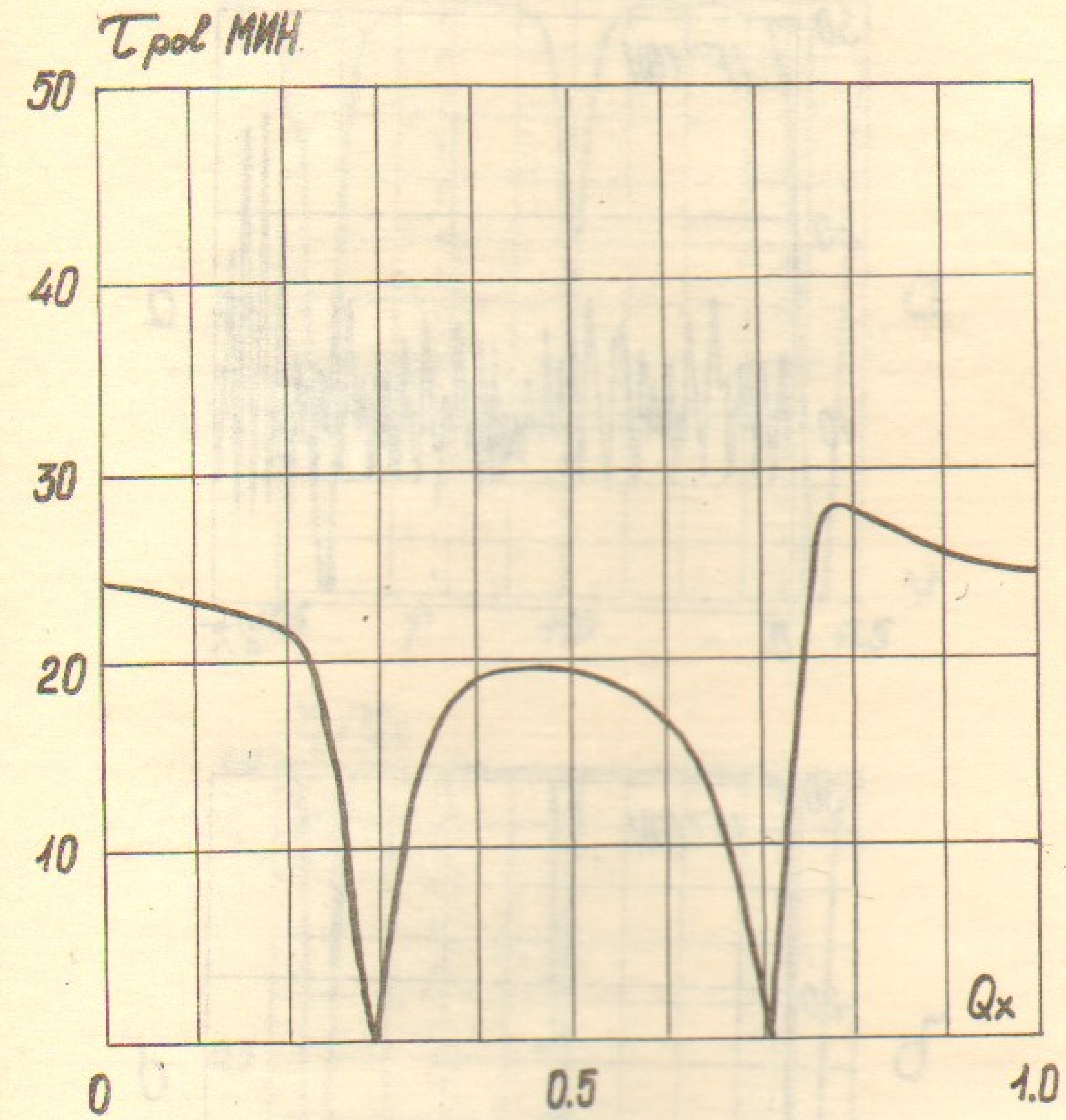


Рис.5



$\zeta \cdot S_{11}$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.5
1.0
Q_x

Рис.6



τ_{pol} МИН.
50
40
30
20
10
0
0.5
1.0
Q_x

Рис.7

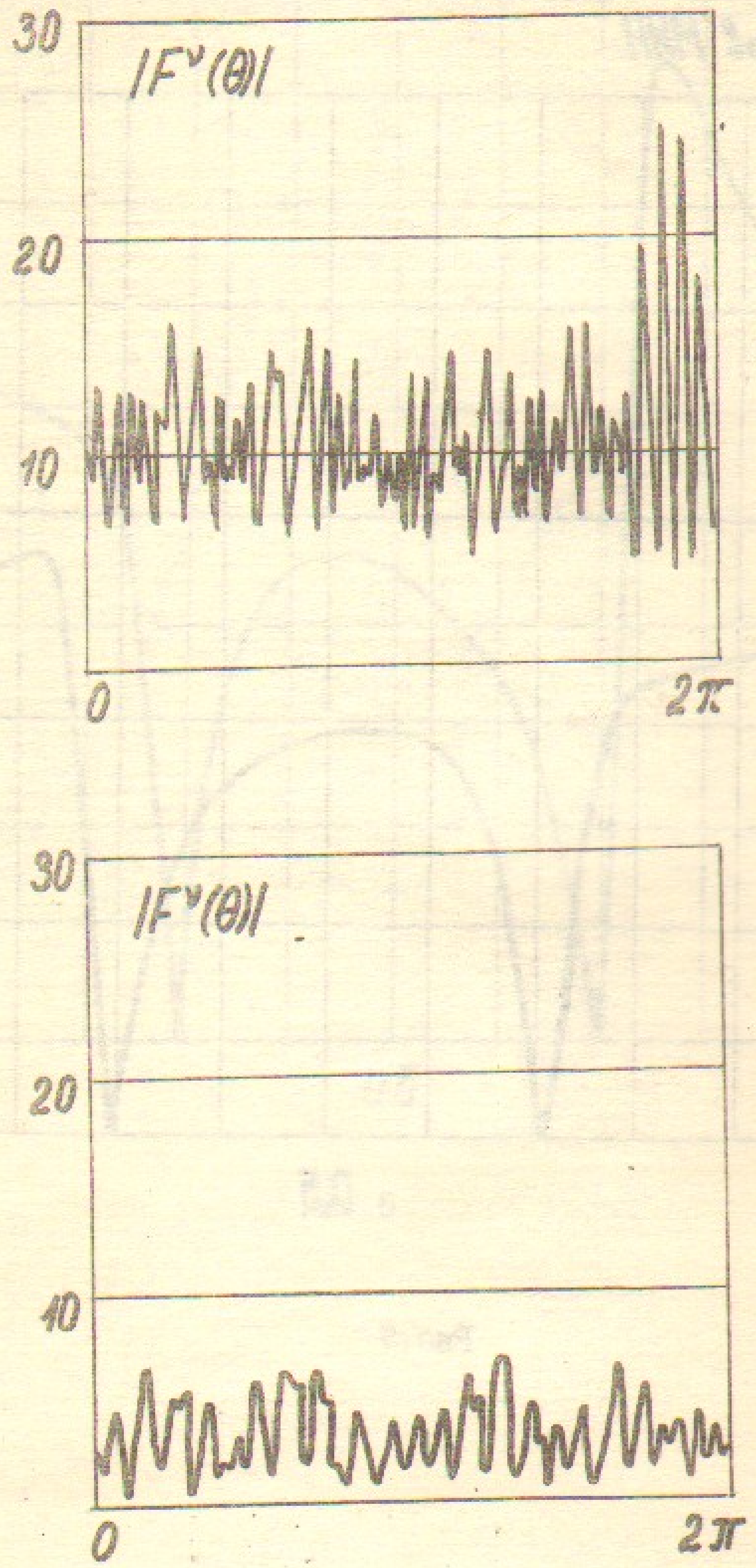


Рис.8

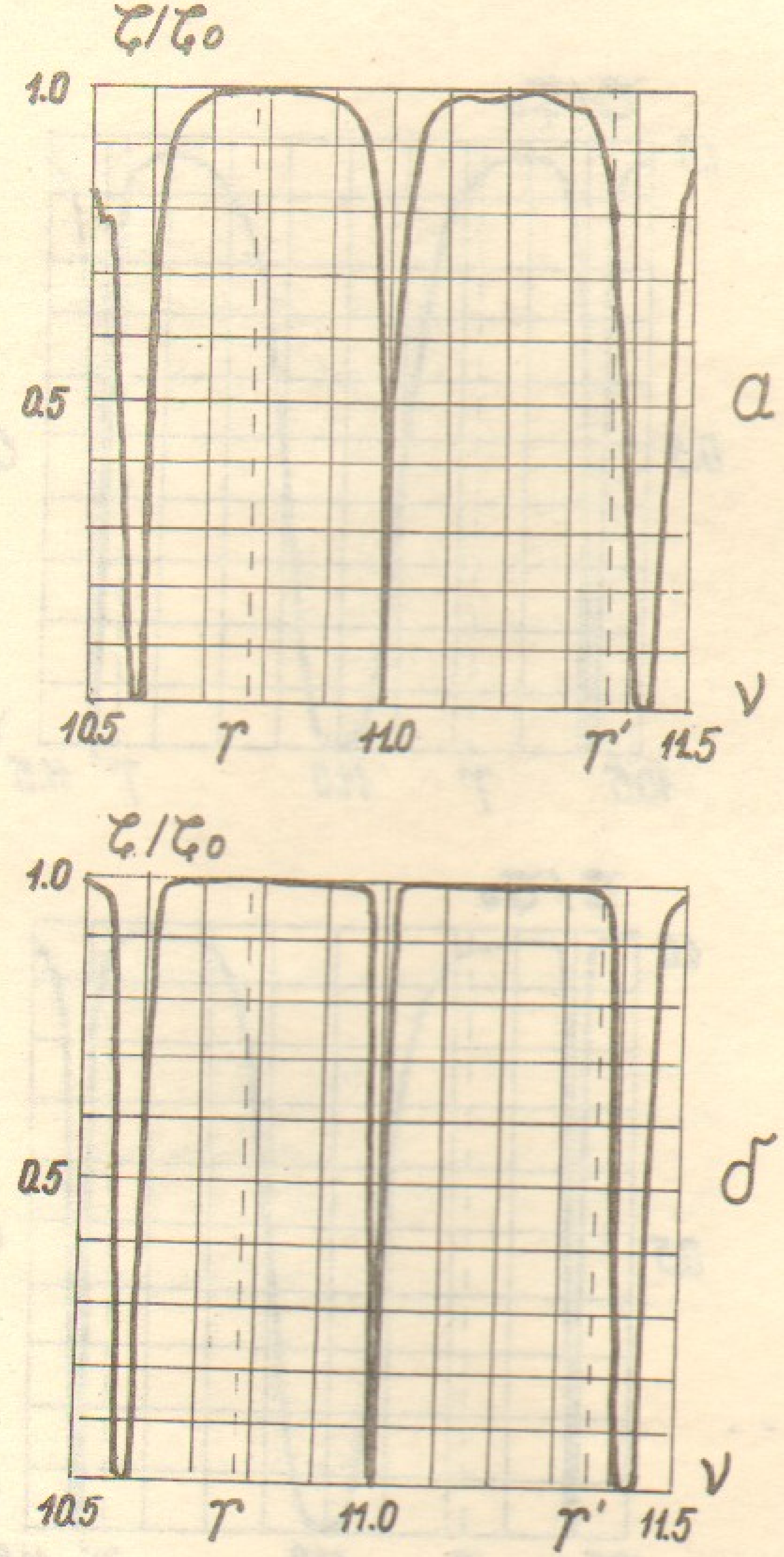


Рис.9

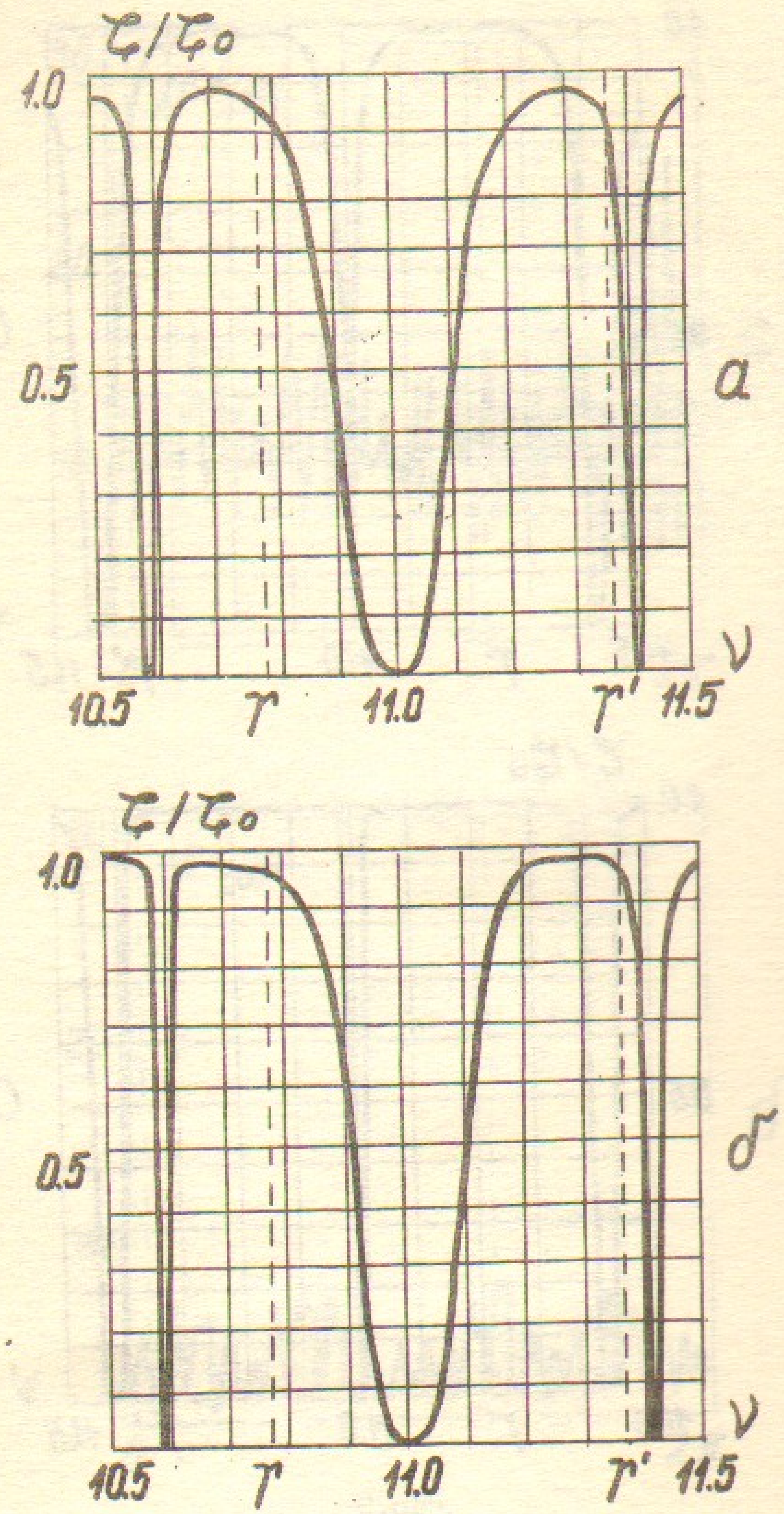


Рис.IO