

46

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Б.Н.Брейзман, В.М.Малкин

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ОДНО-
МЕРНОЙ КОРОТКОВОЛНОВОЙ МОДУЛЯ-
ЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

ПРЕПРИНТ 81 - 66



НЕЛИНЕЙНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ОДНОМЕРНОЙ КОРОТКО-
ВОЛНОВОЙ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Б.Н.Брейзман, В.М.Малкин

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрена нелинейная стадия модуляционной неустойчивости широкого спектра ленгмювской турбулентности в условиях, когда энергия ленгмювских волн близка к порогу неустойчивости, а пространственный масштаб нарастающих возмущений сопоставим с характерной длиной волны плазмонов. Получены уравнения, описывающие развитие неустойчивости в приближении малой нелинейности, и указаны условия осуществления мягкого и жесткого режимов нелинейной стабилизации.

NONLINEAR STABILIZATION OF ONE-DIMENSIONAL
SHORT-WAVELENGTH MODULATIONAL INSTABILITY

B.N.Breizman, V.M.Malkin

Institute of Nuclear Physics,
630090, Novosibirsk, USSR

A b s t r a c t

The nonlinear stage of modulational instability driven by Langmuir turbulence is studied for the case in which the Langmuir waves have a broad spectrum with total energy close to the instability threshold. The spatial scale of unstable perturbations is assumed to be comparable with the characteristic Langmuir oscillation wavelength. The equations describing the instability development within the approximation of small nonlinearity are derived and the criteria of soft and hard nonlinear regimes are formulated.

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ОДНОМЕРНОЙ КОРОТКО-
ВОЛНОВОЙ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Б.Н.Брейзман, В.М.Малкин

I. ВВЕДЕНИЕ

В 1964 году Веленов и Рудаков [1] показали, что в плазме с достаточно высоким уровнем ленгмювской турбулентности должен наблюдаться самопроизвольный рост низкочастотных возмущений плотности (модуляционная неустойчивость). Порог этой неустойчивости определяется следующей оценкой:

$$\frac{W_c}{n_0 T} \sim (\Delta k \Gamma_D)^2$$

Здесь W_c — критическая плотность энергии ленгмювских волн, а Δk — ширина их спектра.

Волновое число q_0 наиболее неустойчивого возмущения зависит от формы спектра турбулентности и может по-разному соотноситься с характерным волновым числом плазмонов k_0 . Если плотность энергии ленгмювских волн W близка к W_c , то величина q_0 оказывается либо малой по сравнению с k_0 , либо сопоставимой с k_0 (см. [2]). В первом случае мы будем называть неустойчивость длинноволновой, а во втором — коротковолновой. В работе [2] было показано, что при длинноволновой неустойчивости возмущения всегда возбуждаются жестко: они не стабилизируются малой нелинейностью, и обязательно достигают уровня, при котором значительная часть ленгмювских волн захватывается в потенциальные ямы, образованные неоднородностями плотности плазмы. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы выяснить, как обстоит дело в случае коротковолновой неустойчивости. Так же, как и в работе [2], речь в данном случае пойдет о достаточно широких спектрах турбулентности, в которых разброс групповых скоростей плазмонов велик по сравнению со скоростью звука. При этом мы ограничимся рассмотрением одномерной задачи, где исключена возможность ленгмювского волнения (см. [3,4]).

Мы покажем, что коротковолновые возмущения могут возбуждаться не только жестко, но и мягко, причем характер их возбуждения

определяется плазмонами с волновыми числами, близкими к $q_0/2$. Это значение волнового числа отвечает резонансу между парой плазмонов ($k_{1,2} \approx \pm q_0/2$) и нарастающим возмущением плотности. Из содержания статьи будет видно, что влияние данного резонанса на рост модуляционных возмущений зависит от знака производной спектральной функции плазмонов N_k в точке $|k|=q_0/2$. Если $\frac{\partial N_k}{\partial k}|_{k=q_0/2} > 0$, то резонанс играет дестабилизирующую роль, что соответствует жесткому нелинейному режиму. Если же $\frac{\partial N_k}{\partial k}|_{k=q_0/2} < 0$, то наличие резонанса может приводить к стабилизации модуляционной неустойчивости (мягкий нелинейный режим).

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Введем следующие единицы измерения длины x , времени t , возмущения концентрации плазмы n и амплитуды высокочастотного электрического поля E :

$$\begin{aligned} [x] &= k_0^{-1} \\ [t] &= (k_0 c_s)^{-1} \\ [n] &= 3n_0 (k_0 \Gamma_D)^2 \\ [E] &= (48\pi n_0 T)^{1/2} k_0 \Gamma_D \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь k_0^{-1} - характерная длина ленгмювских волн, c_s - скорость ионного звука, T и Γ_D - температура и дебаевский радиус электронов, n_0 - средняя концентрация плазмы. Температура ионов считается малой по сравнению с T .

При таком выборе единиц одномерные уравнения Захарова [3] имеют вид:

$$ig \frac{\partial E}{\partial t} = \hat{h} E, \quad \hat{h} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + n; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (n + |E|^2). \quad (3)$$

Через g обозначено отношение c_s к характерному значению групповой скорости ленгмювских волн. Говоря о широком спектре, мы считаем выполненным неравенство $g k_0 \ll \Delta k$, где Δk - ширина спектра. В дальнейшем для простоты предполагается, что

$\Delta k \sim k_0$. При этом указанное неравенство приобретает вид

$$g \ll 1.$$

Отметим, что в противоположном предельном случае ($g \gg 1$) применимо так называемое статическое приближение:

$$n = -|E|^2 + \overline{|E|^2}$$

(черта означает усреднение по пространству). В этом приближении система (2), (3) сводится к хорошо изученному нелинейному уравнению Шредингера (см., например, [5]).

Уравнения (2), (3) позволяют распространить линейную теорию модуляционной неустойчивости [1] на возмущения плотности с произвольным пространственным масштабом. Связь между частотой Ω и волновым числом q возмущений дается полученной в [2] формулой:

$$S_q^2 \equiv \frac{\Omega^2}{q^2} = 1 + \int dk \frac{N_{k+q/2} - N_{k-q/2}}{2kq - i0}. \quad (4)$$

Спектральная плотность ленгмювских волн N_k считается здесь не зависящей от времени.

Как было показано в [6], ленгмювский спектр на ранней стадии модуляционной неустойчивости, вообще говоря, меняется. Причина состоит в рассеянии плазмонов на порождаемых низкочастотными колебаниями электрического поля возмущениях плотности. Рассеяние ведет к эргодизации спектра. Оно становится существенным еще до того, как неустойчивые возмущения успевают оторваться от своего источника и выйти на описываемую линейной теорией стадию экспоненциального роста. Стадия, формально описываемая линейной теорией, может наступить после завершения эргодизации спектра. При не слишком малом относительном превышении ε энергии ленгмювских волн W над порогом модуляционной неустойчивости W_c :

$$\varepsilon \gg g^{2/5} \quad (5)$$

она действительно наступает^{I)} и является достаточно продолжительной для того, чтобы экспоненциально расти со временем

I) Степень g в правой части (5) зависит от размерности задачи; степень "2/5" относится к одномерному случаю.

неустойчивые (модуляционные) возмущения успели намного превзойти по амплитуде линейно растущие устойчивые (звуковые) возмущения. На данной стадии спектр плазмонов является эргодическим (в рассматриваемом нами одномерном случае - четным), а величина S_{ω}^2 - вещественной. Модуляционным возмущениям соответствуют отрицательные значения S_{ω}^2 , которые при коротковолновой неустойчивости с малой надпороговостью

$$\epsilon \ll 1 \quad (6)$$

сосредоточены в узком интервале $\Delta\omega \sim \epsilon^{1/2}$ волновых чисел вблизи $\omega_0 \sim 1$ (рис.1). Определим единицу длины κ_0^{-1} так, чтобы минимум S_{ω}^2 достигался в точке $\omega_0 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{\omega}^2 &= -\epsilon, \\ \frac{\partial S_{\omega}^2}{\partial \omega} \Big|_{\omega=1} &= 0, \\ \frac{\partial^2 S_{\omega}^2}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=1} &= 2\alpha > 0, \quad \alpha \sim 1. \end{aligned} \quad (7)$$

На линейной стадии неустойчивости возмущение представляет собой волну с волновым числом $\omega_0 = 1$ и отгибающей, плавно меняющейся во времени и пространстве. Оба масштаба изменения отгибающей порядка $\epsilon^{-1/2}$. Нелинейность приводит к появлению пространственных гармоник. Таким образом, возмущение приобретает вид:

$$n = u_0 + (u_1 e^{ix} + \text{к.с.}) + (u_2 e^{2ix} + \text{к.с.}) + \dots \quad (8)$$

Отгибающие u_n являются плавными функциями координаты и времени.

Для описания эволюции возмущения на нелинейной стадии модуляционной неустойчивости воспользуемся адиабатическим приближением²⁾:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(n + \frac{\delta}{\delta n} \sum_p N_p \lambda_p \right), \quad (9)$$

²⁾ Уравнение (9) выводится следующим образом: электрическое поле E раскладывается по собственным модам ψ_p , затем $|E|^2$ в правой части (3) усредняется по быстротеменяющимся фазам коэффициентов разложения, после этого используется вытекающее из (10) соотношение $|\psi_p|^2 = \delta \lambda_p / \delta n$.

Возможность использования адиабатического приближения на нелинейной стадии модуляционной неустойчивости широкого спектра ленгмюровских волн была указана в [6].

$$\hat{h} \psi_p = \lambda_p \psi_p \quad (10)$$

Здесь плазма считается заключенной в конечный объем $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$. Собственные частоты плазмонов λ_p определяются из уравнения (10) (с периодическими граничными условиями) и рассматриваются как функционалы $n(x, t)$. В отсутствие возмущения

$$\lambda_p = \kappa_p^2; \quad \kappa_p = \frac{2\pi p}{L}; \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

а числа заполнения связаны со спектральной плотностью плазмонов соотношением

$$N_p = 2\pi N_{\kappa_p}$$

Множитель 2π необходим для согласования нормировки N_{κ} в формулах (4) и (9):

$$\sum_p N_p = L \int dk N_{\kappa} = \int dx |E|^2.$$

В дальнейшем мы будем нумеровать собственные частоты λ_p значениями величины $\kappa_p = \frac{2\pi p}{L}$:

$$\lambda_p = \lambda(\kappa_p)$$

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо знать, как эволюционируют числа заполнения N_p . Оказывается, в тех случаях, когда развитие возмущения не приводит к пересечению траекторий первоначально удаленных друг от друга собственных частот λ_p , числа заполнения можно в течение достаточно продолжительного промежутка времени считать постоянными [6]. Поясним это подробнее. Допустим, что некоторые собственные частоты λ_α и λ_β изменяются со временем так, как показано на рис.2. В те моменты времени, когда $|\lambda_\alpha - \lambda_\beta| < \gamma_{\alpha\beta}$, где $\gamma_{\alpha\beta}$ - интеграл перекрытия состояний ψ_α и ψ_β , происходит обмен плазмонами между этими состояниями. Если частоты $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ первоначально заметно различались, то, вообще говоря, различались и числа заполнения N_α, N_β . Обмен плазмонами приводит к выравниванию этих чисел, т.е. к весьма быстрому их изменению. Если же первоначально удаленные друг от друга траектории собственных частот не пересекаются, то обмен плазмонами происходит лишь между состояниями с почти одинаковыми числами заполнения, вследствие чего эти числа могут изменяться только диффузионно, т.е. весьма медленно.

Заметим, что линейное дисперсионное соотношение можно полу-

чить из (9), рассчитав λ_p по обычной теории возмущений (см., например, [7]) с точностью до квадратичных по n членов:

$$\tilde{\lambda}(\kappa) = \kappa^2 + \int \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{17\kappa - \kappa_1}{\kappa^2 - \kappa_1^2} \quad (II)$$

$$n_{q_1} = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} n e^{-i q_1 x} dx \quad (I2)$$

Для явного выделения в (9) нелинейности введем нелинейную добавку $\lambda'(\kappa)$ к частоте плазмона:

$$\lambda'(\kappa) = \lambda(\kappa) - \tilde{\lambda}(\kappa) \quad (I3)$$

Подставляя (8) в (9) и учитывая (4), (7), получим следующие уравнения для огibaющих:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[S_0^2 u_0 + \frac{\int d\kappa \lambda'(\kappa) N_\kappa}{S_0} \right], \quad (I4)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \varepsilon u_1 + \alpha \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\int d\kappa \lambda'(\kappa) N_\kappa}{S_1} \quad (I5)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = -z^2 \left[S_z^2 u_z + \frac{\int d\kappa \lambda'(\kappa) N_\kappa}{S_z} \right], \quad z \geq 2.$$

Существенно, что неустойчивой является только первая гармоника. Все остальные возникают из нее вследствие нелинейного взаимодействия. Амплитуда z -ой гармоники пропорциональна u_1^z ($z \geq 2$). Для вычисления главного нелинейного члена в уравнении (I5) заведомо достаточно учета нулевой и второй гармоник. Кроме того, в силу медленности изменения огibaющих со временем можно пренебречь в уравнении для второй гармоники членом $\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \sim \varepsilon u_2$ по сравнению с $4S_2^2 u_2 \sim u_2$ и заменить это уравнение явной формулой:

$$u_2 = -\frac{1}{S_2^2} \frac{\int d\kappa \lambda'(\kappa) N_\kappa}{S_2} \quad (I6)$$

Ниже будет показано, что даже нулевая и вторая гармоники в большинстве случаев несут незначительный вклад в нелинейность, вообще говоря, мал по сравнению со вкладом резонансных плазмонов. Для пояснения роли последних рассмотрим задачу об эволюции монохроматического возмущения плотности.

3. МОНОХРОМАТИЧЕСКАЯ ВОЛНА

Предположим, что огibaющие u_n не зависят от координаты x . Тогда нулевая гармоника отсутствует. Учет второй гармоники приводит к появлению кубичных по u_1 членов в уравнении (I5) (как и в задаче о сдвиге частоты нелинейного осциллятора (см., например, [8])). Вклад резонансных плазмонов оказывается квадратичным по u_1 , поэтому гармоники можно не учитывать.

Спектр оператора Шредингера с периодическим потенциалом, как известно, является зонным (см., например, [9]). Основной вклад в $\int d\kappa \lambda'(\kappa) N_\kappa$ дает область, прилегающая к первой запрещенной зоне, т.е. окрестность точек $\kappa = \pm \frac{1}{2}$. В этой окрестности $\lambda(\kappa)$ можно найти посредством теории возмущений с двукратным вырождением. С достаточной для дальнейшего степенью точности

$$\lambda(\kappa) = \frac{1}{4} + (\kappa - \frac{1}{2}) \sqrt{1 + \frac{14,1^2}{(\kappa - \frac{1}{2})^2}} \quad (I7)$$

График этой функции изображен на рис.3. Там же показана зависимость

$$\tilde{\lambda}(\kappa) = \frac{1}{4} + \frac{14,1^2}{2|\kappa - \frac{1}{2}|} \quad (I8)$$

Рассчитанная согласно (I8) энергия плазмонов больше истинной, если $|\kappa| > \frac{1}{2}$, и меньше нее, если $|\kappa| < \frac{1}{2}$, причем отличие быстро убывает по мере удаления от резонанса. Поэтому знак величины $\int d\kappa \lambda'(\kappa) N_\kappa$, которую можно интерпретировать как нелинейную добавку к плотности энергии газа плазмонов, противоположен знаку $N' \equiv \frac{\partial N_\kappa}{\partial \kappa} \Big|_{\kappa=\frac{1}{2}}$. Если $N' > 0$, то возмущению энергетически выгодно расти и режим нелинейной стабилизации является жестким: стабилизация наступает только при $|u_{1,1}| \sim I$. В противоположном случае ($N' < 0$) монохроматическая волна возбуждается мягко. Вычисляя $\int d\kappa \lambda'(\kappa) N_\kappa$ и подставляя результат в (I5), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = u_1 (\varepsilon + 2|u_{1,1}| N'), \quad (I9)$$

из которого следует, что нелинейная стабилизация в случае $N' < 0$ наступает при $|u_{1,1}| \sim \varepsilon$.

В заключение данного раздела укажем область применимости

приближения монохроматической волны. Возмущение плотности можно считать монохроматическим, если масштаб ℓ изменения огибающей $u_1(x)$ велик по сравнению с длиной, пролетаемой плазмой за время развития неустойчивости:

$$\ell \gg \varepsilon^{-1/2} g^{-1} \quad (20)$$

4. СЛУЧАЙНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

Возмущение плотности плазмы порождается колебаниями электрического поля и зависит от фаз ленгмювских волн. Поэтому на линейной стадии неустойчивости и, по крайней мере, в начале нелинейной стадии $n(x,t)$ является не монохроматической волной, а однородным случайным полем. Масштаб изменения огибающей u_1 ($\ell \sim \varepsilon^{-1/2}$) удовлетворяет неравенству, противоположному (20). Оценим характерное значение u_1 , при котором становятся существенными нелинейные эффекты. Если предположить, что это значение мало по сравнению с шириной области неустойчивости:

$$|u_1| \ll \Delta \varphi \sim \varepsilon^{1/2}, \quad (21)$$

то ширина резонансной области будет порядка $\Delta \varphi$. Для монохроматической волны ширина резонансной области $\delta \varphi$ порядка амплитуды волны. Область $\Delta \varphi$ может вместить $\frac{\Delta \varphi}{\delta \varphi}$ монохроматических волн, каждая из которых взаимодействует со своей группой резонансных плазмонов и, достигнув амплитуды ε , становится нелинейной. Поскольку волны независимы, средний квадрат возмущения плотности равен сумме квадратов их амплитуд:

$$|u_1|^2 \sim \frac{\Delta \varphi}{\delta \varphi} \varepsilon^2 \sim \varepsilon^{3/2}. \quad (22)$$

Найденное значение $|u_1|$ удовлетворяет использованному в процессе вывода неравенству (21). По аналогии со случаем монохроматической волны естественно предположить, что нелинейность является стабилизирующей при $M' < 0$ и дестабилизирующей в противоположном случае. Ниже это предположение и оценка (22) будут подтверждены точным расчетом.

Соотношение (22) позволяет считать числа заполнения N_p в уравнении (9) не зависящими от времени. Действительно, поправка к собственной частоте плазмона, возникающая из-за возмущения

плотности, максимальна в области резонанса $|k| \approx \frac{1}{2}$ и оценочно равна $\frac{|u_1|^2}{\Delta \varphi}$. Сближаться в процессе изменения возмущения могут лишь те собственные частоты, отличие которых не превосходит этой величины. Время сближения не меньше времени изменения возмущения $\sim \varepsilon^{-1/2}$, поэтому коэффициент диффузии не превосходит значения

$$D \sim \left(\frac{|u_1|^2}{\Delta \varphi}\right)^2 \varepsilon^{1/2}$$

Изменение чисел заполнения в резонансной области не отражается на рассчитанной согласно линейной теории (4) величине инкремента, до тех пор, пока оно мало по сравнению с ε : $\delta N_p \ll \varepsilon$. Изменение $\delta N_p \sim \varepsilon$ достигается не ранее, чем за время

$$t_D \sim \frac{\delta N_p}{D} \Delta \varphi \quad (23)$$

которое в силу (22) велико по сравнению с $\varepsilon^{-1/2}$. В дальнейшем речь будет идти о временах $t \ll t_D$.

Неравенство (21) приводит к еще одному упрощению: оно позволяет нумеровать состояния в порядке возрастания их энергии. Выражая номер состояния, с одной стороны, через его энергию (см., например [10]), а с другой — через начальное волновое число и приравнявая эти номера, получим соотношение:

$$|k| = -\frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\lambda} d\lambda S_p \operatorname{Im} \hat{G}(\lambda), \quad (24)$$

явно определяющее функцию $\lambda(k)$. Обозначение $\hat{G}(\lambda)$ введено для запаздывающей функции Грина уравнения Шредингера:

$$\hat{G}(\lambda) = (\lambda - \hat{h} + i0)^{-1}. \quad (25)$$

Функция $\hat{G}(\lambda)$ может быть найдена последовательными приближениями из уравнения Дайсона:

$$G(x, x', \lambda) = G_0(x - x', \lambda) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_0(x - x_1) n(x_1) G(x_1, x', \lambda) dx_1, \quad (26)$$

где

$$G_0(\xi, \lambda) = \frac{1}{2i\lambda^{1/2}} e^{i\lambda^{1/2}|\xi|}$$

— невозмущенная функция Грина.

Подставляя протергерированное уравнение (26) в (24), получим

$$|k| = \lambda^{1/2} - k'(\lambda), \quad k'(\lambda) = \sum_{m=2}^{\infty} k^{(m)}(\lambda), \quad (27)$$

$$\kappa^{(m)}(\lambda) = -\frac{1}{L} \int_m \frac{1}{m} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_1 \dots dx_m n(x_1) \dots n(x_m) \times \\ \times G_0(x_2 - x_1, \lambda) G_0(x_3 - x_2, \lambda) \dots G_0(x_m - x_{m-1}, \lambda) G_0(x_1 - x_m, \lambda). \quad (28)$$

Из уравнения (27) можно найти $\lambda(k)$ и $\lambda'(k)$. С точностью до членов четвертого порядка по амплитуде возмущения имеем

$$\lambda'(k) = 2|k| \sum_{m=3}^4 \kappa^{(m)}(k^2) + \frac{\partial}{\partial k} \kappa [k^{(2)}(k^2)]^2 \quad (29)$$

Учитывая разложение (8), находим с той же точностью:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk N_k 2|k| \sum_{m=3}^4 \kappa^{(m)}(k^2) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \left[-2S_0^2 u_0 |u_{1,1}|^2 + \right. \\ \left. + S_2^2 (u_1^2 u_2^* + \text{к.с.}) + (2S_0^2 + S_2^2 + \alpha) |u_{1,1}|^4 \right], \quad (30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk N_k \frac{\partial}{\partial k} \kappa [k^{(2)}(k^2)]^2 = \\ = -2(S_0^2 + \alpha) |f(0)|^2 - \frac{\pi}{4} N' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |f(\xi)|^2, \quad (31)$$

где $f(\xi) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx u_1(x + \frac{\xi}{2}) u_1^*(x - \frac{\xi}{2}) \quad (32)$

— парная корреляционная функция возмущения. Последнее слагаемое в (31) порядка $|u_{1,1}|^4 e^{-\frac{1}{2} \xi^2}$, все остальные слагаемые в (31) и (30) порядка $|u_{1,1}|^4$ (так как $u_0, |u_{2,1}| \sim |u_{1,1}|^2$). Заметим, что интеграл (30) легко оценить без вычислений. Для этого достаточно перейти к переменной k^2 и сместить путь интегрирования в верхнюю полуплоскость, где фигурирующие в (28) функции Грина $G_0(\xi, k^2)$ экспоненциально затухают на расстоянии $|\xi| \sim (\gamma_m k)^{-1}$. Поскольку масштаб изменения N_k порядка единицы, то путь интегрирования можно сместить так, чтобы на нем было $\gamma_m k \sim 1$. Отсюда сразу следует правильная оценка интеграла.

Итак, поправка к плотности энергии газа плазмонов определяется последним слагаемым в (31). Знак поправки противоположен знаку N' . Следовательно, при $N' > 0$ нелинейность является дестабилизирующей, а при $N' < 0$ — стабилизирующей. Уровень, на котором происходит стабилизация в случае $N' < 0$ определяется из условия компенсации отрицательной энергии модуляционных возмущений нелинейной добавкой к энергии плазмонов ($\epsilon |u_{1,1}|^2 \sim \epsilon^{-1/2} |u_{1,1}|^4$) и дается оценкой (22).

Если пренебречь в $\int dk \lambda'(k) N_k$ всеми членами порядка $|u_{1,1}|^4$, то уравнение (15) для основной гармоники оказывается локальным в представлении Фурье:

$$\frac{\partial^2 u_{1,q}}{\partial t^2} = u_{1,q} \left(\epsilon - \alpha q^2 + \frac{\pi}{2} N' |u_{1,q}|^2 \right), \quad (33)$$

$$u_{1,q} = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u_1(x) e^{-iqx} dx.$$

Из этого уравнения видно, что в случае $N' < 0$ при переходе через порог неустойчивости возникает новый устойчивый стационар:

$$|u_{1,q}|^2 = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\epsilon - \alpha q^2}{|N'|}, & q < \left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right)^{1/2} \\ 0, & q > \left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right)^{1/2} \end{cases} \quad (34)$$

Такая ситуация типична для мягкого режима нелинейной стабилизации неустойчивости.

Для выяснения характера нерезонансной нелинейности рассмотрим специальный случай $N' = 0$, в котором резонансное взаимодействие отсутствует. Подставляя (29) — (31) в (14) — (16), получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = S_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 - 2|u_{1,1}|^2), \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \left[\epsilon + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2S_0^2 (u_0 - 2|u_{1,1}|^2 + 2|u_{1,1}|^2) + \right. \\ \left. + 2\alpha (2|u_{1,1}|^2 - |u_{1,1}|^2) \right] u_1, \quad (36)$$

$$u_2 = -u_1^2. \quad (37)$$

(Черта над $|u_{1,1}|^2$ означает усреднение по пространству). Примечательно, что уравнения (35)–(37) применимы не только при $|u_{1,1}| \ll \alpha q$, но и при больших значениях $|u_{1,1}|$ (вплоть до $|u_{1,1}| \sim 1$). Дело в том, что при $N' = 0$ диффузия не меняет распределения резонансных плазмонов, так что члены, опущенные при выводе (35)–(37), малы по параметру $|u_{1,1}|$. Режим нелинейной стабилизации в данном случае является жестким. Действительно, для монохроматического возмущения плотности имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\epsilon + 4\alpha |u_{1,1}|^2) u_1, \quad (38)$$

из которого следует рост возмущения вплоть до уровня $|u_{1,1}| \sim 1$.

Заметим, что при $|N'| \sim 1$ опущенные в процессе вычисления

нелинейной поправки к энергии плазмонов ($Sdkl'(k)N_k$) члены малы по сравнению с удержанными по параметру $u_1/\Delta\omega \sim u_1/e$. Таким образом, мы снова приходим к выводу о необходимости неравенства (21). Эволюция модуляционных возмущений, удовлетворяющих противоположному неравенству, будет рассмотрена в следующем разделе.

5. ВОЗМУЩЕНИЯ С ПЛАВНОЙ ОГИБАЮЩЕЙ ($u_1/e \gg 1$).

При анализе возмущений, удовлетворяющих условию:

$$u_1/e \gg 1 \quad (39)$$

можно, как нетрудно проверить, описывать плазмоны с помощью ВКБ-приближения. Чтобы перейти к такому описанию, мы рассмотрим ВКБ-решение уравнения (1), соответствующее отдельному плазмону, находящемуся в потенциале (8):

$$E(x,t) = e^{i\phi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i\frac{m}{2}x} \quad (40)$$

В этом решении величины A_m и производные от фазы ϕ

$$\omega = -\frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad s = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (41)$$

являются медленно меняющимися функциями x и t . Подставив выражения (8) и (40) в уравнение (1) и собрав коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, нетрудно получить для A_m следующую систему уравнений:

$$\left[g\omega + ig\frac{\partial}{\partial t} + 2i\left(s + \frac{m}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial s}{\partial x} \right] A_m = \sum_{m'} P_{mm'} A_{m'} \quad (42)$$

Здесь через $P_{mm'}$ обозначена эрмитова матрица, элементы которой отличны от нуля только при одинаковой четности индексов m и m' и задаются следующими формулами:

$$P_{mm} = u_0 + \left(s + \frac{m}{2}\right)^2, \quad P_{m, m-2} = u_2, \quad P_{m, m+2} = u_2^* \quad (43)$$

Система (42) дает дисперсионное уравнение

$$\det \| g\omega \delta_{mm'} - P_{mm'} \| = 0, \quad (44)$$

корни которого мы обозначим через $\omega_j(s, u_0, u_2, u_2^*)$, а соответствующие собственные векторы — через A_m^j . Индекс j удобно

ввести так, чтобы при $n(x,t)=0$ имели место соотношения:

$$A_m^j \sim \delta_{mj}, \quad \kappa = s + \frac{j}{2}, \quad (45)$$

где κ — волновое число плазмона. При такой нумерации состояний величина S изменяется в пределах от $-1/4$ до $1/4$, а j принимает целочисленные значения ($0; \pm 1; \pm 2 \dots$). Окрестностям запрещенных энергетических зон, т.е. резонансным плазмонам, соответствуют малые S ($|S| \leq u_1$). Заметим, что условие (39) обеспечивает применимость ВКБ-приближения для описания большинства резонансных плазмонов.

Система (42) позволяет написать для каждого собственного вектора A_m^j следующие два соотношения:

$$\sum_m g\omega_j |A_m^j|^2 = \sum_{m,m'} A_m^{j*} P_{mm'} A_{m'}^j, \quad (46)$$

$$g\frac{\partial}{\partial t} \sum_m |A_m^j|^2 + \frac{\partial}{\partial x} \sum_m (m+2s) |A_m^j|^2 = 0. \quad (47)$$

Второе из них — уравнение непрерывности для величины $I_j = \sum_m |A_m^j|^2$ — можно преобразовать к более удобному виду:

$$\frac{\partial I_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial s} I_j \right) = 0. \quad (48)$$

Для этого следует воспользоваться формулой

$$\sum_m (m+2s) |A_m^j|^2 = g \frac{\partial \omega_j}{\partial s} \sum_m |A_m^j|^2,$$

которая получается в результате дифференцирования обеих частей равенства (46) по S .

Формулы (41) и (48) позволяют рассматривать величину ω_j как гамильтониан плазмона³⁾ и характеризовать плазмоны функцией

³⁾ Описывая движение плазмонов с помощью гамильтониана ω_j , необходимо помнить, что в точках поворота ($S=0$) одновременно со знаком S меняется также знак j , т.е. в момент поворота ω_j переходит в ω_{-j} . При этом гамильтониан автоматически оказывается непрерывной функцией S , поскольку из формул (43) и (44) следует, что $\omega_j(S) = \omega_{-j}(-S)$.

распределения $N_j(s, x, t)$, удовлетворяющей уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} + \frac{\partial \omega_j}{\partial s} \frac{\partial N_j}{\partial x} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial s} = 0. \quad (49)$$

Вычислим теперь высокочастотное давление плазмонов $|E|^2$. С этой целью найдем предварительно величину $|E|_j^2$ - давление, создаваемое отдельным плазмоном с частотой ω_j . Согласно формуле (40)⁴⁾,

$$|E|_j^2 = \sum_m |A_m^j|^2 + \sum_{z=1}^{\infty} (e^{izx} \sum_m A_m^j A_{m-2z}^j + \text{к.с.}). \quad (50)$$

Входящие сюда суммы легко вычисляются путем дифференцирования равенства (46) по u_z и u_z^* . Это дает

$$|E|_j^2 = I_j \left[1 + \sum_{z=1}^{\infty} (e^{izx} \frac{\partial g \omega_j}{\partial u_z^*} + \text{к.с.}) \right]. \quad (51)$$

Чтобы найти полное высокочастотное давление $|E|^2$, следует, учитывая случайность фаз плазмонов, заменить в формуле (51) I_j на функцию распределения N_j и просуммировать результат по всем значениям j и S . Таким образом,

$$|E|^2 = \sum_j \int ds N_j \left[1 + \sum_{z=1}^{\infty} (e^{izx} \frac{\partial g \omega_j}{\partial u_z^*} + \text{к.с.}) \right]. \quad (52)$$

Формула (52) позволяет перейти от уравнения (2) к системе уравнений для u_0 , u_z и u_z^* . Совершая этот переход, мы (подобно тому, как это было сделано в разделе 2) пренебрежем всеми гармониками выше второй и опустим производную по времени в уравнении для u_z :

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[u_0 + \sum_j \int ds N_j(s, x, t) \right], \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -u_1 - \sum_j \int ds N_j(s, x, t) \frac{\partial \omega_j}{\partial u_1^*} g, \quad (54)$$

$$u_2 = - \sum_j \int ds N_j(s, x, t) \frac{\partial \omega_j}{\partial u_2^*} g. \quad (55)$$

⁴⁾ При записи формулы (50) учтено, что все отличные от нуля компоненты собственного вектора A_m^j имеют индексы m одной и той же четности.

К уравнениям (53) - (55) требуется еще добавить явные выражения для ω_j . Их нетрудно получить из соотношения (44) методом последовательных приближений. Необходимо только обратить внимание на учет расщепления уровней с малыми S . Результат вычисления ω_j с точностью до членов порядка $|u_1|^4$ оказывается следующим:

$$g \omega_1 = (s + \frac{1}{2})^2 + u_0 + \left[1 - \frac{|u_1|^2}{4(1+S)^2} \right] \left[\frac{S}{|S|} \sqrt{S^2 + |u_1|^2} - s - \frac{|u_1|^2}{2(1+S)} \right] - \frac{2|u_2|^2}{(3+2S)(1-2S)} + \frac{1}{4} (u_1^2 u_2^* + u_1^{*2} u_2) \left[\frac{1}{(3+2S)(1+S)} + \frac{S(S-2)}{|S|(1+S)(1-2S)\sqrt{S^2 + |u_1|^2}} \right] - \frac{|u_1|^4}{8(1+S)^2(3+2S)} + \frac{3}{4} \frac{|u_1|^2 S}{(1+S)(1-2S)} \left(\frac{|S|}{\sqrt{S^2 + |u_1|^2}} - 1 \right), \quad (56)$$

$$g \omega_{-j}(s) = g \omega_j(-s);$$

$$g \omega_j = \kappa^2 + u_0 + \frac{2|u_1|^2}{4\kappa^2 - 1} + \frac{|u_2|^2}{2(\kappa^2 - 1)} + \frac{1}{4} (u_1^2 u_2^* + u_1^{*2} u_2) \left[\frac{1}{(\kappa+1)(2\kappa+1)} - \frac{1}{4\kappa^2 - 1} + \frac{1}{(2\kappa-1)(\kappa-1)} \right] + \frac{1}{4} |u_1|^4 \left[\frac{1}{(\kappa-1)(2\kappa-1)^2} - \frac{1}{(\kappa+1)(2\kappa+1)^2} \right] - \frac{2|u_1|^4}{4\kappa^2 - 1} \left[\frac{1}{(2\kappa-1)^2} + \frac{1}{(2\kappa+1)^2} \right], \quad (57)$$

$$\kappa = j/2 + S; \quad j \neq \pm 1.$$

Приведенные формулы учитывают расщепление уровней только в окрестности первой запрещенной зоны ($j = \pm 1$). Наличие других запрещенных зон в рассматриваемом приближении несущественно, т.к. соответствующий вклад в интегралы (53) - (55) оказывается пренебрежимо малым. Поэтому при $j \neq \pm 1$ можно вычислять частоту ω_j по обычной теории возмущений (без учета расщепления). Отметим, что найденная, таким образом, величина ω_j (см. формулу (57)) имеет особенности при $j = \pm 2$ и $j = 0$. Более точный расчет позволяет получить простое правило устранения этих особенностей: интегралы (54) и (55) должны вычисляться в смысле главного значения.

Уравнения (49) и (53) – (57) составляют замкнутую систему, с помощью которой можно согласованно описывать эволюцию возмущений плотности и распределения плазмонов. Так, например, в случае монохроматического возмущения, когда ω_j не зависит от X , из уравнения (49) следует постоянство чисел заполнения $N_j(S)$. При этом уравнение (54) с точностью до малых поправок порядка $|u_1|^3$ совпадает с уравнением (19).

Если возмущение отличается от монохроматической волны, то распределение плазмонов N_j должно, очевидно, зависеть не только от S но также от X и t . В этом случае анализ системы (53) – (57) усложняется, т.к. возникает необходимость решить уравнение (49). Для нерезонансных плазмонов искомое решение нетрудно построить путем разложения N_j и ω_j в ряд по степеням амплитуд u_0 , u_1 и u_2 . Учитывая медленность изменения амплитуд во времени, можно представить $N_j(s, x, t)$ в следующем виде:

$$N_j(s, x, t) = N_k \Big|_{k=s+\frac{j}{2}} + \frac{1}{2k} (g\omega_j - \langle g\omega_j \rangle) \frac{\partial N_k}{\partial k} \Big|_{k=s+\frac{j}{2}} \quad (58)$$

Здесь через N_k обозначено распределение плазмонов в отсутствие возмущения, а угловые скобки означают усреднение по X при фиксированных значениях S и t . Отметим, что частоты ω_j в формуле (58) достаточно задать с точностью до квадратичных по u_1 членов; при этом правые части уравнений (53) – (55) будут определены с точностью до членов порядка $|u_1|^3$ включительно.

Для резонансных плазмонов формула (58), вообще говоря, непригодна, т.к. воздействие возмущения на эти плазмоны нельзя считать малым. Окрестность резонанса требует, следовательно, отдельного рассмотрения. В этой окрестности гамильтониан (56) можно заменить более простым выражением

$$g\omega_{\pm 1} = \frac{1}{4} \pm \frac{S}{|S|} \sqrt{S^2 + |u_1|^2} \quad (59)$$

Если $|u_1|$ зависит от X , то резонансные плазмоны могут захватываться в потенциальные ямы, расположенные в минимумах функции $|u_1(x)|$. Ввиду того, что форма огибающей $u_1(x)$ изменяется во времени очень медленно, функция распределения плазмонов в каждой яме (мы обозначим эту функцию через $N^{(\sigma)}$, где σ – номер ямы) должна зависеть только от соответствующего адиабатического инварианта

$$J = \oint S dx$$

Конкретный вид зависимости $N^{(\sigma)}(J)$ определяется условием постоянства функции распределения вдоль фазовых траекторий плазмонов, пересекающих сепаратрису. Поэтому для отыскания $N^{(\sigma)}$ необходимо знать всю предысторию движения сепаратрисы, что не позволяет получить для $N^{(\sigma)}$ простого универсального выражения, подобного формуле (58).

Имеются, однако, некоторые случаи, когда эту трудность удается обойти. Один из них соответствует уже упоминавшемуся монохроматическому возмущению. Другая возможность упростить задачу появляется в случае, когда исходное распределение плазмонов в окрестности резонанса имеет форму плато, т.е. не зависит от S . Из уравнения (49) видно, что такое распределение остается неизменным при любой деформации профиля плотности. Это позволяет вычислять N_j по формуле (58) для всех плазмонов, включая резонансные. Подстановка выражения (58) в правые части уравнений (53) – (55) дает для u_0 , u_1 и u_2 систему уравнений, которая совпадает с системой (35) – (37) с точностью до пространственной производной в правой части уравнения (36); в ВКБ – пределе эта производная пренебрежимо мала.

Отмеченное совпадение уравнений для u_0 , u_1 и u_2 с системой (35) – (37) еще раз показывает, что область применимости системы (35) – (37) не ограничена требованием малости $|u_1|$ по сравнению с $\Delta\omega_j$, а простирается вплоть до $|u_1| \sim I$. Здесь уместно также напомнить основной качественный вывод, вытекающий из уравнений (35) – (37). Он состоит в том, что при наличии плато нелинейный режим неустойчивости является жестким (см. раздел 4).

Рассмотрим теперь еще один пример, допускающий простое решение вопроса о резонансных плазмонах. Речь пойдет о локализованном возмущении, у которого модуль огибающей $u_1(x)$ монотонно убывает в обе стороны от точки своего максимума. Картина роста такого возмущения зависит от того, как соотносятся между собой размер возмущения ϵ и длина пробега плазмона за время развития неустойчивости $\rho \sim \epsilon^{-1/2} g^{-1}$

В разделе 3 мы уже отмечали, что при $\epsilon \gg \rho$ (см. неравенство (20)) любое возмущение должно вести себя как монохроматичес-

кая волна. Поэтому нам остается рассмотреть только случай малых длин:

$$e \ll \rho. \quad (60)$$

Подчеркнем, что ввиду малости параметра ϱ неравенство (60) может выполняться одновременно с условием применимости ВКБ-приближения. Соотношение (60) означает, что, пролетая через область локализации возмущения, плазмон не успевает сколько-нибудь заметно изменить свою энергию. Поэтому функция $N_j(s, x, t)$, будучи функцией интегралов движения, должна зависеть только от ω_j ⁵⁾:

$$N_j(s, x, t) = N(\omega_j) \quad (61)$$

Вид зависимости $N(\omega_j)$ задается распределением плазмонов при $x \rightarrow \pm \infty$.

Формула (61) и соотношения (56), (57) позволяют явным образом выразить правые части уравнений (53) - (55) через u_0, u_1 и u_2 . Опуская для краткости соответствующие выкладки (они стандартны), мы сразу приведем получающийся результат:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = S_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 - 2|u_1|^2), \quad (62)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = [\varepsilon + 2S_0^2 (u_0 - 2|u_1|^2) - 2\alpha |u_1|^2] u_1, \quad (63)$$

$$u_2 = -u_1^2 \quad (64)$$

Здесь использованы те же обозначения, что при записи системы (35) - (37), причем величины ε, α и S_0 вычисляются по спектральной функции плазмонов при $x \rightarrow \infty$.

Необходимо обратить внимание на то, что при переходе от монохроматической волны к возмущению с $e \ll \rho$ в уравнении для u_1 исчезает вклад резонанса. Этот эффект обусловлен качественным изменением характера движения плазмонов: вместо квазиимпульса S интегралом движения становится энергия. Исчезновение резонансного вклада связано также с тем, что огибающая выбранного нами возмущения не имеет минимумов, т.е. на фазовой плоскости отсутствуют финитные траектории, для которых интегралом движения является не энергия, а адиабатический инвариант. Анализ бо-

⁵⁾ Здесь дополнительно учитывается эргодичность начального спектра плазмонов.

лее сложных возмущений показывает, что при наличии финитных траекторий вклад резонанса всегда отличен от нуля. Исключение составляет лишь тот случай, когда на фазовых траекториях, соответствующих резонансным плазмонам, функция N_j зависит только от ω_j . Этим свойством обладает, в частности, распределение в форме плато.

Проследим теперь с помощью системы (62) - (64), как ведут себя возмущения, исходная амплитуда которых достаточно мала, т.е. возмущения, первоначально близкие к линейным. Условие применимости ВКБ - подхода требует, чтобы пространственный масштаб рассматриваемых возмущений ℓ значительно превосходил величину $|u_1|^{-1} \approx \varepsilon^{-1/2}$. Приняв во внимание это обстоятельство, нетрудно проверить, что к моменту перехода неустойчивости в нелинейный режим величина u_0 в правой части уравнения (63) остается пренебрежимо малой. Отсюда видно, что в нелинейном режиме огибающая $u_1(x)$ совершает колебания с амплитудой порядка $\varepsilon^{1/2}$, т.е. нелинейность ограничивает рост возмущений на уровне $|u_1| \sim \varepsilon^{1/2}$. Период колебаний огибающей определяется исходными значениями u_1 и \dot{u}_1 , следовательно, зависит от X . В результате этой зависимости первоначально гладкая огибающая должна становиться изрезанной, что, очевидно, ведет к нарушению условий применимости уравнений (62) - (64) (условия применимости нарушаются в момент появления на кривой $|u_1(x)|$ первого минимума). Заметим, однако, что даже в случае изрезанной огибающей окрестность абсолютного максимума функции $|u_1(x)|$ по-прежнему описывается системой (62) - (64), т.е. вблизи максимума нелинейность играет стабилизирующую роль. Это показывает, что нелинейность, видимо, стабилизирует рост любых локализованных возмущений.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотренные в разделах 4 и 5 предельные случаи малых $e \ll |u_1|^{-1}$ и больших $e \gg |u_1|^{-1}$ значений корреляционного масштаба огибающей профиля плотности дают в совокупности практически полное представление о нелинейной эволюции коротковолновых модуляционных возмущений. Резюмируя изложенные в статье результаты, следует еще раз обратить внимание на существенную зависимость картины роста возмущений от распределения плазмонов N_k в окрестности точки резонанса $k = \frac{1}{2}$. Мы видели,

что при $\frac{\partial N_k}{\partial k}|_{k=\frac{1}{2}} \geq 0$ модуляционные возмущения возбуждаются жестко. Напротив, при $\frac{\partial N_k}{\partial k}|_{k=\frac{1}{2}} < 0$ все рассмотренные нами возмущения стабилизируются, т.е. имеет место мягкий нелинейный режим. Можно ожидать, что неравенство $N' < 0$ является не только необходимым, но и достаточным условием нелинейной стабилизации неустойчивости. Это, впрочем, требует аккуратного формального обоснования.

Поясним несколько подробнее суть возникающей здесь задачи. В разделе 4 было показано, что при $N' < 0$ среднеквадратичный уровень случайных возмущений ограничен величиной порядка $\varepsilon^{3/2}$. Это касается возмущений с малым корреляционным масштабом ε . Остается, однако, не вполне ясным вопрос об устойчивости данного нелинейного режима относительно раскачки возмущений с большой длиной корреляции. Вопрос этот заслуживает внимания потому, что стабилизация случайного возмущения происходит за счет резонанса, роль которого при $|c_1| \lesssim \varepsilon \ll \varepsilon^{1/2} g^{-1}$ может, вообще говоря, меняться. Так, в частности, мы видели, что в случае локализованного возмущения резонансный вклад может вообще исчезать. Таким образом, для строгого доказательства мягкости нелинейного режима при $N' < 0$ необходим более внимательный анализ возмущений с $|c_1| \lesssim \varepsilon \ll \varepsilon^{1/2} g^{-1}$.

В случае мягкого режима отгибающая модуляционного возмущения должна, как мы выяснили, совершать нелинейные колебания с характерным временем порядка $\varepsilon^{-1/2}$. Усредненное воздействие этих колебаний на резонансные плазмоны будет, очевидно, приводить к диффузионному изменению спектральной функции N_k , что в свою очередь, может влиять на уровень нелинейной стабилизации возмущений. Эта картина напоминает обычную квазилинейную релаксацию неустойчивого распределения частиц с той разницей, что колебания, вызывающие диффузию, существенно нелинейны (хотя их амплитуда и мала). Наличие в рассматриваемой задаче двух малых параметров (ε и g) позволяет надеяться, что процесс диффузии можно описать не только качественно, но и количественно. Этот вопрос, однако, выходит за рамки данной работы.

6) Заметим, что предположение о малости ε в данном режиме оправдывается получаемым конечным результатом.

Л и т е р а т у р а :

1. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков. ДАН СССР, 159, 767, 1964.
2. Б.Н.Брейзман, В.М.Малкин. ЖЭТФ, 79, 857, 1980.
3. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, 1745, 1972.
4. А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. ЖЭТФ, 73, 1352, 1977.
5. Е.А.Кузнецов. ДАН СССР, 236, 575, 1977.
6. В.М.Малкин. О нелинейной стадии модуляционной неустойчивости. Препринт ИЯФ, № 158. Новосибирск, 1980.
7. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963, стр.163.
8. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. М., Наука, 1965, стр.109.
9. З.Флигге. Задачи по квантовой механике. М., Мир, 1974, т.1, стр.75.
10. А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., ГИ ФМЛ, 1962, стр.92.

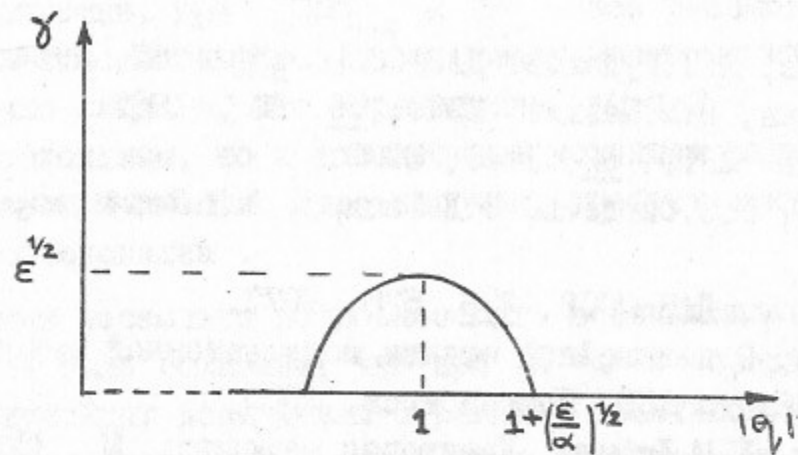


Рис.1. Зависимость инкремента неустойчивости от абсолютной величины волнового числа q_v . В области $|q_v - 1| < (\frac{\epsilon}{\alpha})^{1/2}$, где инкремент отличен от нуля, $\gamma(q_v) = \epsilon - \alpha (|q_v - 1|)^2$

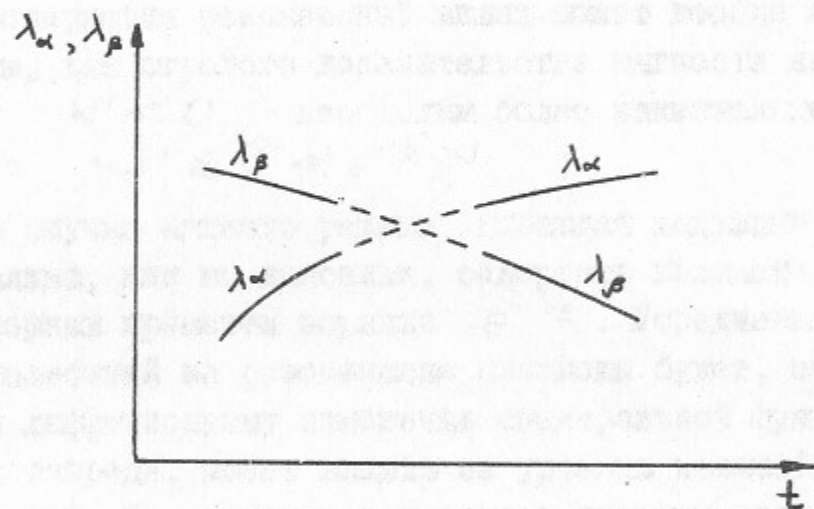


Рис.2. Пересечение траекторий двух первоначально удаленных друг от друга собственных частот λ_α и λ_β . Интеграл перекрытия состояний ψ_α и ψ_β мал. Нумерация состояний после пересечения выбрана так, чтобы в отсутствие перекрытия числа заполнения N_α и N_β оставались неизменными.

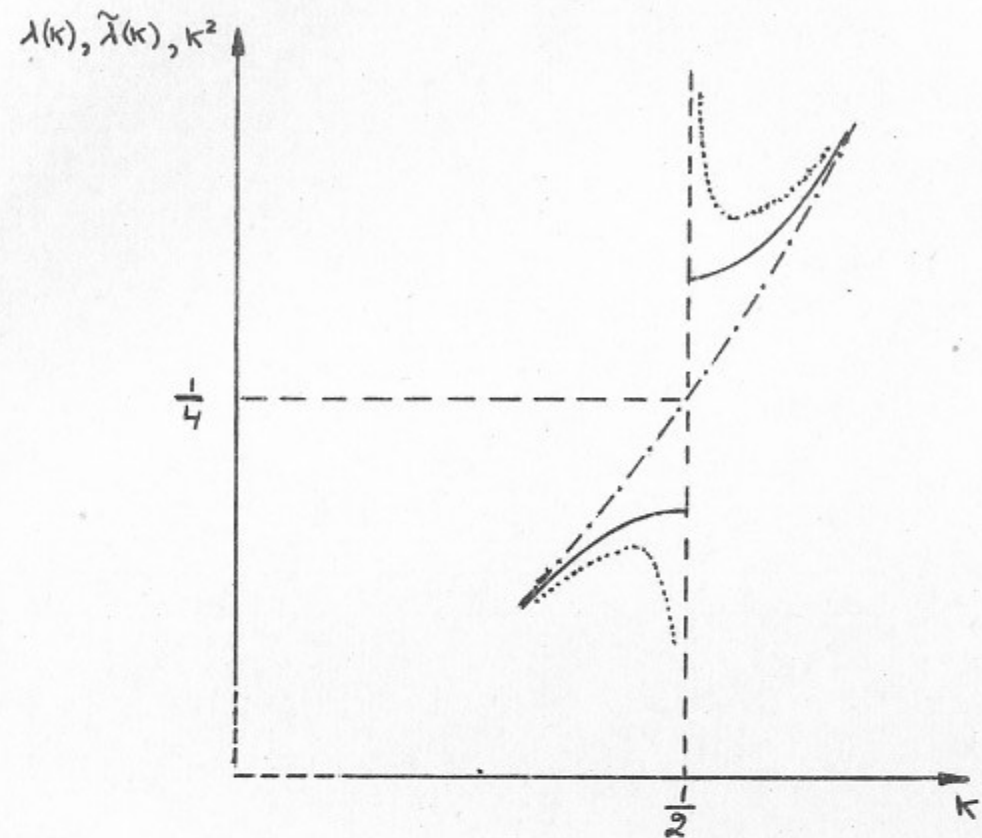


Рис.3. Собственные частоты плазмонов в окрестности резонанса для монохроматического возмущения плотности. Точная зависимость $\lambda(k)$ изображена сплошной линией, зависимость $\tilde{\lambda}(k)$, приводящая к линейной теории неустойчивости, - пунктирной, а невозмущенная дисперсионная кривая $\lambda = k^2$ - штрих-пунктирной линией.

Работа поступила 11 июля 1980 года

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Подписано к печати 22.06.1981г. МН 03189

Усл. 1,6 печ.л., 1,3 учетно-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно.

Заказ № 66

Отпечатано на ротационте ИЯФ СО АН СССР