

3-80

44

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

М.С.Золотарёв, С.А.Кураев, В.Г.Сербо

ОЦЕНКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФОТОНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ПРОЕКТА
ВЛЭПП

ПРЕПРИНТ 81 - 63

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
Физики СО АН СССР
1981 г.



Новосибирск

ОЦЕНКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФОНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ

ПРОЕКТА ВЛЭПП

М.С.Золоторев, Э.А.Кураев, В.Г.Сербо^{ж)}

Аннотация

Рассмотрены электромагнитные фоновые процессы для проекта встречных линейных электрон-позитронных пучков (ВЛЭПП) с энергией $2E = 200 \div 600$ ГэВ, разрабатываемого в ИЯФ СО АН. В этом проекте предполагается, что высокая светимость установки обеспечивается относительно редкими соударениями плотных e^+e^- сгустков. Внутри таких сгустков возникают большие (~ 1 МГц) электрические и магнитные поля. При движении в таких полях частицы налетающего сгустка излучают жесткие (с энергией ~ 1 ГэВ) фотоны. Проведены оценки числа фоновых событий, возникающих как при взаимодействии таких фотонов с электронами и фотонами встречного сгустка, так и при обычных e^+e^- соударениях (тормозное излучение, рождение e^+e^- пар и т.д.).

Содержание

1. Введение
 2. Оценки полей \mathcal{E} и \mathcal{B}
 3. Спектр фотонов
 4. Условия регистрации. Основные обозначения
 5. Комptonовское рассеяние.
 6. Тормозное излучение.
 7. Процессы образования e^+e^- (или $\mu^+\mu^-$) пары.
 8. Некоторые другие фоновые процессы.
 9. Результаты и обсуждение.
- Приложения.

^{ж)}Новосибирский государственный университет

ESTIMATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC BACKGROUND PROCESSES
FOR THE VLEPP-PROJECT

M.S.Zolotorev, E.A.Kuraev, V.G.Serbo*)
Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk-90, USSR

*) Novosibirsk State University

ABSTRACT

The electromagnetic background processes for the VLEPP-project of linear colliding electron-positron beams are considered. This project for the energy $2E = 200 \div 600$ GeV is now worked out at the Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk. It is assumed that high luminosity of this accelerator will be provided by collision of dense e^+e^- -bunches with low rate of repetitions (~ 10 Hz). Inside such bunches there are the strong electric and magnetic fields (~ 1 MG).

The particles of the colliding bunch radiate the photons with the energy of 1 GeV order moving in such fields.

Given are the estimations of the number of the background events which arise both at interaction of such photons with the electrons and photons of the colliding bunch, and at usual collisions (bremsstrahlung, the production of the e^+e^- -pairs and so on).

I. Введение.

В проекте встречных электрон-позитронных пучков (ВЛЭПП, [I]) на энергию $\sqrt{s} = 2E = 200 \div 600$ ГэВ предполагается столкновение двух e^- и e^+ сгустков с частотой ~ 10 Гц и числом частиц в каждом сгустке $N \sim 10^{12}$. При проектной светимости $10^{32} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ интегральная светимость за одно соударение

$$L = 10^{31} \text{ см}^{-2} = 10^{-2} \text{ нб}^{-1}. \quad (1)$$

Т.к. $L \sim N^2/S_e$, то площадь поперечного сечения сгустка $S_e \sim 10^{-7} \text{ см}^2$. При такой малой площади сгустка и относительно большом токе $I \sim eNc/l \sim 5 \text{ кА}$ ($l \sim 1 \text{ см}$ - длина сгустка) электрическое E и магнитное B поля в сгустке цилиндрической формы очень велики $E \sim B \sim 10$ МГс. При этом потери энергии на излучение частицы в полях E и B встречного сгустка ΔE оказываются большими $\Delta E \sim E$. Для уменьшения этих потерь и сохранения монохроматичности пучков на уровне 1% в проекте предлагается уменьшить поля за счёт использования сгустков ленточной формы (в поперечном сечении - плоскость xy - сгусток имеет вид эллипса с полуосями a и b , причем $b \ll a$) с сохранением площади $S_e = \pi ab$. Т.к. получение малых значений b/a связано с большими техническими трудностями, то выбор b/a определяется требованием

$$\eta \equiv \Delta E/E = 10^{-2}. \quad (2)$$

В этих условиях поля уменьшаются на порядок $E \sim B \sim 1$ МГс. Однако при движении в таких полях каждый e^\pm излучит несколько фотонов с энергией ~ 1 ГэВ. Все эти фотоны летят под малыми углами $\lesssim 1/\gamma$ к траектории частицы ($\gamma = E/mc^2 > 10^5$). Однако взаимодействия таких фотонов с фотонами или электронами встречного сгустка приводит к появлению заряженных и нейтральных частиц большой энергии, летящих на большие углы. Именно они, повидимому, и будут основным источником фона для будущих детекторов.

Поля внутри сгустка изменяются в направлении оси y от $E \sim B \sim 0$ в центре сгустка до $E \sim B \sim 1$ МГс на краю сгустка. Движущийся параллельно оси z электрон, попав в такие поля, испытает примерно одно колебание по оси y . Поэтому как при оценке потерь на излучение (2), так и при оценке $dn(\omega)$ -

числа фотонов в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ - необходимо проводить усреднение по y . Кроме того, такие колебания приведут к тому, что часть рожденных фотонов (в основном, мягких) вылетит под углом $\sim 2\pi\beta/l \sim 10^{-4}$ и взаимодействует с фотонами и позитронами встречного сгустка лишь частично.

Поскольку сами фотоны рождаются в процессе столкновения e^+e^- сгустков, то каждый фотон одного сгустка успевает прореагировать, грубо говоря, лишь с половиной электронов или с $1/4$ фотонов встречного сгустка^{*)}. Пусть нас интересует некоторое конечное состояние f , тогда число фоновых событий для γe^\pm взаимодействия за одно столкновение e^+e^- сгустков есть

$$N_{\gamma e^\pm \rightarrow f} \sim \frac{1}{2} L \int dn(\omega) d\sigma_{\gamma e^\pm \rightarrow f}(\omega). \quad (3)$$

Аналогично, для $\gamma\gamma$ -соударений

$$N_{\gamma\gamma \rightarrow f} \sim \frac{1}{4} L \int dn(\omega_1) dn(\omega_2) d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow f}(\omega_1, \omega_2). \quad (4)$$

2. Оценки полей E и B .

Поля внутри сгустка определяются значениями плотности заряда ρ ; предполагается [2], что $\rho = (2eN/\pi a b l) \sin^2(\pi z/l)$ при $0 \leq z \leq l$, $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$. Отсюда можно оценить поля внутри сгустка

$$E \sim B \sim \pi^2 \rho y = B_0 \frac{y}{b} \sin^2 \frac{\pi z}{l}, \quad B_0 = \frac{2\pi e N}{a l}. \quad (5)$$

Для движущегося параллельно оси z (на определенном расстоянии y от неё) электрона ускорения, создаваемые электрическим и магнитным полями, совпадают по величине и направлению. С учётом этого потери энергии ΔE на излучение за время пролета $T_0 = l/2c$ суть (см. [3], § 74).

$$\Delta E \sim \frac{8}{3} r_e^2 c \gamma^2 \int_0^{T_0} B^2 dt = \frac{4}{3} r_e^2 \gamma^2 \int_0^l B^2 dz = \\ = \frac{l}{2} \left(\frac{\gamma r_e y B_0}{b} \right)^2, \quad r_e = \frac{e^2}{mc^2}.$$

После усреднения по y имеем (с учётом значения B_0 из (5))

^{*)} Такие соотношения возникают, например, в предположении однородной плотности пучков, см. Приложение I.

$$\gamma = \frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi^2}{3} \frac{r_e^3}{a^2 l} N^2 \gamma. \quad (6)$$

Отсюда найдем

$$a = \pi r_e N \left(\frac{2\gamma r_e}{3\eta l} \right)^{1/2}, \quad b = \frac{S_e}{\pi a}, \quad B_0 = \frac{2e}{r_e l} \left(\frac{3\eta l}{2\gamma r_e} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Полученные отсюда (с учетом (2)) параметры сгустков приведены в таблице I.

Оценим теперь среднее число колебаний электрона (позитрона) в магнитном поле налетающего сгустка. Поскольку скорость электрона практически параллельна оси пучков, то силы, действующие на электрон со стороны электрического и магнитного полей совпадают по величине и направлению, так что $F_y = -2eE = -2eB_0 \frac{y}{b} \sin^2 \frac{\pi z}{l}$. После усреднения по y уравнение движения электрона в поперечном направлении примет вид

$$m\gamma \ddot{y} = \langle F_y \rangle = -\frac{eB_0}{b} y,$$

т.е. колебания будут гармоническими. Период поперечных колебаний T равен

$$T = T_0 \left(\frac{8\gamma S_e}{r_e l N} \right)^{1/2},$$

где $T_0 = l/2c$ - время пролета электрона через встречный сгусток. Отсюда для числа поперечных колебаний электрона имеем величину порядка единицы:

$$\frac{T}{T_0} = \begin{cases} 0,75 & \text{при } E = 100 \text{ ГэВ.} \\ 1,3 & \text{при } E = 300 \text{ ГэВ.} \end{cases}$$

3. Спектр фотонов.

Как известно (см. [3], § 74) число фотонов, испущенных электроном в однородном магнитном поле H за время dt равно

$$d\tilde{n}(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{deH}{mc} F\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_c}\right) \frac{d\omega}{\omega} dt, \quad (8)$$

$$\tilde{\omega}_c = \frac{3}{2} \frac{eH}{mc} \gamma^2.$$

Здесь $F(x)$ определяется через функцию Мандональда $K_{5/3}(x)$ следующим образом

$$F(x) = x \int_x^\infty K_{5/3}(\xi) d\xi = \begin{cases} 2^{2/3} \Gamma(2/3) x^{1/3}, & x \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\pi x}{2}} e^{-x}, & x \gg 1. \end{cases} \quad (9)$$

График этой функции приведен на рис. I. Приведем также полезные для дальнейшего интегральные соотношения

$$\int_0^\infty F(x) dx = \frac{8\sqrt{3}\pi}{27}, \quad \int_0^\infty F(x) \frac{dx}{x} = \frac{5\pi}{3}. \quad (9a)$$

Интересующее нас число фотонов $dn(\omega)$ в полях (5) получается из $d\tilde{n}(\omega)$ следующим образом. Заменяем однородное поле H на $H_{эфф} = 2B_0$ из (5), проинтегрируем по времени $t = z/2c$ в пределах от 0 до $T_0 = l/2c$ и усредним полученный результат по y . В итоге

$$dn(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\alpha e B_0 l}{mc^2} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^l \frac{dz}{l} \int_0^b \frac{dy}{b} \frac{B(y,z)}{B_0} F\left(\frac{\omega B_0}{\omega_c B(y,z)}\right), \quad (10a)$$

$$\omega_c = 3 \frac{e B_0}{mc} \gamma^2.$$

Удобно привести это выражение к виду, аналогичному (8), введя вместо $F(\omega/\tilde{\omega}_c)$ новую функцию $\Phi(\omega/\omega_c)$, нормировав её таким образом, чтобы

$$\int_0^\infty F(x) dx = \int_0^\infty \Phi(x) dx. \quad (II)$$

Тогда*)

*) Удобно в (10a) сделать замену переменных $\omega B_0 / \omega_c B(y,z) = \xi$, $u = \xi y / b$ и проинтегрировать по u .

$$dn(\omega) = A \Phi\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \frac{d\omega}{\omega}, \quad A = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \frac{\alpha e B_0 l}{mc^2}, \quad (10b)$$

$$\Phi(x) = \frac{16}{\pi} x^{3/2} \int_x^\infty \frac{\sqrt{\xi-x}}{\xi^3} F(\xi) d\xi.$$

Взяв B_0 из (7), получим

$$A = \frac{3\alpha}{8\pi} \left(\frac{2l}{2\gamma r_e}\right)^{1/2}, \quad \omega_c = \frac{6c\gamma^{3/2}}{l} \left(\frac{32l}{2r_e}\right)^{1/2}.$$

Используя свойства (9), получим асимптотики

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1 x^{1/3} \text{ при } x \ll 1; & \Phi_1 = \frac{2^{2/3} 36}{5\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \approx 6 \\ \frac{4\sqrt{2}}{x} e^{-x}, & x \gg 1 \end{cases} \quad (12)$$

и интегральные соотношения

$$\int_0^\infty \Phi(x) dx = \frac{8\sqrt{3}\pi}{27}, \quad \int_0^\infty \Phi(x) \frac{dx}{x} = \frac{10\pi}{3}. \quad (13)$$

График $\Phi(x)$ приведен на рис. I. Важно отметить, что так называемая критическая частота ω_c (задающая масштаб частот, начиная с которых спектр экспоненциально падает) определяется не средним, а максимальным значением поля B_0 . Максимум же $\Phi(x)$, как и следовало ожидать, смещен в сторону малых значений x .

Используя (13), найдем среднее число фотонов n и среднюю частоту фотона $\langle \omega \rangle$ (см. таблицу I)

$$n = \int dn(\omega) = \frac{40\pi}{3} A = \frac{5\alpha}{4} \left(\frac{2l}{2\gamma r_e}\right)^{1/2},$$

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{n} \int \omega dn(\omega) = \frac{4\sqrt{3}}{45} \omega_c \approx 0,154 \omega_c.$$

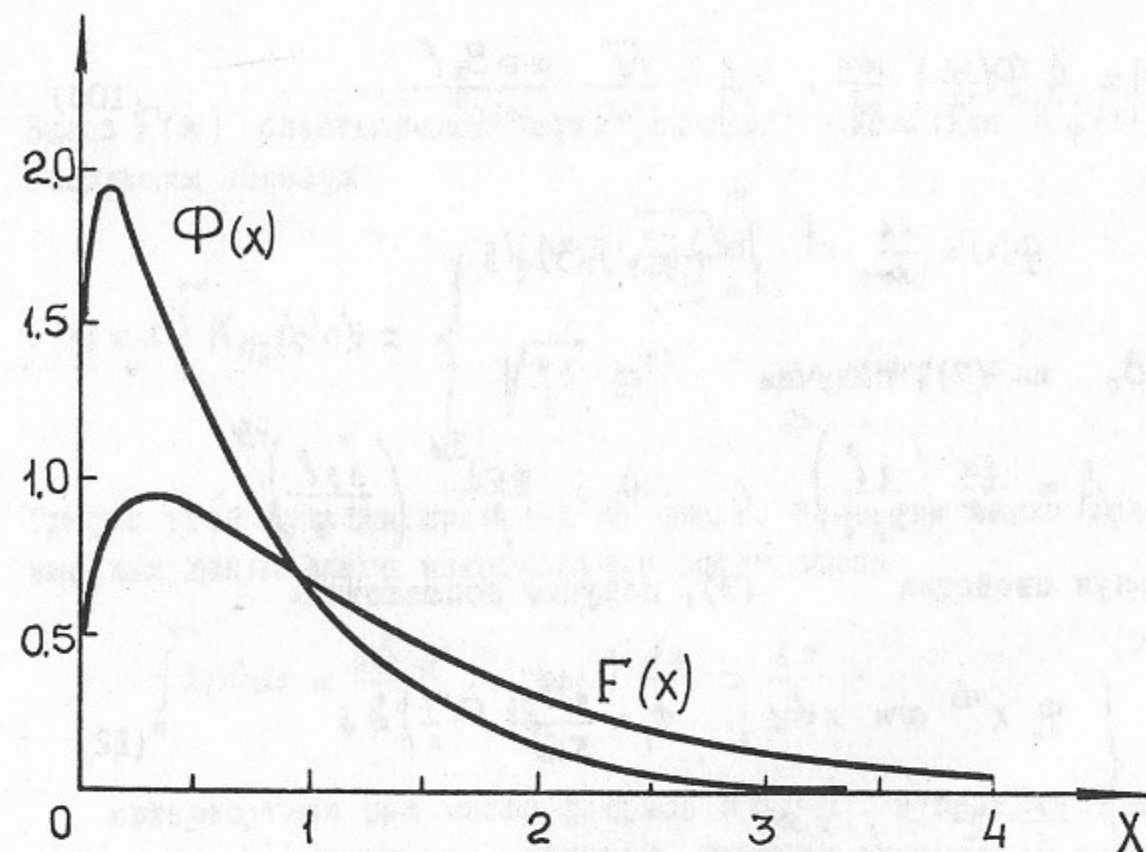


Рис. I.

Таблица I

$N = 10^{12}$, $L = 10^3 \text{ см}^{-2}$, $\eta = \Delta E/E = 10^{-2}$, $l = 1 \text{ см}$		
$E = \sqrt{s}/2$, ГэВ		100 300
Поперечные размеры пучка	$2a$, мкм	34 59
	$2b$, мкм	0,37 0,22
$E_{\text{max}} + B_{\text{max}} = 2B_0$, МГц		3,5 2,0
Критическая частота $\hbar\omega_c$, ГэВ		2,4 12
Средняя энергия фотона, $\langle \hbar\omega \rangle$, ГэВ		0,36 1,9
Число фотонов, n		2,8 1,6
A - константа в спектре (10)		0,26 0,15

4. Условия регистрации. Основные обозначения.

Среди физически интересных процессов большую долю должны составлять процессы с многочастичными конечными состояниями. Для их регистрации желательно иметь детектор с телесным углом, близким к 4π . Однако число фоновых частиц, летящих на малые углы, при одном соударении e^+e^- сгустков очень велико. В этих условиях, повидимому, будет чрезвычайно трудно проводить измерения в области малых углов.

Ниже мы будем оценивать число фоновых событий за одно соударение e^+e^- сгустков, когда конечные частицы f летят в интервал углов $\theta_0 \leq \theta_f \leq \pi - \theta_0$. (для определенности угол θ отсчитывается от направления e^- - пучка) и с энергией ϵ_f большей, чем некоторая пороговая энергия ϵ_0 . При оценках предполагалось, что ϵ_0 много больше массы конечной частицы и угол $\theta_0 \sim 10^0 \div 60^0$.

Таким образом, для частицы с энергией ϵ_f и углом вылета θ_f имеем

$$\epsilon_f \geq \epsilon_0, \quad -c_0 \leq c = \cos \theta_f \leq c_0, \quad c_0 = \cos \theta_0. \quad (15)$$

Всюду ниже используется система единиц, в которой

$$\hbar = c = 1.$$

Отметим полезное соотношение

$$\frac{\alpha^2}{16 \text{ GeV}^2} L = 0,21,$$

где светимость $L = 10^{-31} \text{ см}^{-2}$. Кроме только что указанных, ниже используются обозначения:

$$s_0 = \sin \theta_0$$

ω_c - критическая частота (см. (10a) и Таблицу I),

$$x_0 = \frac{\epsilon_0}{2\omega_c} (1 - c_0), \quad y_0 = \frac{\epsilon_0}{2\omega_c} (1 + c_0),$$

$$x_c = \frac{\epsilon_0}{2\omega_c} (1 - c), \quad y_c = \frac{\epsilon_0}{2\omega_c} (1 + c), \quad (17)$$

$$z = \frac{\epsilon_0}{\omega_c} = x_0 + y_0 = x_c + y_c.$$

5. Комptonовское рассеяние.

а). Рассмотрим рассеяние e^- на фотонах встречного сгустка (рис.2). Энергия рассеянного на угол θ_e электрона ($c = \cos \theta_e$)

$$\epsilon_f \equiv E' = \frac{2E\omega}{E(1-c) + \omega(1+c)} \quad (18)$$

Число фоновых e^- согласно (3) равно

$$N_{e^- \rightarrow e^-} = \frac{L}{2} \int dn(\omega) d\sigma(\omega, c)$$

где $d\sigma(\omega, c)$ - сечение комpton-эффекта, а область интегрирования определяется условиями (15).

Мы увидим ниже, что основной вклад в интеграл даёт область частот $\omega \sim \epsilon_0(1-c)$. При условии $\epsilon_0 \ll E$ имеем $\omega \ll E(1-c)$, при этом выражения для E' (18) и для $d\sigma(\omega, c)$ упрощаются

$$E' = \frac{2\omega}{1-c}, \quad d\sigma(\omega, c) = \frac{\pi\alpha^2}{E\omega} \cdot \frac{dc}{1-c^2} \quad (19)$$

и мы получаем

$$N_{e^- \rightarrow e^-} = \frac{\pi\alpha^2 LA}{2E\omega_c} \mathcal{J}_e, \quad \mathcal{J}_e = \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{1-c^2} \int_{x_c}^{\infty} \Phi(x) \frac{dx}{x^2} \quad (20)$$

Оценка интеграла \mathcal{J}_e для больших и малых значений параметра x_0 проведена в Приложении 2, ответ имеет вид

$$N_{e^- \rightarrow e^-} = \frac{\alpha^2 LA}{E} \begin{cases} \frac{22,4}{\epsilon_0^{2/3} \omega_c^{1/3}} f_1(\theta_0), & x_0 \ll 1 \\ \frac{8,9}{\omega_c x_0^4 (1+c_0)} e^{-x_0}, & x_0 \gg 1 \end{cases} \quad (21)$$

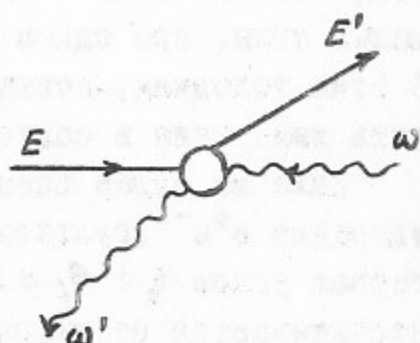


Рис.2.

где точный вид $f_1(\theta_0)$ приведен в (П4), удобные для оценок асимптотики таковы

$$f_1(\theta_0) = \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{(1+c)(1-c)^{5/3}} = \begin{cases} \frac{1,19}{\theta_0^{4/3}} + 0,63 \ln \frac{1}{\theta_0} + 0,77, & \theta_0 \ll 1 \\ 2c_0 \left(1 + \frac{14}{27} c_0^2\right), & c_0 \ll 1 \end{cases}$$

б) Рассмотрим теперь тот же процесс в условиях, когда регистрируемой частицей является фотон. Повторяя ход вычислений предыдущего случая, получим ($c = \cos \theta_f$)

$$\epsilon_f \equiv \omega' = \frac{2E\omega}{E(1-c) + \omega(1+c)}, \quad d\sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{E^2} \cdot \frac{dc}{(1-c)^2} f\left(\frac{\omega}{\omega_E}\right), \quad (22a)$$

$$f(t) = \frac{1+(1+t)^2}{2(1+t)^3}, \quad \omega_E = \frac{E(1-c)}{1+c};$$

$$N_{e^- \rightarrow \gamma} = \frac{\pi\alpha^2 LA}{E^2} \mathcal{J}_\gamma, \quad \mathcal{J}_\gamma = \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{(1-c)^2} \int_{x_c}^{\infty} \Phi(x) f\left(x \frac{\omega_c}{\omega_E}\right) \frac{dx}{x} \quad (22, б)$$

Обратим внимание на то, что вне области малых углов (при $\omega \ll \omega_E$) функция $f \approx 1$, а в области малых углов (при $\omega \gg \omega_E$) $f \ll 1$. В силу хорошей сходимости интеграла по x в (22, б) в нашей области параметров можно положить $f=1$. После вычисления \mathcal{J}_γ (см. Приложение 3)

$$N_{e^- \rightarrow \gamma} = \frac{\alpha^2 LA}{E^2 (1-c_0)} \begin{cases} 65,8 \frac{c_0}{1+c_0}, & x_0 \ll 1 \\ \frac{17,8}{x_0^3} e^{-x_0}, & x_0 \gg 1 \end{cases} \quad (23)$$

Отметим, что при $x_0 \ll 1$ зависимость числа фоновых событий от порога регистрации ϵ_0 очень слабая: $N_{e^- \rightarrow e^-} \propto \epsilon_0^{-2/3}$, а $N_{e^- \rightarrow \gamma}$ не зависит от ϵ_0 . Такое различие связано с тем, что в первом случае начальный электрон "выбирает" из спектра фотонов подходящего партнера (основная область $\theta \sim \theta_0$, $\omega \sim \epsilon_0(1-c_0)$) и энергия рассеянного электрона $E' \sim \epsilon_0$.

Во втором случае основная область $\theta \sim \theta_0$, $\omega \sim \omega_c$, так что фотон рассеивается назад и имеет энергию $\omega' \sim \omega_c/(1-c) \gg \epsilon_0$.

6. Тормозное излучение $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+\gamma$

Основные сведения об угловых и энергетических распределениях для этого процесса см., например, в обзоре [4].

а) Рассмотрим сначала случай, когда регистрируется e^- . Основной вклад при этом даёт блочная диаграмма рис.3а, в которой верхний блок соответствует комптоновскому рассеянию

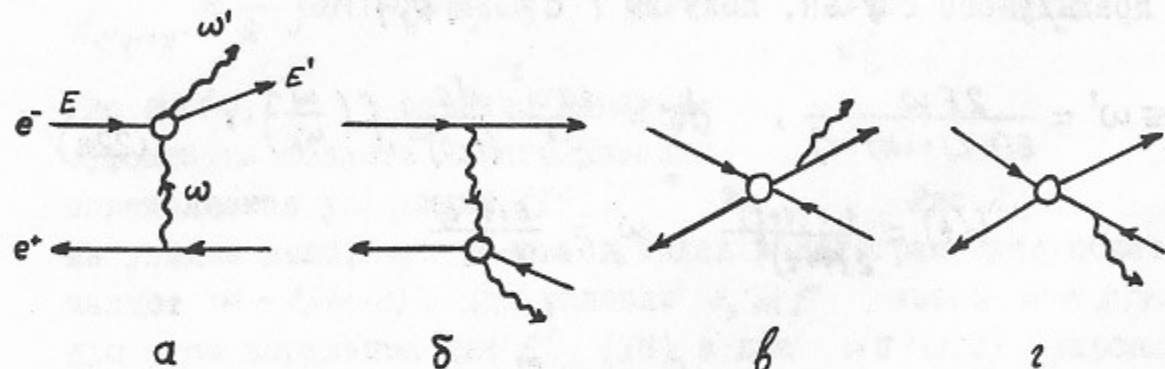


Рис.3

эквивалентного фотона, испущенного позитроном, на электроном (см.рис.2). Спектр эквивалентных фотонов даётся формулой

$$dn_\nu(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} l \frac{d\omega}{\omega}, \quad l = \ln \frac{E^2(1-c^2)}{(m\omega/E)^2} \quad (24)$$

Дальнейшее рассмотрение вполне аналогично проведенному в разделе 5а для столкновения e^- с реальным фотоном. В итоге

$$N_{e^-e^+ \rightarrow e^-} = \frac{\alpha^3 L}{E} \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{1-c^2} \int_{\epsilon_0(1-c)/2}^{\infty} l \frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{\alpha^3 L}{E \epsilon_0} \left(\frac{c_0}{1-c_0^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+c_0}{1-c_0} \right) \ln \frac{E^2(1+c_0)}{m^2(1-c_0)} \quad (25)$$

б) Рассмотрим теперь случай, когда регистрируемой частицей является фотон. В этом случае основной вклад дают 4 блочные диаграммы рис.3а-г. Первые две из них можно рассчи-

тать в приближении эквивалентных фотонов. В частности, рассмотрение диаграммы рис.3а полностью подобно рассмотрению комптоновского рассеяния с регистрацией фотона (см.раздел 5б) с заменой dn на dn_ν (24). В итоге, вклад этой диаграммы

$$N_{e^-e^+ \rightarrow \gamma}^a = \frac{2\alpha^3 L}{E^2} \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{(1-c)^2} \int_{\epsilon_0(1-c)/2}^E \frac{d\omega}{\omega} f(\omega/E) \ln \frac{E^2 \omega'^2 (1-c^2)}{(m\omega)^2}$$

Логарифмический интеграл по ω обрывается при $\omega \sim \omega_E$ т.к. при $\omega > \omega_E$ функция $f(\omega/\omega_E) \sim 1/\omega$, поэтому с логарифмической точностью

$$N_{e^-e^+ \rightarrow \gamma}^a = \frac{4\alpha^3 L}{E^2} \frac{c_0}{1-c_0^2} \ln \frac{E}{\epsilon_0} \ln \frac{E^2(1+c_0)}{m^2(1-c_0)}$$

Точно такой же вклад даёт диаграмма рис.3б. Подчеркнем, что он пропорционален $1/E^2$. Такого же порядка вклад даёт диаграммы рис.3в,г, где блок изображает процесс e^+e^- рассеяния на большой угол с последующим испусканием тормозного фотона вдоль e^+ и e^- . Сечение, соответствующее диаграмме рис.3в, имеет вид (см. (3.20) из [4]):

$$d\sigma_{3в} = \frac{\alpha^3}{8E^2} \frac{d\omega'}{\omega'} \left(1 - \frac{\omega'}{E} + \frac{\omega'^2}{2E^2} \right) \cdot \left(\frac{3+c^2}{1-c} \right)^2 \cdot \ln \frac{E^2(1-c^2)}{m^2} \cdot dc$$

Отсюда для числа фоновых событий имеем

$$N_{e^-e^+ \rightarrow \gamma}^b = \frac{\alpha^3}{8E^2} \ln \frac{E}{\epsilon_0} \ln \frac{E^2(1-c_0^2)}{m^2} \int_{-c_0}^{c_0} \left(\frac{3+c^2}{1-c} \right)^2 dc$$

Точно такой же вклад даёт диаграмма рис.3г. Интерференция диаграмм рис.3 а-г пренебрежимо мала поскольку их главные кинематические области различны, поэтому полное число фоновых событий

$$N_{e^-e^+ \rightarrow \gamma} = 2(N_{e^-e^+ \rightarrow \gamma}^a + N_{e^-e^+ \rightarrow \gamma}^b) \quad (26a)$$

Для малых углов ($\theta_0 \ll 1$)

$$N_{e^-e^+ \rightarrow \gamma} = \frac{16\alpha^3 L}{(\epsilon_0)^2} \ln \frac{E}{\epsilon_0} \ln \frac{E^2}{m^2} \quad (26,6)$$

7. Процессы образования e^-e^+ (или $\mu^-\mu^+$) пар.

Рассмотрим следующие три процесса

$$\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+ \quad (\text{рис.4}), \quad (27)$$

$$e^-\gamma \rightarrow e^-e^-e^+ \quad (\text{процесс Бете-Гайтлера, рис.5}),$$

$$e^-e^+ \rightarrow e^-e^+e^-e^+ \quad (\text{процесс Ландау-Лифшица, рис.6}),$$

в которых e^-e^+ пара (или $\mu^-\mu^+$ -пара) рождается при столкновении реальных или виртуальных фотонов. Число реальных фото-

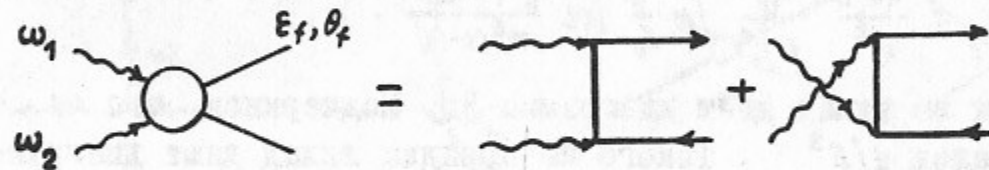


Рис.4

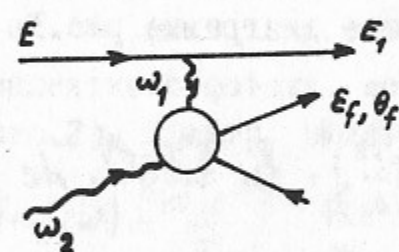


Рис.5

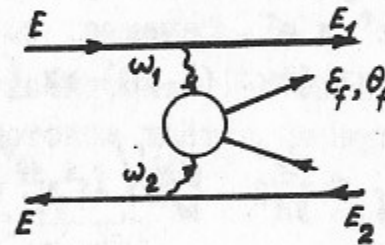


Рис.6

нов определяется спектром $dn(\omega)$ (10). Число виртуальных (или эквивалентных) фотонов - спектром $dn_v(\omega)$ (24). Поскольку в процессах (27) первоначальные e^\pm рассеиваются под очень малыми углами $\leq \sqrt{m/E}$, то число фоновых событий с регистрацией e^\pm на заметный угол $\geq 10^\circ$ определяется лишь e^\pm рожденной пары.

При столкновении фотонов с энергиями ω_1 и ω_2 рожденный под углом θ_f электрон имеет энергию (ср.(18))

$$E_f = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1(1-c) + \omega_2(1+c)}, \quad c = \cos\theta_f, \quad (28)$$

а сечение этого процесса равно

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{\omega_1\omega_2} \frac{dc}{1-c^2} \cdot f; \quad f = \frac{\omega_1^2(1-c)^2 + \omega_2^2(1+c)^2}{[\omega_1(1-c) + \omega_2(1+c)]^2} \quad (29,а)$$

Т.к. $\frac{1}{2} < f < 1$, то для дальнейших оценок мы примем $f = 1$. (29,б)

Область интегрирования по энергиям фотонов определяется условиями (15), при фиксированном значении c она изображена на рис.7 (заштрихованная область), где граничные энергии ω_\pm и граничная кривая ω_{zp} таковы

$$\omega_\pm = \frac{1}{2} \epsilon_0 (1 \pm c), \quad \omega_{zp} = \frac{\omega_2 \omega_+}{\omega_2 - \omega_-} \quad (30)$$

В итоге

$$N_{ab \rightarrow e^-} = g \pi \alpha^2 L \cdot \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{1-c^2} \int_{\omega_-}^{\infty} \frac{dn_2(\omega_2)}{\omega_2} \int_{\omega_{zp}}^{\infty} \frac{dn_1(\omega_1)}{\omega_1},$$

где согласно (3-4) $g = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ или 1 для $ab = \gamma\gamma$, $e^-\gamma$ или e^-e^+ .

а) Процесс Ландау-Лифшица. Для $dn_{1,2}$ используем выражение (24), в логарифмическом приближении ответ имеет вид

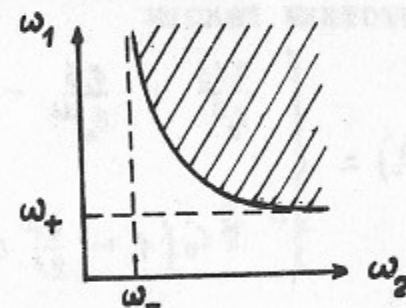


Рис.7

$$N_{e^-e^+ \rightarrow e^-} = \frac{2\alpha^4 L}{\pi \epsilon_0^2} \left[\frac{c_0}{1-c_0^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+c_0}{1-c_0} \right] \cdot \left(\ln \frac{E^2}{m^2} \right)^2 \quad (31)$$

б) Процесс Бете-Гайтлера. Подставляя dn_1 (24) и dn_2 (10) получим после интегрирования по ω_1 и замены $x = \omega_2/\omega_c$

$$N_{e^+e^-} = \frac{\alpha^3 LA}{\epsilon_0 \omega_c} J_{e^+e^-}; \quad J_{e^+e^-} = \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{(1-c)(1+c)^2} \int_{x_c}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \left(1 - \frac{x_c}{x}\right) \Phi(x) \rho. \quad (32)$$

Вычисление $J_{e^+e^-}$ проведено в Приложении 4, ответ имеет вид

$$N_{e^+e^-} = \alpha^3 LA \cdot \begin{cases} \frac{8,6 f_2(\theta_0)}{\epsilon_0^{5/3} \omega_c^{1/3}} \ln \frac{E^2(1+c_0)}{m^2(1-c_0)}, & \frac{\epsilon_0}{\omega_c} \ll 1 \\ \frac{5,1}{\epsilon_0^{5/3} \omega_c^{1/3} \theta_0^{4/3}} \ln \frac{E^2 \theta_0^2}{m^2}, & \frac{\epsilon_0}{\omega_c} \gg 1, \frac{\epsilon_0 \theta_0^2}{4\omega_c} \ll 1 \\ \frac{5,7 e^{-x_0}}{\epsilon_0 \omega_c x_0^5 (1+c_0)^2} \ln \frac{E^2(1-c_0)}{m^2(1+c_0)}, & x_0 \gg 1 \end{cases} \quad (33)$$

где точный вид $f_2(\theta_0)$ приведен в (П8), удобные для оценок асимптотики таковы

$$f_2(\theta_0) = \begin{cases} \frac{0,63}{\theta_0^2} + \frac{0,6}{\theta_0^{4/3}} + 0,53 \ln \frac{1}{\theta_0} + 0,8, & \theta_0 \ll 1 \\ 2c_0 \left(1 + \frac{17}{27} c_0^2\right), & c_0 \ll 1 \end{cases}$$

Отметим интересную особенность этого процесса при малых значениях θ_0 . При низких порогах регистрации $\epsilon_0 \ll \omega_c$ основной вклад дает фотоны с малыми энергиями $\omega_{1,2} \sim \epsilon_0(1 \pm c)$. В этой области спектр эквивалентных фотонов ($dn_1/d\omega_1 \propto \omega_1^{-1}$) более сингулярен, чем спектр реальных фотонов ($dn/d\omega_2 \propto \omega_2^{-1/3}$). Поэтому меньшую энергию выгоднее иметь эквивалентному фотону, так чтобы $\omega_1/\omega_2 \sim (1+c)/(1-c) \ll 1$. Отсюда видно, что рожденная пара движется в направлении, противоположном импульсу начального электрона, $\theta \sim \pi - \theta_0$. При высоких порогах $\epsilon_0 \gg \omega_c$ ситуация изменяется. Т.к. спектр реальных фотонов при больших энергиях подавлен экспоненци-

ально, то меньшую энергию выгоднее иметь реальному фотону. Поэтому рожденная пара движется вдоль импульса начального электрона, $\theta \sim \theta_0$.

в) Процесс $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$. Используя для $dn_{1,2}$ формулы (10), получим

$$N_{\gamma\gamma \rightarrow e^-} = \frac{\pi \alpha^2 LA^2}{4 \omega_c^2} J_{\gamma\gamma}; \quad J_{\gamma\gamma} = \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{1-c^2} \int_{x_c}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \Phi(x) \int_{x_c/(1-x_c)}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \Phi(y). \quad (34)$$

После вычисления интеграла $J_{\gamma\gamma}$ (см. Приложение 5) получим

$$N_{\gamma\gamma \rightarrow e^-} = \alpha^2 LA^2 \cdot \begin{cases} \frac{109}{\epsilon_0^{4/3} \omega_c^{2/3}} f_3(\theta_0), & z = \frac{\epsilon_0}{\omega_c} \ll 1 \\ \frac{186}{(\epsilon_0 \theta_0)^2 z^3} e^{-z}, & z \gg 1, x_0 y_0 = \left(\frac{\epsilon_0 \theta_0}{2\omega_c}\right)^2 \ll 1 \\ \frac{504}{\epsilon_0^2 z^{3/2} s_0^{3/2} (1+s_0)^3 c_0} e^{-z(1+s_0)}, & z \gg 1, x_0 \gg 1, \end{cases} \quad (35)$$

где

$$f_3(\theta_0) = \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{(1-c^2)^{5/3}} = \begin{cases} \frac{1,5}{\theta_0^{4/3}} + 1,34, & \theta_0 \ll 1 \\ 2c_0 \left(1 + \frac{5}{9} c_0^2 + \frac{4}{9} c_0^4\right), & c_0 \ll 1 \end{cases}$$

В отличие от предыдущего в этом процессе при высоких порогах $\epsilon_0 \gg \omega_c$ число частиц экспоненциально падает $N_{\gamma\gamma \rightarrow e^-} \propto \exp(-\epsilon_0/\omega_c)$ даже при малом значении x_0 .

8. Некоторые другие фоновые процессы.

а) Рассмотрим процессы, в которых образуется $e^+e^- \gamma$ (или $\mu^+\mu^- \gamma$) система при $\gamma\gamma$, γe или e^+e^- соударениях рис.8-10 и регистрируется фотон.

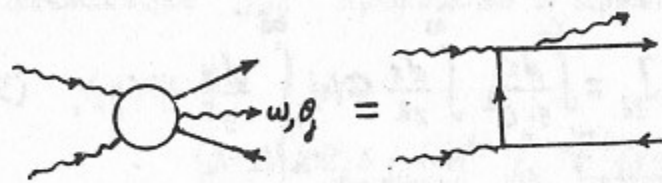


Рис.8

+ перестановки фотонов

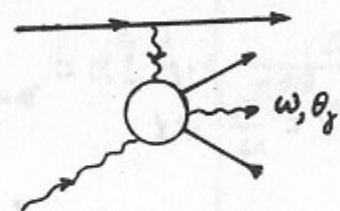


Рис.9

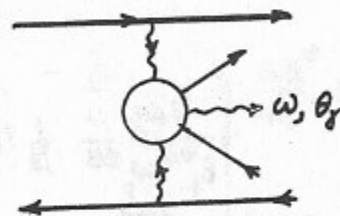


Рис.10

Число фоновых событий для этих процессов отличается от числа фоновых событий без излучения фотона (см. рис.4-6 и формулы (35), (33) и (31) соответственно) дополнительным множителем порядка

$$\sim \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\epsilon_0^2 (1-c_0^2)}{m^2}. \quad (36)$$

Проведем, например, расчёт для процесса рис.10. Дифференциальное по импульсам фотона сечение этого процесса имеет вид [5] ($c = \omega \theta_f$, $\epsilon_f = \omega$)

$$d\sigma_{10} = \frac{14\alpha^5}{3\pi^2} \frac{d\omega}{\omega^3} \frac{dc}{(1-c^2)^2} \left(\ln \frac{\epsilon^2}{m^2} \right)^2 \ln \frac{\omega^2(1-c^2)}{m^2}.$$

Область интегрирования определяется условиями (15). В итоге

$$N_{e^+e^- \rightarrow \gamma}^{10} = \frac{7\alpha^5 L}{3\pi^2 \epsilon_0^2} \left[\frac{c_0}{1-c_0^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+c_0}{1-c_0} \right] \left(\ln \frac{\epsilon^2}{m^2} \right)^2 \ln \frac{\epsilon_0^2 (1-c_0^2)}{m^2}. \quad (37)$$

б) Приведем для справок число фоновых событий для двухчастичных процессов

$$N_{e^+e^- \rightarrow e^+e^-} = \frac{\pi\alpha^2 L}{16E^2} \int_{-c_0}^{c_0} \left(\frac{3+c^2}{1-c} \right)^2 dc \xrightarrow{\theta_0 \ll 1} \frac{2\pi\alpha^2 L}{(E\theta_0)^2}, \quad (38)$$

$$N_{e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{\pi\alpha^2 L}{4E^2} \int_{-c_0}^{c_0} \frac{1+c^2}{1-c^2} dc \xrightarrow{\theta_0 \ll 1} \frac{\pi\alpha^2 L}{E^2} \ln \frac{2}{\theta_0}, \quad (39)$$

$$N_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{\pi\alpha^2 L}{4E^2} c_0 \left(1 + \frac{1}{3} c_0^2 \right). \quad (40)$$

9. Результаты и обсуждение.

Результаты расчетов чисел фоновых событий по формулам (21, 23, 25, 26, 31, 33, 35, 36) приведены на рис.11, 12.

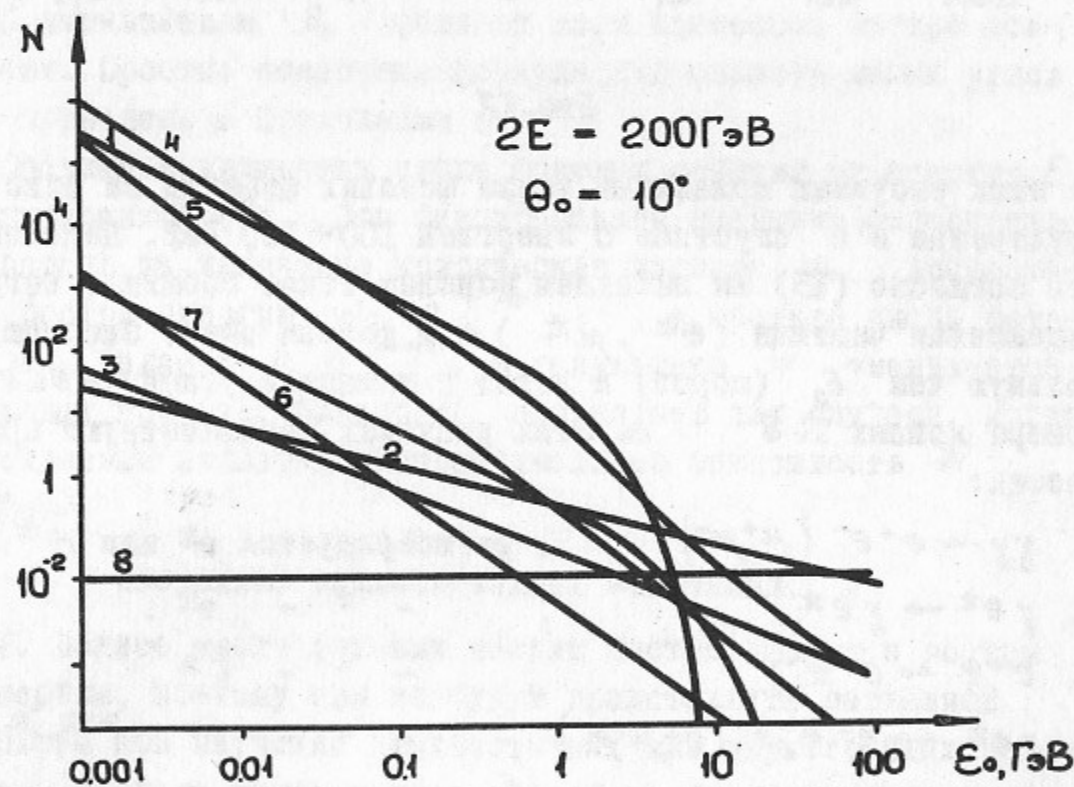


Рис.11

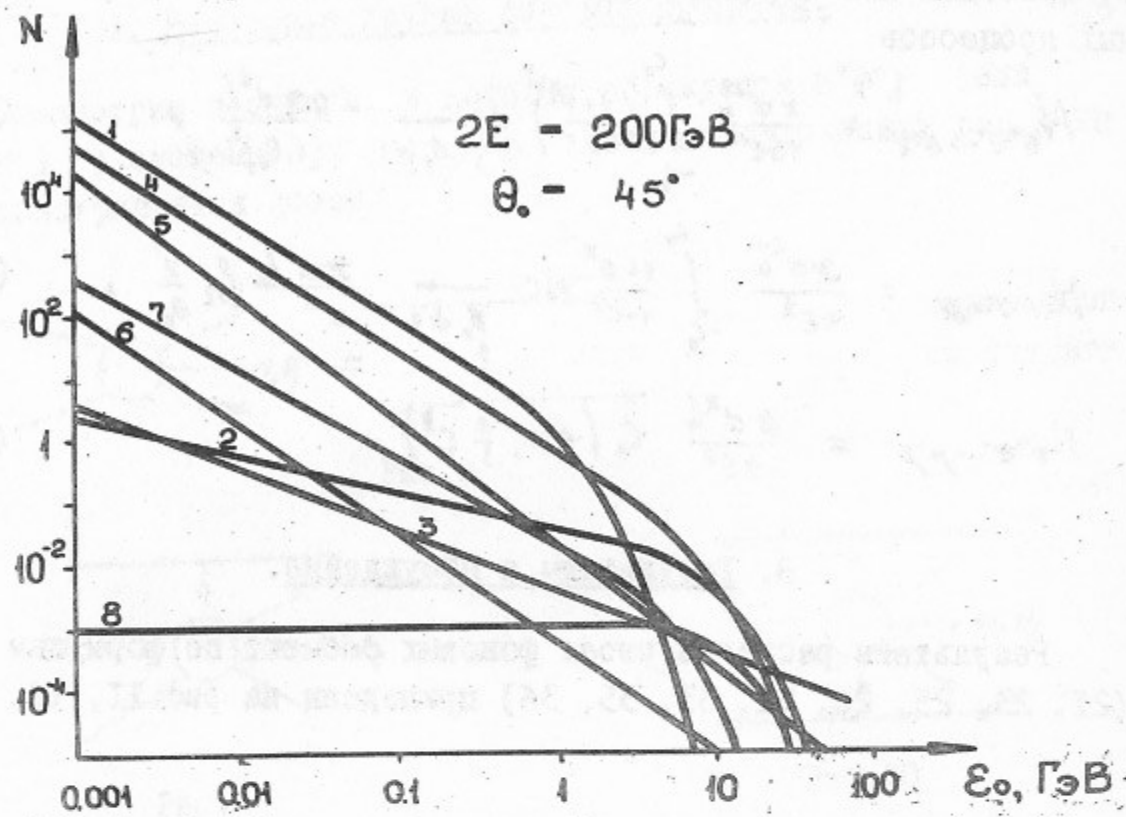


Рис. 12

На этих рисунках приведены числа фоновых событий за одно соударение e^+e^- сгустков с энергией 100+100 ГэВ. Напомним, что согласно (15) мы называем фоновым такое событие, когда заряженная частица (e^\pm, μ^\pm) или фотон имеет энергию большую чем ϵ_0 (порог) и летит в интервал углов $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$. Номера кривых 1-8 на этих рисунках соответствуют процессам:

1. $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^- (\mu^+\mu^-)$, регистрируется e^\pm или μ^\pm .
2. $\gamma e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$, - " - e^\pm .
3. $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma$, - " - e^\pm .
4. $\gamma e^\pm \rightarrow e^\pm e^+e^- (e^\pm \mu^+\mu^-)$, - " - e^\pm или μ^\pm .
5. $e^+e^- \rightarrow e^+e^- e^+e^- (e^+e^- \mu^+\mu^-)$, - " - e^\pm или μ^\pm .
6. $e^+e^- \rightarrow e^+e^- e^+e^- \gamma (e^+e^- \mu^+\mu^- \gamma)$, - " - γ .

7. $\gamma e^\pm \rightarrow e^\pm e^+e^- \gamma (e^\pm \mu^+\mu^- \gamma)$, регистрируется γ .
8. $\gamma e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$, регистрируется γ .

Отметим некоторые характерные черты обсуждаемых процессов.

При низких порогах одним из главных источников фона является процесс I: $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$. Однако его вклад экспоненциально ($N \propto \exp(-\epsilon_0/\omega_c)$) падает с увеличением порога ϵ_0 .

Комptonовское рассеяние (кривые 2 и 8) в области малых порогов даёт относительно меньший вклад. Однако с ростом ϵ_0 вклад этого процесса становится определяющим. Наряду с процессом $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$ главный вклад в число фоновых событий при очень малых порогах дают также процессы 4 (Бёте-Гайтлера) и 5 (Ландау-Лифшица). При больших ϵ_0 их вклад падает, но только степенным образом: $N_{\gamma e} \propto 1/\epsilon_0$, $N_{e^+e^-} \propto 1/\epsilon_0^2$.

С уменьшением θ_0 фоны от всех процессов быстро возрастают. Простые оценочные формулы для области малых углов θ_0 приведены в Приложении 6.

Обсудим зависимость числа фоновых событий от энергии E сталкивающихся e^+e^- . При фиксированном значении относительных потерь на излучение критическая частота ω_c возрастает с ростом энергии $\omega_c \propto E^{3/2}$, а среднее число фотонов n падает: $n \propto E^{-1/2}$. В результате N уменьшается при малых порогах. Однако N возрастает для случаев, когда существенным является экспоненциальная зависимость N от ϵ_0/ω_c .

Несколько заключительных замечаний.

1. Полное число фоновых частиц быстро падает с ростом их энергии, поэтому они не будут представлять серьёзной трудности при изучении двухчастичных или двухструйных процессов, когда в узком конусе каждой струи выделяется энергия порядка энергии начальных частиц. Однако при исследовании многочастичных процессов фоновая ситуация ухудшается, что может затруднить их изучение.

2. Особенностью проекта ВЛЭПШ является низкая частота столкновения e^\pm сгустков и, как следствие, малая мощность

высокочастного питания и высокая импульсная светимость. Высокая импульсная светимость приводит к увеличению вероятности столкновений нескольких пар частиц при однократном прохождении сгустков. Поэтому растёт число событий, в которых на большие углы летит несколько частиц с большой энергией, родившихся в разных актах взаимодействия. В этих условиях будет затруднено изучение элементарного акта e^+e^- -взаимодействия.

В перспективе, при увеличении энергии встречных пучков, по всей видимости, будет необходимо увеличивать светимость, что при низких частотах соударений приведет к ухудшению фоновых условий проведения экспериментов.

Авторы благодарны А.Н.Скринскому за постановку задачи, В.Е.Балакину, Л.М.Баркову, И.Ф.Гинзбургу, Г.Л.Коткину, Ю.Н.Пестову, В.А.Тамарскому и В.С.Фадину за полезные обсуждения.

Приложение I. Число соударений для γe и $\gamma\gamma$ столкновений в модели однородной плотности e^\pm сгустков.

Рассмотрим реакцию $e^+e^- \rightarrow f$. Число соответствующих событий за одно соударение e^+e^- сгустков равно (см. [3] §I2)

$$N_{e^+e^- \rightarrow f} = 2c \sigma_{e^+e^- \rightarrow f} \int \rho_+ \rho_- dt dV, \quad dV = S_e dz, \quad (\text{П1})$$

где $\rho_\pm = N_\pm / S_e l$ число частиц в единице объёма e^\pm сгустка, которое предполагается постоянным по объёму сгустка. При заданном значении t интегрирование по z проводится по области перекрытия сгустков, т.е.

$$\int dt dz = \int_0^{l/2c} dt \int_{-ct}^{ct} dz + \int_{l/2c}^{l/c} dt \int_{-l+ct}^{l+ct} dz. \quad (\text{П2})$$

Вычисляя этот интеграл, получим

$$N_{e^+e^- \rightarrow f} = \rho_+ \rho_- S_e l^2 \sigma = L \sigma, \quad L = \frac{N_+ N_-}{S_e},$$

где L - светимость за одно соударение e^+e^- сгустков (I).

Для движущегося параллельно оси z позитрона (электрона) число испущенных им фотонов пропорционально времени его пролета в электронном (позитронном) сгустке, поэтому плотность порожденных позитронами (электронами) фотонов в точке z в момент времени t есть

$$d\rho_\gamma(\omega) = \rho_\pm dn(\omega) \frac{ct \pm z}{l}.$$

Подставляя это выражение в (П1), получим для числа событий $\gamma e^- \rightarrow f$ или $\gamma\gamma \rightarrow f$ типа за одно соударение e^+e^- сгустков следующие выражения

$$\begin{aligned} dN_{\gamma e^- \rightarrow f} &= 2c \sigma_{\gamma e^- \rightarrow f}(\omega) dn(\omega) \int \rho_+ \rho_- \frac{ct-z}{l} dt dV = \\ &= \frac{1}{2} L \sigma_{\gamma e^- \rightarrow f}(\omega) dn(\omega); \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

$$\begin{aligned} dN_{\gamma\gamma \rightarrow f} &= 2c \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow f}(\omega_1, \omega_2) dn(\omega_1) dn(\omega_2) \int \rho_+ \rho_- \frac{ct-z}{l} \cdot \frac{ct+z}{l} dt dV = \\ &= \frac{1}{4} L \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow f}(\omega_1, \omega_2) dn(\omega_1) dn(\omega_2). \end{aligned}$$

Приложение 2. Вычисление интеграла J_e (20) для комптоновского рассеяния.

а) Случай $x_0 \ll 1$. Основной вклад в этот интеграл даёт область малых $x \sim x_0$. Поэтому для функции $\Phi(x)$ можно использовать её асимптотику при малых x (I2):

$$J_e = \Phi_1 \int_{-c}^c \frac{dc}{1-c^2} \int_{x_c}^{\infty} \frac{dx}{x^{5/3}} = \frac{3\Phi_1}{2^{1/3}} \left(\frac{\omega_c}{\epsilon_0}\right)^{2/3} f_1(\theta_0),$$

где

$$f_1(\theta_0) = \int_{-c}^c \frac{dc}{(1+c)(1-c)^{5/3}} = \frac{3}{2^{2/3} 4} \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\beta^2} + \ln \frac{a(1-a)}{\beta(1-\beta)} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(\beta-a)}{2+\beta+a+2ab} \right], \quad (\text{П4})$$

$$a = \left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right)^{2/3}, \quad b = \left(\cos \frac{\theta_0}{2}\right)^{2/3}.$$

б) Случай $x_0 \gg 1$. Удобно изменить порядок интегрирования и представить J_e в виде суммы двух слагаемых

$$J_e = J_1 + J_2 = \left[\int_{x_0}^{y_0} dx \int_{c_x}^{c_0} dc + \int_{y_0}^{\infty} dx \int_{-c_0}^{c_0} dc \right] \frac{\varphi(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1-c^2}, \quad (\text{П5})$$

$$c_x = 1 - \frac{2\omega_c}{\varepsilon_0} x > -c_0.$$

Поскольку $x_0, y_0 \gg 1$, то для $\varphi(x)$ можно использовать асимптотику при больших x (I2), при этом $\varphi(x) \sim e^{-x}$. Отсюда видно, что основной вклад в интеграл J_1 (или J_2) даёт область $x - x_0 \sim 1$ (или $x - y_0 \sim 1$). В интересующей нас области углов $\theta_0 < 60^\circ$ отношение $y_0/x_0 = \text{ctg}^2(\theta_0/2) > 3$ т.е. $y_0 - x_0 > 2y_0/3 \gg 1$. Поэтому $J_2/J_1 \sim \exp[-(y_0 - x_0)] \ll 1$. Кроме того, при $x - x_0 \sim 1$ имеем

$$c_x = c_0 - \Delta c, \quad \Delta c = \frac{2\omega_c}{\varepsilon_0} (x - x_0) \ll c_0. \quad (\text{П6})$$

Поэтому

$$J_e \approx J_1 = 4\sqrt{2} \int_{x_0}^{y_0} \frac{e^{-x}}{x^3} \cdot \frac{\Delta c}{1-c_0^2} dx = \frac{8\sqrt{2} e^{-x_0}}{2x_0^3(1-c_0^2)} \left[1 + O\left(\frac{1}{x_0}\right) \right] \quad (\text{П7})$$

Приложение 3. Вычисление интеграла J_y (22).

а) Случай $x_0 \ll 1$. При этом $x_c \sim x_0 \ll 1$ и в интеграле по x нижний предел можно положить равным нулю, после чего с учетом (I3) имеем

$$J_y \approx \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{(1-c)^2} \int_0^{\infty} \varphi(x) \frac{dx}{x} = \frac{20\pi}{3} \cdot \frac{c_0}{1-c_0^2}.$$

б) Случай $x_0 \gg 1$. Изменив порядок интегрирования и повторив выкладки предыдущего Приложения, получим

$$J_y = 4\sqrt{2} \int_{x_0}^{y_0} \frac{dx}{x^2} e^{-x} \int_{c_x}^{c_0} \frac{dc}{(1-c)^2} = \frac{8\sqrt{2} e^{-x_0}}{2x_0^2(1-c_0)^2} \left[1 + O\left(\frac{1}{x_0}\right) \right].$$

Приложение 4. Вычисление интеграла J_{ey} (32).

а) Случай $\varepsilon_0 \ll \omega_c$. Имеем $x \sim x_c \ll 1$, поэтому (обозначения те же, что и в (П4)):

$$J_{ey} = \varphi_1 \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{(1-c)(1+c)^2} \int_{x_c}^{\infty} \frac{dx}{x^{5/3}} \left(1 - \frac{x_c}{x}\right) l = \frac{9\varphi_1}{10} \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{2/3} l f_2(\theta_0), \quad (\text{П8})$$

$$f_2(\theta_0) = \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{(1+c)^2(1-c)^{5/3}} = \frac{1}{2^{2/3} 4} \left\{ \frac{b}{a^3} - \frac{a}{b^3} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{5}{2} \left[\ln \frac{a(1-a)}{b(1-b)} + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arctg} \frac{\sqrt{3}(b-a)}{2+b+a+2ab} \right] \right\}$$

т.к. при малых θ_0 основной вклад даёт область $\theta \sim \pi - \theta_0$, $\omega_{1,2} \sim \varepsilon_0(1 \mp c)$, то в выражении для l (27) можно положить $\varepsilon_f/\omega_1 \approx 1/(1-c_0)$, после чего

$$l = \ln \frac{E^2(1+c_0)}{m^2(1-c_0)}.$$

б) Случай $x_0 \ll 1$, $y_0 \gg 1$. При этом $\theta_0 \ll 1$ или $1-c_0 \ll 1$. Как и в Приложении 2, изменив порядок интегрирования и отбросив интеграл по области $x_0 > y_0$, получим

$$J_{ey} = \int_{x_0}^{y_0} \frac{dx}{x^2} \varphi(x) \int_{c_x}^{c_0} \frac{dc}{(1+c)^2(1-c)} \left(1 - \frac{x_c}{x}\right) l. \quad (\text{П9})$$

т.к. $1-c_0 \ll 1$ и $c_0 - c_x \ll 1$, то в выражении для $l/(1+c)^2$ можно положить $c = c_0$, после чего интеграл по c легко берется. Основной вклад в интеграл по x даёт область $x \sim x_0$, где $\varphi(x) \approx \varphi_1 x^{1/3}$ поэтому

$$J_{ey} = \frac{\varphi_1 l}{(1+c_0)^2} \int_{x_0}^{y_0} \frac{dx}{x^{5/3}} \left(\ln \frac{x}{x_0} - 1 + \frac{x_0}{x} \right) = \frac{27 \varphi_1}{80} \frac{l}{x_0^{2/3}} \quad (\text{П10})$$

Т.к. основной вклад даёт область $\theta \sim \theta_0$, $\omega_1 \sim \varepsilon_0$, $\omega_2 \sim \varepsilon_0(1-c_0)$, то в выражении для J_{ey} в (27) можно положить $\varepsilon_f/\omega_1 \approx 1$ после чего $l = \ln(E^2 \theta_0^2/m^2)$.

в) Случай $x_0 \gg 1$, $y_0 \gg 1$. Для J_{ey} в этом случае справедливо выражение (П9), в котором $\varphi(x) = 4\sqrt{2} e^{-x}/x$, поэтому после интегрирования по c имеем

$$J_{ey} = \frac{4\sqrt{2} l}{(1+c_0)^2} \int_{x_0}^{y_0} \frac{dx}{x^3} e^{-x} \left(\ln \frac{x}{x_0} - 1 + \frac{x_0}{x} \right).$$

Основной вклад даёт область $x - x_0 \sim 1$, в которой

$$\ln \frac{x}{x_0} - 1 + \frac{x_0}{x} \approx \frac{(x-x_0)^2}{2x_0^2},$$

отсюда

$$J_{ey} = \frac{4\sqrt{2}}{x_0^5 (1+c_0)^2} e^{-x_0} \ln \frac{E^2(1-c_0)}{m^2(1+c_0)}.$$

Приложение 5. Вычисление интеграла J_{xy} (34).

а) Случай $\varepsilon_0 \ll \omega c$. При этом основной вклад даёт область $x \sim x_c \ll 1$, $y \sim y_c \ll 1$, в которой можно использовать асимптотику $\varphi(x)$ при $x \ll 1$ (I2):

$$J_{xy} = \varphi_1^2 \int_{-c_0}^{c_0} \frac{dc}{1-c^2} \int_{x_c}^{\infty} \frac{dx}{x^{5/3}} \int_{x y_c/(x-x_c)}^{\infty} \frac{dy}{y^{5/3}} = \left(\frac{2\omega c}{\varepsilon_0} \right)^{4/3} \frac{3 \varphi_1^2 \Gamma(2/3) \Gamma(5/3)}{2 \Gamma(7/3)} f_3(\theta_0),$$

$$f_3(\theta_0) = \int_{-c_0}^{\infty} \frac{dc}{(1-c^2)^{5/3}}.$$

б) Случай $x_0, y_0 \gg 1$. При этом $x_c \gg 1$, $y_c \gg 1$, поэтому взяв для $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ их асимптотики при больших x, y (I2), получим после интегрирования по y и замены $x = x_c \cdot t$:

$$J_{xy} = \frac{2\pi}{z^5} \int_0^{c_0} \frac{dc}{(1-c)^3(1+c)^4} I(c); \quad I(c) = \int_1^{\infty} f(t) e^{-x_c \varphi(t)} dt; \quad (\text{П11})$$

$$f(t) = \frac{(t-1)^3}{t^6}, \quad \varphi(t) = t + \lambda \frac{t}{t-1}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{y_c}{x_c}} = ctg \frac{\theta_0}{2}.$$

Т.к. $x_c \gg 1$, то для вычисления $I(c)$ удобно воспользоваться методом перевала:

$$I(c) = \left(\frac{2\pi}{x_c \varphi''(t_0)} \right)^{1/2} f(t_0) e^{-x_c \varphi(t_0)},$$

где t_0 точка минимума функции $\varphi(t)$, в которой $\varphi'(t_0) = (1+\lambda)^2$, $\varphi''(t_0) = 2(1+\lambda)^4/\lambda$; $f(t_0) = \lambda^3/(1+\lambda)^4$.

После подстановки этих выражений в (П11) получаем (замена $z \sin \theta = u$):

$$J_{xy} = \frac{2^3 \sqrt{2\pi}}{z^3 c_0 (1+s_0)^3} e^{-z} \int_{z s_0}^{\infty} \frac{du}{u^{7/2}} e^{-u} = \frac{2^3 \sqrt{2\pi}}{z^3 c_0 (1+s_0)^3 (z s_0)^{7/2}} e^{-z(1+s_0)}.$$

в) Случай $y_0 \gg 1$, $x_0 \cdot y_0 \ll 1$. При этом необходимо $\theta_0 \ll 1$. Ввиду симметрии J_{xy} по отношению к замене $c \rightarrow -c$, имеем

$$J_{xy} = 2 \int_0^{c_0} \frac{dc}{1-c^2} \int_{x_c}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \varphi(x) \int_{x y_c/(x-x_c)}^{\infty} \frac{4\sqrt{2}}{y^3} e^{-y} dy,$$

где мы использовали асимптотику $\varphi(y)$ при больших y , т.к. $y_c \gg 1$ при $c \geq 0$. После интегрирования по y удобно перейти к другому порядку интегрирования. Отбросив вклад области $x > y_0$ получим

$$J_{xy} = \frac{2^6 \sqrt{2}}{z^3} \int_{x_0}^{y_0} \frac{dx}{x^2} \varphi(x) \int_{c_x}^{c_0} \frac{dc}{(1-c)(1+c)^4} \left(1 - \frac{x_c}{x}\right)^3 e^{-x_c/(x-x_c)}.$$

Интегрирование по c удобно провести, воспользовавшись

заменой $t = x y_c / (x - x_c)$, после чего

$$J_{dd} = \frac{8\sqrt{2}}{z^5(1-c_0)} e^{-z} I, \quad I = \int_{x_0}^{y_0} \frac{dx}{x} \varphi(x) e^{-x y_0 / (x - x_0)}$$

Для оценки оставшегося интеграла I разобьем область интегрирования на два интервала $x_0 \leq x \leq \sqrt{x_0 y_0}$ и $\sqrt{x_0 y_0} \leq x \leq y_0$. Вклад первого интервала мал, т.к.

$$I_1 < \int_{x_0}^{\sqrt{x_0 y_0}} \frac{dx}{x} \varphi(x) \approx 3 \varphi_1 (x_0 y_0)^{1/3} \ll 1$$

Во втором интервале показатель экспоненты мал $x_0 y_0 / (x - x_0) < \sqrt{x_0 y_0} \ll 1$ и поэтому

$$I \approx \int_{\sqrt{x_0 y_0}}^{y_0} \frac{dx}{x} \varphi(x) \approx \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \varphi(x) = \frac{10\pi}{3}$$

Приложение 6. Приведем некоторые оценочные формулы для области малых углов θ_0 ($m/E \ll \theta_0 \ll 1$). В них величины E , ω_c , ε_0 даны в Гэв, $z = \varepsilon_0 / \omega_c$, $x_0 = \varepsilon_0 \theta_0^2 / 4 \omega_c$.

1. Процесс $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$:

$$N_{\gamma\gamma \rightarrow e^-} = \begin{cases} \frac{1,3 e^{-z}}{(\varepsilon_0 \theta_0)^{4/3} (E/100)^2}, & z \lesssim 1 \\ \frac{2,7 e^{-z}}{(\varepsilon_0 \theta_0)^2 z^3 (E/100)}, & z \gg 1 \end{cases}$$

Аналогичные формулы имеют место для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \mu^-\mu^+$ при $\varepsilon_0 \gg m_\mu$.

2. Комptonовское рассеяние $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$:

$$N_{\gamma e^- \rightarrow e^-} = \frac{1,1 \cdot 10^{-2}}{(\varepsilon_0 \theta_0^2)^{2/3} (E/100)^2} e^{-x_0}, \quad x_0 \lesssim 1;$$

$$N_{\gamma e^- \rightarrow \gamma} = \frac{3,6 \cdot 10^{-4}}{(E \theta_0 / 100)^2} e^{-x_0}, \quad x_0 \lesssim 1$$

3. Процесс $\gamma e^- \rightarrow e^- e^+ e^-$:

$$N_{\gamma e^- \rightarrow e^-} = \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{\varepsilon_0^{5/3} (E/100)} e^{-x_0} \begin{cases} \frac{1}{\theta_0^2} \ln \frac{E^2}{m^2 \theta_0^2}, & z \lesssim 1 \\ \frac{1}{\theta_0^{4/3}} \ln \frac{(E \theta_0)^2}{m^2}, & z \gg 1, x_0 \lesssim 1 \end{cases}$$

4. Тормозное излучение $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$:

$$N_{e^+e^- \rightarrow e^-} = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{\varepsilon_0 \theta_0^2 (E/100)} \ln \frac{E^2}{(m \theta_0)^2};$$

$$N_{e^+e^- \rightarrow \gamma} = \frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{(E \theta_0 / 100)^2} \ln \frac{E}{\varepsilon_0} \ln \frac{E^2}{m^2}$$

5. Процесс $e^+e^- \rightarrow e^+e^-e^+e^-$:

$$N_{e^+e^- \rightarrow e^-} = \frac{7 \cdot 10^{-6}}{(\varepsilon_0 \theta_0)^2} \left(\ln \frac{E^2}{m^2} \right)^2$$

Число фоновых событий для процессов $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-\gamma$, $\gamma e^- \rightarrow e^- e^+ e^-\gamma$ с регистрацией фотонов отличается от числа фоновых событий без излучения фотона дополнительным множителем $\sim (\alpha/\pi) \ln(\varepsilon_0^2 \theta_0^2 / m^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V.E.Balakin, G.I.Budker, A.N.Skrinsky. Preprint INF 78-101, Novosibirsk, 1978.
В.Е.Балакин. Отчёт о рабочем совещании по программе экспериментов на встречных e^+e^- -пучках (19-23 ноября 1979г.) стр.60. Новосибирск, 1979.
- [2] В.Е.Балакин, Г.И.Будкер, А.Н.Скринский. Труды 6 Всесоюзной конференции по ускорителям. Дубна, 1978.
- [3] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, Наука, 1973.
- [4] В.Н.Байер, Э.А.Кураев, В.С.Фадин, В.А.Хозе. Материалы ХУ зимней школы ИЯФ, стр.84, Ленинград, 1980.
Physics Rep. in print.
- [5] В.С.Фадин, В.А.Хозе. Письма в ЖЭТФ, 17, 438, 1973.

Работа поступила 22 июня 1981 г.

Ответственный за выпуск С.Г.Попов
Подписано к печати 25.06.1981г. МН 03205
Усл. 1,9 печ.л., 1,5 учетно-изд.л.
Тираж 170 экз. Бесплатно.
Заказ № 63

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР