37

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Э.И.Горникер, И.А.Шехтман

РАСЧЁТ ПРОЛЁТНОГО ЗАЗОРА И КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ В ВЫХОДНОМ РЕЗОНАТОРЕ ГИРОКОНА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УГЛАХ ВВОДА ЛУЧА

ПРЕПРИНТ 81-52

Новосибирск

РАСЧЕТ ПРОЛЕТНОГО ЗАЗОРА И КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ В ВЫХОДНОМ РЕЗОНАТОРЕ ГИРОКОНА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УГЛАХ ВВОДА ЛУЧА

Горникер Э.И., Шехтман И.А.

А Н Н О Т А Ц И Я

Кольцевой резонатор гирокона рассматривается в виде плоской модели как бесконечный волновод, возбуждаемый электронным лучом, место входа которого перемещается вдоль волновода. Для условий, при которых электрон на выходе полностью теряет свою скорость, а напряженность поля волны минимальна, определяется отношение амплитуды ВЧ напряжения к ускоряющему напряжению источника электронов, а также величина соответствующего пролетного зазора. Оценены погрешности и указаны пределы применимости плоской модели для гироконов радиального и аксиального типов.

Рассмотрена также коаксиальная модель выходного резонатора и получены приближенные формулы для расчета пролетного зазора, коэффициента перенапряжения и оптимального угла ввода луча.

Результаты расчета позволяют выбрать размеры и оценить КПД выходного резонатора гирокона.

I. Одно из отличий гирокона [I] от нерелятивистских СВЧ генераторов с круговой разверткой луча (например, [2]) состоит в том, что в гироконе имеются специальные устройства, способствующие полному торможению электронов релятивистских энергий в выходном резонаторе. Именно релятивистский уровень энергии электронов, как впервые отметил Г.И.Будкер, предложивший гирокон [I,3], позволяет, в принципе, достичь высокой СВЧ мощности при КПД, близком к I00%. Для этого требуется оптимизировать элементы гирокона, в частности, – выходной резонатор. Этот резонатор представляет собой волновод, замкнутый в кольцо. Электроны, модулированные по направлению скорости, меняют место своего входа в резонатор, возбуждая в нем бегущую волну [4]. Взаимное расположение релятивистского пучка и выходного резонатора в гироконе схематически показано на рис.Iа и Iб. Здесь даны схемы резонаторов аксиального (рис.Iа) и радиального (рис. Iб) гироконов, построенных в Институте ядерной физики СО АН СССР [5].

Для упрощения анализа процесса возбуждения выходного резонатора рассматривалась его плоская модель [4], представляющая собой бесконечный волновод с бегущей в нем волной типа Н, которая имеет максимум электрического поля в плоскости движения электронов (рис.Iв). Если начальная скорость релятивистских электронов направлена перпендикулярно широкой стенке волновода, то как показал анализ [6], из-за отклонения электрона магнитным полем волны, полного торможения не произойдет. Это приведет к снижению КПД взаимодействия на I0÷30%, даже в том случае, когда возбуждающий электронный пучок – бесконечно тонкий. В гироконе один из способов устранения этого релятивистского эффекта снижения КПД – косой ввод луча. Электроны должны вводиться в резонатор под определенным углом ψ (рис.Iб, Iв), имея составляющую скорости в направлении перемещения точки входа пучка.

Наряду с оптимизацией угла ввода ψ , необходима оптимизация пролетного зазора резонатора по потерям. Расчет оптимального пролетного зазора был проведен в первую очередь для оптимального угла ввода [3,4].[ж)] Однако, на практике угол ввода может отличаться от оптимального, и появляется необходимость оцен-

---

ж) Приложение I

ки пролетного зазора в этом случае. Необходима также оценка погрешности результатов, полученных путем анализа плоской модели. Если для резонатора аксиального гирокона эту оценку можно попытаться сделать, оставаясь в пределах модели ж), то для радиального – требуется сравнение с результатами точного численного счета. Ниже излагается решение этих задач.

2. Основные предположения, сделанные при анализе плоской модели следующие:

а) бесконечно тонкий возбуждающий пучок (рассматривается движение одного электрона);

б) высокая добротность выходного резонатора (рассматривается один тип бегущей волны);

в) поле в области движения пучка – однородно (т.е. не зависит от координаты y , рис. Iв);

г) рассматривается движение электрона в заданном поле бегущей волны (предполагается, что заданное поле всегда может быть получено путем подбора размеров, настройки и величины нагрузки резонатора).

Систему уравнений движения электрона в поле волны (I),

$$\left.\begin{aligned} E_y &= E\,Cos(\omega t-\beta x) \\ B_z &= B\,Cos(\omega t-\beta x), \end{aligned}\right. \qquad (I)$$

бегущей в волноводе (рис. Iв) с фазовой скоростью V (2),

$$V=\frac{E}{B}=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_K}\right)^2}}\,, \qquad (2)$$

для удобства интегрирования запишем в четырехмерной формулировке (3):

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -k\dot{y}\,Cos\,\beta q \\ \ddot{y} &= -k\dot{q}\,Cos\,\beta q \\ \ddot{z} &= 0 \\ c\ddot{t} &= -k\dot{y}\,\nu\,Cos\,\beta q \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Здесь E – амплитуда напряженности электрического поля, B – амплитуда магнитной индукции, ω – круговая частота, $c=3\cdot 10^8$ м/сек, λ_k – длина критической волны волновода, $\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$, $\nu=\frac{V}{c}$ – относительная скорость волны в выходном резонаторе гирокона,

---

ж) Приложение II

$K=\frac{eB}{mc}$, $\frac{mc^2}{e}=5{,}11\cdot 10^5$ Вольт, $q=\nu ct-x$, $\beta=\frac{\omega}{V}$, $\omega t-\frac{\omega}{V}x=\beta q$. Точки означают дифференцирование по s , где $ds=\frac{c\,dt}{\gamma}$ – четырехмерный элемент длины, γ – относительная энергия электрона.

Начальные условия при этих обозначениях имеют вид (4): при $s=0$

$$\left.\begin{aligned} &ct_o=\gamma_o, & &t=t_o, \\ &\dot{x}_o=\sqrt{\gamma_o^2-1}\cdot Sin\psi, & &x=x_o, \\ &\dot{y}_o=\sqrt{\gamma_o^2-1}\cdot Cos\psi, & &y_o=0, \\ &\dot{z}_o=0, & &z_o=0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $\gamma_o=\frac{eU_o}{mc^2}+1$ – начальная относительная энергия, (U_o – ускоряющее напряжение источника электронов), ψ – угол ввода (рис. Iб, Iв).

3. Однократное интегрирование первого и четвертого уравнений системы (3), как известно ж) [3], позволяет найти оптимальный угол ввода $\psi=\psi_o$ (5), при котором в конце пролетного зазора $y=b_o$ полная скорость электрона обращается в нуль, что соответствует КПД = 100%,

$$\psi_o=arc\,Sin\left(\frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\gamma_o-1}{\gamma_o+1}}\right). \qquad (5)$$

Интегрирование второго уравнения системы ж) (3) позволяет найти фазы влета и вылета, при которых поперечная (параллельная оси y) скорость электрона обращается в нуль в конце пролетного зазора. Минимальная напряженность поля (т.е. минимальные удельные потери) при этом будут тогда, когда фаза влета $\beta q_o=-\frac{\pi}{2}$, и фаза вылета $\beta q_e=+\frac{\pi}{2}$. При этом продольная скорость ($\dot{x}_e$) электрона в конце пролета может быть и не равной нулю (т.е. КПД <100%), если $\psi\neq\psi_o$ (5).

Минимальная напряженность электрического поля в зазоре при этом равна (6):

$$E_{min}=\frac{U_o}{\lambda}\pi\sqrt{\frac{\gamma_o+1}{\gamma_o-1}}\cdot Cos\psi\,, \qquad (6)$$

ж) Приложение I

а коэффициент перенапряжения составляет (7):

$$\frac{U}{U_0}=\frac{\pi b}{\lambda}\sqrt{\frac{\gamma_0+1}{\gamma_0-1}}\cdot\cos\psi. \tag{7}$$

Здесь U – амплитуда напряжения на зазоре (b).

Дальнейшее интегрирование системы [x)] (3) позволяет найти пролетный зазор (b) при условии минимальных удельных потерь ($\beta q_0=-\frac{\pi}{2}$, $\beta q_{\theta}=+\frac{\pi}{2}$), для произвольного угла ввода:

$$\frac{2\pi b}{\lambda}=\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\cdot\sqrt{\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1}}\left[\pi\sqrt{\Gamma}\cdot\sqrt{\frac{\Gamma-1}{\Gamma+1}}+(\Gamma-1)K(k^2)-\right.$$
$$\left.-(\Gamma+1)\Pi(m,k^2)\right]. \tag{8}$$

Здесь λ – длина рабочей волны гирокона, $K(k^2)$ полный эллиптический интеграл I-го рода, $\Pi(m,k^2)$ – полный эллиптический интеграл 3-го рода, $k^2=\frac{\Gamma-1}{2\Gamma}$; $m=\frac{2}{\Gamma-1}$;

$$\Gamma=\frac{\gamma_0\nu-\sqrt{\gamma_0^2-1}\cdot\sin\psi}{\sqrt{(\gamma_0\nu-\sqrt{\gamma_0^2-1}\cdot\sin\psi)^2-(\nu^2-1)(\gamma_0^2-1)\cos^2\psi}}. \tag{9}$$

Если угол ввода оптимален ($\psi=\psi_0$) (5), то пролетный зазор ($b=b_0$) определяется из (8), но выражение (9) упрощается и приобретает вид (10):

$$\Gamma=\frac{1}{\nu^2}+\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)\gamma_0 \tag{10}$$

что совпадает с [3,4].

Таким образом, пролетный зазор (b) выходного резонатора с минимальными удельными потерями может быть рассчитан по (8) и (9) не только для критического режима, когда кроме условия влета и вылета в нулевой фазе, электрон введен под оптимальным углом (5), но и при неоптимальном угле ввода.[xx)] Из соотношения (7) по найденному значению ($\frac{\pi b}{\lambda}$), может быть определен коэффициент перенапряжения, ($\frac{U}{U_0}$),[xx)] необходимый для расчета потерь в выходном резонаторе и КПД гирокона.

---

x) Приложение I

xx) Приложение III

4. Движение электрона в средней плоскости коаксиального резонатора радиального гирокона запишем в цилиндрической системе координат (r , φ, z) (рис.1б):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(m\gamma\frac{dr}{dt}\right)=m\gamma r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-e\left(E_r+B_z r\frac{d\varphi}{dt}\right)\\&\frac{d}{dt}\left(m\gamma r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=-e\left(E_\varphi-B_z\frac{dr}{dt}\right)r\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В уравнениях E_φ, E_r, B_z – составляющие электромагнитного поля в резонаторе.

Система уравнений решалась численно для разных углов ввода и энергий электрона при разных размерах резонатора. Строгое аналитическое решение системы получить не удается, но ряд полезных результатов можно получить, упростив уравнения (11). При отношении внешнего диаметра резонатора к внутреннему не более 4 можно приближенно считать:

$$E_\varphi=0 \tag{12}$$

$$E_r\sim\frac{1}{r} \tag{13}$$

$$B_z=0 \tag{14}$$

Приближение (13) и (14) полезно для оценки пролетных углов, если начальная азимутальная скорость равна нулю. Приближенный анализ позволяет определить области изменения параметров пучка электронов и размеров резонатора при численном решении системы (11).

5. С учетом (12) движение электрона в средней плоскости коаксиального резонатора с волной H_{111} , поляризованной по кругу, описывается в цилиндрической системе координат системой уравнений (15), (16), (17):

$$\frac{d^2 r}{ds^2}=(r+G)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2-P\cdot K(r,G)\cdot\cos(\omega t-\varphi)\cdot\left[\gamma\frac{2G+1}{2(r+G)}-\frac{r+G}{\nu}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)\right], \tag{15}$$

$$\frac{d}{ds}\left[(r+G)^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)\right]=-P\cdot K(r,G)\cdot\cos(\omega t-\varphi)\cdot\frac{r+G}{\nu}\left(\frac{dr}{ds}\right), \tag{16}$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = -P\cdot K(\eta,G)\cdot \cos(\omega t-\varphi)\cdot \frac{2G+1}{2(\eta+G)}\cdot\left(\frac{d\eta}{ds}\right). \qquad (I7)$$

Здесь обозначено:

$ds = \frac{c}{b}\cdot\frac{dt}{\gamma}$, b – пролетный зазор

$\nu = \frac{n\lambda_к}{\ell_\varphi}\cdot\frac{\lambda_к}{\lambda}$, $\ell_\varphi = 2\pi b\left(G+\frac{1}{2}\right)$, n – номер азимутальной гармоники, $\lambda_к$ – критическая длина волны H_{n1} в коаксиальном волноводе, $P = U\cdot\frac{e}{mc^2} = \frac{U}{5{,}11\cdot 10^5\,B}$, U – интеграл от E_r , взятый по пролетному зазору.

Цилиндрическая координата r связана с безразмерной координатой η следующим образом:

$$r = (\eta + G)b ,$$

G – отношение внутреннего радиуса коаксиального резонатора к пролетному зазору.

$\frac{1}{r}K(r,G)$ – функция распределения поля E_r в зазоре резонатора, определяемая решением волнового уравнения [7].

Из (I6) и (I7) следует:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{2}{\nu(2G+1)(\eta+G)^2}\left[\int(\eta+G)^2 d\gamma + C\right], \qquad (I8)$$

где C – константа интегрирования.

Очевидно, что при $G\to\infty$ выражение (I8) интегрируется, что соответствует случаю плоской модели:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{2G+1}{2}\cdot\frac{d\varphi}{ds}\right) = \int d\gamma + C .$$

Здесь $\frac{2G+1}{2}d\varphi \to \frac{dx}{b}$ при $G\to\infty$.

Представим (I8) в следующем виде:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{1}{G\left(1+\frac{1}{2G}\right)\left(\frac{\eta}{G}+1\right)^2}\left(\gamma + \frac{1}{G^2}\int\eta^2 d\gamma + \frac{2}{G}\int\eta\, d\gamma + C\right). \qquad (I9)$$

Обозначим $F_1(\eta) = \int\eta^2 d\gamma$; $F_2(\eta) = \int\eta\, d\gamma$.

Положим $F_1(0) = F_2(0) = 0$ и определим C из (I9), учитывая начальные условия:

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{\eta=0} = \frac{\sqrt{\gamma_0^2-1}\cdot\sin\psi}{G} .$$

Полагая, что на выходе из резонатора полная скорость электрона равна нулю, т.е. КПД = I : $\frac{d\varphi}{ds} = 0$, $\gamma = 1$ при η = I, получим уравнение для определения оптимального угла ввода:

$$\sin\psi_0 = \frac{(\gamma_0-1) - \frac{F_1(1)}{G^2} - \frac{2F_2(1)}{G}}{\nu\left(1+\frac{1}{2G}\right)\sqrt{\gamma_0^2-1}} . \qquad (20)$$

В выражениях для F_1 и F_2 перейдем к интегрированию по η :

$$F_1 = \int\eta^2\left(\frac{d\gamma}{d\eta}\right)d\eta ; \qquad F_2 = \int\eta\left(\frac{d\gamma}{d\eta}\right)d\eta .$$

Из численных расчетов следует, что величина интегралов F_1 и F_2 слабо зависит от формы зависимости $\gamma(\eta)$, а определяется в основном начальным и конечным значениями γ . Поэтому положим зависимость $\gamma(\eta)$ линейной:

$$\gamma = \gamma_0 - (\gamma_0 - 1)\eta .$$

Тогда:

$$F_1 = -(\gamma_0-1)\frac{\eta^3}{3} ; \qquad F_2 = -(\gamma_0-1)\frac{\eta^2}{2} .$$

Подстановка этих выражений в (20) позволяет получить приближенную формулу для определения оптимального угла ввода:

$$\sin\psi_0 = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\gamma_0-1}{\gamma_0+1}}\cdot Q(G) , \qquad (2I)$$

где

$$Q(G) = \frac{1+\frac{1}{G}+\frac{1}{3G^2}}{1+\frac{1}{2G}} . \qquad (22)$$

Из этой формулы следует, что обеспечить получение КПД равного 100% изменением угла ввода можно не для любого резонатора. Предельный угол ввода 90° и, следовательно,

$$\nu \geqslant \sqrt{\frac{\gamma_0-1}{\gamma_0+1}}\,Q(G) . \qquad (23)$$

Практически величина G ограничена конструктивно и, повидимому, не может быть менее I/3. При таких размерах резонатора азимутальное электрическое поле составляет не более 40% от радиального. Так как в критическом режиме это поле знакопеременное, а азимутальная скорость составляет не более 50% от радиальной, условие (I2) справедливо,[ж)] и для любых практически выполнимых размеров резонаторов можно пользоваться выражением (2I).

Если $G \geqslant \frac{1}{3}$, то $\lambda_к \approx b_{cp}$ и для волны H_{111} получим:

$$\gamma \approx \frac{2\pi b\left(G+\frac{1}{2}\right)}{\lambda}. \qquad (24)$$

Учитывая (24) можно представить (23) в виде:

$$\frac{2\pi b_o}{\lambda} \geqslant \sqrt{\frac{\gamma_o - 1}{\gamma_o + 1}} \cdot \frac{Q(G)}{G+\frac{1}{2}}. \qquad (25)$$

Т.е. для выходного резонатора радиального гирокона существует минимальная величина зазора, при которой может быть достигнут КПД, равный I00%.

6. Оценим, как меняется величина пролетного угла и фаза влета электронов в коаксиальном резонаторе при минимальной средней по зазору напряженности поля в сравнении с теми же величинами для плоской модели. Результаты численного счета показывают, что при $\gamma \leqslant 2$ азимутальная координата точки вылета электрона не превышает I5°, если начальная азимутальная скорость и координата равны нулю, а следовательно можно пользоваться приближением (I4) для решения уравнения (I5), положив $\Psi = 0$. Если величина G не менее I/2, то справедливо также и (I3).

Уравнение (I5) принимает в этом случае следующий вид:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d\eta}{ds}\right) = -\frac{\lambda}{2\pi b} P \cdot \frac{d(\omega t)}{ds} \cdot \cos\omega t \cdot \frac{1+\frac{1}{2G}}{\frac{\eta}{G}+1}. \qquad (26)$$

Интегрируя (26) получаем

$$\frac{d\eta}{ds} - \left.\frac{d\eta}{ds}\right|_{\eta=0} = -\frac{\lambda P}{2\pi b}\left(1+\frac{1}{2G}\right)\int_{\omega t_o}^{\omega t_b} \cos\omega t \cdot \frac{d(\omega t)}{ds} \cdot \frac{ds}{\left(\frac{\eta}{G}+1\right)},$$

ωt_o – фаза влета, ωt_b – фаза вылета электрона. Минимальная величина средней по зазору напряженности поля получится при максимальном значении интеграла:

$$J = \int_{\omega t_o}^{\omega t_b} \cos\omega t \cdot f(\omega t) \cdot d(\omega t), \qquad (I7)$$

[ж)] Имеется в виду малая суммарная мощность взаимодействия электрона с полем E_φ.

где

$$f(\omega t) = \frac{1}{\frac{\eta(\omega t)}{G} + 1} \qquad (27a)$$

Одним из условий получения КПД равного I00% является $\omega t_b \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Если $G \to \infty$, имеем случай плоской модели и, очевидно, что для получения КПД равного I00% при минимуме напряженности поля необходима фаза влета $\omega t_o = -\frac{\pi}{2}$, ($J = 2$). Определим область возможных фаз влета, обеспечивающих минимальную величину средней по зазору напряженности поля при $\omega t_b = \frac{\pi}{2}$ при различных радиусах кривизны резонатора и произвольных функциях $\eta(\omega t)$. Можно показать, что $f(\omega t)$ всегда меньше линейной функции

$$f_1(\omega t) = \frac{\omega t_o - \omega t}{(G+1)\left(\frac{\pi}{2} - \omega t_o\right)} + 1. \qquad (28)$$

Поэтому точная величина необходимого угла влета превышает величину, вычисленную из условия максимального значения J с функцией (28).

Области углов влета для различных значений G приведены в таблице I.

Таблица I

G	2	I	I/2	I/3
$\omega t_o >$	–83°	–80°	–76°	–75°

Таким образом, угол пролета, обеспечивающий минимум средней по зазору напряженности поля, для коаксиального резонатора уменьшается. Но следует отметить, что при углах влета больших, чем $-\frac{\pi}{2}$, – на траекторию движения электронов начинает оказывать существенное влияние линза, образованная входной щелью резонатора и, в связи с этим, такой режим пролета становится не удобен для работы гирокона.

7. Для точного расчета пролетного зазора и коэффициента перенапряжения система (II) интегрировалась численно при следующих условиях:

а) рассматривались поля коаксиального резонатора с круговой поляризацией без учета щелей;

б) фаза вылета электрона из резонатора принималась равной $\varphi_в = \frac{\pi}{2}$;

в) радиальная скорость электрона на выходе составляла не более I% от полной начальной скорости;

г) угол ввода выбран таким, чтобы азимутальная скорость электрона на выходе не превышала I% от полной начальной скорости.

Расчет показал, что при углах ввода $\psi_0 < 30^0$ формула (2I) дает погрешность $< 10\%$, а при $\psi_0 > 30^0$ значение по (2I) превышает истинное значение на I2%. Такая ошибка в определении угла ввода приводит к занижению величины пролетного зазора на 5% и практически не влияет на величину коэффициента перенапряжения. Азимутальная скорость при этом составляет $\approx 5\%$ от полной начальной скорости.

На основании численных расчетов получены формулы (29) и (30), аппроксимирующие зависимость коэффициента перенапряжения ($\frac{U}{U_0}$) и оптимального пролетного зазора ($\frac{b_0}{\lambda}$) от характеристики резонатора (G), фазы влета (ωt_0) и энергии электронов (eU_0) с погрешностью не более 5% в интервалах U_0 (3I), G (32), ωt_0 (33).

$$\frac{U}{U_0} = -\frac{\omega t_0}{0,87} + \frac{0,34}{G} - 0,56 + \frac{40}{U_0[кВ]} . \qquad (29)$$

$$\frac{b_0}{\lambda} = \frac{\left(-\frac{\omega t_0}{0,87} + \frac{0,34}{G} - 0,56\right) U_0[кВ] + 40}{\left(\frac{0,41}{G} + 3,68\right) U_0[кВ] + 1000} . \qquad (30)$$

$$200 \leq U_0 \leq 700 \text{ кВ} , \qquad (3I)$$

$$0,4 \leq G \leq 1 , \qquad (32)$$

$$-1 \leq (\omega t_0)\frac{2}{\pi} \leq -0,7 . \qquad (33)$$

Величина средней по зазору напряженности электрического поля, определяемая как ($\frac{U}{b_0}$), очень слабо зависит от (ωt_0) в интервале фаз (33) и поэтому при выводе (29) и (30) она принята не зависящей от фазы влета.

В таблице 2 для иллюстрации приводятся величины, найденные

по формулам (2I), (29) и (30) (строка I) и результаты численного интегрирования (строка П).

Таблица 2

ν	G	U_0 [кВ]	ωt_0	ψ_0 [град]	$\frac{b_0}{\lambda}$	$\frac{U}{U_0}$	
2,3	I	390	$-\frac{\pi}{2}$	20,4	0,254	I,69	I
				20,4	0,250	I,70	П
I,4	0,4I7	400	$-0,78\frac{\pi}{2}$	66	0,246	I,76	I
				58	0,250	I,83	П

8. В таблице 3 проведено сравнение величин, рассчитанных по формулам (5), (8), (I0) для плоской модели ($G = \infty$), и результатов численного анализа для коаксиальных резонаторов при энергии $eU_0 = 500$ КэВ и фазе влета $\omega t_0 = -\frac{\pi}{2}$. Приведенная в таблице величина $E_{макс.}/E_{пл.}$ - отношение максимальной напряженности электрического поля в коаксиальном резонаторе к напряженности электрического поля в плоской модели.

Таблица 3

ν	G	$\frac{b_0}{\lambda}$	ψ_0 [град]	$\frac{U}{U_0}$	$\frac{E_{макс.}}{E_{пл.}}$	U [кВ]
2,3	∞	0,28	I3,8	I,48	I	740
I,84	∞	0,29	I8	I,5	I	750
2,5	I	0,27	20,5	I,66	I,63	830
2	0,67	0,28	28,7	I,80	I,88	900
I,8	0,5	0,3	38	2,00	2,I7	I000

Необходимо отметить, что в коаксиальном резонаторе величины G, ν и b_0 связаны между собой геометрически (24). А так как задание величин U_o, ωt_o и G однозначно определяет величину оптимального пролетного зазора b_o, то значение ν, в отличие от плоской модели, уже не может быть выбрано произвольно. Это затрудняет сравнение моделей, если энергия электронов и размеры резонатора заданы.

Таким образом, при переходе от плоской модели к коаксиальной увеличивается необходимый оптимальный угол ввода и возрастает максимальная напряженность электрического поля. Это означает, что при $G < \frac{1}{3}$ (внутренний радиус втрое меньше пролетного зазора) коаксиальные резонаторы в гироконе неприменимы не только по конструктивным, но и, повидимому, по принципиальным соображениям.

Приведенные примеры (табл.3) показывают также, что оптимальный угол ввода (Ψ_o), полученный из анализа плоской модели ($G = \infty$), при достаточно малом внутреннем радиусе коаксиального резонатора ($G \leq 1$) значительно ниже (в 1,5 ÷ 2 раза) точного значения, а коэффициент перенапряжения ($\frac{U}{U_o}$) в 1,2÷1,3 раза ниже. Для таких резонаторов приемлемую погрешность (менее 10%) дают формулы (21) и (29), полученные из приближенного анализа коаксиальной модели.

Расчет пролетного зазора выходного резонатора радиального гирокона удобно вести также по приближенной формуле (30), полученной для тех же условий, что и (29), т.е. для энергии электронов 200 ÷ 700 КэВ и 0,4 ≤ G ≤ 1. Однако, значения оптимального пролетного зазора $\left(\frac{b_o}{\lambda}\right)$ могут быть получены и на плоской модели.**) С погрешностью менее 10% они совпадают с точными значениями, полученными для коаксиального резонатора (табл.3).

Для выходного резонатора аксиального гирокона плоская модель дает значения $\left(\frac{b_o}{\lambda}\right)$ и $\left(\frac{U}{U_o}\right)$ с погрешностью не более 12% при начальной энергии электронов 1 МэВ*) и ниже.

Знание величин $\left(\frac{b_o}{\lambda}\right)$ и $\left(\frac{U}{U_o}\right)$ позволяет выбрать оптимальные размеры выходного резонатора гирокона и оценить его КПД.

**) Приложение III

*) Приложение II

Интегрирование уравнений движения релятивистского электрона в заданном поле выходного резонатора гирокона (плоская модель)

1. Система уравнений (3) с начальными условиями (4) интегрируется следующим образом. После исключения члена $-k\dot{y}\cos\beta q$ из первого и четвертого уравнений и однократного интегрирования с учетом (4), получим первый интеграл движения (1,1):

$$\nu\dot{x} - c\dot{t} = \nu\sqrt{\gamma_o^2-1}\cdot\sin\Psi - \gamma_o . \qquad (1,1)$$

Из (1,1), при условии равенства нулю полной скорости электрона ($c\dot{t}_b = \gamma_b = 1$, $\dot{x} = \dot{x}_b = 0$) на выходе из пролетного зазора (при $y_b = b_o$) следует формула (5) для оптимального угла ввода ($\Psi = \Psi_o$).

2. Из второго уравнения системы (3) получим еще один интеграл движения:

$$\dot{y} = \dot{y}_o + \frac{k}{\beta}\left(\sin\beta q_o - \sin\beta q\right) . \qquad (1,2)$$

Чтобы обеспечить равенство нулю поперечной скорости электрона ($\dot{y}_b = 0$) на выходе из пролетного зазора ($y_b = b$), необходимо выполнение соотношения (1,3), которое следует из (1,2):

$$\sqrt{\gamma_o^2-1}\cdot\cos\Psi = (\gamma_o-1)\left(\frac{\lambda}{2\pi b}\right)\left(\frac{U}{U_o}\right)\left(\sin\beta q_b - \sin\beta q_o\right) . \qquad (1,3)$$

Здесь, кроме обозначений, приведенных в (3) и (4), βq_o и βq_b - фазы влета и вылета электрона, U - амплитуда ВЧ напряжения на зазоре $y_b = b$.

Условие (1,3) может выполняться при различных значениях разности $(\sin\beta q_b - \sin\beta q_o)$. Напряженность поля ($E = \frac{U}{b}$) в выходном резонаторе при этом различна. Минимум E наступит, если $\beta q_o = -\frac{\pi}{2}$ и $\beta q_b = +\frac{\pi}{2}$. Это - режим минимальных удельных потерь в выходном резонаторе и максимальной электрической прочности пролетного зазора. Для него из (1,3) легко вычисляется $E = E_{min}$ (6), и коэффициент перенапряжения ($\frac{U}{U_o}$) (7).

Совмещение этого режима с условием ($\psi = \psi_0$) равенства нулю полной скорости электрона на выходе из резонатора определяет т.н. критический режим и оптимальный пролетный зазор ($b = b_0$).

3. Решая первое и четвертое уравнение системы (3) совместно с уравнением (I,2), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\ddot{q} = -\kappa(\nu^2-1)\left(\dot{y}_0 - \frac{\kappa}{\beta}\sin\beta q_0\right)\cos\beta q + \kappa(\nu^2-1)\frac{\kappa}{\beta}\cdot\sin\beta q\cdot\cos\beta q . \qquad (I,4)$$

Интегрирование (I,4) дает

$$\dot{q} = \frac{dq}{ds} = \frac{A}{\beta}\sqrt{(\sin\beta q - \sin\beta q_b)^2 + \left[\frac{\beta^2}{A^2}\dot{q}_0^2 - (\sin\beta q_0 - \sin\beta q_b)\right]^2} . \qquad (I,5)$$

Здесь $A = \kappa\sqrt{\nu^2-1}$.

При выполнении соотношения (I,3) первый интеграл (I,2) упрощается

$$\dot{y} = \frac{dy}{ds} = \frac{\kappa}{\beta}(\sin\beta q_b - \sin\beta q) . \qquad (I,6)$$

После введения новой переменной

$$\theta = \sin\beta q_b - \sin\beta q \qquad (I,7)$$

из уравнений (I,5) и (I,6) следует уравнение (I,8),

$$\frac{dy}{d\theta} = -\frac{\kappa}{A\beta}\cdot\frac{\theta}{\sqrt{G(\theta)}} , \qquad (I,8)$$

решение которого позволяет найти координату точки вылета электрона из резонатора ($y_b = b$) при полной потере им поперечной скорости, т.е. величину пролетного зазора для режима минимума удельных потерь. В уравнении (I,8) обозначено:

$$\left.\begin{aligned} G(\theta) &= \sqrt{(\alpha_1-\theta)(\theta-\alpha_2)(\theta^2+n^2)} ,\\ \alpha_1 &= 1+\sin\beta q_b , \quad \alpha_2 = -1+\sin\beta q_b ,\\ n^2 &= \frac{\beta^2}{A^2}\dot{q}_0^2 - (\sin\beta q_0 - \sin\beta q_b)^2 . \end{aligned}\right\} \qquad (I,9)$$

Величина пролетного зазора b равна

$$b = -\frac{\kappa}{A\beta}\int_{\theta_0}^{\theta_b}\frac{\theta\, d\theta}{\sqrt{G(\theta)}} . \qquad (I,10)$$

Для рассматриваемого режима, $\beta q_0 = -\frac{\pi}{2}$ и $\beta q_b = +\frac{\pi}{2}$, ($\theta_b = 0$, $\theta_0 = 2$) с учетом введенных обозначений (3),(I,5),

$$\frac{2\pi b}{\lambda} = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2-1}}\int_0^2\frac{\theta\, d\theta}{\sqrt{G(\theta)}} . \qquad (I,11)$$

Этот интеграл $\left(J = \int_0^2 \frac{\theta\, d\theta}{\sqrt{G(\theta)}} \right)$ сводится к эллиптическим интегралам с помощью следующего преобразования [8]:

$$tg^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\cdot\frac{\alpha_1-\theta}{\theta-\alpha_2} . \qquad (I,12)$$

Интеграл J после преобразования принимает вид (I,I3):

$$J = \mu\int_{\varphi_b}^{\varphi_0}\frac{\theta\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} . \qquad (I,13)$$

Здесь

$$\mu = -\frac{\sqrt{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}}{C_1} , \qquad (I,14)$$

$$k^2 = \sin^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2} , \qquad (I,15)$$

$$tg\,\theta_1 = \frac{\alpha_1 - b_1}{c_1}, \quad tg\,\theta_2 = \frac{\alpha_2 - b_1}{c_1} \qquad (I,I6)$$

$\alpha_1,\ \alpha_2$ – действительные корни многочлена $G(\theta)$ (I,9),
$b_1 \pm jc_1$ – комплексно-сопряженные корни $G(\theta)$.

В рассматриваемом режиме ($\beta q_{\nu_0} = -\frac{\pi}{2}$, $\beta q_{\nu_в} = \frac{\pi}{2}$) (I,9):

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 0,\ b_1 = 0,\ c_1 = n = \sqrt{A_0^2 - 4}, \qquad (I,I7)$$

где
$$A_0 = \frac{\beta}{k\sqrt{\nu^2 - 1}}\,\dot{q}_0 . \qquad (I,I8)$$

Основное преобразование (I,I2) при этом принимает вид (I,I9),

$$tg^2\frac{\varphi}{2} = Cos\,\theta_1 \cdot \frac{2-\theta}{\theta} \qquad (I,I9)$$

а обратное преобразование – (I,20):

$$\theta = 1 - \frac{\nu_1 - Cos\,\varphi}{1 - \nu_1 Cos\,\varphi}, \qquad (I,20)$$

где
$$\nu_1 = tg^2\frac{\theta_1}{2}. \qquad (I,20а)$$

В связи с тем, что в этом режиме $tg\,\theta_2 = 0$, $tg\,\theta_1 = \frac{2}{c_1}$ (I,I6), или с учетом (I,I7) и (I,I8)

$$Cos\,\theta_1 = \frac{\sqrt{A_0^2 - 4}}{A_0}, \qquad (I,20б)$$

Коэффициент μ (I,I4) и квадрат модуля k (I,I5) примут вид (I,2I) и (I,22):

$$\mu = -\frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}{2\sqrt{\Gamma}}, \qquad (I,2I)$$

$$k^2 = \frac{\Gamma - 1}{2\Gamma}. \qquad (I,22)$$

Здесь введено обозначение Γ,

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{A_0^2}}}, \qquad (I,23)$$

при котором из (I,20б) и (I,I6) следует

$$Cos\,\theta_1 = \frac{1}{\Gamma}, \quad c_1 = \frac{2}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}. \qquad (I,23а)$$

Пределы интегрирования в (I,I3) ($\theta_в = 0$, $\theta_0 = 2$) преобразуются (I,I9) в $\varphi_в = \pi$ и $\varphi_0 = 0$:

$$J = -\mu\int_0^{\pi}\frac{\theta\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 Sin^2\varphi}}. \qquad (I,24)$$

Если учесть (I,20), то

$$J = -2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 Sin^2\varphi}} + \mu\int_0^{\pi}\frac{\nu_1 - Cos\,\varphi}{1 - \nu_1 Cos\,\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 Sin^2\varphi}}. \qquad (I,25)$$

Изменение предела и появление коэффициента 2 в первом члене (I,25) следуют из симметрии подинтегральной функции относительно оси, проходящей через точку $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Второй интеграл в (I,25) сводится к сумме $\mu J_a + \mu J_в$:

$$J_a = \frac{\nu_1}{1 - \nu_1^2}\int_0^{\pi}\frac{Sin^2\varphi\cdot d\varphi}{(1 + m_1 Sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2 Sin^2\varphi}} \qquad (I,26)$$

$$J_в = \int_0^{\pi}\frac{Cos\,\varphi\cdot d\varphi}{(1 + m_1 Sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2 Sin^2\varphi}}, \qquad (I,27)$$

где
$$m_1 = \frac{\nu_1^2}{1 - \nu_1^2}. \qquad (I,28)$$

Интеграл $J_в$ (I,27) равен нулю, что очевидно из антисимметрии $Cos\,\varphi$ относительно $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и симметрии остальной части подинтегральной функции относительно той же оси. Интеграл J_a (I,26) сводится к эллиптическим:

$$J_a = \frac{\nu_1}{1 - \nu_1^2}\cdot\frac{1}{m_1}\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 Sin^2\varphi}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1 + m_1 Sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2 Sin^2\varphi}}\right]. \qquad (I,29)$$

Таким образом интеграл (I,25) принимает форму (I,30):

$$J=-2\mu K(k^2)+\mu\frac{\nu_1}{1-\nu_1^2}\cdot\frac{1}{m_1}\cdot 2K(k^2)-$$

$$-\mu\frac{\nu_1}{1-\nu_1^2}\cdot\frac{1}{m_1}\cdot 2\Pi(m_1,k^2), \qquad (I,30)$$

где K и Π - полные эллиптические интегралы I-го и 3-го рода.

Из (I,20а) (I,23а) и (I,28) следует

$$\nu_1=\frac{\Gamma-1}{\Gamma+1}; \qquad m_1=\frac{(\Gamma-1)^2}{4\Gamma}. \qquad (I,31)$$

С учетом этих соотношений и (I,21), интеграл (I,30) можно представить в форме (I,32):

$$J=\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\sqrt{\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1}}\left[(\Gamma+1)\Pi(m_1,k^2)-2K(k^2)\right]. \qquad (I,32)$$

Для удобства пользования таблицами преобразуем эллиптический интеграл 3-го рода, изменив в нем область задания параметра m_1 [9].

$$\Pi(m_1,k^2)=K(k^2)+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\cdot\frac{\pi}{2}-\Pi(m,k^2). \qquad (I,33)$$

Здесь $m=\frac{k^2}{m_1}$; $\beta=(1+m_1)\left(1+\frac{k^2}{m_1}\right)$. (I,33а)

Пользуясь (I,33) и (I,33а), получим из (I,32) окончательное выражение интеграла J, входящего в (I,II):

$$J=\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\sqrt{\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1}}\left[\pi\sqrt{\Gamma}\cdot\sqrt{\frac{\Gamma-1}{\Gamma+1}}+(\Gamma-1)K(k^2)-(\Gamma+1)\Pi(m,k^2)\right], \qquad (I,34)$$

где $m=\frac{2}{\Gamma-1}$, $k^2=\frac{\Gamma-1}{2\Gamma}$,

$$K(k^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\Pi(m,k^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+m\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Таким образом, из (I,II) и (I,34) следует формула (8) для пролетного зазора (b) в режиме минимальных удельных потерь.

Из соотношения (I,23) с учетом (I,I8), (I,6) и (4) получим (I,35)

$$\frac{\kappa}{\beta}=\frac{\dot{y}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\gamma_0^2-1}\cdot\cos\psi,$$

$$\dot{q}_0=\nu\gamma_0-\dot{x}_0=\nu\gamma_0-\sqrt{\gamma_0^2-1}\cdot\sin\psi,$$

$$\frac{4}{A_0}=\frac{4\kappa^2(\nu^2-1)}{\beta^2\dot{q}_0^2}=\frac{(\gamma_0^2-1)(\nu^2-1)\cos^2\psi}{(\nu\gamma_0-\sqrt{\gamma_0^2-1}\cdot\sin\psi)^2}, \qquad (I,35)$$

откуда следует выражение (9) для Γ при произвольном значении угла ввода ψ.

Приложение II

Оценка погрешности расчетов, выполненных на основе плоской модели выходного резонатора аксиального гирокона

В плоской модели (рис.Iв) под действием ВЧ магнитного поля электрон перемещается в направлении противоположном движению бегущей волны [5]. При этом изменение абсциссы электрона за время пролета составляет $-X_в$, а траектория не выходит из плоскости максимального электрического поля ($z = 0$ на рис.Iв).

В выходном резонаторе аксиального гирокона (рис.Iа) действие ВЧ магнитного поля приводит к удалению электрона от поверхности максимума электрического поля. Предположим, что перемещение электрона при пролете резонатора имеет ту же величину, что и в плоской модели ($X_в$), но происходит в плоскости касательной к цилиндрической поверхности максимума поля (радиус этого цилиндра $z = z_m$). Оценим координату точки выхода электрона из резонатора ($z_m + \Delta z$):

$$z_m + \Delta z = \sqrt{z_m^2 + X_в^2}. \qquad (\text{II},1)$$

Для цилиндрического резонатора с колебаниями типа E_{110} (рис.Iа, влияние центрального стержня не учитывается) поверхность максимального электрического поля имеет радиус

$$z_m = 0{,}293\lambda \qquad (\text{II},2)$$

($\lambda = 1{,}64æ$, $æ$ – радиус резонатора) [6]. Относительное увеличение радиуса (II,1) равно

$$\frac{\Delta z}{z_m} = \sqrt{1 + \left(3{,}41\frac{X_в}{\lambda}\right)^2} - 1 . \qquad (\text{II},3)$$

Здесь учтено соотношение (II,2).

Влияние центрального стержня в резонаторе (рис.Iа) приведет к уменьшению $\left(\frac{\Delta z}{z_m}\right)$. Тот же эффект дает учет азимутального ВЧ магнитного поля. Таким образом значение $\left(\frac{\Delta z}{z_m}\right)$ в (II,3) завышено и дает оценку с избытком.

Распределение электрического поля по радиусу для рассматриваемого типа колебаний имеет вид

$$E_z(z) = E_m \mathcal{J}_1\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right), \qquad (\text{II},4)$$

где $E_z(z_m) = 0{,}582 E_m$ – максимальное значение электрического поля, λ – резонансная длина волны, $\mathcal{J}_1$ – функция Бесселя I-го рода I-го порядка.

При малом увеличении радиуса (Δz) электрическое поле найдем, пользуясь разложением (II,4) в ряд Тэйлора в точке $z = z_m$, а относительное изменение поля получим после преобразований в виде (II,5):

$$\frac{\Delta E_z}{E_z} \cong -0{,}7\left(\frac{2\pi\Delta z}{\lambda}\right)^2 . \qquad (\text{II},5)$$

Если предположить, что электрон тормозится в однородном (но не максимальном) поле, то соотношения (5),(6),(7),(8), выведенные для плоской модели, остаются в силе, и для аксиального гирокона, но ВЧ напряжение в формуле (7) будет в них относиться не к максимуму поля, а к точкам, удаленным от поверхности максимума. Следовательно, коэффициент перенапряжения, определяемый по максимуму, будет выше на величину изменения поля (II,5). В действительности электрон при торможении выходит из области максимального поля, лишь в конце пролета, поэтому в первом приближении в качестве завышенной оценки можно принять половину изменения поля (II,5).

$$\frac{\Delta U}{U} \approx -\frac{1}{2}\frac{\Delta E_z}{E_z} \approx 0{,}35\left(\frac{2\pi\Delta z}{\lambda}\right)^2 \qquad (\text{II}.5\text{а})$$

После учета (II,3) и (II,2) формула для оценки погрешности примет вид:

$$\frac{\Delta U}{U} \approx 0{,}35\left\{1{,}84\left[\sqrt{1 + \left(3{,}41\frac{X_в}{\lambda}\right)^2} - 1\right]\right\}^2 \qquad (\text{II},6)$$

Величина $\left(\frac{X_в}{\lambda}\right)$ может быть найдена путем анализа траектории электрона в плоской модели (I,I), (I,5).[ж)] Из (I,5) с учетом (I,7) следует

$$S_в = -\frac{1}{A}\int_{\theta_0}^{\theta_в} \frac{d\theta}{\sqrt{G(\theta)}}, \qquad (\text{II},7)$$

ж) Приложение I

где θ и $G(\theta)$ даны в (I,7) и (I,9). Из (I,I) и из соотношения $\dot{q} = \nu ct - \dot{x}$ (3) имеем:

$$dq = (\nu^2-1)\,dx = \left(\nu\gamma_0 - \nu^2\sqrt{\gamma_0^2-1}\cdot\sin\psi\right)ds\,, \qquad (\text{П},8)$$

а после интегрирования

$$-x_e = \left[\frac{\nu}{\nu^2-1}\cdot\gamma_0 - \frac{\nu^2}{\nu^2-1}\sqrt{\gamma_0^2-1}\cdot\sin\psi\right]s_e - \frac{\beta q_e - \beta q_0}{\beta(\nu^2-1)}\,. \qquad (\text{П},9)$$

В режиме минимальных удельных потерь ($\beta q_e = \frac{\pi}{2}, \beta q_0 = -\frac{\pi}{2}$) из (П,9) с учетом интеграла (П,7), который сводится к эллиптическому, получим

$$-\frac{x_e}{\lambda} = \frac{\nu}{(\nu^2-1)\pi}\left[\frac{\gamma_0\nu - \nu^2\sqrt{\gamma_0^2-1}\cdot\sin\psi}{\gamma_0\nu - \sqrt{\gamma_0^2-1}\cdot\sin\psi}\sqrt{\Gamma}\cdot K(k^2) - \frac{\pi}{2}\right], \qquad (\text{П},\text{I0})$$

здесь Γ – см. (9), $k^2 = \frac{\Gamma-1}{2\Gamma}$, $K(k$ – полный эллиптический интеграл I-го рода, остальные обозначения даны в (3) и (4).

Для критического режима $\left(\beta q_e = \frac{\pi}{2},\ \beta q_0 = -\frac{\pi}{2},\ \psi = \psi_0\right)$

$$\frac{x_e}{\lambda} = \frac{\nu}{\nu^2-1}\left[\frac{1}{2} - \frac{K(k^2)}{\pi\sqrt{\gamma_0(\nu^2-1)+1}}\right], \qquad (\text{П},\text{II})$$

$$k = \frac{(\nu^2-1)(\gamma_0-1)}{2\left[(\nu^2-1)\gamma_0+1\right]}\,. \qquad (\text{П},\text{IIa})$$

Так, для $\gamma_0 = 4$ ($eU_0 \approx$ I МэВ) и $\nu = \text{I},84$ формула (П,II) дает $\frac{x_e}{\lambda} = 0{,}254$, а из (П,6) следует погрешность $\frac{\Delta U}{U} = 12\%$.

Это – погрешность расчета коэффициента перенапряжения по формуле (7) для выходного резонатора аксиального гирокона. Пролетный зазор для режима минимальных удельных потерь в рассматриваемом приближении остается таким же, как в плоской модели.

При угле ввода (ψ) меньшем оптимального (ψ_0) погрешность,

которую дает плоская модель, также уменьшается. С ростом γ_0 – погрешность растет. Так, для $\gamma_0 = 6$ ($eU_0 \approx 2{,}5$ МэВ) при $\psi = \psi_0$ и $\nu = \text{I},84$ $\frac{x_e}{\lambda} = 0{,}273$ и $\frac{\Delta U}{U} = 16\%$.

Приложение Ш

Пролетный зазор и коэффициент перенапряжения при нулевом и оптимальном углах ввода луча

(Расчет по формулам плоской модели)

Значения $\psi=\psi_o$ (5) и $\psi = 0$ представляют наибольший интерес, т.к. по существу задают пределы изменения угла ввода, которые могут встретиться в практике разработки гироконов.

Пользуясь соотношениями (8) и (9) для $\psi = 0$ получим

$$\left(\frac{b}{\lambda}\right)_{\psi=0} = \frac{\sqrt{\gamma_o^2-1}}{\gamma_o}\cdot\frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma+1}}\cdot\Phi_1(\Gamma) . \qquad (\text{Ш,I})$$

Для предельного случая $\frac{1}{\nu} \to 0$ из (Ш,I) следует:

$$\left(\frac{b}{\lambda}\right)_{\psi=0,\ \frac{1}{\nu}=0} = \sqrt{\gamma_o-1}\cdot\Phi(\gamma_o) \qquad (\text{Ш,2})$$

Это – случай прямолинейной траектории электрона (при этом размер волновода в плоской модели равен критическому, и ВЧ магнитное поле на траектории отсутствует), случай не реализуемый на практике, но удобный для представления вспомогательной функции Φ_1.

Для $\psi = 0$ соотношение (9) имеет вид

$$\Gamma = \frac{\gamma_o\nu}{\sqrt{\gamma_o^2+\nu^2-1}} , \qquad (\text{Ш,3})$$

а при $\frac{1}{\nu}\to 0$ $\Gamma=\gamma_o$.

На рис.2а представлена зависимость относительного пролетного зазора $\left(\frac{b}{\lambda}\right)$ и функции Φ_1 от относительной энергии электрона (γ_o) для $\psi = 0$ и $\frac{1}{\nu} = 0$. Здесь же дан коэффициент перенапряжения $\left(\frac{U}{U_o}\right)$ для тех же условий, вычисленный по формуле (7).

Для других значений параметра ν расчет пролетного зазора удобно вести с помощью соотношения (Ш,I), предварительно вычислив Γ по (Ш,3) и воспользовавшись значениями функции $\Phi_1(\Gamma)$ из графика (рис.2а), в котором аргумент $\left(\frac{1}{\gamma_o}\right)$ заменяется значением $\left(\frac{1}{\Gamma}\right)$. На рис.2б приведены результаты расчета $\left(\frac{b}{\lambda}\right)$

и $\left(\frac{U}{U_o}\right)$ для $\psi = 0$ и ν = I,84, а также значения предельного электронного КПД ($\eta_{эл}$) гирокона для бесконечно тонкого пучка [5] при этих условиях.

Чтобы представить значения указанных величин во всей области изменения аргументов γ_o, – относительной энергии электронов, – и ν, – относительной скорости волны, бегущей в выходном резонаторе, – рассмотрим и другие предельные случаи: ν = I (резонатор с бегущей ТЕМ волной), $\frac{1}{\gamma_o}\to 0$ (ультрарелятивистские электроны) и $\gamma_o \to$ I (нерелятивистские электроны).

Анализ соотношений (8) и (9) в предельных случаях дает следующие результаты (таблица I,Ш):

Таблица I,Ш

	$\frac{1}{\nu}\to 0$	$\nu=1$	$\frac{1}{\gamma_o}\to 0$	$\gamma_o\to 1$
$(\Gamma)_{\psi=0}$	γ_o	1	ν	I
$\left(\frac{b}{\lambda}\right)_{\psi=0}$	$\sqrt{\gamma_o-1}\cdot\Phi_1(\gamma_o)$	$\frac{\sqrt{\gamma_o^2-1}}{4\gamma_o}$	$\frac{\nu}{\sqrt{\nu+1}}\cdot\Phi_1(\nu)$	0
$\left(\frac{U}{U_o}\right)_{\psi=0}$	$\pi\sqrt{\gamma_o+1}\cdot\Phi_1(\gamma_o)$	$\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{\gamma_o+1}}{\gamma_o}$	$\pi\frac{\nu}{\sqrt{\nu+1}}\cdot\Phi_1(\nu)$	$\frac{\pi}{2}$
$(\eta_{эл})_{\psi=0}$	1	$\frac{\gamma_o+1}{2\gamma_o}$	$\frac{\nu}{\nu+1}$	I

Значение функции Φ_1 для аргумента равного единице составляет $\Phi_1(\text{I}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

На рис.2в даны результаты расчета величин $\left(\frac{b}{\lambda}\right)$, $\left(\frac{U}{U_o}\right)$ и $(\eta_{эл})$ для $\psi = 0$ и ν = I, а также показаны области изменения этих величин во всем диапазоне аргументов $\left(\frac{1}{\nu}\right)$ и $\left(\frac{1}{\gamma_o}\right)$.

Для оптимального угла ввода $\psi=\psi_o$, пользуясь соотношениями (8) и (I0), получим

$$\left(\frac{b_o}{\lambda}\right)_{\psi=\psi_o} = \sqrt{\gamma_o-1}\cdot\Phi_1(\Gamma) , \qquad (\text{Ш,4})$$

где (Γ) вычисляется по формуле (I0), а Φ_1 из графика рис.2а с соответствующей заменой аргумента $\left(\frac{1}{\gamma_0}\right)$ на $\left(\frac{1}{\Gamma}\right)$. На рис.3а приведены результаты расчета $\left(\frac{b_0}{\lambda}\right)$ по формуле (Ш,4) и $\left(\frac{U}{U_0}\right)$ по формуле (7) для $\psi=\psi_0$ и ν = I,84. Кроме того, здесь даны значения синуса оптимального угла ввода ($\sin\psi_0$), вычисленные по формуле (5).

Анализ предельных случаев для $\psi=\psi_0$ дает следующие результаты (таблица 2,Ш):

Таблица 2,Ш

	$\frac{1}{\nu}\to 0$	$\nu=1$	$\frac{1}{\gamma_0}\to 0$	$\gamma_0\to 1$
$(\Gamma)_{\psi=\psi_0}$	γ_0	1	∞	1
$\left(\frac{b_0}{\lambda}\right)_{\psi=\psi_0}$	$\sqrt{\gamma_0-1}\cdot\Phi_1(\gamma_0)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma_0-1}{2}}$	$\frac{1}{2}\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2-1}}$	0
$\left(\frac{U}{U_0}\right)_{\psi=\psi_0}$	$\pi\sqrt{\gamma_0+1}\cdot\Phi_1(\gamma_0)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\psi_0$	0	$\sqrt{\frac{\gamma_0-1}{\gamma_0+1}}$	$\frac{1}{\nu}$	0

На рис.3б приведены результаты расчета величин $\left(\frac{b_0}{\lambda}\right)$, $\left(\frac{U}{U_0}\right)$ и $\sin\psi_0$ для ν = I и $\psi=\psi_0$, а также показаны области изменения этих величин во всем диапазоне аргументов $\left(\frac{1}{\nu}\right)$ и $\left(\frac{1}{\gamma_0}\right)$. При выполнении условия $\psi=\psi_0$ (рис.3а, 3б, табл.2,Ш, рис.2а) электронный КПД гирокона с бесконечно тонким пучком равен I00%.

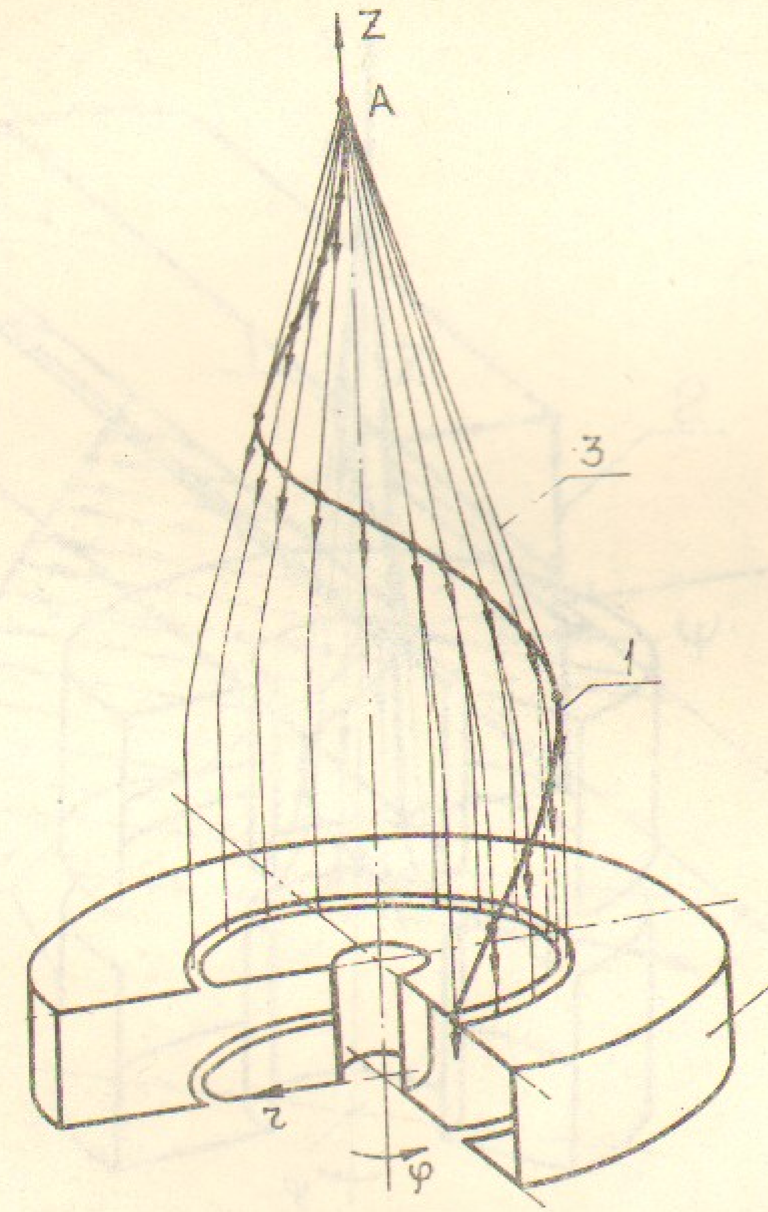

Рис.Iа Электронный пучок и выходной резонатор аксиального гирокона.
I - мгновенные положения электронов и направления их скоростей после развертки пучка;
2 - выходной резонатор; 3 - траектория электрона; А - "центр" резонатора развертки.

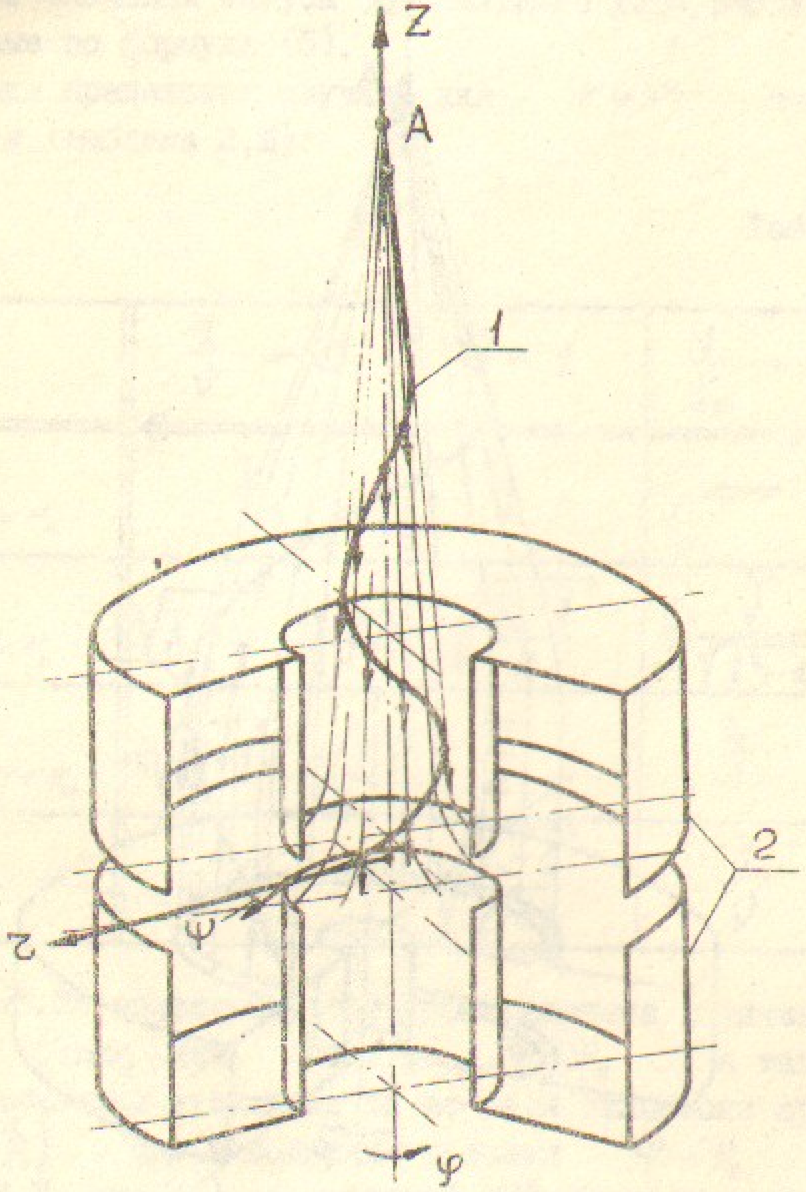

Рис.Iб Электронный пучок и выходной резонатор радиального гирокона.
I - мгновенные положения электронов и направления их скоростей после развертки пучка;
2 - выходной резонатор; А - "центр" резонатора развертки; ψ - угол ввода луча.

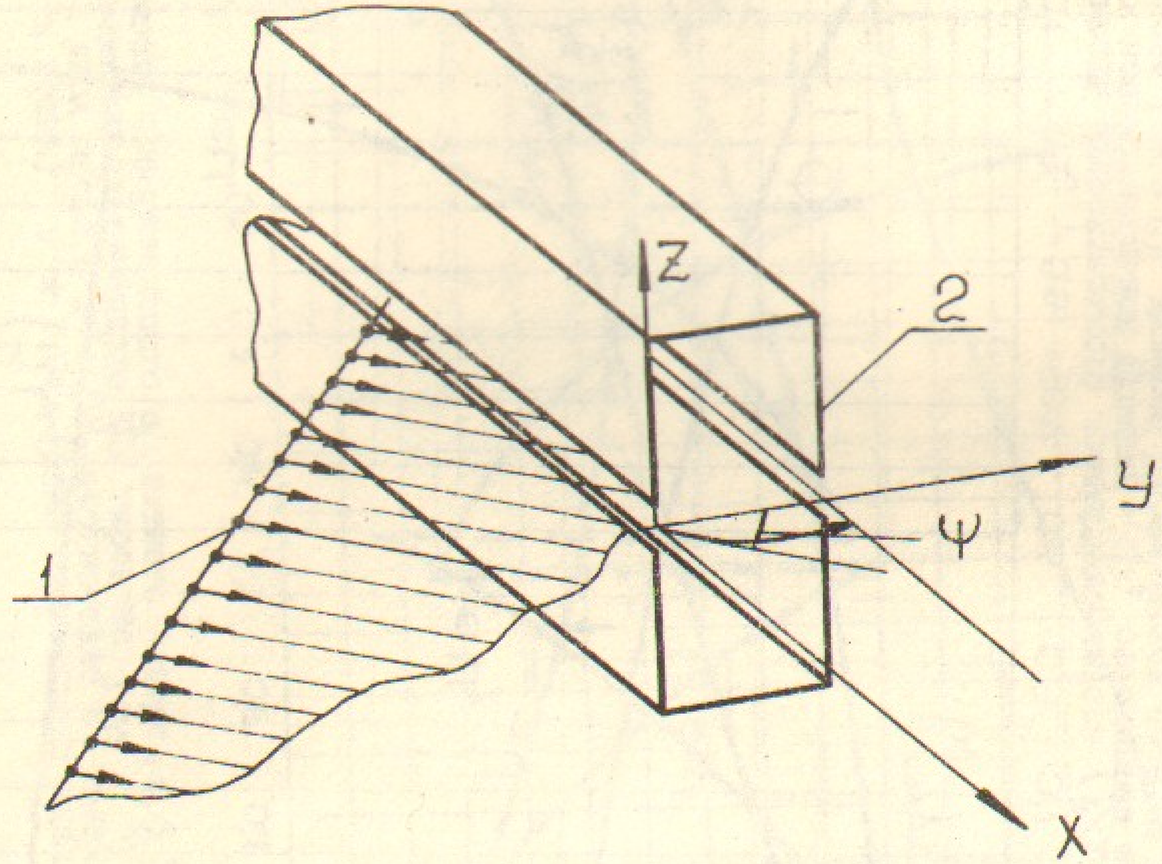

Рис.Iв Электронный пучок в плоской модели выходного резонатора гирокона.
I - мгновенные положения электронов и направления их скоростей; 2 - плоская модель выходного резонатора; ψ - угол ввода луча.

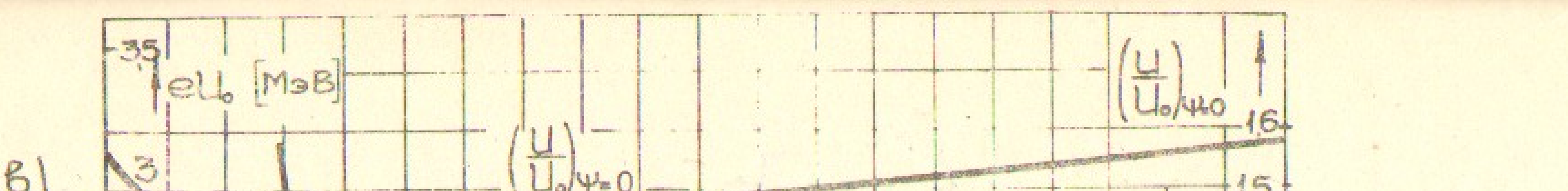

Рис.2а Зависимость относительного пролетного зазора (b/λ), коэффициента перенапряжения (u/u_0) и вспомогательной функции Φ_1 от энергии электронов $eU_0 \to \frac{1}{\gamma_0}$. Нулевой угол ввода ($\psi = 0$), нулевое ВЧ магнитное поле на траектории ($1/\nu = 0$). Режим минимальных удельных потерь.

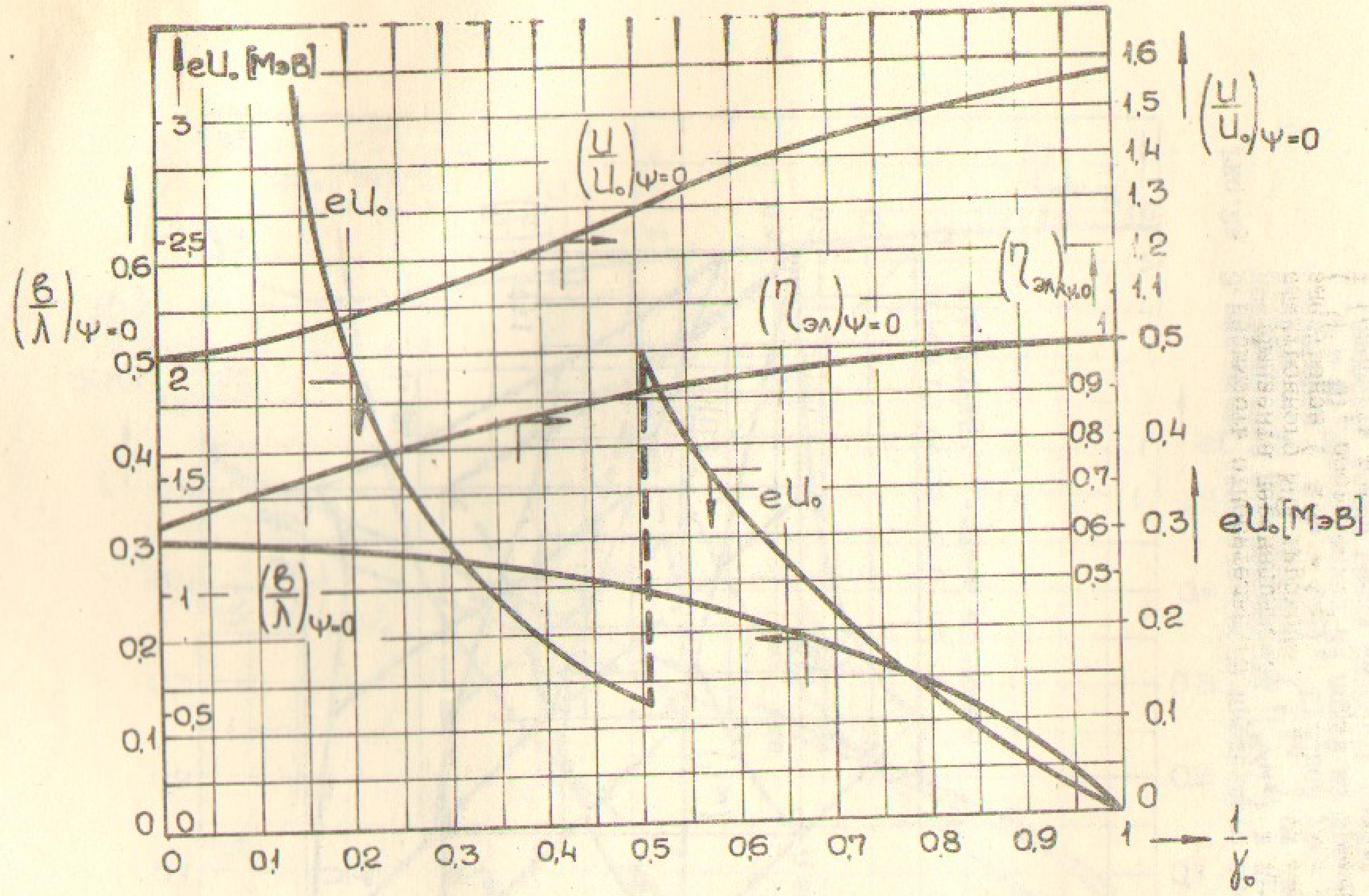

Рис.2б Зависимость относительного пролетного зазора (b/λ), коэффициента перенапряжения (u/u_0) и предельного электронного КПД гирокона $\eta_{эл}$ от энергии электронов $eU_0 \to \frac{1}{\gamma_0}$. Нулевой угол ввода ($\psi = 0$), соотношение ВЧ полей на траектории (относительная скорость волны) $\nu = 1{,}84$. Режим минимальных удельных потерь.

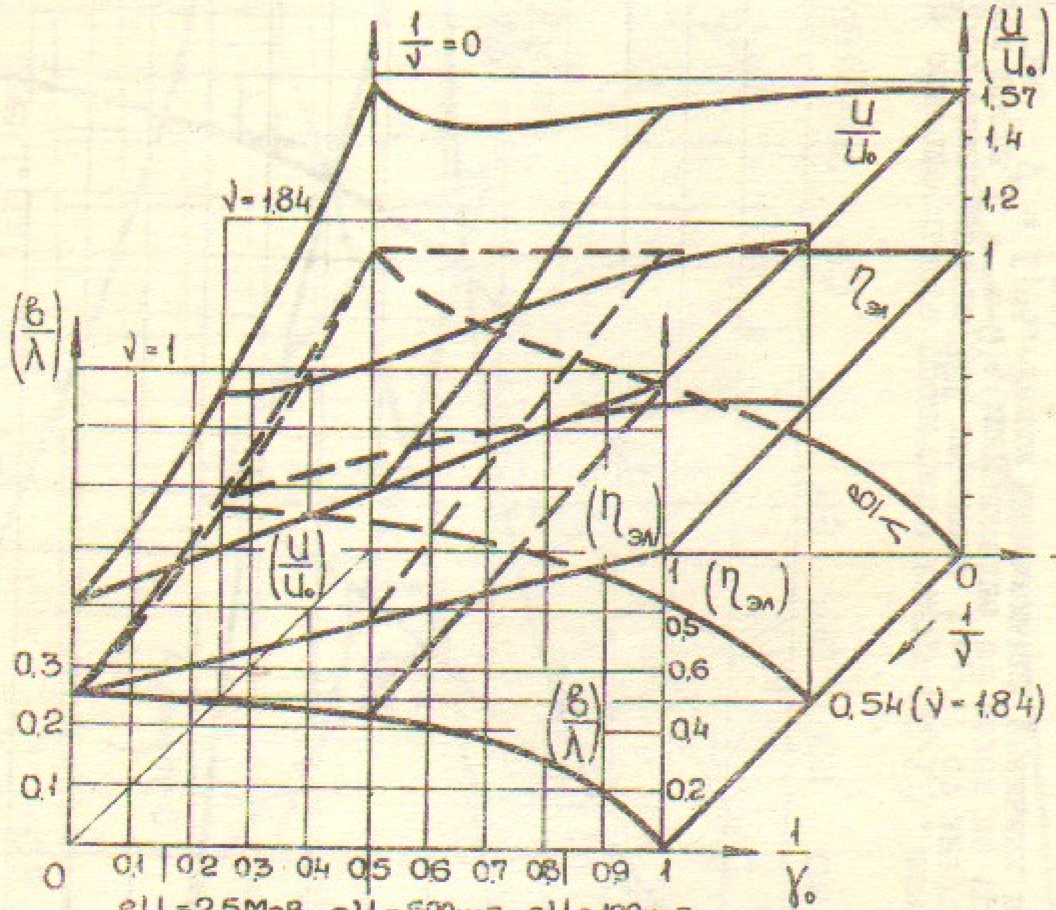

Рис.2в Зависимость относительного пролетного зазора (b/λ), коэффициента перенапряжения (U/U_0) и предельного электронного КПД гирокона $(\eta_{эл})$ от энергии электронов ($eU_0 \to 1/\gamma_0$). Нулевой угол ввода ($\psi = 0$), соотношение ВЧ полей на траектории ν = I (скорость волны равна скорости света). По третьей оси отложены другие возможные значения параметра $1/\nu$. Режим минимальных удельных потерь.

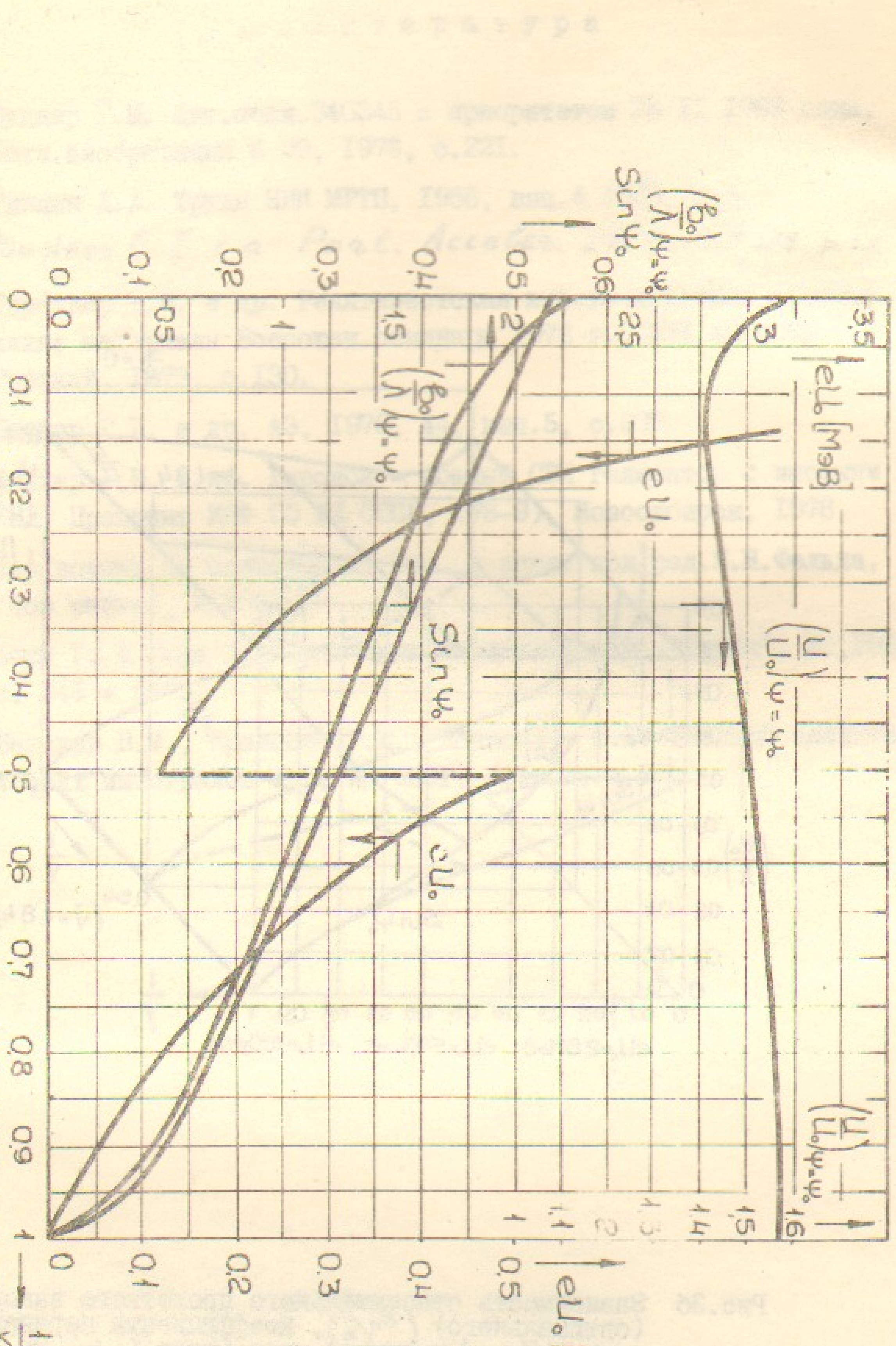

Рис.3а Зависимость относительного пролетного зазора (оптимального) (b_0/λ), коэффициента перенапряжения (U/U_0) и синуса угла ввода ($\sin\psi_0$) от энергии электронов $eU_0 \to 1/\gamma_0$. Угол ввода оптимальный ($\psi = \psi_0$), соотношение ВЧ полей на траектории (относительная скорость волны) ν = I,84. Режим - критический: минимальные удельные потери при $\eta_{эл}$ = I.

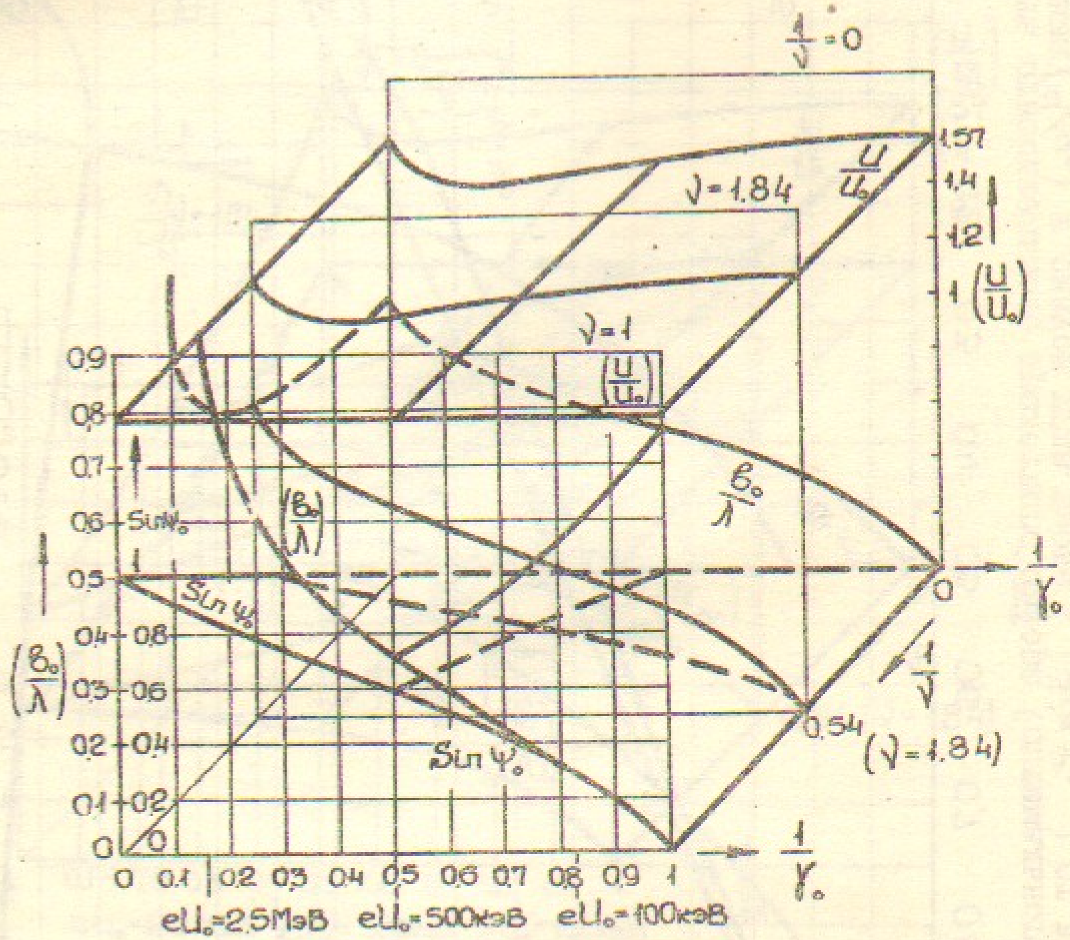

Рис.3б Зависимость относительного пролетного зазора (оптимального) (b_0/λ), коэффициента перенапряжения (U/U_0) и синуса угла ввода ($\sin\psi_0$) от энергии электронов ($eU_0 \to 1/\gamma_0$). Угол ввода оптимальный ($\psi = \psi_0$), соотношение ВЧ полей на траектории ν = I (скорость волны равна скорости света). По третьей оси отложены другие возможные значения параметра $1/\nu$. Режим – критический: минимальные удельные потери при $\eta_{эл}$ = I.

Литература

I. Будкер Г.И. Авт.свид.340345 с приоритетом 24 УI I969 года, Бюлл.изобретений № 29, I976, с.22I.

2. Ривлин Л.А. Труды НИИ МРТП, I956, вып.4 (33), с.3.

3. Budker G.I. e a Part. Acceler. 1979, v10, N1, p.51.

4. Горникер Э.И. и др. Релятивистская высокочастотная электроника; материалы Всесоюзн.семинара I978 г., ИПФ АН СССР, Горький, I979, с.I30.

5. Будкер Г.И. и др. АЭ, I978, 44, вып.5, с.397.

6. Будкер Г.И. и др. Гирокон – мощный СВЧ генератор с высоким КПД, Препринт ИЯФ СО АН СССР, (78-9), Новосибирск, I978.

7. Справочник по волноводам. Пер. с англ. под ред.Я.Н.Фельда, "Сов радио", М.I952.

8. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. "Наука", М.,I968, с. 646 ÷ 649.

9. Беляков В.М., Кравцова Р.И., Раппопорт М.Г. Таблицы эллиптических интегралов т.П, АН СССР, М.I963, с.XI